

MAT - 2014/15

Tópicos de Sistemas Dinâmicos

Lecture notes

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

May 25, 2015

Abstract

This is not a book! These are notes written for personal use while preparing lectures on “Sistemas Dinâmicos” for students of MAT(E) during the a.y.’s between 2001/02 and 2005/06, and then “Tópicos de Sistemas Dinâmicos” for student of MAT during the a.y.’s 2010/11 and 2011/12. They are rather informal and certainly contain mistakes. I tried to be as synthetic as I could, without missing the observations that I consider important.

I probably will not lecture all I wrote, and did not write all I plan to lecture. So, I included empty or sketched paragraphs, about material that I think should/could be lectured within the same course.

References contain some introductory manuals that I like, some classics, and other books where I have learnt things in the past century. My favorite manuals are [HK03] (for its examples and its informal style) and [KH95] (for its rigor). Besides, good material and further references can easily be found in the web, for example in [Scholarpedia](#), in [Wikipedia](#) or in the [MIT OpenCourseWare](#).

It would be nice to have time and places to do simulations, using some of the software at our disposal in laboratories: this includes proprietary software like [Mathematica](#)®8, [Matlab](#) and [Maple](#), or open software like [Maxima](#) and [GeoGebra](#). Occasionally, we may also use some [c++](#) code and [Java](#) applets. Some applets are in the [bestiario](#) in my [web page](#), and everything about the course may be found in my page

http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/teaching/tsd_MAT_2014-15.html

e.g. means EXEMPLI GRATIA, that is, “for example”, and is used to introduce important or (I hope!) interesting examples.

ex: means “exercise”, to be solved at home or in the classroom.

ref: means “references”, places where you can find and study what follows inside each section.

red paragraphs are non-trivial facts and results.

□ indicates the end of a proof.

Pictures were made with *Grapher* on my MacBook, or taken from [Wikipedia](#), or produced with [Matlab](#) or [Mathematica](#)®8.



This work is licensed under a
[Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License](#).

Contents

1	Introdução	4
1.1	Sistemas dinâmicos	4
1.2	Exemplos físicos	4
1.3	Problemas físicos e pequena história	5
1.4	Estratégia	6
2	Iteration/recursion	7
2.1	Exponential growth/decay	7
2.2	Babylonian-Heron method to compute square roots	13
2.3	Newton method to find roots of polynomials	14
2.4	Finite difference equations	16
2.5	Interval maps and cobweb plot	18
2.6	Exponential sums	19
3	Differential equations and flows	21
3.1	Structure of physical models	21
3.2	Integration of one-dimensional systems	23
3.3	Exponential	25
3.4	Linear systems	27
3.5	Simulations	28
3.6	Existence and uniqueness theorems	30
4	Oscillations and cycles	35
4.1	Harmonic oscillator	35
4.2	Mathematical pendulum and Jacobi's elliptic integrals	36
4.3	Central forces and planetary motions	37
4.4	Cycles in chemistry and biology	39
4.5	Weather report	41
5	Topological dynamical systems, basic definitions	43
5.1	Transformations	43
5.2	Trajectories and orbits	44
5.3	Periodic orbits	44
5.4	Observáveis	45
5.5	Conjuntos invariantes	46
5.6	Conjugação topológica	47
5.7	Estabilidade estrutural	47
6	Numbers and dynamics	48
6.1	Decimal expansion and multiplication by ten	48
6.2	Deslocamentos de Bernoulli	50
6.3	Rotações do círculo/toro	51
6.4	Dyadic adding machine	53
6.5	Continued fractions and Gauss map	54
7	Simple orbits and perturbations	58
7.1	Topological fixed point theorems	58
7.2	Basin of attraction	58
7.3	Dynamics of contractions	59
7.4	Ordem da reta real e trajetórias	62
7.5	Análise local: pontos fixos atrativos e repulsivos	63
7.6	Convergência no método de Newton	65
7.7	Dynamics of Möbius transformations	66

8	Linearização	69
8.1	Linearização conforme	69
8.2	Hiperbolicidade e linearização	69
9	Transversalidade e bifurcações	71
9.1	Transversalidade e persistência dos pontos fixos	71
9.2	Bifurcações	72
9.3	Duplicação do período e cascata de Feigenbaum	72
10	Statistical description of orbits	73
10.1	Probability measures	73
10.2	Transformations and invariant measures	75
10.3	Invariant measures and time averages	78
10.4	Examples of invariant measures	80
11	Recurrences	83
11.1	Limit sets and recurrent points	83
11.2	Dirichlet theorem on Diophantine approximation	84
11.3	Poincaré recurrence theorem	85
11.4	Transitivity and minimality	87
11.5	Kronecker theorem on irrational rotations	89
11.6	Homeomorfismos do círculo	91
12	Perda de memória e independência assintótica	95
12.1	Órbitas desordenadas	95
12.2	Mixing topológico	96
12.3	Dinâmica dos deslocamentos de Bernoulli	98
12.4	Conjuntos de Cantor	99
12.5	Transformações expansoras	101
12.6	Automorfismos hiperbólicos do toro	103
13	Dimensions, fractals and entropy	105
13.1	Dimensions of metric spaces	105
13.2	Fractals	106
13.3	Self-similarity and iterated function systems	107
13.4	Kleinian groups	108
13.5	Entropia topológica	108
14	Ergodicity and convergence of time means	111
14.1	Ergodicity	111
14.2	Examples of ergodic maps	112
14.3	Normal numbers	113
14.4	Unique ergodicity and equidistribution	114

1 Introdução

1.1 Sistemas dinâmicos

Uma estrutura típica de um modelo físico é a seguinte. Existe um espaço X , dito “espaço dos estados”, ou “espaço das fases”, do sistema (uma variedade simplética em mecânica clássica, um espaço de Hilbert em mecânica quântica, um certo espaço de funções em modelos hidrodinâmicos ...). Existe um espaço T , que chamamos “tempo”, que contém um ponto chamado 0 (agora), e junto com t e s também contém $t+s$ (se é possível esperar uma hora e esperar duas horas, também deve ser possível esperar três horas). As “leis” da física definem uma dinâmica em X : uma família de transformações $\Phi_t : X \rightarrow X$, definidas para $t \in T$, que verificam

$$\Phi_0 = \text{id}_X \quad \text{e} \quad \Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s.$$

Portanto, as leis definem uma ação $\Phi : T \times X \rightarrow X$ do semigrupo tempo no espaço dos estados. O ponto $\Phi_t(x)$ é o estado no tempo t de um sistema que estava no estado x no tempo 0. A função $t \mapsto \Phi_t(x)$ é a “trajetória” do estado inicial x , e a sua imagem, a curva $\{\Phi_t(x) : t \in T\} \subset X$, é a “órbita” de x . As leis podem ser “reversíveis”, ou seja podem permitir decidir o que aconteceu no passado, e nesse caso o tempo é idealizado como sendo o grupo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, ou irreversíveis, e neste caso o tempo é pensado como o semigrupo $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ou $\mathbb{N}_0$. Se o tempo é contínuo, o (semi)grupo costuma ser definido por meio do seu gerador infinitesimal

$$v = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\Phi_t - \text{id}_X}{t}$$

(o campo de vetores definido pela equação de Newton $F = ma$, o gerados H do grupo de operadores unitários e^{-ihtH} num espaço de Hilbert, o semigrupo $e^{-t\Delta}$ gerado pelo operador de Laplace-Beltrami Δ , ...). Se o tempo é discreto, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, o (semi)grupo é gerado pela transformação

$$\Phi_1 : X \rightarrow X.$$

Numa experiência da física, não é necessariamente o estado do sistema que se observa. Fazer experiências quer dizer medir “observáveis”, ou seja ler nos instrumentos do laboratório os valores de certas funções $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ (a distância entre dois planetas, a energia de um eletrão, a temperatura de um gás ...). A família de funções $\varphi_t = \varphi \circ \Phi_t$ descreve a dinâmica do observável φ . De fato, o que se observa podem ser médias temporais do genero $\frac{1}{T} \int_0^T \varphi_t dt$, às vezes indiretamente por meio dos espectros de Fourier $\int e^{ikt} \varphi_t dt$ ou de Laplace $\int e^{st} \varphi_t dt$.

1.2 Exemplos físicos

Só para ter uma ideia...

Mecânica clássica. O espaço dos estados de uma partícula (pensada como um ponto material) é, de acordo com o princípio de relatividade de Galileu, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Um estado é um vetor $x = (q, p)$, onde $q \in \mathbb{R}^3$ é a “posição” e $p = m\dot{q} \in \mathbb{R}^3$ o “momento”, $\dot{\cdot}$ denota a derivada em ordem ao tempo e m a massa da partícula. A equação de Newton “força=massa×aceleração” se traduz no sistema de equações

$$\dot{q} = p/m \quad \dot{p} = F$$

que definem um campo de vetores $v = (p/m, F)$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. A solução de $dx(t)/dt = v(x(t))$ com condição inicial $x(0) = x$ é a trajetória $t \mapsto \Phi_t(x)$.

Mecânica quântica. O espaço dos estados de uma partícula é um espaço de Hilbert, por exemplo $L^2(\mathbb{R}^3)$. Um estado é uma função $q \mapsto \psi(q)$, que tem a interpretação de “densidade de probabilidades de encontrar a partícula na posição q ”. A “energia” é um operador linear auto-ajunto $H : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$, por exemplo da forma $-(\hbar^2/2m)\Delta + V(q)$, onde Δ é o operador de Laplace-Beltrami, $\hbar$ é a constante de Planck, m é a massa da partícula, e V é a “energia potencial”. A equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \cdot \psi$$

gera o grupo unitário de operadores $e^{-itH/\hbar} : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$.

