MAT - 2017/18
Tópicos de Sistemas Dinâmicos
Folhas práticas

Salvatore Cosentino
Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho
Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL
gab: CG - Edifício 6 - 3.48, tel: 253 604086
e-mail: scosentino@math.uminho.pt
url: http://w3.math.uminho.pt/~scosentino

5 de Fevereiro de 2018

Conteúdo

1 Crescimento e decaimento 2
2 Iteração e modelos discretos 6
3 Fluxos e modelos contínuos 11
4 Simulações e sistemas de EDOs 17
5 Sistemas dinâmicos topológicos 24
6 Números e dinâmica 27
7 Frações contínuas 30
8 Órbitas regulares e perturbações 32
9 Linearização/análise local 35
10 Linearização de fluxos 37
11 Persistência e bifurcações 41
12 Recorrências 43
13 Transitividade e órbitas densas 46
14 Perda de memória e independência assimptótica 48

1 Crescimento e decaimento

1. (progressão e série geométrica) Uma *progressão geométrica* de "razão" λ é uma sequência

$$a \qquad a\lambda \qquad a\lambda^2 \qquad a\lambda^3 \qquad ... \qquad a\lambda^n \qquad a\lambda^{n+1} \qquad ...$$

obtida do termo inicial $x_0 = a$ usando a recursão $x_{n+1} = \lambda x_n$. A identidade

$$(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^n)(\lambda - 1) = \lambda^{n+1} - 1$$

mostra que, se $\lambda \neq 1$, a soma dos primeiros $n + 1$ termos da progressão geométrica (com $a = 1$) é

$$\boxed{1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^n = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}}$$

Em particular, quando $|\lambda| < 1$, a *série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ é convergente, e a sua soma é

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^n + ... = \frac{1}{1-\lambda}}$$

- Diga se as seguintes séries são convergentes, e, se for o caso, calcule a soma.

$1+1/2+1/4+1/8+1/16+...$ $\quad$ $1+10+100+1000+...$ $\quad$ $1+1/10+1/100+1/1000+...$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4/5)^n \qquad 9/10 + 9/100 + 9/1000 + ... \qquad 0.3333...$$

2. (duplicação de células) As experiências mostram que a população de uma colónia de bactérias, num período de tempo em que podemos considerar ilimitado o nutrimento e desprezáveis as toxinas produzidas, duplica-se em cada hora.

- Se a população inicial é de 1000 células, determine a população passadas 2, 3, 10 horas.
- Quantas horas devo esperar para ver 1024 bactérias a partir de uma única célula inicial?
- Escreva uma fórmula para P_n, a população no tempo n horas, dada uma população inicial P_0.

3. (invenção do xadrez). Dizem que Sissa inventou o jogo do xadrez e o ofereceu ao rei de Pérsia. Ao rei, que o convidou a escolher uma recompensa, pediu um grão de arroz para o primeiro quadrado do tabuleiro, o dobro, ou seja, dois grãos, para o segundo quadrado, o dobro, ou seja, quatro grãos, pelo terceiro quadrado, e assim a seguir até o último dos quadrados do tabuleiro.

- Quanto grãos de arroz o rei teve que pagar?
- Se 1 Kg de arroz contém à volta de 30000 grãos, quantas toneladas de arroz foram necessárias ao rei para pagar o seu jogo?

4. (tempo de meia-vida) O decaimento de uma substância radioactiva pode ser caracterizado pelo "tempo de meia-vida" τ, passado o qual aproximadamente metade dos núcleos inicialmente presentes terá decaido. Portanto, se Q_n denota a quantidade de substância radioactiva presente no instante $n\tau$, com n inteiro, então

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n \, .$$

- Determine Q_n em função da quantidade inicial Q_0.
- Determine P_n, a quantidade de producto do decaimento no instante $n\tau$.
- Passado quanto tempo a substância radioactiva fica reduzida a $\frac{1}{32}$-ésimo da quantidade inicial?

- O tempo de meia-vida do radiocarbono ^{14}C é $\tau \simeq 5730$ anos. Mostre como "datar" um fóssil, sabendo que a proporção de ^{14}C num ser vivente é fixa e conhecida.[1]

5. (crescimento exponencial) O crescimento exponencial de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado com a equação recursiva

$$P_{n+1} = \lambda P_n$$

onde P_n representa a população no tempo n, dada uma certa população inicial P_0.

- Interprete o parâmetro λ imaginando que em cada unidade de tempo o incremento $P_{n+1} - P_n$ da população é a soma de uma parcela αP_n, onde $\alpha > 0$ é um coeficiênte de fertilidade, e uma parcela $-\beta P_n$, onde $\beta > 0$ é um coeficiênte de mortalidade.
- Discuta o comportamento das soluções da equação recursiva ao variar o parâmetro λ.

6. (sequência de Fibonacci) Considere o seguinte problema, posto por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci, ou seja, "filius Bonacci")[2]:

> *Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?*

A resposta de Leonardo Pisano consiste no seguinte modelo. Se F_n o número de pares de coelhos no n-ésimo mês, então

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,.$$

Esta é uma "lei" que prescreve recursivamente os valores dos F_n dados uns valores iniciais F_0 e F_1.

- Responda ao problema de Fibonacci, ou seja, determine F_{12}, sabendo que $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$.
- Escreva um algoritmo para calcular recursivamente os números de Fibonacci F_n.
- Seja $Q_n = F_{n+1}/F_n$ o quociente entre sucessivos números de Fibonacci. Mostre que os quocientes satisfazem a equação recursiva

$$Q_{n+1} = 1 + \frac{1}{Q_n}$$

- Assuma que, para grande valores de n, os quocientes são praticamente constantes, ou seja, $Q_n \to \phi$ se $n \to \infty$. Utilize a a equação recursiva para mostrar que

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.61803398874989...$$

- Mostre que o resultado anterior implica a lei assimptótica $F_{n+1} \simeq \phi F_n$. Reconhece-a?

7. (crescimento com recolha ou adição) A uma população que cresce segundo o modelo exponencial, é adicionada ou retirada uma certa quantidade β em cada unidade de tempo. O modelo é portanto

$$P_{n+1} = \lambda P_n + \beta$$

onde β é um parâmetro positivo ou negativo.

- Determine soluções estacionárias, ou seja, que não dependem do tempo n.
- Determine a solução com condição inicial P_0 arbitrária (considere a substituição $x_n = P_n - \overline{P}$, onde $\overline{P}$ é a solução estacionária).

[1] J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

[2] Leonardo Pisano, *Liber Abaci*, 1202.

- Para quais valores dos parâmetros λ e β as soluções P_n convergem para a solução estacionária quando o tempo $n \to \infty$?

8. (exponencial) A função *exponencial* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida pela série de potências

$$e^t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + x + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots$$

- Mostre que a série converge para todos os $t \in \mathbb{R}$.
- Mostre que $e^{t+s} = e^t e^s$ e que $e^0 = 1$, e portanto o exponencial define um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo multiplicativo $\mathbb{R}^\times$.
- Mostre que $x(t) = e^t$ é solução da EDO

$$\dot{x} = x\,.$$

- Verifique que $x(t) = x_0 e^t$ é uma solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = x_0$.
- Mostre que, se $y(t)$ é uma solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $y(t)/e^t$ é constante e igual a x_0. Deduza a unicidade das soluções do problema de Cauchy.

9. (decaimento radioactivo) A taxa de decaimento de matéria radioactiva é proporcional à quantidade de matéria existente. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioactiva existente no instante t satisfaz a EDO de primeira ordem

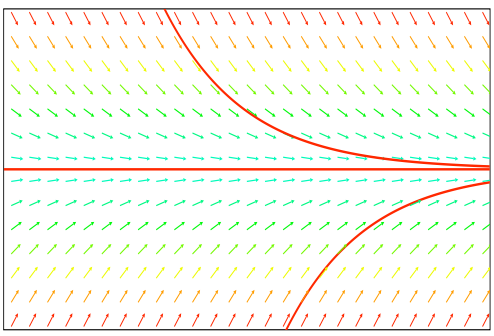
$$\dot{N} = -\beta N$$

onde $\beta > 0$ é uma *constante de decaimento*.

- Determine a solução da equação diferencial com condição inicial $N(0) = N_0$.
- O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioactiva é o tempo necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial, isto é, é o tempo T tal que $N(T)/N(0) = 1/2$. Encontre a relação entre o tempo de meia-vida T e a constante de decaimento β, e mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$.
- O tempo $1/\beta$ é dito *vida média*, sendo a esperança do tempo de vida de cada núcleo. Determine o tempo de meia-vida do ^{14}C sabendo que a vida média é $1/\beta \simeq 8033$ anos. .
- A radiação cósmica produz ^{14}C na atmosfera terrestre a uma certa taxa α. Portanto, o número de núcleos de ^{14}C na atmosfera segue a EDO

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha$$

Mostre que $N(t)$ converge para o valor estacionário $\overline{N} = \alpha/\beta$ quando $t \to \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (considere a substituição $x(t) = N(t) - \overline{N}$, onde $\overline{N}$ é a solução estacionária).



Campo de direcções e soluções da equação $\dot{x} = -2x + 1$.

10. (crescimento exponencial) O crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado pela EDO de primeira ordem

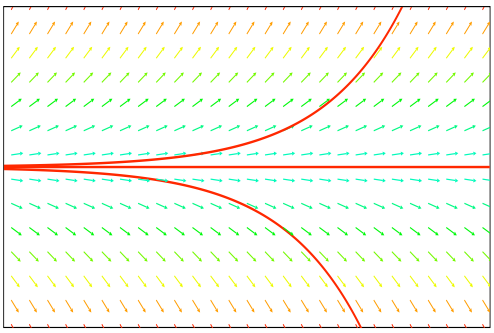
$$\dot{N} = \lambda N$$

onde $N(t)$ é a população no tempo t, e $\lambda > 0$.

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$.
- O que acontece à solução para grandes intervalos de tempo?
- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\alpha > 0$, então

$$\dot{N} = \lambda N - \alpha$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assimptótico das outras soluções.



Campo de direcções e soluções da equação $\dot{x} = 2x - 1$.

2 Iteração e modelos discretos

1. (iteração) Um sistema dinâmico com tempo discreto é definido por uma equação/lei recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n)\,,$$

onde x_n denota o *estado* (posição, população, concentração, temperatura, ...) do sistema no tempo n (segundos, horas, meses, anos, ...). As *trajectórias* são as sucessões (x_n),

$$x_0 \mapsto x_1 = f(x_0) \mapsto x_2 = f(x_1) \mapsto \ldots \mapsto x_{n+1} = f(x_n) \mapsto \ldots\,,$$

definidas a partir de uma *condição inicial* x_0.

Os *estados estacionários*, ou *de equilíbrio*, são as trajectórias constantes $x_n = \overline{x}$, onde $\overline{x}$ é um "ponto fixo" da transformação f, ou seja, um ponto tal que

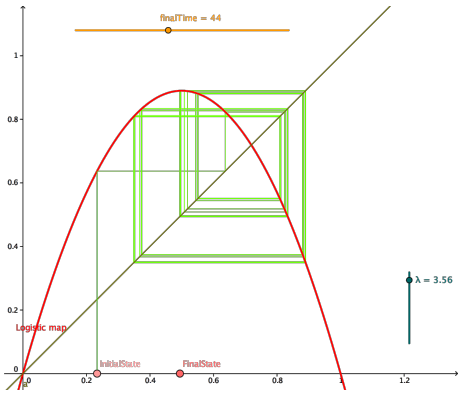
$$f(\overline{x}) = \overline{x}\,.$$

As *soluções periódicas* são as trajectórias (x_n) tais que $x_{n+p} = x_n$ para todos os n e algum tempo minimal $p \geq 1$, dito *período*.

Se o espaço dos estados é um intervalo da recta real, as trajectórias podem ser observadas no plano x-y esboçando o caminho poligonal (*cobweb plot*) [3]

$$(x_0, x_0) \mapsto (x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_1) \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2) \mapsto (x_2, x_3) \mapsto \ldots$$

entre o gráfico da transformação, $y = f(x)$, e a diagonal, $y = x$.



- Estude as trajectórias (ou seja, determine os estados de equilíbrio, as trajectórias periódicas, e o comportamento assimptótico de algumas das outras trajectórias) dos sistemas dinâmicos definidos pelas seguintes transformações

$$f(x) = \frac{1}{3}x \qquad f(x) = 7x \qquad f(x) = -x$$

$$f(x) = 3x + 1 \qquad f(x) = 2x - 7 \qquad f(x) = \frac{1}{2}x + 5$$

$$f(x) = |1 - x| \qquad f(x) = x^2 - \frac{1}{4} \qquad f(x) = x^2 - 2$$

$$f(x) = x^3 \qquad f(x) = -x^3 \qquad f(x) = x^{1/3}$$

$$f(x) = x - x^3 \qquad f(x) = x + x^3$$

- Mostre que, se uma trajectória (x_n) do sistema dinâmico $x_{n+1} = f(x_n)$ é convergente e se a transformação f é contínua, então o limite $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ é um estado estacionário, ou seja, $f(x_\infty) = x_\infty$.

[3] see the tutorial by Elisha Peterson for an implementation with GeoGebra

2. (transformação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é

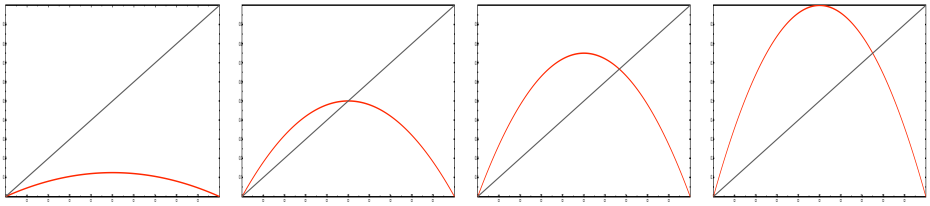
$$P_{n+1} = \lambda P_n \, (1 - P_n/M)$$

onde a contante $M > 0$ é a maior população suportada pelo meio ambiente (observe que $P_{n+1} < 0$ quando $P_n > M$, o que pode ser interpretado como "extinção" no tempo $n+1$). A substituição $x_n = P_n/M$ transforma a lei acima na forma adimensional

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \, ,$$

chamada *transformação logística*[4].

- Esboce o gráfico da transformação logística para diferentes valores do parâmetro λ.



Gráficos da transformação logística quando $\lambda = 0.5$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$.

- Mostre que os ponto estacionários são o estado trivial 0 e

$$\overline{x} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

- Implemente um programa para fazer simulações do sistema.
- Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $0 < \lambda \leq 1$.
- Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $1 < \lambda \leq 3$.
- Observe os fenómenos que acontecem ao variar o parâmetro λ entre 3 e 4.
- O que acontece quando $\lambda > 4$?

3. (equilíbrio de Hardy-Weinberg) Considere a transmissão hereditária de um gene com dois alelos, A e a. Sejam x_0, y_0 e z_0 as frequências dos genótipos AA, Aa e aa, respectivamente, numa dada população inicial. Então as probabilidade de ter o alelo A ou a na formação de um gameta são

$$p_0 = x_0 + \frac{1}{2} y_0 \qquad \text{e} \qquad q_0 = 1 - p_0 = z_0 + \frac{1}{2} y_0 \, ,$$

respectivamente. Na fecundação, teremos os genótipos AA, Aa e aa com probabilidades p_0^2, $2p_0q_0$ e q_0^2, respectivamente. Portanto, na primeira geração, as frequências dos três genótipos serão

$$x_1 = p_0^2 \, , \qquad y_1 = 2p_0q_0 \qquad \text{e} \qquad z_1 = q_0^2 \, .$$

- Calcule as probabilidades

$$p_1 = x_1 + \frac{1}{2} y_1 \qquad \text{e} \qquad q_1 = z_1 + \frac{1}{2} y_1$$

de ter os alelos A ou a na formação de um gameta na primeira geração, e mostre que as frequências dos três genótipos na segunda geração serão

$$x_2 = p_0^2 \, , \qquad y_2 = 2p_0q_0 \qquad \text{e} \qquad z_2 = q_0^2 \, .$$

Ou seja, a distribuição dos três genótipos atinge um valor estacionário a partir da primeira geração (*Hardy*[5]*-Weinberg*[6] *equilibrium/principle/law*).

[4] Robert M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459-467.
[5] G.H. Hardy, Mendelian proportions in a mixed population, *Science* **28** (1908), 49-50.
[6] W. Weinberg, Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen, *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Neturkunde in Württemberg* **64** (1908), 368-382.

4. (selecção natural, modelo de Fisher, Wright e Haldane) Um modelo simples de selecção natural, proposto por Ronald Fisher, Sewall Wright e J.B.S. Haldane em 1930[7], considera apenas um gene com dois alelos, A e a. A vantagem ou desvantagem competitiva dos diferentes genótipos, AA, Aa e aa, é modelada por coeficientes de "sucesso biológico" (*fitness*), ϕ_{AA}, ϕ_{Aa} e ϕ_{aa}, que determinam as diferentes taxas de sobrevivência, e portanto de reprodução. Sejam $0 \le p_n \le 1$ e $q_n = 1 - p_n$ as frequências dos alelos A e a, respectivamente, na n-ésima geração. Então a frequência do alelo A na $(n+1)$-ésima geração é dada por

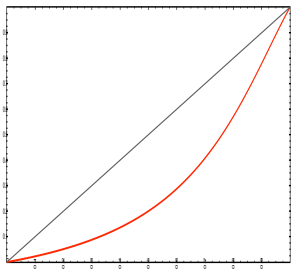
$$p_{n+1} = \frac{(1+\alpha)p_n^2 + p_n q_n}{(1+\alpha)p_n^2 + 2p_n q_n + (1+\beta)q_n^2}$$

onde $(1+\alpha) = \phi_{AA}/\phi_{Aa}$ e $(1+\beta) = \phi_{aa}/\phi_{Aa}$ (e portanto $-1 < \alpha$ e $-1 < \beta$).

