29/3/2017 1^o teste	Tópicos de Sistemas Dinâmicos	MAT

1. *(2 valores)* Determine o limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ da solução da equação recursiva linear
$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 60$$
com condição inicial $x_0 = 100$.

2. *(2 valores)* Determine a solução da equação recursiva linear homogénea
$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$$
com condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

3. *(2 valores)* Estude as trajetórias do sistema dinâmico definido pela transformação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com
$$f(x) = x^3 .$$

4. *(2 valores)* Dê um exemplo, se existir, de uma transformação $f : X \to X$ tal que todos os pontos $x \in X$ sejam periódicos de período 2.

5. *(2 valores)* Seja $f : X \to X$ uma transformação. Mostre que a função característica φ de um subconjunto $A \subset X$ é invariante (ou seja, $\varphi \circ f = \varphi$) se e só se $f^{-1}(A) = A$.

6. *(2 valores)* Diga para quais valores de α a rotação da circunferência $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por
$$R_\alpha(x + \mathbb{Z}) = x + \alpha + \mathbb{Z}$$
tem pontos periódicos, e justifique a sua resposta.

7. *(2 valores)* Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por
$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z} .$$
Dê um exemplo de um ponto $x + \mathbb{Z}$ cuja órbita seja infinita, e justifique a sua resposta.

8. *(2 valores)* Mostre que os pontos periódicos da transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida no exercício 7 são classes de equivalência de números racionais.

9. *(2 valores)* Enuncie e demonstre o princípio das contrações.

10. *(2 valores)* Determine para quais valores de $\lambda \in [0, 4]$ os pontos fixos da transformação $f : [0, 1] \to [0, 1]$, definida por
$$f(x) = \lambda\, x\, (1 - x) ,$$
são atrativos.

9/06/2017 2º teste	Tópicos de Sistemas Dinâmicos	MAT

1. *(2 valores)* Descreva o método de Newton para aproximar raízes de polinómios, e discuta a convergência.

2. *(2 valores)* Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $f : I \to I$ uma função contínua e crescente. Prove que a trajetória de cada ponto de I é monótona e converge para um ponto fixo de f.

3. *(2 valores)* Mostre que um homeomorfismo $f : X \to X$ é minimal (ou seja, a órbita de todo ponto é densa) sse X não admite subconjuntos próprios fechados e invariantes.

4. *(2 valores)* Mostre que se o homeomorfismo $f : X \to X$ é topologicamente transitivo então toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ invariante é constante.

5. *(2 valores)* Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por

$$f(x + \mathbb{Z}) = 10 \cdot x + \mathbb{Z}\,.$$

Calcule a cardinalidade do conjunto dos pontos fixos de f^n.

6. *(2 valores)* Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por

$$f(x + \mathbb{Z}) = 10 \cdot x + \mathbb{Z}\,.$$

Mostre que é topologicamente misturadora.

7. *(2 valores)* Dê uma definição e um exemplo de ponto recorrente.

8. *(2 valores)* Dê uma definição e um exemplo de ponto errante.

9. *(2 valores)* Dê um exemplo, se existir, de uma transformação $f : X \to X$ que admite órbitas densas. Justifique.

10. *(2 valores)* Considere o conjunto de Cantor standard

$$K := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1]\ .$$

Mostre que é um conjunto perfeito, ou seja, que $K' = K$.