Hidrodinâmica. O espaço dos estados é um espaço de funções com um certo número de derivadas parciais contínuas, por exemplo $C^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Uma configuração, ou “campo”, é uma função $q \mapsto u(q)$ e representa a “densidade macroscópica” de certos observáveis microscópicos (número de partículas, energia, pressão, ...). Uma equação diferencial fenomenológica descreve a evolução do campo. Por exemplo, a propagação do calor é suposta seguir a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \sigma \Delta u$$

onde Δ é o operador de Laplace-Beltrami e σ é um coeficiente que determina a velocidade de propagação. O operador diferencial Δ gera o semigrupo de operadores $e^{t\sigma\Delta} : C^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

1.3 Problemas físicos e pequena história

O objetivo dos físicos é fazer previsões: querem saber o que acontece a um certo ponto x , ou melhor a um certo observável φ , passado um tempo t , e possivelmente dizer o que acontece quando t é grande. Eis uma lista, não exaustiva, de problemas fisicamente relevantes.

Calcular trajetórias. Resolver o “problema de Cauchy”: dada uma condição inicial x , o estado do sistema no presente, determinar os estados futuros $\Phi_t(x)$ com $t \geq 0$. No século XVII o Newton inventou o seu “methodus fluxionum” (o moderno cálculo diferencial e integral) para resolver as próprias equações e assim calcular as trajetórias dos planetas, dando uma explicação às leis de Kepler ...

Regularidades/periodicidades. Decidir se o sistema tem trajetórias regulares, no sentido de “previsíveis”. As mais previsíveis são as trajetórias periódicas, que satisfazem $\Phi_T(x) = x$ para algum tempo T dito período, e que portanto regressam a x em cada tempo múltiplo de T (a própria história do pensamento científico dos homens começou da observação das periodicidades dos astros, dando origem a cosmogonias e matemáticas em quase toda esquina do planeta). Decidir se as eventuais trajetórias regulares são observáveis, ou seja se uma pequena perturbação da condição inicial x ou da lei Φ ainda produz uma trajetória próxima da trajetória regular, ou se estraga tudo. A procura de órbitas periódicas e a teoria das perturbações foi um dos temas favoritos dos físicos matemáticos do século XIX, particularmente interessados aos problemas da mecânica celeste. Nos anos cinquenta do século XX, Kolmogorov, e depois Arnold e Moser, provaram o resultado espetacular de que muitos sistemas hamiltonianos têm muitas órbitas “quase-periódicas”.

Descrição qualitativa. Determinar o comportamento qualitativo da “maioria” das trajetórias. Acontece que, se o sistema não é extremamente simples (como um sistema kepleriano, uma partícula em um campo magnético constante, ...), é praticamente impossível “calcular” as trajetórias, embora possa ser possível provar a “existência”. Os físicos devem ficar satisfeitos com uma descrição “qualitativa” das órbitas possíveis. No final do século XIX, Henri Poincaré mostrou que é possível fazer afirmações interessantes sobre o comportamento qualitativo das trajetórias utilizando informações fracas sobre a lei de evolução. O resultado mais espetacular é o seu famoso “teorema de recorrência”. Outro exemplo é a classificação dos homeomorfismos do círculo, também devida a Poincaré e depois estudada por Denjoy.

Problemas numéricos. Embora seja geralmente impossível calcular trajetórias, é possível obter trajetórias aproximadas (por exemplo, hoje em dia, utilizando um computador que “resolve” equações diferenciais, mas lembre que os astrónomos calculam “efemérides” e “calendários” desde milénios!). Um esquema muito simplificado do cálculo numérico é assim. Dada uma condição inicial x e um “passo” τ , obtemos uma aproximação $\Phi'_\tau(x)$ de $\Phi_\tau(x)$ com um erro que possivelmente sabemos estimar, por exemplo limitado por ε . A seguir, utilizamos o nosso valor inicial $\Phi'_\tau(x)$ para estimar $\Phi_{2\tau}(x)$, assim produzindo $\Phi'_{2\tau}(x)$, supostamente a distância inferior a ε de $\Phi_\tau(\Phi'_\tau(x))$, mas geralmente a distância ainda maior de $\Phi_{2\tau}(x)$... O problema é decidir se, quando n é grande, a nossa conjectura $\Phi'_{n\tau}(x)$ ainda tem alguma coisa a ver com o verdadeiro $\Phi_{n\tau}(x)$.

Regularidades probabilísticas. Muitos sistemas interessantes têm comportamento desordenado (por exemplo, as trajetórias podem ter dependência sensível das condições iniciais), e o estado inicial não pode ser determinado com precisão (quer por razões “a priori”, quer porque todo instrumento tem a sua sensibilidade). A descrição estatística é neste caso uma necessidade e até pode simplificar a vida. Pode acontecer que o comportamento da maioria das trajetórias é tão irregular que acaba por parecer regular num sentido probabilístico. Este era o cenário imaginado por Ludwig Boltzmann, na sua teoria cinética dos gases, para justificar as leis observadas da termodinâmica. O estudo das regularidades probabilísticas dos sistemas dinâmicos é dito “teoria ergódica”, em homenagem às intuições de Boltzmann, e nasceu nos anos trinta do século XX com os resultados de von Neumann, Birkhoff, Khinchin, Hopf, Kolmogorov... Em tempos mais recentes, matemáticos e físicos como Bowen, Ruelle, Sinai, descobriram ligações interessantes com a mecânica estatística de Maxwell e Gibbs...

Previsões robustas. Um sistema dinâmico pode ser pensado como uma “máquina” que pega numa condição inicial x e produz uma trajetória $t \mapsto \Phi_t(x)$. O problema é decidir se uma pequena perturbação de Φ (uma incerteza nos parâmetros da lei física), digamos Φ' , produz trajetórias “comparáveis” com as trajetórias de Φ . Uma resposta que é particularmente apreciada pelos físicos consiste em formular resultados de “estabilidade”, que digam que uma “distância” entre Φ e Φ' suficientemente pequena não altera a estrutura das trajetórias. Isto levanta também a questão de decidir se certos fenómenos são típicos ou não no espaço das possíveis dinâmicas. A procura de sistemas “estruturalmente estáveis” desenvolveu-se a partir das ideias de Andronov e Pontryagin, nos anos trinta do século XX. A “hiperbolicidade” enquanto chave da estabilidade estrutural foi descoberta nos anos sessenta por Anosov, Smale, Sinai ..., ao desenvolver ideias geométricas precedentes de Hadamard, Hopf, Hedlund ...

1.4 Estratégia

Para um matemático, um sistema dinâmico é uma ação $G \times X \rightarrow X$ de um (semi)grupo “grande” (tal que seja possível dar um sentido à uma expressão do género “ $g \rightarrow \infty$ ”) G sobre um espaço X . Estudar um sistema dinâmico quer dizer compreender o espaço das órbitas $G \backslash X$, ou melhor a maneira em que as diferentes órbitas Gx estão mergulhadas em X . A ênfase é no comportamento “assintótico” das trajetórias $t \mapsto g_t x$ quando $g_t \rightarrow \infty$. Resulta que às vezes é possível fazer previsões interessantes esquecendo os “detalhes” da dinâmica, desde que X tenha alguma estrutura (uma topologia, uma métrica, uma estrutura diferenciável, simetrias, uma medida de probabilidades, ...) que de alguma maneira precisa é respeitada pela evolução temporal, e que a lei de evolução tenha certas propriedades qualitativas. Este é o tema da teoria dos sistemas dinâmicos. A estratégia é selecionar modelos simples e tratáveis, possivelmente “descobrir” classes de sistemas com comportamento compreensível, na esperança de que sistemas “reais” tenham comportamentos comparáveis. Até esquecendo as motivações físicas, as ideias da teoria dos sistemas dinâmicos fornecem outra maneira de olhar certas estruturas matemáticas, e produzem resultados interessantes em análise, geometria, teoria de grupos, teoria de números, etc...

2 Iteration/recursion

2.1 Exponential growth/decay

e.g. Fibonacci numbers. Consider the following problem, posed by Leonardo Pisano (alias Fibonacci, i.e. “filius Bonacci”) in his *Liber Abaci*, 1202:

*Quot paria cuniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.
Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum nativitate germinant.*¹

Let f_n be the number of pairs of rabbits at the n -th month. The offspring one month later, $f_{n+1} - f_n$, is equal to the number of “adult” pairs present in the n -th month, which is f_{n-1} . Therefore, the f_n ’s satisfy the recursive law

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad (2.1)$$

which prescribes the successive values of f_n given some initial values f_0 and f_1 . An [applet](#) which computes the sequence is in my [bestiario](#). The sequence grows quite fast, as you can see:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

and the numbers soon become astronomically large. For example, after 10 years we get

$$f_{120} \simeq 8.67 \times 10^{24},$$

larger than the Avogadro number!