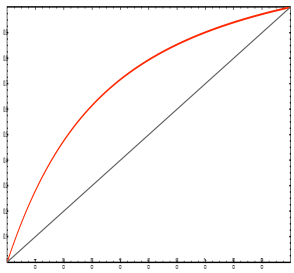
- Esboce a transformação para diferentes valores de α e β. Observe que soluções estacionárias são as soluções triviais 0 e 1, e, quando α e β têm o mesmo sinal,

$$\overline{p} = \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\,.$$

- Discuta o comportamento assimptótico da frequência p_n quando α e β têm sinais opostos. Mostre que na população assimptótica apenas sobrevive o alelo favorecido.

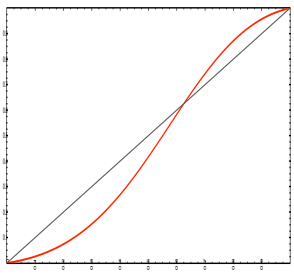


$\alpha < 0 < \beta$

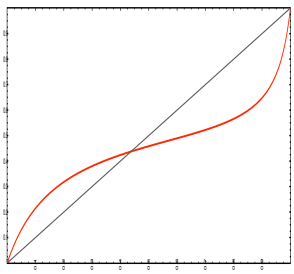


$\beta < 0 < \alpha$

- Mostre que, quando $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ (ou seja, os genótipos AA e aa têm uma vantagem competitiva em relação ao genótipo Aa), o estado estacionário $\overline{p}$ é instável, e pequenas perturbações $x_0 = \overline{p} \pm \varepsilon$ do equilíbrio produzem comportamentos assimptóticos diferentes, a extinção de A ou a extinção de a, dependendo do sinal (*disruptive selection*).
- Mostre que, quando $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ (ou seja, o genótipo Aa é o favorecido), o estado estacionário $\overline{p}$ é estável, e portanto os dois alelos convivem na população assimptótica (*heterosis*).



Disruptive selection: $0 < \alpha < \beta$.



Heterosis: $\alpha < \beta < 0$.

5. (equações quadráticas) O problema de determinar as raizes da equação quadrática

$$x^2 + a = px$$

[7] R.A. Fisher, *Genetical Theory of Natural Selection*, Clarendon 1930. S. Wright, Evolution in Mendelian populations, *Genetics* **16** (1931), 97-159. J.B.S. Haldane, A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection (1924-1934).

é equivalente (pelo menos se $a > 0$ e $p > 0$) ao problema de determinar os lados, x e y, de um rectângulo dados a área a e o perímetro $2p$, ou seja, determinar a interseção da recta $x + y = p$ com a hipérbole $xy = a$, ou seja, resolver o sistema (não linear!)

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = a \end{cases}$$

- Mostre que as soluções do sistema satisfazem

$$x = p - \frac{a}{x} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{a}{p - x}\,.$$

- Verifique que as iterações

$$x_{n+1} = p - \frac{a}{x_n} \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{a}{p - x_n}\,,$$

dadas condições iniciais x_0 razoáveis, convergem para as raizes de $x^2 + a = px$.

- Esboce o cobweb plot das iterações quando $a > 0$ e $a < 0$.

6. (equações às diferenças finitas) Considere a equação às diferenças finitas (EDF) linear homogénea

$$a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

onde os $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p \neq 0$ são parâmetros. A sucessão geométrica $x_n = z^n$ é solução se $z = 0$ ou se z é uma raiz do *polinómio característico*

$$P(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Se o polinómio característico tem p raizes distintas (em $\mathbb{C}$), $z_1, z_2, \ldots, z_p$, então a solução geral da equação é uma combinação linear

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_p z_p^n$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_p$ são constantes que dependem das condições iniciais $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}$.

- Determine a solução geral das seguintes EDF

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n \qquad\qquad x_{n+2} = (x_{n+1} + x_n)/2$$

- Determine uma fórmula para os números de Fibonacci F_n, solução de $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ com condições iniciais $F_0 = F_1 = 1$.
- Mostre que uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$$

representa uma função racional $f(z)$ se e só se os coeficientes x_n satisfazem uma equação recursiva $a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$ (observe que $|x_n| \leq c|\lambda|^n$ onde λ é a raiz do polinómio caraterístico com valor absoluto maior e $c > 0$ é uma constante, e portanto o raio de convergência da série de potência é $R = 1/|\lambda|$, em particular, positivo).

- Determine a função racional

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$$

definida pelos números de Fibonacci F_n, ou seja, cujos coeficientes de Taylor são dados pela sucessão $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.

7. (aproximações racionais de $\sqrt{2}$) Considere a EDF

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n\,.$$

- Determine a solução geral.
- Determine a solução com condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, e calcule explicitamente os primeiro termos da sucessão.
- Mostre que os quocientes $q_n := x_{n+1}/x_n$ convergem para $1 + \sqrt{2}$ quando $n \to \infty$, e portanto
$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \to \sqrt{2}$$
- Deduza aproximações racionais de $\sqrt{2}$.

8. (sistemas lineares) Um sistema recursivo linear homogéneo é uma lei
$$x_{n+1} = Ax_n$$
para uma sucessão (x_n) com valores $x_n \in \mathbb{R}^k$, definida por uma matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbb{R})$. A solução é
$$x_n = A^n x_0 \,,$$
se $x_0 \in \mathbb{R}^k$ é a condição inicial. O cálculo das potências A^n de uma matriz quadrada é simples se A é diagonalizável. Por exemplo, se A possui k valores próprios reais e distintos, então, na base formada pelos vectores próprios, $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ e portanto $A^n = \mathrm{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n)$.
Uma equação às diferenças finitas linear homogénea de ordem p, como
$$a_p y_{n+p} + a_{p-1} y_{n+p-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \,,$$
é equivalente ao sistema $x_{n+1} = Ax_n$ para a sucessão $x_n := (y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p-1})$.

- Determine e resolva o sistema que corresponde ao modelo de Fibonacci.

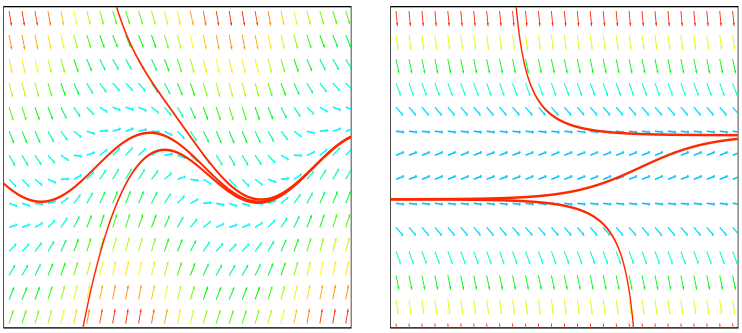
3 Fluxos e modelos contínuos

1. (equações diferenciais ordinárias) Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de primeira ordem é uma "lei"

$$\dot{x} = v(t, x)$$

para a trajectória $t \mapsto x(t) \in X \subset \mathbb{R}$ de um sistema dinâmico, onde $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$ denota a derivada do observável $x \in \mathbb{R}^n$ em ordem ao tempo t, e $v(t, x)$ é um "campo de direcções" (uma recta com declive $v(t, x)$ para cada ponto (t, x)). Uma *solução* da EDO é uma função $t \mapsto x(t)$ tal que $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ para cada tempo t num certo intervalo, ou seja, uma função cujo gráfico é tangente ao campo de direcções em cada ponto $(t, x(t))$ do gráfico.

Se o campo $v(t, x)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável), para cada ponto (t_0, x_0) passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$.



Campos de direcções e algumas soluções de $\dot{x} = \sin(t) - x$ e de $\dot{x} = x(1 - x)$.

- Esboce os campos de direcções das EDOs

$$\dot{x} = t \qquad \dot{x} = -x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = x + t$$

$$\dot{x} = x(1 - x) \qquad \dot{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

  e conjecture sobre o comportamento das soluções.
- A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $t\dot{x} - 3x = 0$? E a função $x(t) = 0$?

2. (integração de EDOs simples) O teorema fundamental do cálculo implica que a solução de uma EDO simples

$$\dot{x} = v(t)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)ds}$$

- Integre (ou seja, determine soluções com $x(t_0) = x_0$) as seguintes EDOs.

$$\dot{x} = 2\sin(t) \qquad \dot{x} = e^{-t} \qquad \dot{x} = \cos(3t) \qquad \dot{x} = t - t^2$$

3. (EDOs autónomas/fluxos) A solução de uma EDO *autónoma*

$$\dot{x} = v(x)$$

depende da condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. se $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0$ é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio)* da equação. Se x_0 não é um ponto singular, i.e. se $v(x_0) \neq 0$, então a receita para resolver $\frac{dx}{dt} = v(x)$ consiste em "separar

as variáveis", $\frac{dx}{v(x)} = dt$, integrar os dois membros, $\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{v(y)} = \int_{t_0}^{t} ds$, e resolver para x. Ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(x)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}}$$

Se o campo $v(t, x)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável), para cada ponto (t_0, x_0) passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se estas soluções existem para todo o tempo $t \in \mathbb{R}$, então a família de aplicações $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$, que a cada $x \in X$ associa o valor $\Phi_t(x) = x(t)$ da solução com condição inicial $x(0) = x$, define um *fluxo* sobre o espaço de fases X. O fluxo é uma ação do grupo aditivo $\mathbb{R}$ sobre X, ou seja, uma família de aplicações $\Phi_t : X \to X$ definidas para cada $t \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Phi_0 = \mathrm{id}_X \qquad \text{e} \qquad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}\,.$$

- Considere as seguintes EDOs de primeira ordem

$$\dot{x} = -3x \qquad \dot{x} = 2x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = e^x \qquad \dot{x} = (x-1)(x-2)$$

Determine as soluções estacionárias. Esboce os campos de direcções e conjecture sobre o comportamento das soluções. Determine, se possível, fórmulas para a solução com condição inicial $x(0) = x_0$, e esboce o gráfico de algumas das soluções encontradas.

4. (EDOs separáveis) A solução de uma EDO *separável*

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{g(t)}$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, se $f(x_0) \neq 0$ e $g(t_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\dot{x} = f(x)/g(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{g(s)}}$$

- Resolva as seguintes EDOs separáveis

$$\dot{x} = tx^3 \qquad t\dot{x} + t = t^2 \qquad \dot{x} = t^3/x^2 \qquad \dot{x} = e^{x+3t^2}t$$

$$\dot{x} = \frac{t-1}{x^2} \qquad \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\left(t^2+1\right)\dot{x} = 2tx \qquad \dot{x} = t\left(x^2 - x\right) \qquad \dot{x} = e^{t-x}\,,$$

definidas em oportunos domínios.

5. (EDOs lineares) A solução de uma EDO *linear*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada pelos seguintes dois passos: determinar (apenas) uma solução não trivial $y(t)$ da "equação homogénea associada", $\dot{y} + p(t)y = 0$, substituir a conjectura $x(t) = \lambda(t)y(t)$ na equação não-homogénea e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\boxed{\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(u)du}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} p(u)du} q(s)ds\right)\,.}$$

- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \qquad \dot{x} + 2x = t \qquad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \qquad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

- Resolva os seguintes problemas nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t^3 \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r\tan\theta = \cos\theta \qquad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

6. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela *equação de Newton*

$$m\ddot{r} = -mg$$

onde r é a altura, m é a massa da partícula, $g \simeq 980$ cm/s^2 é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\ddot{r}$ denota a segunda derivada de r em ordem ao tempo t.

- Resolva a equação $m\dot{v} = -mg$ para a velocidade $v = \dot{r}$, com condição inicial $v(0) = v_0$, e deduza a solução $r(t)$ com condição inicial $r(0) = r_0$.

7. (equação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é a *equação logística*[8]

$$\dot{N} = \lambda N(1 - N/M)$$

onde $\lambda > 0$ e a constante $M > 0$ é a população máxima suportada pelo meio ambiente. Observe que $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll M$, e que $\dot{N} \to 0$ quando $N \to M$.

- Seja $x(t) = N(t)/M$ a população relativa. Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a equação logística "adimensional"

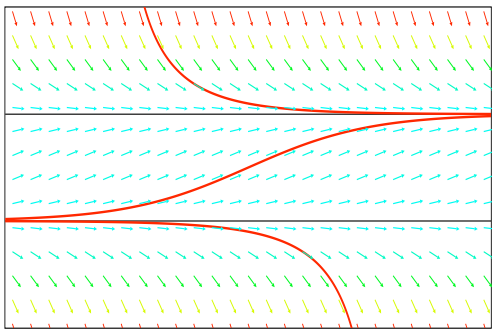
$$\dot{x} = \lambda x(1 - x)\,.$$

- Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
- Verifique que

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}} \quad ,$$

é a solução da equação logística com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$.

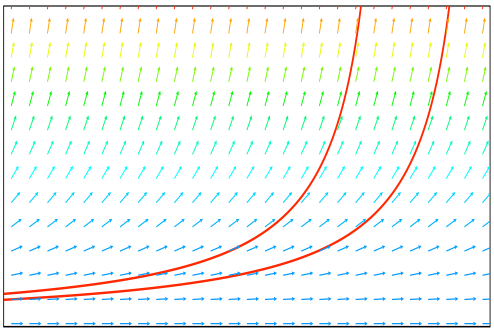
- Discuta o comportamento assimptótico das soluções da equação logística.



Campo de direcções e soluções da equação logística.

[8] Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

8. (crescimento super-exponencial) Um outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é
$$\dot{N} = \alpha N^2.$$
   - Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$.
   - Observe que as soluções que determinou não estão definidas para todos os tempos: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!



Campo de direcções e soluções da equação $\dot{x} = x^2$.

9. (fazer modelos) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?
   - A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá no instante t é proporcional à diferença entre a temperatura do ar e a temperatura do chá no instante t.
   - A taxa de variação de uma população de cogumelos no instante t é proporcional à raiz quadrada da população no instante t.
   - A velocidade de um foguetão no instante t é inversamente proporcional à altura atingida no instante t.
   - A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.

10. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força $-k\dot{r}$ proporcional e contrária à velocidade, assim a equação de Newton escreve-se
$$m\ddot{r} = -k\dot{r} - mg$$
onde $k > 0$ é um coeficiente de atrito. Chamando $v = \dot{r}$ a velocidade da partícula, somos levados a
$$m\dot{v} = -kv - mg$$
   - Determine a solução $v(t)$ com condição inicial $v(0) = 0$.
   - Mostre que a velocidade $v(t)$ tende para um valor assimptótico v_∞ quando $t \to \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
   - Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $r(t)$ com condição inicial $r(0) = r_0$.

11. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L, é determinada pela EDO
$$L\dot{I} + RI = V$$
onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Escreva a solução geral como função da corrente inicial $I(0) = I_0$.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E\sin(\omega t)$. Se não conseguir, mostre que a solução com $I(0) = 0$ tem a forma

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \alpha) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde α é uma constante que depende de ω, L e R.

12. (lei do arrefecimento de Newton) Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ segue a *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k\,(T - M(t))$$

onde k é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

- Escreva a solução $T(t)$ como função da temperatura inicial $T(0) = T_0$ e de $M(s)$ com $0 \le s \le t$.
- Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100^oC, é colocada numa sala cuja temperatura é de 20^oC. Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60^oC em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40^oC.

13. (iterações de Picard) Uma função diferenciável $t \mapsto \varphi(t)$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e com valores num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t,x)$ com condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$ se e só se

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,(s, \varphi(s))\,ds\,,$$

ou seja, se $\varphi(t)$ é um ponto fixo do *mapa de Picard* $\mathcal{P} : C(I,X) \to C(I,X)$, que envia uma função $\phi(t)$ na função

$$\boxed{(\mathcal{P}\phi)\,(t) := x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} v\,(s, \phi(s))\,ds\,.}$$

Se a sucessão de funções ϕ, $\mathcal{P}\phi$, $\mathcal{P}^2\phi := \mathcal{P}\,(\mathcal{P}\phi)$, $\ldots$, $\mathcal{P}^n\phi := \mathcal{P}\left(\mathcal{P}^{n-1}\phi\right)$, $\ldots$, obtidas iterando o mapa de Picard a partir de uma função inicial ϕ, é convergente (numa topologia apropriada definida num subespaço $\mathcal{C} \subset C(I,X) := \{\phi : I \to X \text{ contínua}\}$ tal que $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ seja contínua), então o limite $x(t) = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{P}^n\phi)\,(t)$ é um ponto fixo do mapa de Picard, e portanto uma solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t,x)$ com a condição inicial dada $x(t_0) = x_0$.

- Se o campo de velocidades apenas depende do tempo, ou seja o problema é a EDO simples $\dot{x} = v(t)$, então o mapa de Picard envia toda função inicial $\phi(t)$ na solução

$$(\mathcal{P}\phi)\,(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,(s)\,ds$$

com $x(t_0) = x_0$.

- Suppose you want to solve $\dot{x} = x$ with initial condition $x(0) = 1$. You start with the guess $\phi(t) = 1$, and then compute

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = 1 + t \qquad \left(\mathcal{P}^2\phi\right)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} \qquad \left(\mathcal{P}^3\phi\right)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \qquad \dots$$

Hence the sequence converges (uniformly on bounded intervals) to the Taylor series of the exponential function

$$(\mathcal{P}^n\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \quad \to \quad e^t\,,$$

which is the solution we already knew.

