12/4/2019 1º teste	Tópicos de Sistemas Dinâmicos	MAT

1. *(2 valores)* Considere uma população N_n que decai de acordo com a lei
$$N_{n+1} = \lambda N_n + \alpha$$
com $0 < \lambda < 1$ e $\alpha > 0$. Determine a solução estacionária e o limite $\lim_{n\to\infty} N_n$ da solução com condição inicial $N_0 = 2\alpha$.

2. *(2 valores)* Considere a equação recursiva linear
$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$
com condições iniciais $x_0 = x_1 = 1$. Estime um valor do tempo n tal que $x_n \geq 10^{10}$.

3. *(2 valores)* Estude as trajetórias do sistema dinâmico definido pela transformação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com
$$f(x) = -x^3\,.$$

4. *(2 valores)* Estude a natureza dos pontos fixos da transformação $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por
$$f(x) = 2x - 2x^2\,.$$

5. *(2 valores)* Dê um exemplo de uma transformação sem pontos periódicos, e um exemplo de uma transformação com órbitas de todos os períodos $n \in \mathbb{N}$.

6. *(2 valores)* Considere a rotação da circunferência $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por
$$R_\alpha(x + \mathbb{Z}) = x + \alpha + \mathbb{Z}\,,$$
com $\alpha = 9/15$. Determine a cardinalidade da órbita do ponto $\pi + \mathbb{Z}$.

7. *(2 valores)* Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por
$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}\,.$$
Dê um exemplo de uma órbita finita e um exemplo de uma órbita infinita, e justifique a sua resposta.

8. *(2 valores)* Considere as iterações de
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$
com condição inicial $x_0 > 0$. Determine o limite $\lim_{n\to\infty} x_n$, e justifique a sua resposta.

9. *(2 valores)* Seja $f : I \to I$ uma transformação contínua do intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que f tem (pelo menos) um ponto fixo.

10. *(2 valores)* Descreva o método iterativo de Newton para aproximar as raízes de um polinómio, e discuta a convergência.

22/05/2019 2^o teste	Tópicos de Sistemas Dinâmicos	MAT

1. *(2 valores)* Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $f : I \to I$ uma função contínua e crescente. Prove que a trajetória de cada ponto de I converge para um ponto fixo de f.

2. *(2 valores)* Considere a transformação linear do plano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (2x, y/3)$. Determine os conjuntos ω-limite e α-limite dos pontos do plano.

3. *(2 valores)* Considere uma rotação $R_\alpha : x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$ da circunferência $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, com α racional. Determine os pontos recorrentes.

4. *(2 valores)* Mostre que se o homeomorfismo $f : X \to X$ é topologicamente transitivo então toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ invariante é constante.

5. *(2 valores)* Considere a transformação tenda $T : [0, 1] \to [0, 1]$, definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2(1 - x) & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$

   Calcule a cardinalidade dos pontos fixos de T^n, com $n \in \mathbb{N}$. Existem pontos que não sejam periódicos? Justifique.

6. *(2 valores)* Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por

$$f(x + \mathbb{Z}) = 10 \cdot x + \mathbb{Z}\,.$$

   Mostre que os pontos periódicos são densos.

7. *(2 valores)* Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por

$$f(x + \mathbb{Z}) = 10 \cdot x + \mathbb{Z}\,.$$

   Existem pontos com órbitas densas? Justifique.

8. *(2 valores)* Dê uma definição e um exemplo de um homeomorfismo minimal. Justifique.

9. *(2 valores)* Considere o conjunto de Cantor standard

$$K := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1]\ .$$

   Mostre que K é perfeito, ou seja, que $K' = K$.

10. *(2 valores)* Considere o conjunto de Cantor standard

$$K := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1]\ .$$

   Mostre que K tem a cardinalidade de $[0, 1]$.