In order to see this, you could write a simple code like (in [Java](#) or [c++](#))

```
int Fib(int n)
{
    if (n==0) return 1;
    else if (n==1) return 1;
    else return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

Also useful would be a formula, or at least an asymptotic formula, for the f_n ’s, and I’ll show you one later. For example, an asymptotic formula would solve a problem like

ex: Estimate the smallest time n such that $f_n > 10^{80}$.

e.g. Duplication of bacteria. As experiências mostram que a população de uma colônia de bactérias, num período de tempo em que podemos considerar ilimitado o nutrimento e desprezáveis as toxinas produzidas, duplica-se em cada tempo característico $\tau > 0$. Assim, uma população inicial de N_0 células, dá origem a uma população de $N_1 = 2N_0$ células passado o tempo τ , $N_2 = 4N_0$ células passado o tempo 2τ , ..., de

$$N_n = 2^n N_0$$

células passado o tempo $n\tau$. Por exemplo, uma única célula dá origem a 1024 células passado um tempo $n\tau$ dado por $2^n = 1024$, ou seja, $n\tau = (\log_2 1024)\tau = 10\tau$.

¹Quantos pares de coelhos podem ser gerados por um par em um ano.

Alguém tem um par de coelhos, em um lugar inteiramente fechado, para descobrir quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano: por natureza, cada par de coelhos gera cada mês outro par, e começa a procriar a partir do segundo mês após o nascimento.

Sequences. A (real or complex valued) *sequence* is a collection $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of numbers $x_n \in \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, indexed (hence ordered) by a non-negative integer $n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. We may think of the index n as “time”, and therefore at the n -th term x_n as the value of some “observable” x (something that we may observe, i.e. measure) at time n . Clearly, we may as well define sequences with values in an arbitrary set X , for example in the Euclidean space $\mathbb{R}^d$.

Sequences may be defined as functions are. Indeed, a sequence with values in the set X is nothing but a function $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, disguised by the notation $x_n := f(n)$. A second possibility is some recursive law prescribing the value of x_n given the (past) values of $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. A third possibility, is using some property that the successive terms must have.

e.g. Arithmetic progression. An *arithmetic progression* $x_n = a + nb$, which may also be defined using the recursion $x_{n+1} = x_n + b$, with initial term $x_0 = a$.

e.g. The primes sequence. The sequence $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$, whose generic term is the n -th prime number p_n . It is not clear what the recursive law could be.²

Limits. We say that the real sequence (x_n) *converges* to some *limit* $a \in \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, and we write $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ or simply $x_n \rightarrow a$ (as $n \rightarrow \infty$), if for any “precision” $\varepsilon > 0$ there exists a time $\bar{n}$ such that $|x_n - a| < \varepsilon$ for all times $n \geq \bar{n}$. This means that the values x_n are within an arbitrarily small neighborhood of a as long as the time n is sufficiently large.

The basic fact about limits in the real line $\mathbb{R}$ is that monotone (non-decreasing or non-increasing, i.e. satisfying $x_{n+1} \geq x_n$ or $x_{n+1} \leq x_n$, for any n , respectively) bounded (i.e. such that $|x_n| \leq M$ for some $M > 0$ and all n) sequences of real numbers do admit limit. For example, the limit of a bounded increasing sequence is simply the supremum of the set of values.

We also use the notation $x_n \rightarrow \pm\infty$ to say that given an arbitrarily large $K > 0$ we can find a time $\bar{n}$ such that $\pm x_n > K$ for all times $n \geq \bar{n}$.

Of course, there exist sequences which do not admit limits in either senses. These are, for example, oscillating sequences, as $x_n = (-1)^n$. We’ll encounter sequences with much more wild behavior.

Fundamental sequences. A sequence (x_n) is said *fundamental*, or *Cauchy sequence*, if for any precision $\varepsilon > 0$ there exists a time $\bar{n}$ such that

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

for all times $n, m > \bar{n}$. Fundamental sequences are clearly bounded. It is obvious that a convergent sequence is fundamental (a triangular argument, since both x_n and x_m are $\varepsilon/2$ -near to the limit for sufficiently large n and m). A similar triangular argument shows that a fundamental sequence with a convergent subsequence is itself convergent. Less obvious is that any fundamental sequence in $\mathbb{R}$ is convergent. Indeed, let $X_n := \{x_k \text{ with } k \geq n\}$. It is clear that the X_n are bounded, and therefore by the supremum axiom there exist the numbers $a_n := \inf X_n$. But the sequence (a_n) is bounded and not decreasing, and therefore there exists $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (indeed, $a = \sup \{a_n \text{ with } n \in \mathbb{N}\}$). It is then easy to construct subsequences of (x_n) which converge to a , and this implies that (x_n) itself is convergent to a .

Thus, we may know that a sequence is convergent without knowing its limit! In general, convergence of all fundamental sequences is taken as a definition of (sequential) completeness of a metric space.

Geometric progression. The most important sequence is the *geometric progression*, defined by the recursion

$$x_{n+1} = \lambda x_n,$$

and an initial term $x_0 = a$ (which we may assume $\neq 0$ to avoid trivialities). Thus, the sequence is

$$x_0 = a \quad x_1 = a\lambda \quad x_2 = a\lambda^2 \quad \dots \quad x_n = a\lambda^n \quad \dots$$

²This is not the place to talk about it, but if you find it intriguing, you may take a look at the wonderful book by Marcus du Sautoy, *The music of primes*, Harper-Collins, 2003 [*A música dos números primos*, Zahar, 2008].

The parameter λ (which may be real or complex) is called *ratio*, since it is the ratio x_{n+1}/x_n between successive terms of the sequence. The geometric sequence clearly converges to zero when $|\lambda| < 1$. It is constant, hence trivially convergent, when $\lambda = 1$, while oscillates between $\pm a$ when $\lambda = -1$ (hence does not converge if $a \neq 0$). We may also observe that $|\lambda^n| \rightarrow \infty$ when $|\lambda| > 1$.

ex: Show that the term x_n of a geometric progression is equal to the geometric mean $\sqrt{x_{n+1}x_{n-1}}$ of its neighbors.

Computing limits. First, observe that $x_n \rightarrow a$ is equivalent to $x_n - a \rightarrow 0$. Therefore, we only need to understand how to “prove” that some sequence converges to zero. One possibility is to “compare” the sequence (x_n) under investigation with a sequence with known behavior, as for example the geometric progression. Indeed, if $|x_n| \leq y_n$ for all n sufficiently large, then $y_n \rightarrow 0$ implies $x_n \rightarrow 0$ too.

Subsequences and sequential compactness. A *subsequence* of a sequence (x_n) is a sequence (x_{n_i}) obtained selecting only the values x_{n_i} of the original sequence, where $i \mapsto n_i$ is an increasing map $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$.

The basic fact (that closed and bounded sets of the real line are *sequentially compact*) is that any bounded sequence admits a convergent subsequence.

Limsup and liminf. Sometimes we are only interested in a rough estimate of the growth of a sequence (x_n) . The “limsup” is the limit $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ of the non-increasing sequence $a_n := \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$. The “liminf” is the limit $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ of the non-decreasing sequence $b_n := \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$.

e.g. Tempo de meia-vida. O decaimento de uma substância radioactiva pode ser caracterizado pelo “tempo de meia-vida” τ , passado o qual aproximadamente metade dos núcleos inicialmente presentes terá decaído (dentro de uma amostra suficientemente grande). Se q_n denota a quantidade de substância radioactiva presente no instante $n\tau$, com $n = 0, 1, 2, \dots$, então

$$q_{n+1} = \frac{1}{2} q_n.$$

Portanto a quantidade de substância radioactiva no instante $n\tau$ é $q_n = q_0 2^{-n}$, enquanto o produto do decaimento é $q_0 - q_n = q_0(1 - 2^{-n})$. Observe que $q_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Se a radiação solar produz núcleos radioactivos a uma taxa constante $\alpha > 0$ (i.e. α núcleos cada tempo τ), a quantidade de núcleos radioactivos no instante $n\tau$ é dada pela lei recursiva

$$q_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \alpha. \quad (2.2)$$

Um equilíbrio é possível quando a quantidade inicial q_0 é igual a $\bar{q} := 2\alpha$, pois então $q_1 = \alpha + \alpha = q_0$, $q_2 = \alpha + \alpha = q_1 = q_0$, e assim a seguir, $q_n = \bar{q}$ para todos os $n \in \mathbb{N}$.

O que acontece se $q_0 \neq \bar{q}$? A equação recursiva diz que