14. (teorema de Picard-Lindelöf[9].) Seja $v(t,x)$ um campo de velocidades contínuo definido num domínio D do espaço de fases extendido $\mathbb{R}\times X$. Se v é localmente Lipschitziana (por exemplo, diferenciável com continuidade) com respeito a segunda variável $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma e uma única solução local da equação diferencial $\dot{x} = v(t,x)$ que passa por cada ponto $(t_0, x_0) \in D$.

Proof. Choose a sufficiently small rectangular neighborhood $I \times B = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_\delta(x_0)$ around (t_0, x_0), where $B = \overline{B}_\delta(x_0)$ denotes the closed ball with center x_0 and radius δ in X. There follows from continuity of v that there exists K such that $|v(t,x)| \le K$ for any $(t,x) \in I \times B$. There follows from the local Lipschitz condition for v that there exists M such that $|v(t,x) - v(t,y)| \le M|x-y|$ for any $t \in I$ and any $x, y \in B$. Now restrict, if needed, the (radius of the) interval I in such a way to get both the inequalities $K\varepsilon \le \delta$ and $M\varepsilon < 1$. Let $\mathcal{C} = C^0(I, B)$ be the space of continuous functions $t \mapsto \phi(t)$ sending I into B. Equipped with the sup norm $\|\phi - \varphi\|_\infty := \sup_{t\in I} |\phi(t) - \varphi(t)|$ this is a complete space. One verifies that the Picard's map sends $\mathcal{C}$ into $\mathcal{C}$, since

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - x_0| \le \int_{t_0}^{t} |v(s, \phi(s))|\, ds \le K\varepsilon \le \delta\,.$$

Finally, given two functions $\phi, \varphi \in \mathcal{C}$, one sees that

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - (\mathcal{P}\varphi)(t)| \le \int_{t_0}^{t} |v(s, \phi(s)) - v(s, \varphi(s))|\, ds \le M\varepsilon \cdot \sup_{t\in I} |\phi(t) - \varphi(t)|\,,$$

hence $\|\mathcal{P}\phi - \mathcal{P}\varphi\|_\infty < M\varepsilon \cdot \|\phi - \varphi\|_\infty$. Since $\lambda := M\varepsilon < 1$, this proves that the Picard's map is a contraction and the Banach fixed point theorem allows to conclude. □

15. (lema de Gromwall[10]) Let $\phi(t)$ and $\psi(t)$ be two non-negative real valued functions defined in the interval $[a, b]$, and assume that

$$\phi(t) \le K + \int_a^t \psi(s)\phi(s)\, ds$$

for any $a \le t \le b$ and some constant $K \ge 0$. Then

$$\phi(t) \le K e^{\int_a^t \psi(s)\, ds}\,.$$

Proof. Assume that $K > 0$. Define $\Phi(t) := K + \int_a^t \psi(s)\phi(s)\, ds$ and observe that $\Phi(a) = K > 0$, hence $\Phi(t) > 0$ for all $a \le t \le b$. The logarithmic derivative is

$$\frac{d}{dt} \log \Phi(t) = \frac{\psi(t)\phi(t)}{\Phi(t)} \le \psi(t)$$

where we used the hypothesis $\phi(t) \le \Phi(t)$. Integrating the inequality we get, for $a \le t \le b$,

$$\log \Phi(t) \le \Phi(a) + \int_a^t \psi(s)\, ds\,.$$

Exponentiation gives the result, since

$$\phi(t) \le \Phi(t) \le K \cdot e^{\int_a^t \psi(s)\, ds}\,.$$

The case $K = 0$ follows taking the limit of the above inequalities along a sequence of $K_n > 0$ decreasing to zero. □

[9] M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

[10] T.H. Gronwall, Note on the derivative with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, *Ann. of Math* **20** (1919), 292-296.

4 Simulações e sistemas de EDOs

1. (método de Euler/diferênças finitas) Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x) \tag{4.1}$$

O *método de Euler* consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) \simeq x(t) + v(t, x) \cdot dt\,,$$

dado um "passo" dt suficientemente pequeno. Portanto, a solução $x(t_n)$, nos tempos $t_n = t_0 + n \cdot dt$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é estimada pela sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt\,.}$$

Numa linguagem como `c++` ou `Java`, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) =$ `x`, é

```
while (time < t)
  {
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
  }
```

- Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$ e o tempo final é $t = n\varepsilon$ com $n \in \mathbb{N}$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq x_n = (1 + \varepsilon)^n$$

onde $n = t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \to 0$, as aproximações convergem para a solução e^t, pois

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

- Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)\, x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...
- Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

2. (método RK-4) O *método de Runge-Kutta* (de ordem) *4* para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \qquad \text{com condição inicial} \qquad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um "passo" dt, e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \tfrac{dt}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$, e os coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$\boxed{k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \tfrac{dt}{2}, x_n + \tfrac{dt}{2} \cdot k_1\right) \quad k_3 = v\left(t_n + \tfrac{dt}{2}, x_n + \tfrac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)}$$

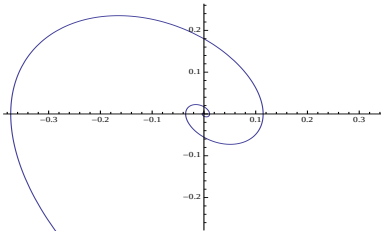
- Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

3. (simulações com software proprietário) Existem software proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinarias e parciais. Por exemplo, a função `ode45` do MATLAB®, ou a função `NDSolve` do Mathematica®, calculam soluções aproximadas de EDOs $\dot{x} = v(t, x)$ utilizando variações do método de Runge-Kutta.

   - Verifique se os PC do seu Departamento/da sua Universidade têm accesso a um dos software proprietários MATLAB® ou Mathematica®.
   - Em caso afirmativo, aprenda a usar as funções `ode45` ou `NDSolve`.
     Por exemplo, o pêndulo com atrito pode ser simulado, no Mathematica®, usando as instruções

     ```
     s = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -Sin[x[t]] - 0.7 y[t],
        x[0] == y[0] == 1}, {x, y}, {t, 20}]
     ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 20}]
     ```

     O resultado é



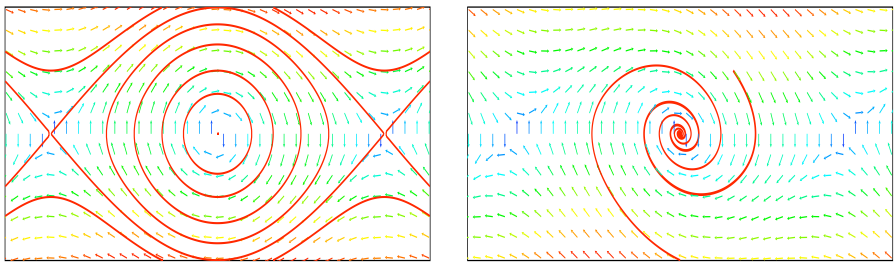
4. (pêndulo matemático) Considere a equação de Newton que modela as oscilações de um *pêndulo*,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha\dot{\theta}\,.$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, g é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo, e $\alpha \geq 0$ um coeficiente de atrito. No espaço de fase, de coordenadas q e $p = \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha p \end{aligned}$$

   - Simule o sistema, e esboce as trajectórias e as curvas de fase.



Retrato de fase do pêndulo (sem e com atrito).

5. (oscilador harmónico) As pequenas oscilações de um pêndulo em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descrita pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q\,.$$

onde ω é a frequência característica. No espaço de fase, de coordenadas q e $p = \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 q \end{aligned}$$

- Simule o sistema, e esboçe as trajectórias e as curvas de fase.
- Mostre que as trajectórias são

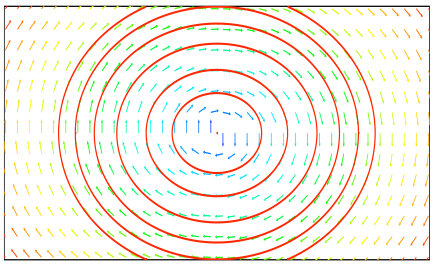
$$q(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad A\cos(\omega t + \phi)\ ,$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$.

- Mostre que a energia

$$E(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento, ou seja que se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt}E\left(q(t), p(t)\right) = 0$ para todo o tempo t.



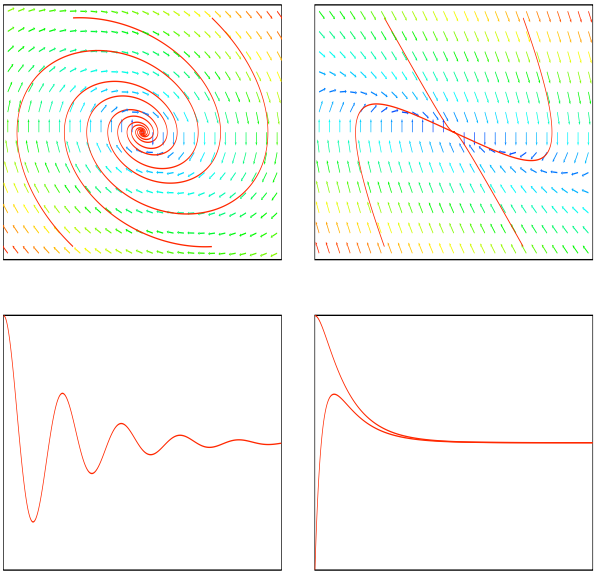
Retrato de fase do oscilador harmónico.

6. (oscilações amortecidas) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q\,,$$

onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito.

- Simule o sistema quando $\alpha^2 < \omega^2$ (amortecimento sub-crítico), $\alpha^2 = \omega^2$ (amortecimento crítico), e $\alpha^2 > \omega^2$ (amortecimento super-crítico).



Retrato de fase e trajectórias do oscilador amortecido (sub-crítico e super-crítico).

7. (oscilações forçadas) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q + F(t)\,,$$

onde $\alpha \geq 0$ é um coeficiente de atrito e $F(t)$ uma força.

- Simule o sistema quando a força é $F(t) = F_0\cos(\gamma t)$, ao variar os parâmetros.

8. (circuito LRC) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R, indutância L e capacidade C, é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V}\,,$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

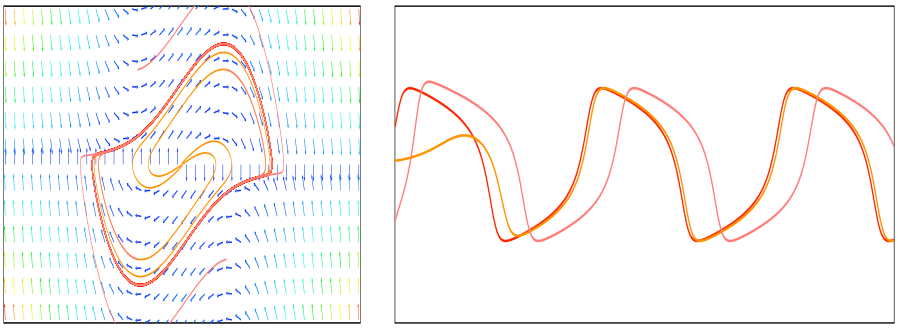
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$.
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0\sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).

9. (oscilador de van der Pol) Considere o *oscilador de van der Pol*[11]

$$\ddot{q} - \mu(1-q^2)\dot{q} + q = 0$$

que modela a corrente num circuito com um elemento não-linear.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar o parâmetro μ.



Retrato de fase e trajectórias do oscilador de van der Pol.

- Simule o oscilador forçado

$$\ddot{q} - \mu(1-q^2)\dot{q} + q = F_0\sin(\omega t)$$

ao variar o parâmetro μ e a frequência ω.

10. (sistema de Lotka-Volterra) Considere o *sistema de Lotka-Volterra*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy\\ \dot{y} &= -cy + dxy\end{aligned}$$

Foi proposto por Vito Volterra[12] para modelar a competição entre x presas e y predadores, e por Alfred J. Lotka[13] para modelar o comportamento cíclico de certas reacções químicas, como o esquema abstracto

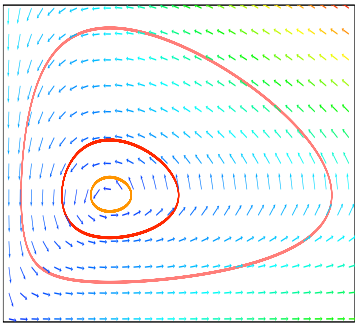
$$A + X \to 2X \qquad X + Y \to 2Y \qquad Y \to B$$

[11] B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* **1** (1920), 701-710 and 754-762. B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency demultiplication, *Nature* **120** (1927), 363-364.

[12] Vito Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie di animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei* **2** (1926), 31-113. Vito Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

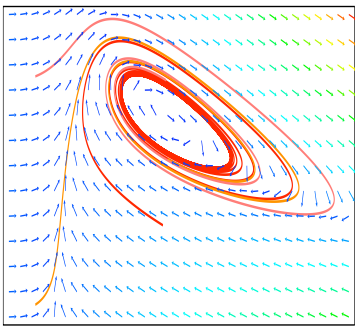
[13] Alfred J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc* **27** (1920), 1595. Alfred J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.

- Determine as soluções estacionárias.
- Mostre que a função
$$H(x,y) = dx + by - c\log x - a\log y$$
é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}H(x(t),y(t)) = 0$. Deduza que as órbitas do sistema estão contidas nas curvas de nível de $H(x,y)$.
- Simule o sistema.



Retrato de fase do sistema de Lotka-Volterra.

11. (Brusselator) O *Brusselator* é um modelo autocatalítico proposto por Ilya Prigogine e colaboradores[14] que consiste na reacção abstracta
$$A \to X \qquad B + X \to Y + C \qquad 2X + Y \to 3X \qquad X \to D$$
- Simule o sistema
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (\beta+1)x + x^2 y\\ \dot{y} &= \beta x - x^2 y\end{aligned}$$
para as concentrações das espécies catalíticas X e Y, obtido quando as concentrações $[A] \sim \alpha$ e $[B] \sim \beta$ são mantidas constantes.
- Simule o sistema
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (b+1)x + x^2 y\\ \dot{y} &= bx - x^2 y\\ \dot{b} &= -bx + \delta\end{aligned}$$
para as concentrações de X, Y e B, obtido quando a concentração $[A] \sim \alpha$ é mantida constante e B é injectado a uma velocidade constante $v \sim \delta$.



Rerato de fase do Brusselator.

[14] I. Prigogine and R. Lefever, Symmetry breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* **48** (1968), 1655-1700. P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Wiley, New York 1971. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in non-equilibrium chemical systems*, Wiley, New York 1977.

12. (bifurcação de Hopf) Considere o sistema[15]

$$\dot{x} = -y + x(\lambda - (x^2 + y^2))$$
$$\dot{y} = x + y(\lambda - (x^2 + y^2))$$

- Simule o sistema ao variar o parâmetro λ.
- Mostre que a origem é um equilíbrio assimptoticamente estável quando $\lambda < 0$.
- Mostre que a origem é um equilíbrio instável quando $\lambda > 0$. Observe que a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é um "ciclo limite" do sistema quando $\lambda = 1$.
- Simule o sistema

$$\dot{x} = x + y - x(\lambda - (x^2 + y^2))$$
$$\dot{y} = -x + y - y(\lambda - (x^2 + y^2))$$

13. (reacção de Schnakenberg) Considere a *reacção de Schnakenberg*[16]

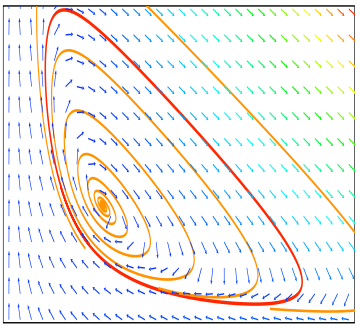
$$2X + Y \to 3X \qquad A \to Y \qquad X \to B$$

modelada pelo sistema

$$\dot{x} = x^2 y - x + \beta$$
$$\dot{y} = -x^2 y + \alpha$$

para as concentrações $x \sim [X]$ e $y \sim [Y]$.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar os parâmetros.



Retrato de fase do sistema de Schnakenberg.

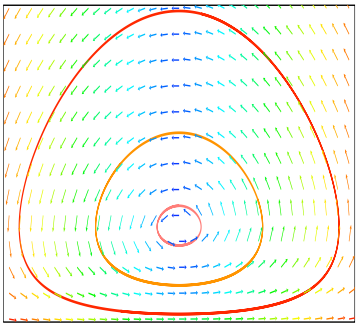
14. (oscilador bioquímico de Goodwin) Um modelo de interações proteinas-mRNA proposto por Goodwin[17] é

$$\dot{M} = \frac{1}{1+P} - \alpha$$
$$\dot{P} = M - \beta$$

onde M e P denotam as concentrações relativas de mRNA e proteina, respectivamente.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar so parâmetros.

[15] E. Hopf, Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystem, *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Phys.* **95** (1943), 3-22.
[16] J. Schnakenberg, Simple chemical reaction with limit cycle behavior, *J. Theor. Biol.* **81** (1979), 389-400.
[17] B.C. Goodwin, *Temporal organization in cells*, Academic Press, London/New York 1963. B.C. Goodwin, Oscillatory behaviour in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* **3** (1965), 425-438.



Retrato de fase do sistema de Goodwin.

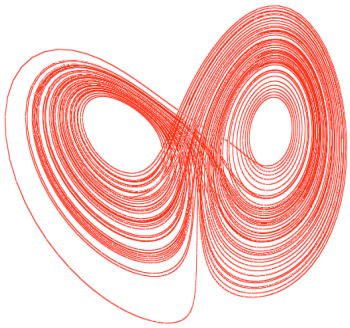
- Simule o sistema[18]

$$\dot{M} = \frac{1}{1+P^n} - \alpha M$$
$$\dot{P} = M^m - \beta P$$

15. (atractor de Lorenz) Considere o *sistema de Lorenz*[19]

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - \beta z$$

- Analize o comportamento assimptótico das trajectórias ao variar os parâmetros σ, ρ e β.
- Observe o comportamento das trajectórias quando $\sigma \simeq 10$, $\rho \simeq 28$ e $\beta \simeq 8/3$.



