13/6/2018 recurso	Tópicos de Sistemas Dinâmicos	MAT

1. *(2 valores)* Considere uma população $N(t)$ que cresce de acordo com a lei

$$\dot{N} = \lambda N - \alpha \qquad\qquad (\text{com } \lambda > 0 \text{ e } \alpha > 0)\,.$$

   Determine a solução com condição inicial $N(0) = 2\alpha/\lambda$.

2. *(2 valores)* Estude as trajetórias do sistema dinâmico definido pela transformação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde

$$f(x) = x - x^2\,.$$

3. *(2 valores)* Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $I \subset f(I)$. Mostre que f admite um ponto fixo em I.

4. *(2 valores)* Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + y \\ \dot{y} &= -x - 3y\,. \end{aligned}$$

   Discuta a natureza do ponto de equilíbrio $(0,0)$ (ou seja, diga se é um nodo, um ponto de sela ou um foco, e se é estável).

5. *(2 valores)* Linearize o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{y} &= -\sin(x) - p\,, \end{aligned}$$

   em torno do ponto de equilíbrio $(0,0)$ e discuta a estabilidade.

6. *(2 valores)* Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua de um espaço métrico completo. Defina o conjunto ω-limite $\omega_f(x)$ de um ponto $x \in X$. Prove que $f(\omega_f(x)) \subset \omega_f(x)$.

7. *(2 valores)* Considere a rotação da circunferência $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$R_\alpha(x + \mathbb{Z}) = x + \alpha + \mathbb{Z}\,.$$

   Descreva as possíveis aderências de uma órbita $\mathcal{O}_{R_\alpha}(x + \mathbb{Z}) = \{R_\alpha^n(x + \mathbb{Z})\,,\, n \in \mathbb{Z}\}$, dependendo dos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. *(2 valores)* Considere a transformação tenda $T : [0,1] \to [0,1]$, definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2(1-x) & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$

   Determine a cardinalidade dos pontos fixos de T^n.

9. *(2 valores)* Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por

$$f(x + \mathbb{Z}) = 10 \cdot x + \mathbb{Z}\,.$$

   Existem pontos recorrentes? Justifique.

10. *(2 valores)* Considere o conjunto de Cantor standard

$$K := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0,2\} \right\} \subset [0,1]\,.$$

   Mostre que K tem a mesma cardinalidade do intervalo $[0,1]$.