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2} q_0 + \alpha \\ q_2 &= \frac{1}{4} q_0 + \frac{1}{2} \alpha + \alpha \\ q_3 &= \frac{1}{8} q_0 + \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{2} \alpha + \alpha \\ &\vdots \\ q_n &= \frac{1}{2^n} q_0 + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) \alpha \end{aligned}$$

A primeira parcela $q_0/2^{n+1} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, o futuro é independente da condição inicial q_0 . A segunda parcela tem limite 2α quando $n \rightarrow \infty$ (uma prova está no parágrafo sobre a série geométrica!).

Uma fórmula (aparentemente) mais simples para os q_n pode ser obtida usando a substituição $x_n := q_n - \bar{q}$, onde $\bar{q} = 2\alpha$ é a solução estacionária. De facto,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= q_{n+1} - 2\alpha \\ &= \frac{1}{2}q_n + \alpha - 2\alpha \quad (\text{usando a (2.2)}) \\ &= \frac{1}{2}x_n, \end{aligned}$$

ou seja, a diferença entre q_n e $\bar{q}$ é uma progressão geométrica de razão $1/2$. Portanto $x_n = x_0 2^{-n}$, donde

$$q_n = 2\alpha + (q_0 - 2\alpha) \cdot 2^{-n}.$$

É interessante observar que $x_n \rightarrow 0$, e de consequência $q_n \rightarrow \bar{q}$, quando $n \rightarrow \infty$. Ou seja, a quantidade de substância radioactiva converge para o valor estacionário, independentemente do valor inicial.

ex: Passado quanto tempo a substância radioactiva fica reduzida a $\frac{1}{32}$ -ésimo da quantidade inicial?

ex: O tempo de meia-vida do radiocarbono ^{14}C é $\tau \simeq 5730$ anos. Mostre como “datar” um fóssil, sabendo que a proporção de ^{14}C num ser vivente é fixa e conhecida.³

e.g. Crescimento exponencial. O crescimento exponencial de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado pela equação recursiva

$$p_{n+1} = \lambda p_n,$$

onde p_n representa a população no tempo n , dada uma certa população inicial p_0 . Um significado do parâmetro λ é o seguinte: em cada unidade de tempo o incremento $p_{n+1} - p_n$ da população é igual a soma de uma parcela αp_n , onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de fertilidade, e uma parcela $-\beta p_n$, onde $\beta > 0$ é um coeficiente de mortalidade. An applet with the simulations is in [exponentialgrowth](#).

- Discuta o comportamento das soluções da equação recursiva ao variar o parâmetro λ .
- A uma população que cresce segundo o modelo exponencial, é adicionada ou retirada uma certa quantidade β em cada unidade de tempo. O modelo é portanto

$$p_{n+1} = \lambda p_n + \beta,$$

onde β é um parâmetro positivo ou negativo. Determine soluções estacionárias, ou seja, que não dependem do tempo n , e a solução com condição inicial p_0 arbitrária (considere a substituição $x_n = p_n - \bar{p}$, onde $\bar{p}$ é a solução estacionária).

- Para quais valores dos parâmetros λ e β as soluções p_n convergem para a solução estacionária quando o tempo $n \rightarrow \infty$?

e.g. Growth of Fibonacci numbers. How fast do Fibonacci numbers grow? Define the quotients $q_n := f_{n+1}/f_n$ between neighbor Fibonacci numbers. From (2.1) one deduce the recursive equation

$$q_{n+1} = 1 + 1/q_n \tag{2.3}$$

for the q_n 's. We compute:

$$1, \quad 2, \quad 3/2 = 1.5, \quad 5/3 \simeq 1.66666, \quad 8/5 = 1.6, \quad 13/8 = 1.625, \quad 21/13 \simeq 1.61538, \quad \dots$$

³J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

You may observe the sequence in the following [applet](#). It turns out that the sequence (q_n) converge (try to prove it!), namely, $q_n \rightarrow \phi$ as $n \rightarrow \infty$. Taking the limits in the recursive equation (2.3) we see that $\phi = 1 + 1/\phi$, and therefore ϕ is the positive root of the quadratic polynomial $x^2 - x - 1$,

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.6180339887498948482 \dots$$

Hence, for large values of n we may approximate Fibonacci law as

$$f_{n+1} \approx \phi f_n,$$

an exponential growth with rate ϕ . In particular, we expect $f_n \sim \phi^n$.

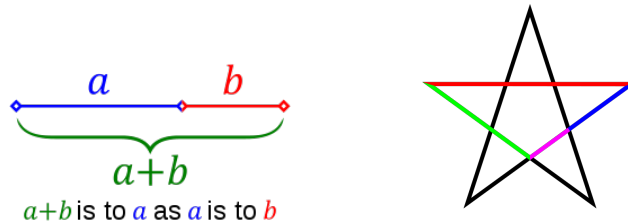
The limit ϕ is a famous irrational, the Greeks' "ratio/proportion". As described by Euclid⁴:

"A straight line is said to have been cut in extreme and mean ratio when, as the whole line is to the greater segment, so is the greater to the less."

If a is the greater part and b the less of a line of length $a + b$, Euclid's requirement is

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

There follows that the ratio $\phi = a/b$ satisfies $1 + 1/\phi = \phi$. This division of an interval is used in Book IV of the Elements to construct a regular pentagon. Observe that, as follows from the quadratic equation, ϕ^{-1} is equal to $\phi - 1$.



Extreme and mean ratio, and regular pentagon.
(from http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio)

ex: Show that ϕ is irrational using its geometric definition (see Euclid's *Elements*, or [HW59] section 4.6.)

e.g. Invenção do xadrez. Dizem que o sábio hindu Sissa inventou o jogo do xadrez e o ofereceu ao rei de Pérsia. Ao rei, que o convidou a escolher uma recompensa, pediu um grão de arroz (ou era trigo?) para o primeiro quadrado do tabuleiro, o dobro, ou seja, dois grãos, para o segundo quadrado, o dobro, ou seja, quatro grãos, pelo terceiro quadrado, e assim a seguir até o último dos quadrados do tabuleiro. O rei riu-se, num primeiro instante, mas ... a recompensa é

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63} \simeq 1.84 \times 10^{19}$$

grãos de arroz. Se 1 Kg de arroz contém à volta de 30000 grãos, isto significa algo como 6.13×10^{11} toneladas de arroz (which you may want to compare with People's Republic of China's production in 2008, which has been, according to [FAO](#), about 1.93×10^8 metric tons!).

Series. A *series* is a formal infinite sum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, or $\sum_{n \geq 0} x_n$, where the $x_n \in \mathbb{R}$ are elements of some given real (or complex) sequence. If the sequence (s_n) of *partial sums*, defined as $s_n := \sum_{k=0}^n x_k$ (which are honest numbers) converges to some limit, say $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, then we say the series is *convergent* (or *summable*), and that its *sum* is $\sum_{n \geq 0} x_n := s$.

A series $\sum_n x_n$ is *absolutely convergent* if the series $\sum_n |x_n|$, formed with the absolute values of its terms, is convergent. Of course, absolute convergence is stronger than mere convergence. Indeed, convergent but not absolutely convergent series are quite interesting and strange objects.

⁴Euclid, *Elements*, Book VI, Definition 3.

e.g. Harmonic series. The *harmonic series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

diverges. Indeed, its generic term $1/n$, for $n \geq 2$, is bigger than the integral $\int_{n-1}^n dx/x$, hence the partial sums $\sum_{k=1}^n 1/k$ are bounded from below by the logarithm $\log n$ (modulo some additive constant).

Geometric series. The identity $(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n)(\lambda - 1) = \lambda^{n+1} - 1$ shows that, if $\lambda \neq 1$, the sum of the first $n + 1$ terms of the geometric progression (with $a = 1$) is

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$$

In particular, when $|\lambda| < 1$, the *geometric series* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ is absolutely convergent, and its sum is

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n + \dots = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

e.g. Dichotomy paradox. Using the above formula for the sum of the geometric series, you may try to convince [Zeno](#) that

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots = 1.$$

e.g. Decimal expansions. Also, you may convince yourself that $0.99999\dots$, which by definition is the sum of the series

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots$$

is actually equal to 1. Moreover, you may learn how to recognize rational numbers as $0.33333\dots$ or $1.285714285714\dots$ from their periodic expansion. Indeed, a real number is rational if and only if its base 10 (or any other base $d \geq 2$) expansion is eventually periodic.

ex: Diga se a seguintes séries são convergentes, e, se for o caso, calcule a soma.

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots \quad 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots \quad 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4/5)^n \quad 9/10 + 9/100 + 9/1000 + \dots \quad 0.3333\dots$$

Convergence tests. Deciding convergence or divergence of a series is not easy. The only tool at our disposal is comparison with known series, and essentially the only known non-trivial series is the geometric one. Comparison means the obvious observation that $0 \leq x_n \leq y_n$ for any n sufficiently large implies the following two conclusions: $\sum_n y_n < \infty \Rightarrow \sum_n x_n < \infty$, and $\sum_n x_n = \infty \Rightarrow \sum_n y_n = \infty$.