Atractor de Lorenz.

[18] T. Scheper, D. Klinkenberg, C. Pennartz and J. van Pelt, A Mathematical Model for the Intracellular Cicardian Rhythm Generator, *J. Neuroscience* **19** (1999), 40-47.

[19] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmspheric Science* **20** (1963), 130-141.

5 Sistemas dinâmicos topológicos

1. (sistemas dinâmicos topológicos: transformações, trajetórias e órbitas) Um *sistema dinâmico topológico* é uma ação de $\mathbb{N}_0$ ou de $\mathbb{Z}$ num espaço topológico (X, τ), gerada por uma transformação contínua $f : X \to X$.

   As "iteradas" da transformação f são as transformações $f^n : X \to X$, definidas indutivamente por

   $$f^0 := \mathrm{id} \qquad \text{e} \qquad f^n = f \circ f^{n-1} \text{ se } n \in \mathbb{N}\,.$$

   Se $n \in \mathbb{N}$ e $A \subset X$, então $f^{-n}(A)$ denota o conjunto $\{x \in X \text{ t.q. } f^n(x) \in A\}$. Se f é um homeomorfismo, é possível definir as iteradas $f^n : X \to X$ para todos os tempos $n \in \mathbb{Z}$.

   A ação $\phi : \mathbb{N}_0 \times X \to X$, ou $\phi : \mathbb{Z} \times X \to X$ se f for um homeomorfismo, é definida por

   $$\phi_n(x) := f^n(x)\,.$$

   É imediato verificar que ϕ_0 é a identidade, e que $\phi_{n+m} = \phi_n \circ \phi_n$, ou seja, que ϕ define um homomorfismo do semigrupo/grupo "tempo" no semigrupo/grupo dos endomorfismos/automorfismos de X.

   A seguir, (X, d) será um espaço métrico completo munido da topologia induzida τ, localmente compacto (todo ponto admite uma vizinhança compacta) e separável (admite um subconjunto enumerável denso, e portanto, sendo um espaço métrico, uma base enumerável da topologia). Para evitar trivialidades e detalhes inúteis, convém assumir também que a cardinalidade de X seja infinita e que não existam pontos isolados. Por exemplo, domínios de $\mathbb{R}^n$ (como intervalos da reta), o toro $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, o plano complexo $\mathbb{C}$, a esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, conjuntos de Cantor, produtos cartesianos enumeráveis $F^{\mathbb{N}}$ de espaços finitos F, ...

   A *trajetória* de $x \in X$ é a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$, definida recursivamente por

   $$x_{n+1} = f(x_n)$$

   a partir da "condição inicial" $x_0 = x$. A *órbita* de $x \in X$ é a imagem da sua trajetória, ou seja o conjunto

   $$\mathcal{O}_f^+(x) := \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

   A *grande órbita* do ponto x é o conjunto

   $$\mathcal{GO}_f(x) := \{x' \in X \text{ t.q. } \exists\, n, m \geq 0 \text{ t.q. } f^n(x') = f^m(x)\}$$

   ou seja o conjunto dos pontos que têm eventualmente a mesma história futura de x.

   Se f é invertível, é útil definir a *órbita completa* de x, o conjunto

   $$\mathcal{O}_f(x) := \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

   - Mostre que a relação "estar na mesma grande órbita" é uma relação de equivalência.
   - Mostre que a relação "estar na mesma órbita completa" é uma relação de equivalência, e portanto X é uma reunião disjunta de órbitas completas.
   - Estude a dinâmica, ou seja a estrutura das órbitas, de uma transformação arbitrária definida num conjunto finito $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Observe que o estudo da dinâmica das transformações bijetivas consiste essencialmente no estudo dos grupos simétricos S_n.

2. (pontos fixos e órbitas periódicas) Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico topológico. Os *pontos fixos* de f são os pontos $p \in X$ tais que $f(p) = p$. O ponto $p \in X$ é *periódico* de *período* $n \geq 1$ se $f^n(p) = p$ e se n é o menor dos tempos $k \geq 1$ tais que $f^k(p) = p$. A órbita do ponto periódico p é um conjunto finito

   $$\left\{p,\ f(p), f^2(p), ..., f^{n-1}(p)\right\}$$

   de pontos que são permutados pela transformação f. Assim, um ponto fixo é um ponto periódico de período 1, e a reunião dos pontos periódicos de período d tal que $d \mid n$ (i.e. d é um divisor de n) são os pontos fixos de f^n.

$\mathrm{Fix}\,(f^n)$ denota o conjunto dos pontos fixos da transformação f^n, e

$$\mathrm{Per}_f = \cup_{n\geq 1}\mathrm{Fix}\,(f^n)$$

denota o conjunto dos pontos periódicos da transformação f.

- Mostre que um ponto x pode ter órbita finita sem ser periódico: pode acontecer que existe $k \geq 1$ tal que $f^k(x)$ é um ponto periódico (tais pontos, que "caem" numa órbita periódica passado um tempo positivo, são ditos *pré-periódicos*).
- Mostre que cada um dos conjuntos $\mathrm{Fix}\,(f^n)$ é fechado, pois f^n é contínua, mas a reunião Per_f pode não ser.

3. (observáveis) Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico topológico. Os *observáveis* são as funções $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. O observável $\varphi : X \to \mathbb{C}$ é *invariante* se

$$\varphi \circ f = \varphi$$

ou seja se é constante em cada órbita. O observável real $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é uma *função de Lyapunov* se

$$\varphi \circ f \leq \varphi$$

ou seja, se é decrescente no tempo.

- Mostre que, se $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é invariante, $I \subset \mathbb{R}$ e $A = \varphi^{-1}(I)$, então $f^{-1}(A) = A$.
- Seja φ uma constante do movimento. Se $\varphi(x) = a$, então o futuro e o passado de x pertencem ao conjunto de nível $\Sigma_a = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) = a\}$, i.e. $\mathcal{GO}_f(x) \subset \Sigma_a$.
- Mostre que a função característica do subconjunto $A \subset X$ é invariante sse $f^{-1}(A) = A$.
- Se sabemos que $\varphi \circ f \leq \varphi$, e que $\varphi(x) = a$, então o futuro de x "não sai" do conjunto de sub-nível $\Sigma_{\leq a} = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) \leq a\}$, e o passado de x "vem" de $\Sigma_{\geq a} = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) \geq a\}$.

4. (médias de Birkhoff) Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico topológico. A *média temporal* (ou *média de Birkhoff*) do observável φ até ao tempo $n \geq 0$ é o observável $\overline{\varphi}_n$ definido por

$$\overline{\varphi}_n(x) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(f^k(x)\right)$$

i.e. o valor de $\overline{\varphi}_n$ no ponto x é a média aritmética dos valores de φ na "n-órbita de x" $\left\{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x)\right\}$.

Se o limite

$$\overline{\varphi}(x) := \lim_{n\to\infty}\overline{\varphi}_n(x)$$

existe, tem o significado de "valor médio assimptótico" de φ ao longo da órbita de x.

Um exemplo importante: seja 1_A a função característica de um subconjunto $A \subset X$. Então o limite

$$\overline{1_A}(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\mathrm{card}\left\{0 \leq k \leq n \text{ t.q. } f^k(x) \in A\right\}$$

se existir, representa "a fração de tempo assimptótica" que a trajetória de x passa em A, ou seja a "frequência com que a trajetória de x visita o conjunto A".

- Mostre que $\overline{\varphi}(x) = (\overline{\varphi} \circ f)(x)$ nos pontos onde o limite existe.

5. (conjuntos invariantes) Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico topológico. Um subconjunto $A \subset X$ é dito *invariante* se

$$f^{-1}(A) = A$$

Um subconjunto $A \subset X$ é dito $+$*invariante* se $f(A) \subset A$, e é dito $-$*invariante* se $f^{-1}(A) \subset A$. Em particular, se A é $+$invariante é possível definir o sistema dinâmico $f|_A : A \to A$.

- Mostre que a função característica do subconjunto $A \subset X$ é invariante sse $f^{-1}(A) = A$.
- Se A é invariante então $f(A) \subset A$ (e portanto um ponto de um conjunto invariante tem toda a sua história, futura e passada, contida no conjunto).
- Mostre que $\mathcal{GO}_f(x)$ é o menor conjunto invariante que contém x, e portanto um conjunto invariante é uma reunião de grandes órbitas, é composto pelas histórias possíveis passadas e futuras dos seus pontos.
- Mostre que se f é invertível, $\mathcal{O}_f(x)$ é o menor conjunto invariante que contém x. Isto implica que, se $f : X \to X$ é invertível, um subconjunto $A \subset X$ é invariante sse é uma reunião de órbitas completas, i.e. se $A = \cup_{x \in A} \mathcal{O}_f(x)$.
- Descubra as implicações entre as condições

  $$f^{-1}(A) = A \quad , \quad f(A) \subset A \quad , \quad f^{-1}(A) \subset A \quad , \quad f(A) = A \quad , \quad f^{-1}(A) = A = f(A)$$

  para uma transformação qualquer, uma transformação sobrejetiva e uma transformação bijetiva.
- Considere o conjunto C igual a $\mathcal{GO}_f(x)$, $\mathcal{O}_f(x)$ ou $\mathcal{O}_f^+(x)$ para algum ponto $x \in X$, e determine as propriedades de invariância dos conjuntos C, $\overline{C}$, ∂C e C'.
- Seja $A \subset X$. Mostre que $\cup_{n \geq 0} f^n(A)$ é um conjunto +invariante, de fato o menor conjunto +invariante que contém os pontos de A..
- Seja $A \subset X$. Mostre que, se $f : X \to X$ é invertível, então $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(A)$ é um conjunto invariante, de fato o menor conjunto invariante que contém os pontos de A.
- Seja $\varphi : X \to \mathbb{R}$ um observável, e seja $A \subset X$ o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que o limite $\overline{\varphi}(x) = \lim_{n \to \infty} \overline{\varphi}_n(x)$ existe. Mostre que A é invariante, e que o observável $\overline{\varphi} : A \to \mathbb{R}$ é invariante com respeito à transformação $f|_A : A \to A$.

6. (conjugação e fatores) Os sistemas dinâmicos topológicos $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ são *(topologicamente) conjugados* se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$, dito *conjugação*, tal que

   $$h \circ f = g \circ h$$

   Isto implica que $h \circ f^n = g^n \circ h$ para todo o tempo $n \geq 0$, , e portanto As trajetórias de g são as imagens das trajetórias de f pela correspondência h, e vice-versa. Observe que a condição pode também ser escrita como $f = h^{-1} \circ g \circ h$, e que é uma relação de equivalência. Por indução, vê-se que $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$ para todo tempo $n \geq 0$. Em particular, uma conjugação h envia órbitas de f em órbitas de g

   Uma função contínua e sobrejetiva $h : X \to Y$ é dita *semiconjugação* entre os sistemas dinâmicos $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ se $h \circ f = g \circ h$. Neste caso, g é dito um *fator* de f.

6 Números e dinâmica

1. (progressão aritmética) Uma *progressão aritmética* de "passo" α é uma sequência

$$a \qquad a+\alpha \qquad a+2\alpha \qquad a+3\alpha \qquad \dots \qquad a+n\alpha \qquad \dots$$

obtida do termo inicial $x_0 = a$ usando a recursão $x_{n+1} = x_n + \alpha$. Os recíprocos de uma progressão aritmética formam uma *progressão harmónica*.

- Verifique que a soma dos primeiro n termos de uma progressão aritmética $x_k = a + k\alpha$ é
$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{n}{2}(x_0 + x_{n-1})$$
- Mostre que
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
- Calcule as somas exponenciais
$$\sum_{k=0}^{n} e^{2\pi i k\alpha}$$
quando α é racional.

2. (representação decimal) Cada número real x pode ser representado como soma da uma série convergente

$$\begin{aligned} \pm x &= \text{“}X_m \dots X_2 X_1 X_0 \,,\, x_1 x_2 x_3 \dots\text{”} \\ &:= \sum_{n=0}^{m} X_n \cdot 10^n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \,, \end{aligned}$$

onde $X_n, x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e $m \geq 0$. A representaço é única se o 9 recurrente não está admitido, e portanto a sequência $\dots x_{k-2} x_{k-1} \overline{9}$, com $x_{k-1} \neq 9$, é substituida por $\dots x_{k-2}(x_{k-1}+1)\overline{0}$. Neste caso, a soma finita $[x] := \sum_{n=0}^{m} X_n \cdot 10^n \in \mathbb{Z}$ é a *parte inteira* de x, o maior inteiro n tal que $n \leq x$. A soma $\{x\} := 0.x_1 x_2 x_3 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \in [0, 1)$ é a *parte fracionária* de x, assim que $[x] + \{x\} = x$.

- Mostre que a representação decimal de um número racional p/q termina se e só se o denominador é da forma $2^a 5^b$.
- Determine as representações de $1/3$ na base 2, e de $2/3$ nas bases 3 e 7.
- Mostre que a representação decimal (ou numa base $d \geq 2$) de um número racional é periódica (observe que as possibilidades para os restos r_n são finitas).
- Mostre que uma dízima periódica representa um número racional (calcule a soma da série).
- Dê exemplos de representações decimais que não sejam periódicas (veja [HW59] IX).
- Prove que o *número de Euler*
$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$
é irracional (idea de Fourier: se $e = p/q$, com p e q inteiros, então $x = q!\,(e - \sum_{n=0}^{q} 1/n!)$ é um inteiro. Mas x é também igual a $x = \sum_{n=q+1}^{\infty} q!/n!$, e $0 < x < 1$).

3. (rotações da circunferência) A *circunferência* é o espaço quociente $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ do grupo comutativo $\mathbb{R}$ pelo subgrupo $\mathbb{Z}$, munido da topologia quociente herdada da topologia euclidiana da reta. As *rotações* da circunferência são as translações $R_\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ definidas por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

A métrica euclidiana da reta "induz" uma métrica invariante d na circunferência, definida por

$$\begin{aligned} d\left(x+\mathbb{Z}, x'+\mathbb{Z}\right) &= \min_{y\in\pi^{-1}\{x+\mathbb{Z}\},\ y'\in\pi^{-1}\{x'+\mathbb{Z}\}} |y-y'| \\ &= \min_{n\in\mathbb{Z}} |x-x'+n| \end{aligned}$$

onde $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ denota a projeção $x \mapsto x+\mathbb{Z}$. As rotações são as isometrias de (T,d) que preservam a orientação.

Em notação multiplicativa, se o círculo é identificado com o conjunto $\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z|=1\}$ dos números complexos de módulo 1, as rotações do círculo são as transformações $z \mapsto e^{i2\pi\alpha}z$.

- Verifique que
$$d\left(x+\mathbb{Z}, x'+\mathbb{Z}\right) = \min_{n\in\mathbb{Z}} |x-x'+n|$$
é uma métrica em $\mathbb{T}$.
- Identifique a circunferência $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com o intervalo $[0,1[$ (toda classe $x+\mathbb{Z}$ tem um e só um representante x neste intervalo), e dê uma expressão analítica para a distância $d\left(x+\mathbb{Z}, x'+\mathbb{Z}\right)$ em função de x e x'.
(Observe que se $|x-x'| \leq 1/2$ então $d\left(x+\mathbb{Z}, x'+\mathbb{Z}\right) = |x-x'|$)
- Verifique que as rotações $R_\alpha : x+\mathbb{Z} \to x+\alpha+\mathbb{Z}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, são isometrias, e portanto homeomorfismos, de $(\mathbb{T}, d)$.
- Mostre que uma rotação $R_\alpha : x+\mathbb{Z} \mapsto x+\alpha+\mathbb{Z}$ da circunferência tem pontos periódicos sse α é racional (se $\alpha = p/q$ com $(p,q)=1$ e $q>0$, então todo ponto da circunferência é periódico de período q. Por outro lado, se α é irracional, não existe nenhum natural $n \geq 1$ tal que $x+\mathbb{Z} = x+n\alpha+\mathbb{Z}$, seja o que for x).

4. (multiplicação $\times d$) Seja $d \geq 2$ um inteiro (por exemplo 10). A *multiplicação por d* é a transformação da circunferência $\times d : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ definida por

$$x+\mathbb{Z} \mapsto dx+\mathbb{Z}$$

Se $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ é uma representação na base d de um ponto $x \in \mathbb{T} \simeq [0,1)$, então a transformação $\times d$ envia

$$0.x_1x_2x_3\cdots \mapsto 0.x_2x_3x_4\ldots$$

- Verifique que $\times d$ é contínua.
- Determine a cardinalidade da imagem inversa de um ponto arbitrário de $\mathbb{T}$.
- Determine os pontos periódicos e pré-periódicos de $\times d$.

5. (deslocamentos de Bernoulli) Seja $\mathcal{A} = \{1,2,...,z\}$ um "alfabeto" de $z \geq 2$ letras, um conjunto finito munido da topologia discreta, e seja $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ o produto topológico de infinitas cópias de $\mathcal{A}$. Os pontos de Σ^+ são denotados por $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, com $x_n \in \mathcal{A}$, e são "palavras" infinitas nas letras do alfabeto $\mathcal{A}$ (ou seja, sucessões com valores em $\mathcal{A}$).

Uma base da topologia produto τ em Σ^+ é a família $\mathcal{C}$ dos "cilindros centrados", os subconjuntos do género

$$C_\alpha = \left\{x \in \Sigma^+ \text{ t.q. } x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_k = \alpha_k\right\}$$

palavras infinitas que "começam" pela palavra α, ao variar $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ entre todas as palavras finitas nas letras de $\mathcal{A}$. Um aberto do produto topológico Σ^+ é, por definição, uma reunião de cilindros centrados.