Now, if $|x_n| \leq C \lambda^n$ for some constant $C > 0$ and any n sufficiently large, then the partial sums of the series $\sum_n x_n$ are bounded by a constant times the partial sums of the geometric series $\sum_n \lambda^n$, therefore the series $\sum_n x_n$ is absolutely convergent whenever $|\lambda| < 1$. But this happens when $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/n} < 1$ (*root test*) or when $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1}/x_n| < 1$ (*ratio test*).

e.g. The exponential. Take $x_n = t^n/n!$, where the “factorial” is $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ (and $0! := 1$). The series

$$\exp(t) := \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots$$

is absolutely convergent for any $t \in \mathbb{R}$ (for example, by the ratio test). Therefore, it defines a function $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, which we call *exponential*, and also denote by e^t .

- Show that $e^{t+s} = e^t e^s$ for any $t, s \in \mathbb{R}$ (compare the coefficients of the power series, using the binomial formula). Deduce that e^t is never zero, and that $e^{-t} = (e^t)^{-1}$.

2.2 Babylonian-Heron method to compute square roots

Considere o problema de determinar o lado ℓ de um quadrado dada a sua área $a > 0$, ou seja, o número que chamamos $\ell = \sqrt{a}$.

e.g. Babylonian-Heron algorithm. Um método, descrito por Heron⁵, mas utilizado provavelmente pelos babilônios⁶, consiste em construir recursivamente retângulos de área a com lados cada vez mais próximos. Se x_1 e y_1 são a base e a altura do primeiro retângulo, e portanto $x_1 y_1 = a$, então o segundo retângulo tem como base a média aritmética $x_2 = (x_1 + y_1)/2$ de base e altura do primeiro, o terceiro retângulo tem como base a média aritmética $x_3 = (x_2 + y_2)/2$ da base e a altura do segundo, e assim sucessivamente. A equação recursiva para as bases é

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Observe que se a e a conjectura inicial são racionais, então todos os x_n são números racionais.

The algorithm converges, and quite fast. We could, as the babylonians, put an initial guess $x_1 = 3/2$ for $\sqrt{2}$ (since $1^2 < 2 < 2^2$), and find

$$x_2 = \frac{17}{12} \simeq 1.41666666666 \quad x_3 = \frac{577}{408} \simeq 1.41421568627 \quad x_4 = \frac{665857}{470832} \simeq 1.41421356237$$

As you see, the sequence stabilizes quite fast.

Error estimate. As a first attempt to explain this miracle, we could start looking at the recursive equations for the bases and the heights of the rectangles:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad 1/y_{n+1} = \frac{1/x_n + 1/y_n}{2}$$

(so, the next height is the “harmonic mean” of the base and height). We see that the x_n ’s and the y_n ’s form decreasing and increasing sequences, respectively (disregarding the first guess, of course), namely

$$y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq x_3 \leq x_2,$$

The real root is somewhere between, namely $y_n \leq \sqrt{a} \leq x_n$. Hence, we have an explicit control of the error. A computation shows that the lengths of those intervals, the differences $\varepsilon_n = x_n - y_n$ satisfy the recursion

$$\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_n$$

So, and initial “error” $\varepsilon_1 \leq 1$ (an easy achievement, since we easily recognize squares of integers) reduces to at least $\varepsilon_n \leq 2^{-n}$ after n iterations. The true error is actually much smaller. Indeed, in our example we may compute

$$\varepsilon_2 = \frac{17}{12} - 2\frac{12}{17} = \frac{1}{204} \simeq .005 \quad \text{and} \quad \varepsilon_3 = \frac{577}{408} - 2\frac{408}{577} = \frac{1}{235416} \simeq 0.000004$$

So that the first improved guess x_2 has already one correct decimals, and the second, x_3 has already four correct decimals!

Irrationals. What babylonians didn’t suspect is that if you start with a rational guess for $\sqrt{2}$, you get an infinite sequence of rational approximations, but the process never stops. This is due to

⁵ “Since 720 has not its side rational, we can obtain its side within a very small difference as follows. Since the next succeeding square number is 729, which has 27 for its side, divide 720 by 27. This gives 26 2/3. Add 27 to this, making 53 2/3, and take half this or 26 5/6. The side of 720 will therefore be very nearly 26 5/6. In fact, if we multiply 26 5/6 by itself, the product is 720 1/36, so the difference in the square is 1/36. If we desire to make the difference smaller still than 1/36, we shall take 720 1/36 instead of 729 (or rather we should take 26 5/6 instead of 27), and by proceeding in the same way we shall find the resulting difference much less than 1/36.”

Heron of Alexandria, *Metrica*, Book I.

⁶Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1968. O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Dover, 1969.

Pythagoras theorem. *The square root of 2 is not rational.*

ex: Exercícios.

- A fórmula de Heron diz que a área de um triângulo de lados a , b e c , e semi-perímetro $s = (a + b + c)/2$ é

$$\text{área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

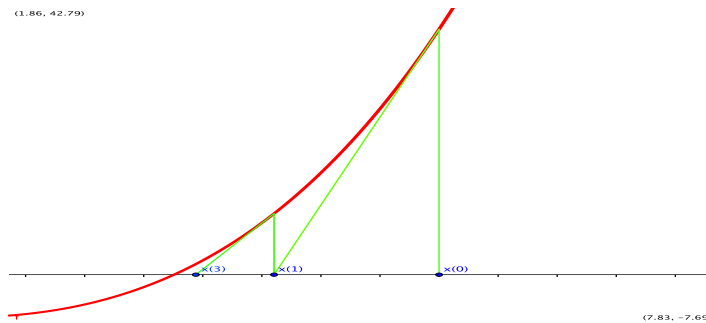
Estime a área de um triângulo de lados 7, 8 e 9.

- Estime $\sqrt{13}$ com um erro < 0.01 e 0.001 .
- Estime quantas iterações é preciso fazer para obter os primeiros n dígitos decimais de $\sqrt{2}$ usando o método dos babilônios.
- Prove o teorema de Pitágoras: $\sqrt{2}$ não é racional.

2.3 Newton method to find roots of polynomials

Roots of polynomials. Finding $\sqrt{a}$ means solving the polynomial equation $z^2 - a = 0$. What about finding roots of a generic polynomial $p(x) \in \mathbb{R}[x]$?

e.g. Newton-Raphson iterative scheme. O “método de Newton” é um método proposto por Joseph Raphson em 1690 para aproximar raízes de um polinômio $p(x)$ (o Newton só queria resolver $x^3 - 2x - 5 = 0$). Consiste em “adivinhar” uma aproximação razoável x_0 de uma raiz, e depois melhorar a conjectura usando o zero da aproximação linear $p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0)$.



Search for a root of $x^3 - 2x - 5$ using Newton iterations.

O método, portanto, consiste na recursão

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}.$$

Se a sucessão converge, i.e. $x_n \rightarrow x_\infty$, e se $p'(x_\infty) \neq 0$, então o limite x_∞ é uma raiz de p .

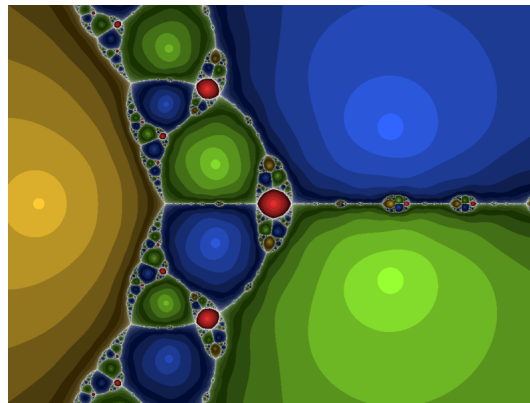
ex: Exercícios.

- Use Newton method to solve Newton’s problem, i.e. find the roots of $x^3 - 2x - 5$.
- Show that Newton method to solve $x^2 - a = 0$ corresponds to babylonian-Heron iterative scheme.
- Use o método de Newton para aproximar a “razão”, a raiz positiva de $x^2 - x - 1$. Then, compare with the babylonian-Heron method (i.e., estimate $\sqrt{5}$, then sum 1 and divide by 2).
- Write and implement Newton method to find n -th roots, i.e. to solve $x^n - a = 0$.

e.g. Newton's fractals. Em 1879 Cayley observou que o método pode ser utilizado também para aproximar raízes complexas de polinômios $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. A receita consiste em iterar a função racional

$$f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

O problema é decidir quando, ou seja para quais valores da conjectura inicial z_0 , a sucessão (z_n) , com $z_{n+1} = f(z_n)$, converge para uma raiz de $p(z)$. As bacias de atração das diferentes raízes desenharam padrões surpreendentes no plano complexo



Basins of attraction of the roots of $2z^3 - 2z + 2$ in $\mathbb{C}$
(from http://en.wikipedia.org/wiki/Newton_fractal).

Iteração de funções racionais na esfera de Riemann. É natural considerar iterações de funções racionais $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ arbitrárias (os endomorfismos da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$), e querer descrever as trajetórias definidas pela equação recursiva $z_{n+1} = f(z_n)$.

O exemplo mais estudado consiste nas iterações da família de polinômios quadráticos

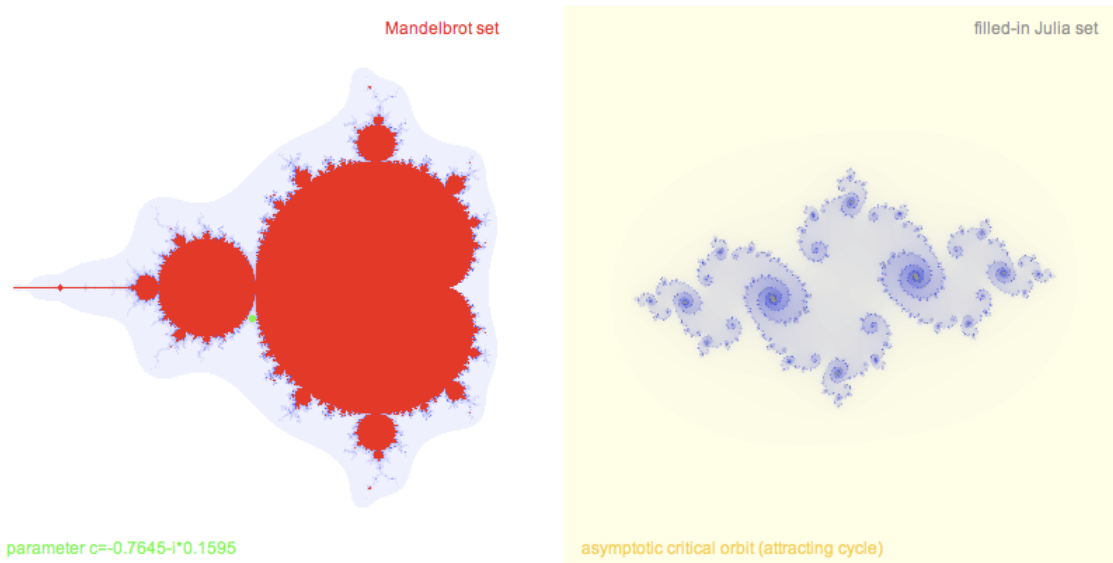
$$f(z) = z^2 + c$$

ao variar o parâmetro $c \in \mathbb{C}$. A sua beleza foi intuita por Gaston Julia⁷ e Pierre Fatou⁸ no princípio do século XX, desvendada com o auxílio dos computadores modernos por Benoît Mandelbrot, e estudada por uma multidão de excelentes matemáticos (como Adrian Douady, Dennis Sullivan, John Milnor, Misha Lyubich, Jean-Christophe Yoccoz, Curtis McMullen, ...) a partir dos anos '80 do século passado.

Nice pictures. Em baixo, está uma imagem que nos tempos de Julia e Fatou apenas era possível ver com uns olhos matemáticos bem afinados (um applet Java que produz a figura está no meu [bestiário](#)). O laço de corações vermelhos à esquerda, chamado *Mandelbrot set*, consiste nos valores do parâmetro complexo c tais que a órbita do ponto crítico $z_0 = 0$ permanece limitada. A região cinzenta à direita, chamada *filled-in Julia set*, consiste no conjunto das condições iniciais z_0 cuja órbita é limitada. As outras cores (que permitem ver os conjuntos "invisíveis" de Cantor) são escolhidas dependendo da velocidade com que as trajetórias z_n fogem para o infinito.

⁷G. Julia, Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **8** (1918), 47-245.

⁸P. Fatou, Sur les substitutions rationnelles, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **164** (1917) 806-808, and **165** (1917), 992-995.