A topologia produto é metrizável, uma possibilidade é a métrica

$$d\left(x, x'\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cdot |x_n - x'_n|$$

onde $\lambda > 1$. Outra é a métrica

$$d_\infty(x, x') = z^{-\min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x'_n\}}.$$

O espaço Σ^+ é um espaço métrico compacto, perfeito e totalmente desconexo, logo homeomorfo a um conjunto de Cantor.

O *deslocamento de Bernoulli* (em inglês, *Bernoulli shift)* é a transformação $\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ que "esquece a primeira letra", definida por

$$\sigma : (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto (x_2, x_3, x_4, ...)$$

O deslocamento σ é uma transformação contínua, mas não é invertível, todo ponto de Σ^+ tem z pré-imagens.

- Mostre que a família $\mathcal{C}$ dos cilindros centrados é uma base de uma topologia (é uma cobertura, pois $\Sigma^+ = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_z$, e a interseção de dois cilindros centrados é um cilindro centrado ou o conjunto vazio).
- Mostre que, se λ é suficientemente grande, então os cilindros centrados são as bolas abertas, e também fechadas, de (Σ^+, d), e que d é uma ultra-métrica (ou seja, a desigualdade do triângulo é substituida pela mais forte $d(a, b) \leq \max\{d(a, c), d(c, b)\}$).
- Mostre que σ é uma transformação contínua (a imagem inversa de um cilindro centrado é uma reunião finita de z cilindros centrados, e portanto a imagem inversa de um aberto é uma reunião de cilindros centrados, logo um aberto).
- Determine os pontos periódicos de σ, e a cardinalidade de $\mathrm{Fix}(\sigma^n)$.

6. (dyadic adding machine) A norma diádica nos inteiros $\mathbb{Z}$ é definida por $\|n\|_2 = 2^{-k}$ se 2^k é a maior potência de 2 que divide n (ou seja, se $n = 2^k q$ com q ímpar). O grupo aditivo (de fato, o anel) dos *inteiros diádicos* $\mathbb{Z}_2$ é o completamento de $\mathbb{Z}$ com respeito à distância diádica $d_2(n, m) = \|n - m\|_2$. É um grupo topológico compacto. Pode ser pensado como o conjunto das séries formais

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^n = \ldots x_n \ldots x_3 x_2 x_1 x_0$$

com $x_n \in \{0, 1\}$, munido da "adição" definida da forma usual da direita à esquerda. Em quanto espaço topológico, $\mathbb{Z}_2$ é isomorfo ao produto topológico $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$, o conjunto das palavras infinitas $(\ldots x_n \ldots x_3 x_2 x_1 x_0)$ nas letras 0 e 1, munido da topologia produto. A *"dyadic adding machine"* (ou *"Kakutani-von Neumann odometer"*) é a translação $\eta : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, definida por

$$x \mapsto x + 1$$

ou seja,

$$(\eta x)_n = \begin{cases} 1 - x_n & \text{se } x_k = 1 \quad \forall\ k < n \\ x_n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Verifique que η é um homeomorfismo, com inversa $\eta^{-1} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ definida por

$$(\eta^{-1} x)_n = \begin{cases} 1 - x_n & \text{se } x_k = 0 \quad \forall\ k < n \\ x_n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- A adding machine η tem pontos periódicos?

7 Frações contínuas

1. (frações contínuas) As *frações contínuas (simples e com denominadores naturais)* são expressões formais

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e os "denominadores" $a_n \in \mathbb{N}$ se $n \geq 1$. Os *convergents* de $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ são as frações contínuas finitas

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Os convergentes $p_n/q_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ (com $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \neq 0$ e $(p_n, q_n) = 1$) são determinados pela equação recursiva

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

com condições iniciais $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$, e $p_{-1} = 1$ e $q_{-1} = 0$.

- Verifique que
$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$$
Deduza que os convergentes p_n/q_n são frações reduzidas.
- Verifique que
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n}$$
Deduza que os convergentes com n par crescem, e os convergentes com n ímpar decrescem.
- Use a equação recursiva para mostrar que os denominadores de uma fração contínua infinita satisfazem
$$q_{n+2} \geq q_{n+1} + q_n \geq 2q_n \,,$$
e portanto crescem exponencialmente, ou seja, $q_n \geq 2^{(n-1)/2}$.
- Deduza que a sucessão dos convergentes p_n/q_n de uma fração contínua infinita é convergente, ou seja, existe o $\lim_{n\to\infty} p_n/q_n = x$, chamado *valor* da fração contínua e denotado por
$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \,,$$

A cada número real $x \in \mathbb{R}$ corresponde uma única fração contínua, finita (com o último denominador $a_n > 1$) se x é racional e infinita se x é irracional.

A receita para determinar a fração contínua de $x \in \mathbb{R}$ é a seguinte. Definimos $a_0 = [x]$, donde

$$x = a_0 + x_0$$

com $0 \leq x_0 < 1$. Se $x_0 \neq 0$, ou seja, se x não é inteiro, definimos $r_1 = 1/x_0$, $a_1 = [1/x_0]$, donde

$$x = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{a_1 + x_1}$$

com $0 \leq x_1 < 1$. Se $x_1 \neq 0$, caso contrário x seria racional, definimos $r_2 = 1/x_1$, $a_2 = [1/x_1]$, donde

$$x = [a_0; a_1, r_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + x_2}}$$

com $0 \leq x_2 < 1$. Indutivamente, definimos

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n + x_n}}}}$$

onde $r_n = 1/x_{n-1}$, $a_n = [1/x_{n-1}]$ e $x_n = 1/x_{n-1} - a_n$.

- Verifique que se r_n é um inteiro (para algum n minimal!), e portanto $x_{n+1} = 0$, então

  $$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

  é racional.
- Mostre que, se x é racional, então o algoritmo termina em tempo finito e portanto $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ com $a_n > 1$ (observe que os r_n números racionais positivos com denominadores estritamente decrescentes).
- Deduza que, se x é irracional, então o algoritmo produz uma (única) representação de x como fração contínua infinita, i.e.

  $$x = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

  e todos os a_n com $n \geq 1$ são inteiros positivos.

2. (mapa de Gauß) A *mapa de Gauß* é a transformação $g : (0, 1] \to (0, 1]$ definida por

$$x \mapsto 1/x - [1/x]$$

- Verifique que se $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] \in (0, 1]\backslash\mathbb{Q}$, então

  $$g : [0; a_1, a_2, a_3, \ldots] \mapsto [0; a_2, a_3, \ldots]$$

- Deduza que, se $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] \in (0, 1]\backslash\mathbb{Q}$, então

  $$a_n = [1/G^{n-1}(x)]\,.$$

8 Órbitas regulares e perturbações

1. (teoremas de ponto fixo em dimensão 1) Seja $f : I \to I$ uma transformação contínua do intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

   i) Se $J \subset I$ é um intervalo compacto tal que $f(J) \subset J$, então f tem um ponto fixo em J.
   ii) Se $J \subset I$ é um intervalo compacto tal que $J \subset f(J)$ então f tem um ponto fixo em J

   - Prove os dois teoremas aplicando o teorema de Bolzano à função $x \mapsto f(x) - x$.
   - Observe que, se f não tivesse pontos fixos em J, então

     $$x \mapsto \frac{f(x) - x}{|f(x) - x|}$$

     seria uma aplicação contínua de um intervalo (J no caso i) ou um subintervalo de J no caso ii)) sobre o espaço desconexo $\{-1, 1\}$ ...

2. (bacia de atração) Seja p um ponto fixo da transformação contínua $f : X \to X$. A *bacia de atração*, ou *conjunto estável*, de p é o conjunto dos pontos cuja trajetória é assimptótica a p, i.e.

   $$W^s(p) = \left\{ x \in X \text{ t.q. } \lim_{n\to\infty} f^n(x) = p \right\}$$

   - Mostre que se a trajetória de x é uma sucessão convergente, o seu limite é um ponto fixo.
   - Mostre que conjuntos estáveis de dois pontos fixos diferentes são disjuntos.
   - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a transformação linear da reta definida por $x \mapsto \lambda x$. Estude a bacia de atração do ponto fixo 0 ao variar o parâmetro λ.
   - Determine conjuntos estáveis dos pontos fixos de

     $$f(x) = x/3 \qquad f(x) = x^2 \qquad f(x) = x^3$$

   - Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear do plano definida por

     $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

     Estude a bacia de atração do ponto fixo 0 ao variar os parâmetros a, b, c, d.

3. (contrações) Seja (X, d) um espaço métrico. Uma transformação $f : X \to X$ é uma *contração* (ou λ-*contração* se é importante lembrar o valor de λ) se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz $\lambda < 1$, ou seja, se existe $0 \le \lambda < 1$ tal que para todos $x, x' \in X$

   $$\mathrm{d}(f(x), f(x')) \le \lambda \cdot \mathrm{d}(x, x')$$

   O *princípio das contrações* (ou *teorema de ponto fixo de Banach*) afirma que todas as trajetórias de uma contração $f : X \to X$ são sucesssões de Cauchy, e a distância entre cada duas trajetórias diminue exponencialmente no tempo. Em particular, se X é completo, então f admite um único ponto fixo p, e a trajetória de todo ponto $x \in X$ converge exponencialmente para o ponto fixo, i.e. $f^n(x) \to x$ quando $n \to \infty$.

   De fato, seja $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, e seja (x_n) a sua trajetória, i.e. $x_{n+1} = f(x_n)$. Então $\mathrm{d}(x_{k+1}, x_k) \le \mathrm{d}(x_k, x_{k-1}) \le \cdots \le \mathrm{d}(x_1, x_0) \cdot \lambda^k$, e portanto

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}(x_{n+k}, x_n) &\le \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{d}(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \le \mathrm{d}(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\le \mathrm{d}(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot \mathrm{d}(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Em particular, (x_n) é uma sucessão de Cauchy. O limite $p = \lim_{n\to\infty} x_n$, que existe se X é completo, é um ponto fixo de f. A unicidade do ponto fixo é um exercício. A distância entre as aproximações sucessivas x_n e o ponto fixo p é estimada por $\mathrm{d}(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot \mathrm{d}(x_0, p)$, ou seja a convergência $x_n \to p$ é exponencial. □

- Prove a unicidade do ponto fixo de uma contração.
- Utilize o teorema do valor médio para mostrar que uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ é uma contração sse existe $\lambda < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Prove que uma contração de um espaço métrico compacto X não pode ser invertível, desde que o espaço contenha mais de um ponto. (Compare os diâmetros de X e de $f(X)$)
- Dê exemplos de contrações de

$$[0,1] \qquad [0,1]\times[0,1]$$

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } d(x,y) < r\} \qquad \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$$

- Mostre que uma transformação $f : X \to X$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$ distintos pode não ter pontos fixos, mesmo se o espaço métrico X for completo.

- Prove que se uma iterada $g = f^n$, com $n \in \mathbb{N}$, de uma transformação $f : X \to X$ de um espaço métrico completo é uma contração, então f admite um único ponto fixo (observe que $fg^k = g^k f$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, e deduza que o ponto fixo de g é também um ponto fixo de f).
- Mostre que as contrações lineares da reta $x \mapsto \alpha x$ e $x \mapsto \beta x$ não podem ser conjugadas se $\alpha \cdot \beta < 0$, i.e. se uma é crescente e a outra é decrescente.
  (Uma conjugação é um homeomorfismo da reta, em particular é monótono...)

4. (algoritmo de Heron) Considere o problema de determinar o lado ℓ de um quadrado dada a sua área a, ou seja, o número $\ell = \sqrt{a}$.

   Um método, utilizado provavelmente pelos babilónios e descrito por Héron de Alexandria[20], consiste em construir recursivamente rectângulos de área a com lados cada vez mais próximos. Se x_1 e y_1 são a base e a altura do primeiro rectângulo, e portanto $x_1 y_1 = a$, então o segundo rectângulo tem como base a média aritmética de base e altura do primeiro, o terceiro rectângulo tem como base a média aritmética da base e a altura do segundo, e assim sucessivamente. A equação recursiva que determina as bases dos rectângulos é portanto

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

   - Mostre que bases e alturas dos rectângulos verificam as equações recursivas

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad 1/y_{n+1} = \frac{1/x_n + 1/y_n}{2}$$

   - Calcule a diferença $x_{n+1} - y_{n+1}$ e mostre que

$$y_2 < y_3 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_3 < x_2$$

   e que

$$x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

[20] Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1968. O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Dover, 1969.

- Estime $\sqrt{2}$ com um erro < 0.01 e 0.001.
- Estime quantas iterações é preciso fazer para obter os primeiros n dígitos decimais de $\sqrt{2}$ usando o método dos babilónios.

5. (pesquisa binária/método das bisecções) Um método para determinar um zero de uma função contínua $f(x)$ consiste em determinar um intervalo inicial $[a_0, b_0]$ tal que os valores da função nos dois extremos tenham sinais opostos, e dividir repetidamente o intervalo em duas partes iguais seleccionando cada vez o sub-intervalo $[a_n, b_n]$ em cujos extremos a função continue a assumir sinais diferentes. Pelo teorema de Bolzano, no n-ésimo intervalo seleccionado, $[a_n, b_n]$, está um zero da função.

   - Determine a velocidade de convergência do método, ou seja, estime o comprimento
   $$|b_n - a_n|$$
   dos intervalos sucessivos.
   - Aproxime um zero de $x^3 - 2$ com 4 dígitos decimais correctos.
   - Use a sua máquina de calcular para estimar o ponto x tal que $\cos(x) = x$ (ou seja, um zero da função $f(x) = \cos(x) - x$).

6. (ordem da reta real e trajetórias) Seja $f : I \to I$ uma transformação contínua e crescente do intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então toda trajetória $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é monótona, crescente ou decrescente. Em particular, se o intervalo I é compacto, toda trajetória é convergente. Isto implica que, se I é compacto, existe um compacto não vazio $F \subset I$ de pontos fixos, e que os pontos em cada componente conexa de $I \backslash F$ têm trajetórias contidas na componente conexa, e convergentes para um ponto de ∂F.

   - Prove que um homeomorfismo $f : I \to I$ de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ não tem pontos periódicos com período superior a 2. Quando tem pontos periódicos de período 2 ? (Se o homeomorfismo é crescente então nenhum ponto pode ter período superior a 1. De fato, as trajetórias são monótonas, portanto ou $f(x) = x$, ou $f^{n+1}(x) > f^n(x) > ... > x$ para todo $n \geq 1$, ou $f^{n+1}(x) < f^n(x) < ... < x$ para todo $n \geq 1$. Seja agora f um homeomorfismo decrescente. Não é difícil ver que f tem um, e um único, ponto fixo p, e que p divide I em dois subintervalos I_- e I_+ que são permutados pela transformação f. Observe também que, se f é decrescente, então f^2 é crescente. Seja $x \neq p$ tal que $f^2(x) \neq x$. Então as sucessões $\left(f^{2n}(x)\right)$ e $\left(f^{2n+1}(x)\right)$ são estritamente monótonas e estão em "lados" distintos de p, i.e. uma em $I_\pm$ e a outra em $I_\mp$ ...)
   - Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $f : I \to I$ uma função contínua e crescente. Prove que a trajetória de cada ponto de I converge para um ponto fixo de f. Discuta a dinâmica de f.
   - Estude a dinâmica de uma transformação contínua e decrescente $f : I \to I$ definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. (Observe que, se f é decrescente, então f^2 é crescente...)

9 Linearização/análise local

1. (Análise local/linearização/estabilidade dos estados estacionários em dimensão 1) Sejam $f : I \to I$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e $p \in I$ um ponto fixo de f.

   Se $|f'(p)| < 1$, então o ponto fixo é *atrativo*: as trajectórias de todo o ponto x_0 suficientemente próximo de p convergem para p.

   Se $|f'(p)| > 1$, então o ponto fixo é *repulsivo*: as trajectórias de todo o ponto $x_0 \neq p$ numa vizinhança suficientemente pequena de p saem da vizinhança em tempo finito.

   Se $f'(p) = 0$, o ponto fixo p é dito *super-atractivo*.

   - Dê exemplos que mostram que o conjunto estável de um ponto fixo repulsivo p pode conter estritamente $\{p\}$.
   - Procure uma boa definição de *órbita periódica atrativa.*
     (Observe que, se $\{p, f(p), ..., f^{n-1}(p)\}$ é uma órbita, a derivada de f^n é a mesma em todos os seus pontos pela regra da cadeia. Se $\left|(f^n)'(p)\right| < 1$, então p é um ponto fixo atrativo da transformação f^n, e portanto existe uma vizinhança B de p tal que $f^{kn}(x) \to_{k\to\infty} p$ para todo $x \in B$. Então $B \cup f^{-1}(B) \cup ... \cup f^{-(n-1)}(B)$ é uma vizinhança da órbita periódica, e as trajetórias dos seus pontos são assimptóticas à órbita de p ...)
   - Se p é um ponto fixo de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(p) = 1$, então tudo ou quase tudo pode acontecer! O conjunto estável de p pode ser uma vizinhança de p, pode ser só $\{x\}$, ou pode conter uma "meia vizinhança" de p, um intervalo do género $[p, p \pm \varepsilon[$ ...
   - Sejam $f : V \to V$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e $p \in V$ um ponto fixo de f. Mostre que se $|f'(p)| < 1$, então p é atrativo, ou seja admite uma vizinhança B tal que $f^n(x) \to p$ para todo $x \in B$.
   - Seja p um ponto fixo super-atrativo da transformação $f : I \to I$. Use o polinómio de Taylor de grau 1 com resto para provar que, se x_0 está numa vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$, então a trajectória de x_0 converge para o ponto fixo $\overline{x}$ e a velocidade de convergência é "quadrática", ou seja,

     $$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq \beta \cdot |x_n - \overline{x}|^2$$

     onde β é uma constante.
   - Estude a natureza dos pontos fixos das seguintes transformações

     $$f(x) = \alpha x \qquad f(x) = \alpha x^3 \qquad f(x) = \alpha x + \beta x^2$$

     ao variar os parâmetros.
   - Estude a dinâmica de

     $$x \mapsto x \pm x^3 \qquad \text{e} \qquad x \mapsto x \pm x^2$$

   - Digite 0.1 na sua máquina de calcular, e pressione repetidamente a tecla "cos". O que acontece? Porque?