Conjunto de Mandelbrot (esquerda) e conjunto de Julia do polinómio $z^2 + c$ com $c \simeq -0.7645 - i \cdot 0.1595$ (direita).
(from <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/bestiario/julia.html>)

Much more beautiful pictures, and then movies and so on, may be found in this page by Jos Leys: <http://www.josleys.com>

2.4 Finite difference equations

Fibonacci model is the prototype of

Recursive linear equations. A *recursive linear equation* (or “finite difference linear equation”) is a law

$$a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n \quad (2.4)$$

which defines a sequence (x_n) given a set of “initial conditions” $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$ and the known sequence (external force) f_n . Above, $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_p \neq 0$ are real or complex parameters. It is a discrete version of a linear ordinary differential equation of degree p with constant coefficients. When $f_n = 0$ for all n , we get a *homogeneous recursive equation*

$$a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0. \quad (2.5)$$

The set of solutions of the homogeneous equation (2.5) is a vector space H (of dimension p , and the set of solutions of (2.4) is an affine space modeled on H , i.e. has the form $(z_n) + H$, where (z_n) is any (particular) solution of (2.4).

Eigenfunctions. The general recipe is: “linear homogeneous equations have exponential solutions”. The conjecture $x_n = z^n$ solves the recursive equation (2.5) if z is a root of the *characteristic polynomial*

$$P(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

In particular, if P has p distinct roots (in $\mathbb{C}$), say $z_1, z_2, \dots, z_p$, then the general solution of the homogeneous equation is a linear combination

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_p z_p^n$$

where the $c_1, c_2, \dots, c_p$ are constants which depend on the initial conditions $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$.

ex: Find an explicit formula for the Fibonacci numbers f_n ’s (which is known as *Binet’s formula*).

Generating functions. Given a sequence (x_n) , defined anyway, we may consider the (formal) power series

$$F(z) := \sum_{n \geq 0} x_n z^n$$

If the series has a non-zero radius of convergence (since the radius of convergence R is given by Hadamard formula $1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, this happens when the x_n 's grow at most exponentially, i.e. when $|x_n| \leq C\lambda^n$ for some $C > 0$ and $\lambda > 0$), it defines an analytic function $F(z)$ in some neighborhood of the origin. Then, the original sequence may be recovered computing derivatives, as $x_n = F^{(n)}(0)/n!$. For this reason $F(z)$ is called *generating function* of the sequence (x_n) .

You may find interesting the following characterization of rational functions.

Theorem 2.1. A power series $\sum_{n \geq 0} x_n z^n$ represents a rational function $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \in \mathbb{C}(z)$ iff the coefficients x_n satisfy a recursive linear homogeneous equation.

e.g. Generating function of the Fibonacci numbers. If f_n denotes the n -th Fibonacci number, starting from $x_0 = x_1 = 1$, then the power series $\sum_{n \geq 0} f_n z^n$ represents the rational function

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

in a neighborhood of the origin. Observe that it has a pole with smallest absolute value at $1/\phi$, and deduce that $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = \phi$ (so that $f_n \sim \phi^n$, as we already knew).

ex: Give examples of sequences which do not satisfy any (finite) recursion.

ex: Rational approximations of $\sqrt{2}$. Consider the recursive equation

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n.$$

Find the general solution. Find the solution with $x_0 = 0$ and $x_1 = 1$, and compute explicitly the first few terms of the sequence. Show that the quotients $q_n := x_{n+1}/x_n$ converge to $1 + \sqrt{2}$ when $n \rightarrow \infty$, and therefore

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \rightarrow \sqrt{2}$$

Obtain rational approximations of $\sqrt{2}$.

Recursive systems. A linear homogeneous recursive system is a law

$$x_{n+1} = Ax_n$$

for some vector valued sequence $x_n \in \mathbb{R}^k$, given a square matrix $A \in \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R})$. The solution is

$$x_n = A^n x_0,$$

where $x_0 \in \mathbb{R}^k$ is the initial condition. The computation of powers A^n of a square matrix A is simplified if we can diagonalize it. For example, if the matrix has k distinct and real eigenvalues, then in the basis formed by the eigenvectors it is a diagonal matrix, say $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, and its n -th power is simply the diagonal matrix $A^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n)$.

A finite difference equation of order p like

$$a_p y_{n+p} + a_{p-1} y_{n+p-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$$

is equivalent to a recursive linear homogeneous system $x_{n+1} = Ax_n$ for the vector values sequence $x_n := (y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p+1})$.

ex: Write and solve the system which corresponds to Fibonacci problem.

e.g. Modelos discreto presas-predadores. Um modelo discreto de um sistema presas-predadores é

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n - \beta x_n y_n \\ y_{n+1} = -\gamma y_n + \delta x_n y_n \end{cases}$$

e outro modelo é

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) - \beta x_n y_n \\ y_{n+1} = \delta x_n y_n \end{cases}$$

Nos dois casos, x_n e y_n são as populações relativas das presas e dos predadores, respectivamente, no tempo n , e as letras gregas são parâmetros.

- Discuta o significado dos parâmetros dos modelos, e as diferenças entre os dois modelos.
- Determine os pontos estacionários.
- Simule as soluções dos sistemas ao variar os parâmetros.

e.g. Arithmetic-geometric mean. Given two positive numbers x and y , define recursively

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + g_n) \quad g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}$$

starting with $a_0 = (x + y)/2$ and $g_0 = \sqrt{xy}$, the arithmetic and the geometric mean of x and y , respectively. The arithmetic-geometric mean inequality (the fact that $(x + y)^2 \geq 0$) says that $g_n \leq a_n$, and therefore

$$g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n} \geq \sqrt{g_n g_n} = g_n$$

Since both sequences a_n and g_n are between the minimum and the maximum of x and y , this implies that g_n converges, to some (positive) limit p . The sequence a_n also converges, and to the same limit, since

$$a_n = g_{n+1}^2 / g_n \rightarrow p$$

The common limit is called *arithmetic-geometric mean* of x and y , say $p =: \text{AGM}(x, y)$. What is not trivial is a formula for the limit, and this is due to Gauss: it says that

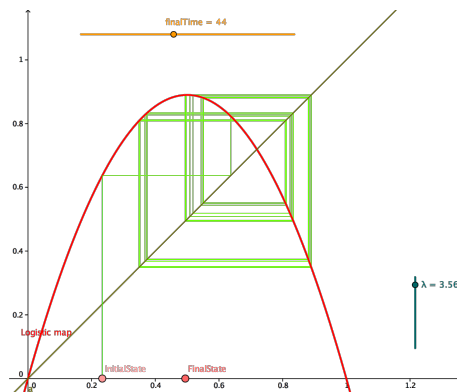
$$\text{AGM}(x, y) = \frac{\pi}{4} \frac{x + y}{K\left(\frac{x-y}{x+y}\right)} \quad \text{where} \quad K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

is the “complete elliptic integral of the first kind”.

2.5 Interval maps and cobweb plot

Graphical analysis. Consider a transformation $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ defined in an interval I of the real line. Iteration is possible when $f(I) \subset I$. One can follow trajectories using a “cobweb plot”: drawing vertical and horizontal lines connecting the points

$$(x, f(x)) \mapsto (f(x), f(x)) \mapsto (f(x), f^2(x)) \mapsto (f^2(x), f^2(x)) \mapsto (f^2(x), f^3(x)) \mapsto \dots$$



Cobweb plot of the quadratic map $f(x) = \lambda x(1 - x)$ when $\lambda = 3.56$.

e.g. Affine interval maps. As we have already seen, affine maps behave quite predictably. Indeed, the trajectories of an affine map like

$$f(x) = \lambda x + \alpha$$

with $\lambda \neq 1$, are sent, by the change of variable $y = x - \bar{x}$, where $\bar{x} = \alpha/(1 - \lambda)$ is the stationary solution, into the trajectories of $g(y) = \lambda y$, and the latter are geometric sequences. If $\lambda = 1$, trajectories are simply arithmetic series.

e.g. The quadratic family. As soon as the interval map is not affine, trajectories are not easily understood. The simplest interval maps which are not affine are quadratic polynomials. Consider the *quadratic family*, the collection of interval maps $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$f_\lambda(x) := \lambda x(1 - x) \quad (2.6)$$

depending on a (real) parameter λ . For $0 \leq \lambda \leq 4$, formula (2.6) defines a transformation of the unit interval, that we denote by the same symbol $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. For small λ , the trajectories are previsible. As λ approaches 4, they become quite wild.

ex: Try to understand the dynamic of the following maps, defined in convenient intervals (some are easy, other are hard, if not impossible).

$$f(x) = \pm x^3 \quad f(x) = x^{1/3} \quad f(x) = x^3 \pm x$$

$$f(x) = x^2 + 1/4 \quad f(x) = |1 - x| \quad f(x) = x^2 - 2 \quad f(x) = \sin x \quad f(x) = \cos x$$

$$f(x) = x(1 - x) \quad f(x) = 2x(1 - x) \quad f(x) = 3x(1 - x) \quad f(x) = 4x(1 - x)$$