2. (família quadrática). Considere a *família quadrática* ou *logística* (do francês "logement"), a família de transformações $f_\lambda : [0, 1] \to [0, 1]$ definidas por

   $$x \mapsto \lambda x(1 - x)$$

   onde o parâmetro λ tem valores no intervalo $[0, 4]$.

   - Os pontos fixos de f_λ são 0, que é atrativo quando $0 \leq \lambda < 1$, e $p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, que é atrativo quando $1 < \lambda < 3$.
   - Se $\lambda \in [0, 1]$ então toda trajetória $(f_\lambda^n(x))$ converge para 0. De fato, toda trajetória é uma sucessão decrescente e limitada, logo convergente, e o limite é o único ponto fixo 0.

- Se $\lambda \in]1,3]$ então toda trajetória $(f_\lambda^n(x))$ converge para p_λ. De fato, se $1 < \lambda < 3$, existe uma vizinhança V de p_λ tal que $f_\lambda|_V$ é uma contração e tal que para todo $x \in [0,1]$ existe um tempo $n \geq 0$ tal que $f_\lambda^n(x) \in V$.

3. (método de Newton) O *método de Newton* para aproximar as raizes de um polinómio $P(z)$, ou seja, resolver a equação

$$P(z) = 0\,,$$

consiste em escolher uma primeira aproximação z_0, e iterar

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}\,.$$

Ou seja, se z_0 é uma primeira conjectura, uma conjectura melhor é o zero da aproximação linear $P(z) \simeq P(z_0) + P'(z_0)\cdot(z - z_0)$.

- Mostre que se a sucessão (z_n) converge, i.e. $z_n \to z_\infty$, e se $P'(z_\infty) \neq 0$, então o limite z_∞ é um zero do polinómio. Mostre que, se a conjectura inicial z_0 está suficientemente próxima de uma raiz $\overline{z}$ e $P'(\overline{z}) \neq 0$, então a sucessão dos z_n converge para esta raiz.
- Mostre que se $|P'(z)| > \delta$ e $|P''(z)| < M$ numa vizinhança de uma raiz r, então r é um ponto fixo super-atractivo de $f(z) = z - P(z)/P'(z)$.
- Verifique que o método de Newton aplicado ao polinómio quadrático $z^2 - a$, com $a > 0$, corresponde ao algoritmo de Heron!
- Estime $\sqrt{17}$ ...
- Escreva a receita do método de Newton para resolver $z^n - a = 0$, com $a > 0$ e $n \geq 2$.
- Estime raizes de $x^3 - 2x - 5 = 0$.
- Use o método de Newton para aproximar a "razão", a raiz positiva de $x^2 - x - 1$.
- Utilize o método de Newton para estimar raizes de

$$z^2 + 1 + z \qquad z^3 - z - 1 \qquad z^5 + z + 1 \qquad z^3 - 2z - 5$$

10 Linearização de fluxos

1. (sistemas lineares) Um *sistema linear* (real) é uma EDO

$$\dot{x} = Ax\,,$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear definido por uma matriz quadrada $(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, de acordo com $(Ax)_i := \sum_j a_{ij}x_j$. A solução do sistema com condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ é

$$x(t) = e^{tA}x(0)\,,$$

onde o "exponencial" do operador tA é definido pela série de potências

$$\boxed{e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\,.}$$

Se A é diagonalizável, e possui n valores próprios reais e distintos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então, numa base diagonalizante $e_1, \ldots, e_n$, a solução é $\sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k}x_k(0)e_k$.

O campo linear $v(x) = Ax$ é dito *hiperbólico* se o espectro de A, o conjunto

$$\mathrm{Sp}(A) := \{\lambda_k = \rho_k + i\omega_k \in \mathbb{C} \quad \text{t.q.} \quad \det(A - \lambda_k I) = 0\}$$

dos valores próprios de A, for disjunto do eixo imaginário (ou seja, $\rho_k \neq 0\ \forall k$).

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\rho_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 t} \end{pmatrix}$$

  A origem é dita *nodo estável* se $\rho_1, \rho_2 < 0$, *nodo instável* se $\rho_1, \rho_2 > 0$, *ponto de sela* se $\rho_1 < 0 < \rho_2$.

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad e^{tA} = e^{\rho t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

  e

$$A = \begin{pmatrix} \rho & \omega \\ -\omega & \rho \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad e^{tA} = e^{\rho t}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

  A origem é dita *foco estável* se $\rho < 0$, *foco instável* se $\rho > 0$.

- Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + y \end{aligned}$$

  Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$.

- Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= x + y \end{aligned}$$

  Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.

2. (EDOs lineares homogéneas de ordem n) Soluções da EDO linear homogénea de ordem n

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$$

são combinações lineares (finitas) de "quase-polinómios". A conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução se z é uma raiz do *polinómio caractéristico*

$$P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0\,.$$

A cada raiz λ_k com multiplicidade algébrica $n_k \geq 1$ (i.e. tal que $P(z) = (z-\lambda_k)^{n_k} Q(z)$, onde $Q(z)$ é um polinómio tal que $Q(\lambda_k) \neq 0$) estão associadas as n_k soluções independentes

$$e^{\lambda_k t}\,, \qquad t e^{\lambda_k t}\,, \qquad \ldots\,, \qquad t^{n_k-1} e^{\lambda_k t}\,.$$

Portanto, o espaço das soluções (complexas) da EDO linear homogénea de ordem n é um espaço linear $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$, de dimensão (complexa) n. A solução geral é $\sum_k p_k(t) e^{\lambda_k t}$, onde $\lambda_k \in \mathbb{C}$ são as raizes do polinómio característico, com multiplicidades n_k (e portanto $\sum_k n_k = n$), e $p_k \in \mathbb{C}[t]$ são polinómios arbitrários de grau $< n_k$.

- Verifique que as soluções de $x^{(n)} = 0$ são os polinómios de grau $< n$.
- Verifique que o núcleo do operador linear $L_\lambda := \frac{d}{dt} - \lambda$, definido por $(L_\lambda f)(t) = \dot{f}(t) - \lambda f(t)$, é o espaço linear de dimensão 1 gerado pela função $e^{\lambda t}$. Mostre, por indução, que o núcleo da potência $L_\lambda^n = \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^n$, com $n \geq 1$, é o espaço linear (de dimensão n) dos quase-polinómios $p(t)e^{\lambda t}$ de grau $< n$.
- Determine a solução geral das seguintes ODEs lineares

$$\dddot{x} - \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \qquad \ddddot{x} = x \qquad \ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = 0 \qquad \dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

3. (estabilidade local) Seja $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\overline{x}) = 0$. O equilíbrio é *(localmente) estável* se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que

$$\|x(0) - \overline{x}\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|x(t) - \overline{x}\| < \varepsilon\,, \quad \forall t \geq 0\,.$$

O equilíbrio é *(localmente) assimptoticamente estável* se é estável e se $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|x(0) - \overline{x}\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad x(t) \to \overline{x}\,, \quad \text{quando } t \to \infty\,.$$

- Verifique que a solução de equilíbrio $x(t) = 0$ do campo linear $v(x) = Ax$ é estável se todos os valores próprios de A têm parte real $\rho_k = \Re(\lambda_k) \leq 0$.
- Verifique que a solução de equilíbrio $x(t) = 0$ do campo linear $v(x) = Ax$ é assimptoticamente estável se todos os valores próprios de A têm parte real $\rho_k = \Re(\lambda_k) < 0$.

4. (funções de Lyapunov) Seja $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\overline{x}) = 0$. Uma *função de Lyapunov* é uma função diferenciável $H(x)$ que assume um mínimo local em $\overline{x}$ (i.e. $H(\overline{x}) < H(x)$ para todo $x \neq \overline{x}$ numa vizinnhança de $\overline{x}$) e que não cresce ao longo das trajectórias do sistema, ou seja,

$$\frac{d}{dt} H(x(t)) \leq 0$$

Se o sistema $\dot{x} = v(x)$ admite uma função de Lyapunov $H(x)$ numa vizinhança do equilíbrio $\overline{x}$, então

$$\boxed{\tfrac{d}{dt} H(x(t)) \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{x} \text{ é localmente estável}}$$

$$\boxed{\tfrac{d}{dt} H(x(t)) < 0 \quad \forall\, x(t) \neq \overline{x} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{x} \text{ é localmente assimptoticamente estável}}$$

- Considere o sistema conservativo $m\ddot{\vec{q}} = -\vec{\nabla} V(\vec{q})$, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= \tfrac{1}{m}\vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= -\vec{\nabla} V(\vec{q}) \end{aligned}$$

com $\vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{R}^n$. Verifique que a energia

$$E(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}\|\vec{p}\|^2 + V(\vec{q})$$

é uma constante do movimento. Deduza que os pontos de equilíbrio $(\overline{q}, 0)$, onde $\overline{q}$ é um mínimo local do potencial $V(q)$, são localmente estáveis.

5. (oscilações) Considere a equação das oscilações amortecidas $\ddot{q} + 2\alpha q + \omega^2 q = 0$, ou seja, o sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -2\alpha p - \omega^2 q \end{aligned}$$

   - Esboce as curvas de fase do sistema para diferentes valores dos parâmetros $\alpha \geq 0$ e ω.
   - Mostre que a energia

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

     é conservada quando $\alpha = 0$. Deduza que $(0,0)$ é um equilíbrio estável.
   - Mostre que $(0,0)$ é um equilíbrio assimptoticamente estável se $\alpha > 0$.

6. (linearização de campos de vectores) Seja $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

   ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\overline{x}) = 0$. A *linearização* do sistema em torno de $\overline{x}$ é o sistema linear

$$\dot{y} = Ay$$

   para a diferença $y(t) = x(t) - \overline{x}$, onde $A = Dv(\overline{x})$ é a matriz Jacobiana do campo v no ponto $\overline{x}$.

   O *teorema de Hartman-Grobman*[21] [22] [23] afirma que, se o campo linearizado A é hiperbólico, então o campo $v(x)$ é "localmente equivalente" à sua parte linear A (ou seja, existe um homeomorfismo $h : U \to V$ de uma vizinhança de $\overline{x}$ sobre uma vizinhaça da origem 0 tal que $h(\Phi_t(x)) = e^{tA}h(x)$, onde $\Phi_t(x)$ é o fluxo de $\dot{x} = v(x)$).

   Em particular, se os valores próprios $\{\lambda_i\}$ de A têm parte real $\Re(\lambda_i) < 0$ então

$\Re(\lambda_i) < 0\,,\ \forall i$	$\Rightarrow$	$\overline{x}$ é localmente assimptoticamente estável

   - Linearize o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^2 + x + \sin(y) \\ \dot{y} &= \cos(y) - x^3 - 5y \end{aligned}$$

     en torno do seu ponto de equiíbrio $(1,0)$ e discuta a estabilidade.
   - Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y \\ \dot{y} &= -x - y \end{aligned}$$

     Determine os pontos de equiíbrio e discuta a estabilidade. Simule o sistema e esboce as curvas de fase.
   - Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4 - x^2 - 4y^2 \\ \dot{y} &= 1 - x^2 + y^2 \end{aligned}$$

     Determine os pontos de equiíbrio e discuta a estabilidade. Simule o sistema e esboce as curvas de fase.
   - Discuta a estabilidade dos equilíbrios do pêndulo $\ddot{q} = -\omega^2 \sin(q) - \alpha\dot{q}$.

7. (pêndulo matemático) Considere o *pêndulo matemático*,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$$

   - Simule o sistema.

[21] D.M. Grobman, Homeomorphisms of systems of differential equations, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **128** (1959), 880-881.
[22] P. Hartman, A lemma in the theory of structural stability of differential equations, *Proc. A.M.S.* **11** (4) (1960), 610-620.
[23] P. Hartman, On local homeomorphisms of Euclidean spaces, *Bol. Soc. Math. Mexicana* **5** (1960), 220-241.

- Mostre que a energia
$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega^2(1 - \cos(\theta))$$
é uma constante do movimento.
- Discute a estabilidade das órbitas periódicas.
- Discuta as oscilações do pêndulo com atrito e com momento de rotação constante,
$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) + \alpha\dot{\theta} = M$$

8. (ciclos limite) Considere o sistema
$$\begin{aligned} \dot{x} = &\quad y + x(1 - x^2 + y^2) \\ \dot{y} = &\quad -x + y(1 - x^2 + y^2) \end{aligned}$$

- Simule o sistema.
- Mostre que, em coordenadas polares, o sistema é
$$\begin{aligned} \dot{r} = &\quad r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = &\quad 1 \end{aligned}$$
Deduza que a circunferência unitária é uma órbita periódica.
- Estude a estabilidade da órbita periódica.

11 Persistência e bifurcações

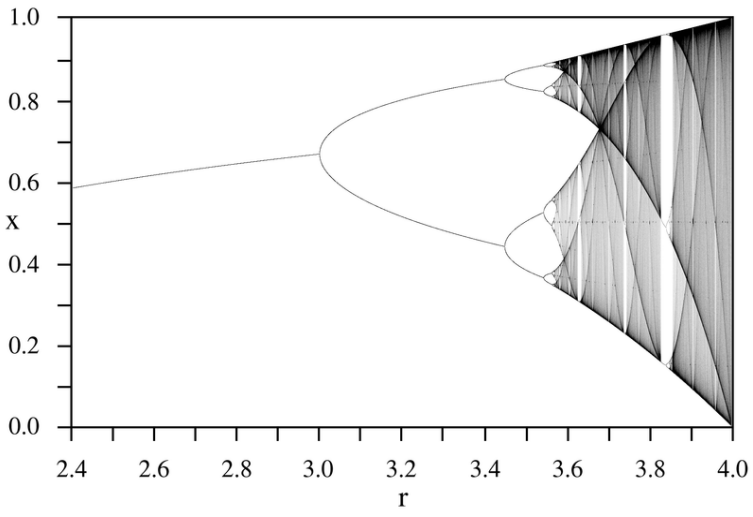
não leccionado

1. (transversalidade e persistência dos pontos fixos) Sejam $f : I \to I$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e p um ponto fixo de f. Se $f'(p) \neq 1$, então o ponto fixo p é "isolado", ou seja, admite uma vizinhança B tal que p é o único ponto fixo de f em B. Os pontos fixos que satisfazem a condição $f'(p) \neq 1$ são ditos *transversais* (porque a tagente ao gráfico $\text{graph}(f) = \{(x, y) \text{ t.q. } y = f(x)\}$ de f em p é transversal ao gráfico da função identidade, a reta $\{(x, y) \text{ t.q. } y = x\}$).

   Se p é um ponto fixo transversal de $f : I \to I$, então toda transformação $g : I \to I$ suficientemente $\mathcal{C}^1$-próxima[24] de f tem um, e um único, ponto fixo, também transversal, numa vizinhança de p.

   - Prove que um ponto fixo transversal é isolado (um ponto fixo é uma solução da equação $F(x) = f(x) - x = 0$. Se $f'(p) \neq 1$ então $F'(p) \neq 0$. O teorema da função inversa diz então que F é invertível numa vizinhança B de p, e isso implica que p é o único zero de F em B).
   - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$, e seja p um ponto periódico de período n tal que $(f^n)'(p) \neq 1$. Toda transformação g suficientemente $\mathcal{C}^1$-próxima de f tem um ponto periódico de período n próximo de p. (Repita a demonstração anterior com f^n em vez de f)
   - Sejam $f : V \to \mathbb{R}^n$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e p um ponto fixo de f. A transversalidade de p se traduz na condição de que o operador $f'(p)$ não tenha 1 como valor próprio. Prove que se o operador $f'(p)$ não tem 1 como valor próprio, então o ponto fixo p é isolado (existe uma vizinhança B de x tal que x é o único ponto fixo de f em B). Enuncie e prove um resultado de "persistência" análogo ao caso da reta.

2. (duplicação do período)
3. (bifurcação sela-nó) bifurcação sela-nó
4. (mapa quadrático na reta real)
$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$
5. (Feigenbaum)



Bifurcation diagram of the logistic map

[24] A "distância" $\mathcal{C}^1$ entre f e g é
$$\|f - g\|_{\mathcal{C}^1} = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x) - g'(x)| .$$

6. (bifurcação de Hopf) Considere o sistema[25]

$$\dot{x} = -y + x(\lambda - (x^2 + y^2))$$
$$\dot{y} = x + y(\lambda - (x^2 + y^2))$$

- Simule o sistema ao variar o parâmetro λ.
- Mostre que a origem é um equilíbrio assimptoticamente estável quando $\lambda < 0$.
- Mostre que a origem é um equilíbrio instável quando $\lambda > 0$. Observe que a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é um "ciclo limite" do sistema quando $\lambda = 1$.
- Simule o sistema

$$\dot{x} = x + y - x(\lambda - (x^2 + y^2))$$
$$\dot{y} = -x + y - y(\lambda - (x^2 + y^2))$$

[25] E. Hopf, Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystem, *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Phys.* **95** (1943), 3-22.

12 Recorrências

1. (conjuntos ω e α limite) Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico topológico. O conjunto ω-*limite* do ponto $x \in X$ é o conjunto dos pontos limites da trajetória de x, ou seja, o conjunto
$$\omega_f(x) := \cap_{n=0}^{\infty} \overline{\cup_{k \geq n} \{f^k(x)\}}$$
dos pontos $x' \in X$ tais que existe uma sucessão de tempos $n_i \to \infty$ tal que $f^{n_i}(x) \to x'$ quando $i \to \infty$. $\mathrm{Lim}_f = \cup_{x \in X} \omega_f(x)$ denota o conjunto dos pontos ω-limites.

   Se f é invertível, o conjunto α-*limite* de x é definido por $\alpha_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x)$, ou seja é o conjunto dos pontos $x' \in X$ tais que existe uma sucessão de tempos $n_i \to \infty$ tal que $f^{-n_i}(x) \to x'$ quando $i \to \infty$. $\mathrm{Lim}_{f^{-1}} = \cup_{x \in X} \alpha_f(x)$ denota o conjunto dos pontos α-limites.

   - Prove que $\omega_f(x)$ é fechado e +invariante. Prove que, se f é um homeomorfismo, então $\omega_f(x)$ e $\alpha_f(x)$ são fechados e invariantes.
   - Mostre que, se X é compacto, então a trajetória $(f^n(x))_{n \in \mathbf{N}_0}$ de todo ponto $x \in X$ admite subsucessões convergentes, e portanto $\omega_f(x) \neq \emptyset$. Analogamente, se f é um homeomorfismo, $\alpha_f(x) \neq \emptyset$ para todo ponto $x \in X$. Em particular, os conjuntos $\mathrm{Lim}_{f^{\pm 1}}$ não são vazios.
   - Dê exemplos que mostram que $\omega_f(x)$ e $\alpha_f(x)$ podem ser vazios (X não pode ser compacto!).
   - Mostre que $\mathrm{Per}_f \subset \mathrm{Lim}_f$.

2. (pontos recorrentes) Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico topológico. O ponto $x \in X$ é *recorrente* se $x \in \omega_f(x)$, ou seja, se dada uma vizinhança arbitrária B de x, existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \in B$. Rec_f denota o conjunto dos pontos recurrentes de f.

   Se f é um homeomorfismo, $\mathrm{Rec}_{f^{-1}}$ é o conjunto dos pontos x tais que $x \in \alpha_f(x)$.

   - Mostre que x é recorrente sse dada uma vizinhança arbitrária B de x, existem infinitos tempos $n \geq 1$ tais que $f^n(x) \in B$.
   - Mostre que $\mathrm{Per}_f \subset \mathrm{Rec}_f$.
   - Defina uma ordem parcial em X da seguinte maneira: $x \prec x'$ se para todas vizinhanças U de x e V de x' existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Prove que x é recorrente sse $x \prec x$.
   - Dê exemplos que mostram que Rec_f e $\mathrm{Rec}_{f^{-1}}$ podem ser vazios.

3. (teorema de Dirichlet) O *teorema de Dirichlet* ([HW59] XI, Theorem 185) afirma que, se α é irracional, então existem infinitas frações reduzidas p/q tais que
$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \,. \tag{12.1}$$
   Em particular, se $\mathrm{d}(\cdot, \cdot)$ denota a distância em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, então $\mathrm{d}(x + q\alpha + \mathbb{Z}, x + \mathbb{Z}) < 1/q$ para infinitos valores de $q \in \mathbb{N}$, e portanto todos os pontos $x + \mathbb{Z}$ são recorrentes para a rotação irracional $R_\alpha(x + \mathbb{Z}) = x + \alpha + \mathbb{Z}$.

   De fato, dado um inteiro positivo Q, dividimos a circunferência unitária $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx [0, 1)$ nos Q intervalos disjuntos $I_k := [k/Q, (k+1)/Q)$, com $k = 0, 1, \ldots, Q-1$, de comprimento $1/Q$. Pelo "princípio das gavetas de Dirichlet"[26] (enunciado para provar este teorema!), pelo menos dois dos $Q + 1$ pontos
$$0, \quad \{\alpha\}, \quad \{2\alpha\}, \quad \{3\alpha\}, \quad \ldots, \quad \{Q\alpha\}$$
   (onde $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ denota a "parte fraccionária" de x) pertencem ao mesmo intervalo I_k. Ou seja, existem inteiros q_1, q_2, p_1 e p_2, com $0 \leq q_1 < q_2 \leq Q$, tais que
$$|(q_1\alpha - p_1) - (q_2\alpha - p_2)| < 1/Q \,,$$

[26] *Dirichlet's box principle*: "if there are $n + 1$ objects in n boxes, there must be at least one box which contains two (or more) of the objects".

e portanto existem inteiros $q = q_2 - q_1 > 0$ e $p = p_1 - p_2$ tais que

$$|q\alpha - p| < 1/Q\,, \quad \text{i.e.} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}\,. \tag{12.2}$$

A fortiori, sendo $0 < q \leq Q$, temos a (12.1). A existência de infinitas soluções de (12.2) se α é irracional é um exercício. □

- Mostre, sem usar o argumento de Dirichlet, que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\varepsilon > 0$ existem infinitos racionais p/q tais que
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q}$$
- Mostre que se α é racional então (12.1) pode ter apenas um número finito de soluções (se $\alpha = a/b$, calcule $|\alpha - p/q|$ e observe que é $\geq 1/(bq)$, e portanto o denominador em (12.1) deve ser $q < b$).
- Mostre que se α é irracional, existem infinitas soluções $p/q \in \mathbb{Q}$ de (12.1) (se apenas existem as soluções p_1/q_1, ..., p_n/q_n, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\alpha - p_k/q_k| > \varepsilon$ para todos os $k = 1, \ldots, n$. Se tomamos $Q > 1/\varepsilon$, o raciocínio de Dirichlet produz mais uma solução diferente ...).

4. (teorema de recorrência de Poincaré) Seja $f : X \to X$ um endomorfismo do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{E}, \mu)$. Ou seja, X é um conjunto não vazio, $\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X, $\mu : \mathcal{E} \to [0, 1]$ é uma medida de probabilidades (em particular, σ-aditiva), e $f : X \to X$ é uma transformação "mensurável" (tal que $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ para todo o $A \in \mathcal{E}$) que preserva a medida, ou seja, tal que $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todos os $A \in \mathcal{E}$. Dado um evento $A \in \mathcal{E}$, seja
$$A^{\text{rec}} := \{x \in A \text{ t.q. } f^n(x) \in_{\text{i.o.}} A\}$$
("i.o." significa "infinitely often") o subconjunto dos pontos de A cuja trajetória visita A infinitas vezes, ou seja, o conjuntos dos pontos $x \in A$ tais que $f^n(x) \in A$ para infinitos tempos $n \geq 1$. O *teorema de recorrência de Poincaré* [27] afirma que A^{rec} tem probabilidade total, ou seja,
$$\mu\,(A^{\text{rec}}) = \mu\,(A)\ ,$$
ou seja, "a trajetória de quase todo o ponto de A volta a visitar A infinitas vezes".

De fato, para $k \geq 1$, seja $B_k = \{x \in A \text{ t.q. } f^n(x) \notin A\ \forall\ n \geq k\}$ o conjunto dos pontos de A que nunca voltam em A para tempos $n \geq k$. É evidente que $B_k = A \cap (\cap_{n \geq k} f^{-n}\,(X \backslash A))$ e que $A^{\text{rec}} = A \backslash\, (\cup_{k \geq 1} B_k)$. Isto mostra que $A^{\text{rec}} \in \mathcal{E}$, e que para provar o teorema é suficiente provar que cada B_k tem medida nula. A primeira observação é que $f^{-nk}(B_k) \cap B_k = \emptyset$ para todo $n \geq 1$, pois um ponto na interseção seria um ponto $x \in B_k \subset A$ tal que $f^{kn}\,(x) \in A$, com $kn \geq k$, o que contradiz a definição de B_k. Pela mesma razão, $f^{-nk}(B_k) \cap f^{-mk}(B_k) = \emptyset$ para todos $n > m \geq 0$. Portanto, os eventos $f^{-nk}(B_k)$, com $n \in \mathbb{N}$, são dois a dois disjuntos e têm todos a mesma probabilidade $\mu\,(B_k)$, porque f preseva a medida μ. Sendo a medida total finita, a única possibilidade é que $\mu\,(B_k) = 0$. □

Se $f : X \to X$ é uma transformação contínua do expaço métrico (X, d), e se a medida de probabilidade invariante μ é *difusa*, ou seja, é tal que $\mu(U) > 0$ para todos os abertos não vazios $U \subset X$, então o conjunto Rec_f dos pontos recorrentes é denso em X.

De fato, para cada $n \geq 1$, seja
$$R_n = \left\{x \in X \text{ t.q. } \exists\ k \geq 1 \text{ t.q. } d(f^k(x), x) < 1/n\right\}$$
o conjunto dos pontos "$1/n$-recurrentes". É evidente que $\text{Rec}_f = \cap_{n=1}^{\infty} R_n$. Os conjuntos R_n são abertos. Para mostrar que Rec_f é denso é suficiente mostrar que cada R_n é denso, pois pelo teorema de Baire uma interseção enumerável de abertos densos é densa. Seja B uma bola não vazia de diâmetro $\text{diam}(B) < 1/n$. As imagens inversas B, $f^{-1}(B)$, $f^{-2}(B)$, $f^{-3}(B)$, ... têm todas a mesma medida $\mu(B) > 0$. Sendo $\mu(X) = 1$, não podem ser disjuntas.

[27] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Vilars et Fils, 1892-1899.

Portanto, existem inteiros $k > j \geq 0$ tais que $f^{-k}(B) \cap f^{-j}(B) \neq 0$, e isto implica que B contém um ponto $1/n$-recorrente (se $x \in f^{-k}(B) \cap f^{-j}(B)$, então $x' = f^j(x) \in B$ e $f^{k-j}(x') \in B$, e, em particular, $d(f^{k-j}(x'), x') < 1/n$). Como B é arbitrário, R_n é denso e, pelo teorema Baire, Rec_f é denso. □

5. (Arnold's cat map) Consider the unimodular matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Both A and its inverse A^{-1} have integer entries, hence preserve the lattice $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. There follows that A induces an invertible transformation $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, actually an homeomorphism, of the torus $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ onto itself, given explicitly by

$$f(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) = (2x + y + \mathbb{Z}, x + y + \mathbb{Z}) .$$

The map f preserves the Lebesgue probability measure, the area, because $\det A = 1$. There follows from Poincaré recurrence theorem that the set of recurrent points is dense. Moreover, for all measurable $A \subset \mathbb{T}^2$, the set A^{rec} of those points of A whose trajectory visit A infinitely often has total probability.

- Show that the set of periodic points is the set of those points of $\mathbb{T}^2$ with rational coordinates (observe that the finite set of those points with rational coordinates and denominators $\leq Q$ is left invariant by f, which therefore acts as a permutation ...).

6. (conjunto não-errante) Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico topológico. O ponto $x \in X$ é *errante* se admite uma vizinhança disjunta de todas as suas iteradas, i.e. se existe um aberto U que contém x tal que $U \cap f^n(U) = \emptyset$ para todo tempo $n \geq 1$. O ponto x não é errante se para toda vizinhança U de x existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

O *conjunto não-errante* NW_f (do inglês "non-wandering set") é o conjunto dos pontos x que não são errantes.

O conjunto não-errante NW_f é fechado (o cojnunto dos pontos errantes é aberto quase por definição, pois, se x é errante, todo ponto duma sua vizinhança é errante) e +invariante. Contém os ω-limites de todos os pontos de X, assim como os pontos recorrentes. As inclusões são

$$\mathrm{Per}_f \subset \mathrm{Lim}_f \subset \mathrm{NW}_f \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Per}_f \subset \mathrm{Rec}_f \subset \mathrm{NW}_f$$

Se f é um homeomorfismo, NW_f, que é igual a $\mathrm{NW}_{f^{-1}}$, é também invariante, e contém os ω- e α-limites de todos os pontos de X.

(X compacto $\Rightarrow \mathrm{NW}_f \neq \emptyset$) Se X é compacto, então $\mathrm{NW}_f \neq \emptyset$, porque todo ponto $x \in X$ tem $\omega_f(x) \neq \emptyset$ e porque $\mathrm{Lim}_f \subset \mathrm{NW}_f$.

- Prove que o conjunto não-errante de um homeomorfismo é fechado, invariante e contém os ω- e α-limites de todos os pontos.
- Mostre que, se f é um homeomorfismo, então $\mathrm{NW}_f = \mathrm{NW}_{f^{-1}}$.
- Dê exemplos que mostram que NW_f pode ser vazio.
- Mostre que $\mathrm{Per}_f \subset \mathrm{Rec}_f \subset \mathrm{NW}_f \subset \mathrm{Rec}_f^{\varepsilon}$. Dê exemplos que mostram que as inclusões podem ser estrictas.
- Mostre que $\mathrm{Per}_f \subset \mathrm{Rec}_f \subset \mathrm{NW}_f$ e portanto $\overline{\mathrm{Per}_f} \subset \overline{\mathrm{Rec}_f} \subset \mathrm{NW}_f$. Mais dificil é arranjar exemplos que mostram que as inclusões podem ser estrictas.
- Determine os conjuntos não errantes das transformações lineares do plano.

13 Transitividade e órbitas densas

1. (transformações transitivas) Seja X um espaço métrico completo e separável. Uma transformação contínua $f : X \to X$ é *(topologicamente) +transitiva* se verifica uma das condições equivalentes:

   i) para cada dois abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,
   ii) existe um ponto $x \in X$ tal que $\omega_f(x) = X$,
   iii) existe um conjunto residual[28] de pontos $x \in X$ tais que $\omega_f(x) = X$.

   As implicações iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) são evidentes, pois se $\omega_f(x) = X$, então a trajetória de x passa infinitas vezes por todos os abertos não vazios de X. Falta provar i) $\Rightarrow$ iii). A primeira observação é que a condição i) implica que se V é um aberto não vazio, então $\cup_{n\geq 0} f^{-n}(V)$ é denso. Em particular, a imagem inversa $f^{-1}(V)$ de todo o aberto não vazio é não vazia, e portanto , para todo o $k \geq 0$, também $\cup_{n\geq k} f^{-n}(V) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}\left(f^{-k}(V)\right)$ é denso. Seja $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma base enumerável da topologia de X. A família dos $\cup_{n\geq k} f^{-n}(U_i)$, com $k \geq 0$ e $i \geq 1$, é uma família de abertos densos em X. A sua interseção enumerável $R = \cap_{i\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq 0} \cup_{n\geq k} f^{-n}(U_i)$ é um conjunto residual, e um ponto $x \in R$ tem uma trajetória que passa infinitas vezes por cada um dos abertos U_i, i.e. $\omega_f(x) = X$. □

   Um homeomorfismo $f : X \to X$ é *(topologicamente) transitivo* se verifica uma das condições equivalentes:

   i) para cada dois abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,
   ii) existe um ponto $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$,
   iii) existe um conjunto residual de pontos $x \in X$ tais que $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$.

   As implicações iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) são evdentes, pois, se a órbita completa de x é densa, então a sua trajetória passa pelo menos uma vez por todos os abertos não vazios de X. Falta provar que i) $\Rightarrow$ iii). A condição i) é equivalente a dizer que a órbita $\cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ de todo o aberto não vazio U é densa em X. Seja $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma base enumerável da topologia de X. A família dos $\cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U_i)$ é uma família de abertos densos. A sua interseção enumerável $R = \cap_{i\in\mathbb{N}} \cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U_i)$ é um conjunto residual, e a trajetória de um ponto $x \in R$ passa pelo menos uma vez por cada um dos abertos U_i, i.e. $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$. □

   - Prove que, se $f : X \to X$ é +transitiva, então $\mathrm{NW}_f = X$.
   - Prove que se $f : X \to X$ é +transitiva, então o conjunto Rec_f dos pontos recorrentes é residual.
   - Prove que um homeomorfismo $f : X \to X$ é transitivo sse X não contém uma reunião disjunta de dois subconjuntos abertos invariantes e não vazios.
   - Prove que, se $f : X \to X$ é um homeomorfismo transitivo, então toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ invariante é constante.
   - Mostre que uma rotação $R_\alpha(x+\mathbb{Z}) \to x+\alpha+\mathbb{Z}$ com α racional não é um homeomorfismo transitivo de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (observe que, se $\alpha = p/q$, então a função contínua $x \mapsto \sin(2\pi q x)$ é invariante ...) .

2. (conjuntos e transformações minimais) Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua. Um subconjunto fechado e não vazio $K \subset X$ é dito *minimal* se é +invariante e se não contém subconjuntos próprio fechados e +invariantes. Se Min_f denota a reunião dos subconjuntos minimais de X, então $\mathrm{Per}_f \subset \mathrm{Min}_f \subset \mathrm{Rec}_f$.

   Se uma transformação $f : X \to X$ admite um compacto $C \subset X$ tal que $f(C) \subset C$, então admite pelo menos um conjunto minimal $K \subset C$ (basta aplicar o lema de Zorn à família dos

[28] Um subconjunto $M \subset X$ de um espaço topológico X é *magro* se é uma reunião enumerável $M = \cup_n C_n$ de conjuntos "nunca densos" (*nowhere dense*) C_n, i.e. tais que $\mathrm{int}(\overline{C_n}) = \emptyset$. Um subconjunto $R \subset X$ é *residual* se o seu complementar é magro, e portanto se contêm uma interseção enumerável $\cap_n A_n \subset R$ de abertos densos, por exemplo, os $A_n = X \backslash \overline{C_n}$.

subconjunto $F \subset C$ que são fechados, não vazios e +invariantes, munida da ordem parcial "$\subset$").