2.6 Exponential sums

Arithmetic progressions . The dynamics of an *arithmetic progression*

$$a \quad a + \alpha \quad a + 2\alpha \quad a + 3\alpha \quad \dots \quad a + n\alpha \quad \dots,$$

obtained from the initial condition $x_0 = a$ using the recursion $x_{n+1} = x_n + \alpha$, is quite trivial. All trajectories $x_n = a + n\alpha$ diverge, provided $\alpha \neq 0$.

Something interesting happens if we compute time averages of the basic character of the real line, the observable $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ given by

$$e(x) := e^{2\pi i x}.$$

Apart from a constant factor $e^{2\pi i a}$ and the normalization $1/N$, the Birkhoff averages of an arithmetic progression are

$$S_N(\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \alpha n}.$$

ex: Show that the sum of the first n terms of an arithmetic progression $x_k = a + k\alpha$ is

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{n}{2}(x_0 + x_{n-1}) = na + \frac{n(n-1)}{2}\alpha$$

Exponential sums. Sums as

$$E(N) = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i x_n}$$

are called *exponential sums*, and contain “spectral information” about the distribution of the sequence of numbers (x_n) modulo 1. Triangular inequality gives the trivial bound $|E(N)| \leq N$, i.e. $E(N) = \mathcal{O}(N)$. If the different exponentials $e^{2\pi i x_n}$ were “uncorrelated”, as successive positions of a random walk in the plane, we should expect $E(N) = \mathcal{O}(\sqrt{N})$. This, of course, does not happen with “deterministic” generic sequences. The best we can hope is some bound as $E(N) = o(N)$ (which, in our case, would mean that the Birkhoff averages $\bar{\varphi}_n \rightarrow 0$).

ex: Observe that, for integer $q \geq 1$, the complex number $z = e^{2\pi i/q}$ is a non-trivial q -th root of unity. Hence,

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{q-1} = 0.$$

Deduce that if $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ with $p \in \mathbb{Z}$, then

$$\sum_{n=0}^{q-1} e^{2\pi i (p/q)n} = 1$$

so that the exponential sum $S_n(p/q)$ is periodic, and in particular is $\mathcal{O}(1)$.

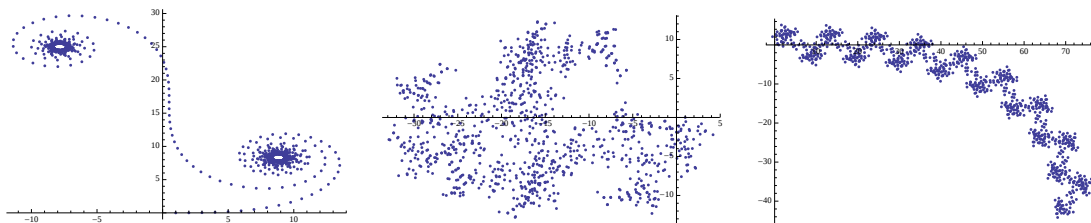
Gauss sums. Much more interesting are exponential sums defined by a “quadratic progression” $x_n = \alpha n^2$. These are

$$G_N(\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \alpha n^2}.$$

When $\alpha = p/q$ is a rational, they are called (*quadratic*) *Gauss sums*, and they are extremely interesting objects in number theory, as well as in the Fourier analysis on finite fields. These sums are also obviously related to the *Jacobi theta function*, defined for complex $z \in \mathbb{C}$ and $\tau \in \mathbb{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ (the Poincaré upper half-space, a model for the hyperbolic plane) by the series

$$\theta(z, \tau) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2 + 2\pi i z n}$$

If you plot the sums for a large number of values of N , given an irrational α or a rational with large denominator, you see “curlicues” as



Theta sums with $\alpha = 1/1111$, $\alpha = e$ and $\alpha = \pi$.

ex: You may also explore what happens with other exponents, such as $\sqrt{n}$, and get interesting patterns or phenomena.

3 Differential equations and flows

“... forse stima che la filosofia sia un libro e una fantasia d’un uomo, come l’Iliade e l’Orlando furioso, libri ne’ quali la meno importante cosa è che quello che vi è scritto sia vero. Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l’universo), ma non si può intendere se prima non s’impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne’ quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.”

Galileo Galilei, *Il saggiatore*, 1623.

3.1 Structure of physical models

Flows of vector fields. The main way in which dynamical systems enter in physics is through differential equations. Let X be a differentiable manifold, and let v be a vector field on X . If we assume that the autonomous differential equation

$$\dot{x} = v(x)$$

with any given initial condition $x(0) = x$, has solutions $t \mapsto x(t)$ which exist for any time $t \in \mathbb{R}$ (as is the case when v is smooth and X is compact), then the flow of v is the action $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ given by $\Phi_t(x) = x(t)$.

From flows to maps. Given a flow $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, one could specialize to discrete time looking at the system at multiples integers $n\tau$ of a given time-unit $\tau > 0$, and this amounts to iterate the transformation $f = \Phi_\tau$.

Also, given a submanifold $U \subset X$ of codimension 1 which is transversal to the flow (i.e. the tangent space $T_x U$ is transversal to $\mathbb{R}v(x)$ for any $x \in U$), one could define a *first return map* $f : U \rightarrow U$ sending a point $x \in U$ into $x(t)$ if t is the smallest positive time $t > 0$ such that $\Phi_t(x) \in U$.

Newtonian mechanics. According to greeks, the “velocity” $\dot{q} = \frac{d}{dt}q$ of a planet, where $q \in \mathbb{R}^3$ is its position in our euclidean space and t is time, was determined by gods or whatever forced planets to move around circles. Then came Galileo, and showed that gods could at most determine the “acceleration” $\ddot{q} = \frac{d^2}{dt^2}q$, since the laws of physics should be written in the same way by an observer in any reference system at uniform rectilinear motion with respect to the fixed stars. Finally came Newton, who decided that what gods determined was to be called “force”, and discovered that the trajectories of planets, fulfilling Kepler’s experimental three laws⁹, were solutions of his famous (second order differential) equation

$$m\ddot{q} = F$$

where m is the mass of the planet, and where the attractive force F between the planet and the Sun is proportional to the product of their masses and inverse proportional to the square of their distance.

Later, somebody noticed that most observed forces were “conservative”, could be written as $F = -\nabla V$, for some real valued function $V(q)$ called “potential energy”. There follows that Newton equations can be written as $m\ddot{q} = -\nabla V$, and that the “total energy”

$$E = \frac{1}{2}m|\dot{q}|^2 + V(q)$$

⁹In *Astronomia nova*, 1609, and *Harmonices mundi*, 1619, Johannes Kepler published his three laws of planetary motions:

- i) planets moves in ellipses with focus at the Sun,
- ii) the radius vector describes equal areas in equal times,
- iii) the squares of the periods are to each other as the cubes of the mean distance from the Sun.

It was with the purpose to derive Kepler laws from a second order differential equation $m\ddot{q} = F$ that Isaac Newton realized that the force of gravitational attraction between the Sun and a planet (hence between any two bodies!) should be proportional to m/ρ^2 (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687).

is constant along trajectories. The function $\frac{1}{2}m|\dot{q}|^2$ is called “kinetic energy” of the system.

An alternative (and indeed useful) formulation of Newtonian mechanics is the one developed by Lagrange. He defined the “Lagrangian” of the system as

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m|\dot{q}|^2 - V(q)$$

and observed that Newton equations are equivalent to the (Euler)-Lagrange equations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

The product $p = m\dot{q} = \partial L / \partial \dot{q}$ is called “(linear) momentum”, and, since p/m is the gradient of the kinetic energy $K(p) = |p|^2/2m$, Hamilton could write Newton’s second order differential equations as the system of first order differential equations

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

where $H(q, p) = K(p) + V(q)$ is the total energy as function of q and p , nowadays called “Hamiltonian”. It is a simple check that the energy is a constant of the motion, since

$$\frac{d}{dt} H = \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

Hamiltonian flows. The modern abstract formulation of classical mechanics is as follows. Let (X, ω) be a symplectic manifold, i.e. a differentiable manifold X of even dimension $2n$, equipped with a smooth closed differential two-form ω such that $\omega^n \neq 0$. Darboux theorem says that locally one can choose “canonical” coordinates $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ such that $\omega = \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq_k$. Let $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth function, called “Hamiltonian” and thought as the “energy” of the system. Typically, it has the form “kinetic energy+potential energy”, where the kinetic energy is a positive definite quadratic form in the momenta p , and the potential energy is a function V depending on the positions q and possibly on the momenta p . The Hamiltonian vector field v is defined by the identity $dH = i_v \omega$, and the *Hamiltonian flow* is the flow of v . In canonical coordinates, the equations of motion read

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

It happens that the Hamiltonian flow Φ preserves the energy, namely $H(\Phi_t(x)) = H(x)$ for any $x \in X$ and any time $t \in \mathbb{R}$, as follows from the fact that $\mathcal{L}_v H = 0$.