Uma transformação contínua $f : X \to X$ é *minimal* se verifica uma das condições equivalentes:

> *i) toda órbita $\mathcal{O}_f^+(x)$ é densa em X,*
> *ii) X não contém um subconjunto próprio fechado e +invariante, e portanto é um conjunto minimal.*

O homeomorfismo $f : X \to X$ é um *homeomorfismo minimal* se toda órbita completa $\mathcal{O}_f(x)$ é densa em X, ou seja se X não contém um subconjunto próprio fechado e invariante.

- Mostre que uma transformação $f : X \to X$ definida num compacto admite pelo menos um ponto recorrente (que pode ser único!), pois $\mathrm{Min}_f \subset \mathrm{Rec}_f$.
- Mostre que uma transformação minimal é +transitiva.
- Mostre que um homeomorfismo minimal é transitivo.
- Mostre que um homeomorfismo $f : X \to X$ definido num espaço compacto admite pelo menos um subconjunto minimal K, ou seja neste caso um subconjunto fechado, não vazio e invariante que não contém subconjuntos próprios fechados e invariantes.

3. (teorema de Kronecker) O *teorema de Kronecker* ([HW59] XXIII, Theorems 438, 439 and 440) afirma que, se α é irracional, para todo o $Q > 0$ e todo $y \in \mathbb{R}$ existem inteiros p e $q > Q$ tais que

$$|q\alpha - p - y| < 3/q \tag{13.1}$$

Em particular, seja $R_\alpha(x + \mathbb{Z}) = x + \alpha + \mathbb{Z}$ uma rotação da circunferência $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Então para todos $x + \mathbb{Z}$ e $x' + \mathbb{Z}$ em $\mathbb{T}$ e cada $\varepsilon > 0$ existe um tempo $q > 0$ tal que $\mathrm{d}({R_\alpha}^q(x), x') < \varepsilon$. Em particular,

Theorem 13.1. *Uma rotação irracional do círculo é um homeomorfismo minimal: todas as suas órbitas são densas.*

Demonstração. De fato, se R_α não é minimal, então existe uma órbita $\mathcal{O}_{R_\alpha}(x)$ cuja aderência F é um subconjunto próprio de $\mathbb{T}$. O complementar $A = \mathbb{T} \setminus F$ é aberto, invariante e não vazio. Pela classificação dos abertos da reta, A é uma reunião enumerável de intervalos (i.e. subconjuntos conexos) abertos, não vazios, e dois a dois disjuntos. Seja I o (ou um dos) que tem comprimento maior (porque existe?). Como as rotações preservam o comprimento, as imagens $I_n = {R_\alpha}^n(I)$, com $n \in \mathbb{Z}$, não podem coincidir (porque R_α não admite pontos periódicos) nem intersetar-se (porque a reunião seria um intervalo de comprimento maior). Logo os I_n são intervalos abertos dois a dois disjuntos de comprimento $|I_n| = |I| > 0$, mas isto é impossível porque o comprimento de $\mathbb{T}$ é finito. □

- Deduza que os subgrupos próprios e fechados de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ são os subgrupos finitos.
- Seja $N \subset \mathbb{T}$ um conjunto composto por um ponto (apenas um!) de cada órbita de uma rotação irracional R_α da circunferência (que é possivel construir utilizando o axioma de escolha). Observe que as imagens $N_n = {R_\alpha}^n(N)$, com $n \in \mathbb{Z}$, são disjuntas e cobrem a circunferência, i.e. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} N_n = \mathbb{T}$. As rotações preservam a medida de Lebesgue, portanto os N_n devem ter todos o mesmo comprimento. Deduza que N não pode ser Lebesgue mensurável (o seu comprimento não pode ser nulo nem positivo).

14 Perda de memória e independência assimptótica

1. (dependência sensível das condições iniciais e mixing) A transformação $f : X \to X$ *tem dependência sensível das condições iniciais* se existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ e toda vizinhança B de x, existem $y \in B$ e um tempo $n \geq 0$ tais que

$$d\left(f^n\left(y\right), f^n\left(x\right)\right) > \delta$$

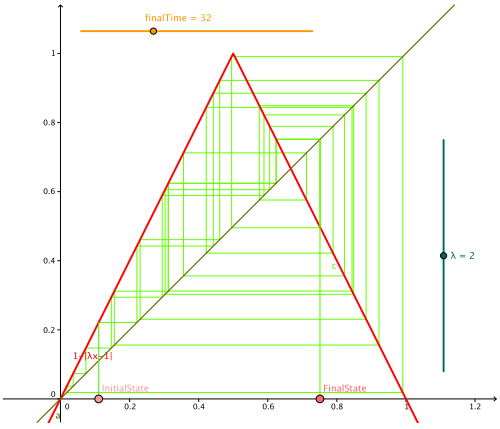
A transformação $f : X \to X$ é *topologicamente misturadora* (em inglês, *mixing*) se para cada dois abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $n \geq 0$ tal que para todo tempo $k \geq n$

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

- *(mixing $\Rightarrow$ +transitivo)* Mostre que uma transformação topologicamente mixing é topologicamente +transitiva. Em particular, $\mathrm{NW}_f = X$, e $\omega_f\left(x\right) = X$ é uma propriedade genérica.
- Mostre que mixing $\Rightarrow$ dependência sensível.
- Mostre que uma isometria não pode ser topologicamente mixing.

2. (transformação tenda) A *transformação tenda* é a transformação $T : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$



Cobweb diagram of the tent map.

- Verifique que em cada um dos intervalos $I_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ com $k = 0, 1, 2, ..., 2^n - 1$ a transformação T^n tem a forma

$$x \mapsto T^n\left(x\right) = \begin{cases} 2^n x + k & \text{se } k \text{ é par} \\ -2^n x + k + 1 & \text{se } k \text{ é impar} \end{cases}$$

- Deduza que T^n tem um único ponto fixo repulsivo em cada um dos intervalos $I_{k,n}$, e portanto que $|\mathrm{Fix}(T^n)| = 2^n$ e os pontos periódicos de T são densos no intervalo $[0,1]$.
- Mostre que a transformação T é topologicamente misturadora.

- Verifique que $h : x \mapsto \sin^2(\pi x/2)$ realiza uma conjugação topológica entre a transformação tenda T e a transformação $f_4 : [0,1] \to [0,1]$ da família quadrática, definida por $f_4(x) = 4x(1-x)$. Deduza que f_4 é misturadora.
- Discuta a dinâmica da transformação $S : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$

Cuidado, S não é contínua!, mas não é muito diferente da transformação tenda ...

3. (deslocamentos de Bernoulli) Sejam $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, z\}$ um conjunto finito de cardinalidade $z > 1$, e $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ o espaço das palavra infinitas $x = (x_1 x_2 x_3 \ldots)$ nas letras do alfabeto $\mathcal{A}$, i.e. com $x_k \in \mathcal{A}$, munido da topologia produto. Uma base da topologia produto é a família dos "cilindros centrados", a família dos subconjuntos $C_\alpha = \{x = (\alpha *)\}$ ="palavras infinitas que começam pela palavra $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$", ao variar α entre todas as palavras finitas nas letras do alfabeto $\mathcal{A}$. O *deslocamento* (em inglês, *shift*) *de Bernoulli* é a transformação $\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ definida por

$$(x_1 x_2 x_3 \ldots) \mapsto (x_2 x_3 x_4 \ldots).$$

O deslocamento consiste em "esquecer" a primeira letra da palavra infinita. Em particular, não é invertível (se $z > 1$).

- Prove que $\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ é uma transformação expansora se a métrica em Σ^+ é definida por

$$\mathrm{d}_\lambda(x, x') := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cdot |x_n - x'_n| \qquad \text{onde } \lambda > 1$$

ou por

$$\mathrm{d}_\infty(x, x') := z^{-\inf\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n \neq x'_n\}}$$

- Mostre que $|\mathrm{Fix}(\sigma^n)| = z^n$.
- Mostre que todo cilindro centrado de Σ^+ contém um ponto periódico de σ, e que portanto o conjunto Per_σ dos pontos periódicos é denso em Σ^+.
- Prove que $\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ é topologicamente misturadora.
- Dê exemplos de pontos $x \in \Sigma^+$ tais que $\omega_\sigma(x) = \Sigma^+$.
- De exemplos de pontos não pré-periódicos $x \in \Sigma^+$ tais que tais que a aderência da órbita $\mathcal{O}^+_\sigma(x)$ seja um subconjunto próprio de Σ^+.
- Seja $\Sigma = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, o espaço das palavras infinitas $x = (\ldots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \ldots x_n \ldots)$ nas letras do alfabeto finito $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, z\}$, munido da topologia produto. Verifique que o deslocamento $\sigma : \Sigma \to \Sigma$, definido por $(\sigma(x))_k = x_{k+1}$, é um homeomorfismo. Determine a cardinalidade de $\mathrm{Fix}(\sigma^n)$, e prove que os pontos periódicos são densos em Σ. Prove que $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ é topologicamente misturadora.

4. (conjuntos de Cantor) O *conjunto de Cantor standard* ("middle-third Cantor set") é o conjunto dos números entre 0 e 1 cuja representação na base 3 utiliza só as letras 0 e 2, ou seja,

$$K := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1] .$$

Outra definição é

$$K = \bigcap_{k \geq 0} K_n ,$$

onde os compactos $K_n \subset [0,1]$ são

$$K_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_1, x_2, ..., x_k \in \{0, 2\} \text{ e } x_i \in \{0, 1, 2\} \text{ se } i > k \right\}$$

Outra definição, dual, é

$$K = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) ,$$

onde os abertos I_k são definidos iterativamente da seguinte maneira: $I_1 = (1/3, 2/3)$ é o terço central de $[0,1]$, $I_2 = (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$ é reunião dos terços centrais dos intervalos de $[0,1] \setminus I_1$, ... etc.

O conjunto de Cantor standard é um conjunto compacto, perfeito e totalmente desconexo. Um conjunto com estas três propriedades é chamado genericamente "conjunto de Cantor".

- Observe que $\cdots \subset K_{n+1} \subset K_n \subset \cdots \subset K_0 = [0,1]$. Deduza que K é compacto e não vazio.
- Observe que K é homeomorfo ao produto topológico $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, i.e. ao espaço do deslocamentos de Bernoulli num alfabeto de duas letras. Um homeomorfismo é

$$\{0,2\}^{\mathbb{N}} \ni x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n / 3^n \in K$$

- Mostre que K não tem pontos isolados, e portanto $K' = K$, i.e. é perfeito.
- Mostre que o interior do conjunto de Cantor é vazio. Mostre que a componente conexa de todo ponto $x \in K$ é $\{x\}$, i.e. K é totalmente desconexo.
- Verifique que função $\{0,2\}^{\mathbb{N}} \to \{0,2\}^{\mathbb{N}} \times \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \mapsto ((x_1, x_3, ..., x_{2n-1}, ...), (x_2, x_4, ..., x_{2n}, ...))$$

  define um homeomorfismo de K sobre $K \times K$. Mostre, por indução, que K é homeomorfo ao produt cartesiano K^n para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Observe que $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ é homeomorfo a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, e que a representação binária dos reais entre 0 e 1 é uma aplicação contínua de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sobre o intervalo $[0,1]$. Portanto, existe uma função contínua de K sobre o intervalo $[0,1]$, e, pelo teorema de Schröder-Bernstein, K tem a cardinalidade do intervalo.
- Mostre que a aplicação $x \mapsto 3x$ define um homeomorfismo de $K \cap [0, 1/3]$ sobre K. Mostre que todo aberto não vazio do conjunto de Cantor contém uma "cópia" do próprio conjunto (i.e., uma das componentes conexas de K_n, homeomorfa a K).
- Observe que cada K_n é uma reunião disjunta de 2^n intervalos fechados de comprimento 3^{-n}. deduza que o "comprimento" (i.e. a medida de Lebesgue) de K é

$$|K| = \lim_{n\to\infty} |K_n| = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot 3^{-n} = 0 .$$

5. (transformação de padeiro) A *transformação do padeiro* é $P : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ definida por

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (2x, y/2) & \text{se } 0 \le x \le 1/2 \\ (2x - 1, (y+1)/2) & \text{se } 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

   - Discuta a sua dinâmica.
   - Considere o deslocamento de Bernoulli $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ no produto cartesiano $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Mostre que a aplicação $h : \Sigma \to [0,1] \times [0,1]$ definida por

$$(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0 x_1, x_2, \ldots) \mapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{-n}}{2^{n+1}} \right)$$

   é uma semiconjugação entre σ e P, ou seja, $h \circ \sigma = P \circ h$. Deduza ...

6. (transformações expansoras) Uma transformação contínua $f : X \to X$ é *expansiva* se existe $\delta > 0$ tal que para todos $x, x' \in X$ distintos existe um tempo $n \geq 0$ tal que

$$d(f^n(x), f(x')) > \delta$$

Uma transformação contínua $f : X \to X$ é *expansora* se existem $\mu > 1$ e $\varepsilon > 0$ tais que para todos $x, x' \in X$ distintos com $d(x, x') < \varepsilon$

$$d(f(x), f(x')) > \mu \cdot d(x, x')$$

- Dê exemplos de transformações expansoras de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
- Prove que não existe nenhuma transformação expansiva $f : I \to I$ definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ (observe que uma tal transformação seria localmente injetiva, logo estritamente crescente ou decrescente).

7. (expansão decimal) Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a transformação do círculo definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Mostre que f é expansora, se o círculo é munido da métrica euclidiana
- Seja $x = 0, x_1x_2x_3...$, com $x_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, uma representação decimal de $x \in [0, 1[$, pensado como um ponto de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Mostre que $f(0, x_1x_2x_3... + \mathbb{Z}) = 0, x_2x_3x_4... + \mathbb{Z}$.
- Determine os pontos fixos, periódicos, e pré-periódicos de f.
- Calcule a cardinalidade de $\mathrm{Fix}(f^n)$. Mostre que os pontos periódicos de f são densos no círculo.
- Um número x, por exemplo em $[0, 1]$, é dito "periódico" se a sua representação decimal é da forma

$$x = 0.x_1x_2...x_n\overline{a_1a_2...a_k}$$

Existem números não periódicos? Quantos? Sabe fazer exemplos?

- Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, existem $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e um tempo $n \geq 0$ tais que

$$d(x, y) < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad d(f^n(x), f^n(y)) > 1/20$$

ou seja, que a transformação f tem a propriedade de dependência sensível das condições iniciais.

- Mostre que, para todo intervalo não vazio $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, existe um tempo $n \geq 0$ tal que $f^k(I) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo tempo $k \geq n$. Deduza que f é topologicamente mixing.
- Seja $b = (b_1b_2 \dots b_n)$ uma palavra finita no alfabeto $\{0, 1, 2, ..., 9\}$. Prove que existe um conjunto residual de pontos $x \in [0, 1[$ tais que a representação em base 10 de x contém a palavra b uma infinidade de vezes (no sentido em que, se $x = 0.x_1x_2x_3 \dots x_k \dots$, existem uma infinidade de $k \geq 0$ tais que $(x_{k+1}x_{k+2} \dots x_{k+n}) = (b_1b_2...b_n)$). Prove que existe um conjunto residual de pontos $x \in [0, 1[$ tais que a representação em base 10 de x contém todas as palavras finitas no alfabeto $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ uma infinidade de vezes. Dê exemplos.

8. (transformações expansoras lineares do círculo) Seja λ um inteiro tal que $|\lambda| > 1$. A *transformação expansora standard* de grau λ é a transformação $\times\lambda : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto \lambda \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Mostre que a transformação $\times\lambda$ é topologicamente mixing.
- Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de $\times\lambda$ é denso.
- Mostre que a transformação $\times\lambda$ é um fator do deslocamento de Bernoulli sobre um alfabeto de $|\lambda|$ letras (e o conjunto onde a semicojugação falha de ser injetiva é pequeno!).
- Mostre que a transformação $\times 3$ preserva o conjunto de Cantor standard K (pensado como um subconjunto do círculo), i.e. $\times 3(K) \subset K$, e que a restrição $\times 3\,|_K : K \to K$ é um fator do deslocamento de Bernoulli $\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ sobre o alfabeto $\{0, 2\}$.

Referências

[Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.

[Ar78] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, Roma 1978.

[Ar79] V.I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Edizioni MIR - Editori Riuniti, Roma 1978.

[Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR 1985.

[BN05] P. Buttà e P. Negrini, *Note del corso di Sistemi Dinamici*, Università di Roma "La Sapienza", 2005.

[BS02] M. Brin and G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.

[Chaos] P. Cvitanović, R. Artuso, P. Dahlqvist, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, N. Whelan and A. Wirzba, *Chaos: Classical and Quantum*, `http://ChaosBook.org` (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2008).

[De89] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1989.

[De92] R.L. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1992.

[HK03] B. Hasselblatt and A. Katok, *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press 2003.

[HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press (Pure and Applied Mathematics. A series of Monographs and Textbooks), San Diego 1974.

[HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford University Press 1959.

[Kh35] A.Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, 1935 [translation by University of Chicago Press, 1954].

[KH95] A. Katok and B. Hasselblat, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press 1995.

[Li04] E.L. Lima, *Matemática e Ensino*, Gradiva, 2004.

[Ma75] B. Mandelbrot, *Les object fractals: forme, hasard, et dimension*, Flammarion, Paris, 1975.

[Mi91] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, IMS preprint (1991)

[MSW02] D. Mumford, C. Series and D. Wright, *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press 2002.

[PR86] H.-O. Peitgen and P.H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, 1986.

[Ro99] J.C. Robinson, *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamic and Chaos*, CRC Press, Cambridge 1999.

[Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.

[Ru91] D. Ruelle, *Hasard et chaos*, Éditions Odile Jacob, Paris 1991.

[St94] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, 1994.

[Vi06] J. Villate, *Introdução aos sistemas dinâmicos. Uma abordagem prática com Maxima*, 2006.