Geodesic flows. The simplest mechanical system, the free motion of a particle, belongs to the class of geodesic flows. Let (M, g) be a Riemannian manifold, g being the Riemannian metric. Let SM be the unit tangent bundle of M . If M is geodesically complete, to every unit vector $v \in SM$ there corresponds a unique geodesic line (i.e. a local isometry) $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ such that $\dot{c}(0) = v$. The *geodesic flow* is the action $\Phi : \mathbb{R} \times SM \rightarrow SM$, defined as $\Phi_t(v) = \dot{c}(t)$.

Particularly interesting are geodesic flows over homogeneous spaces. Apart from the rather trivial exemple of flat spaces, a source of interesting dynamical properties is the geodesic flow on a manifold with constant negative curvature. The proptotype is as follows. The group $G = PSL(2, \mathbb{R})$ can be seen as the orientation preserving isometry group of the Poincaré half-plane $\mathbb{H}$, equipped with the hyperbolic metric of sectional curvature -1 . Its action is transitive. Since the stabilizer of a point in the half-plane is isomorphic to the group of rotations $SO(2)$, we can identify $S\mathbb{D}$ with G . Now, let Γ be a discrete cocompact subgroup of G with no torsion. The quotient space $\Sigma = \mathbb{D}/\Gamma$ is a compact Riemann surface, which comes equipped with a Riemannian metric of sectional curvature -1 , and its unit tangent bundle is diffeomorphic to G/Γ . The geodesic flow on $S\Sigma$ is then the algebraic flow $\Phi : \mathbb{R} \times G/\Gamma \rightarrow G/\Gamma$ defined as $\Phi_t(g\Gamma) = e_t g\Gamma$, where

$$e_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

3.2 Integration of one-dimensional systems

“6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx”

(*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*)

Isaac Newton, letter to Gottfried Leibniz, 1677.

Some techniques to integrate ordinary differential equations (ODEs) like $\dot{x} = v(x, t)$ when the phase space is one or two-dimensional.

Integrating simple ODEs. The simplest case occurs when the velocity field v does not depend on the phase space variable x , hence

$$\dot{x} = v(t),$$

where $v(t)$ is some given (piecewise) continuous function of time. This just says that x must be a primitive of v , and the fundamental theorem of calculus (i.e. Leibniz and/or Newton’s discovery) tells us how to compute such a primitive:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds.$$

Here you may observe that this class of ODEs have “symmetries”. The line field does not depend on x , hence slopes of solutions are the same along horizontal lines ($t = \text{constant}$) in the extended phase space $X \times \mathbb{R}$. There follows that any translate $\varphi(t) + c$ of a solution $\varphi(t)$ is still a solution.

Autonomous first order ODEs and their flows. A first order ODE of the form

$$\dot{x} = v(x),$$

where the velocity field v does not depend on time, is called *autonomous*. Most fundamental equations of physics (those describing closed systems, without external forces) can be written as autonomous first order ODEs, and this corresponds to time-invariance of physical laws.

Here you may notice symmetries again. The line field v of an autonomous equation is constant along vertical lines ($x = \text{constant}$) of the extended phase space $X \times \mathbb{R}$. Hence any translate $\varphi(t+s)$ of a solution $\varphi(t)$ is still a solution. This is the manifestation of time-invariance of a law codified by an autonomous ODE. This also implies that there is no loss of generality in restricting to an initial time $t_0 = 0$.

Equilibrium solutions. First, we observe that an autonomous equation may admit constant solutions. Indeed, if x_0 is a *singular point* of the vector field v , i.e. a point where $v(x_0) = 0$, then the constant function

$$x(t) = x_0 \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$$

obviously solves the equation. Such solutions, which do not change with time, are called *equilibrium*, or *stationary*, solutions.

Solutions near non-singular points. The trick used to “guess” other solutions, when the phase space is one-dimensional, i.e. $X \subset \mathbb{R}$, is a first instance of the method of “separation of variables”. Fix a *non-singular point* of the velocity field, i.e. a point x_0 where $v(x_0) \neq 0$. We want to solve the Cauchy problem with initial condition $x(t_0) = x_0$. First, rewrite the equation $dx/dt = v(x)$ formally as “ $dx/v(x) = dt$ ” (multiply by dt and divide by $v(x)$, so that all x ’s are on the left and all t ’s are on the right). Instead of trying to make sense to this last expression (which is possible, of course, and here you can appreciate the beauty of Leibniz’ notation dx/dt for derivatives!), observe that it is suggesting that $\int dx/v(x) = \int dt$. Now assume that the velocity field v is continuous and let $J = (x_-, x_+)$ be the maximal interval containing x_0 where v is different from zero. Integrating, from x_0 to $x \in J$ on the left and from t_0 to t on the right, we obtain a differentiable function $x \mapsto t(x)$ defined as

$$t(x) = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}$$

for any $x \in J$. Now, observe that the derivative dt/dx is equal to $1/v$. Since, by continuity, $1/v$ does not change its sign in J , our $t(x)$ is a strictly monotone continuously differentiable function. We can invoke the inverse function theorem and conclude that the function $t(x)$ is invertible. This prove that the above relation defines actually a continuously differentiable function $t \mapsto x(t)$ in some interval $I = t(J)$ of times around t_0 . Finally, you may want to check that the function $t \mapsto x(t)$ solves the Cauchy problem: just compute the derivative (using the inverse function theorem),

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 1 / \left(\frac{dt}{dx}(x(t)) \right) \\ &= v(x),\end{aligned}$$

and check the initial condition. Observe that the function $t(x) - t_0$ has then the interpretation of the “time needed to go from x_0 to x ”.

At the end of the story, if you are lucky enough and know how to invert the function $t(x)$, you'll get an explicit solution as

$$x(t) = F^{-1}(t - t_0 + F(x_0)),$$

where F is any primitive of $1/v$. Close inspection of the above reasoning shows that the local solution you've found is indeed the unique one. Namely, we have the following

Theorem 3.1. *Let $v(x)$ be a continuous velocity field and let x_0 be a non-singular point of v . Then there exist one and only one solution of the Cauchy problem $\dot{x} = v(x)$ with initial condition $x(t_0) = x_0$ in some sufficiently small interval I around t_0 . Moreover, the solution $x(t)$ is the inverse function of*

$$t(x) = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)},$$

defined in some small interval J around x_0 .

Proof. Here we give the pedantic proof. Let J be as above. Define a function $H : \mathbb{R} \times J \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$H(t, x) = t - t_0 - \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}.$$

If $t \mapsto \varphi(t)$ is a solution of the Cauchy problem, then computation shows that $\frac{d}{dt}H(t, \varphi(t)) = 0$ for any time t . There follows that H is constant along the solutions of the Cauchy problem. Since $H(t_0, x_0) = 0$, we conclude that the graph of any solution belongs to the level set $\Sigma = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times J \text{ s.t. } H(t, x) = 0\}$. Now observe that H is continuously differentiable and that its differential $dH = dt + dx/v(x)$ is never zero. Actually, both partial derivatives $\partial H/\partial t$ and $\partial H/\partial x$ are always different from zero. Hence we can apply the implicit function theorem and conclude that the level set Σ is, in some neighborhood $I \times J$ of (t_0, x_0) , the graph of a unique differentiable function $x \mapsto t(x)$, as well as the graph of a unique differentiable function $t \mapsto x(t)$, the inverse of t , which as we have already seen solves the Cauchy problem. $\square$

On the failure of uniqueness near singular points. The interval $I = t(J)$ where the solution is defined need not be the entire real line: solutions may reach the boundary of J , i.e. one of the singular points $x_{\pm}$ of the velocity field, in finite time. Since singular points are themselves equilibrium solutions, this imply that solutions of the Cauchy problem at singular points may not be unique, under such mild conditions (continuity) for the velocity field. Later we'll see Picard's theorem, which prescribes stronger regularity conditions on the velocity field v under which the Cauchy problem admits unique solutions for any initial condition in the extended phase space.

e.g. Counter-example. Both the curves $x(t) = 0$ and $x(t) = t^3$ solve the equation

$$\dot{x} = 3x^{2/3}$$

with initial condition $x(0) = 0$. The problem here is that the velocity field $v(x) = 3x^{2/3}$, although continuous, is not differentiable and not even Lipschitz at the origin. You may notice that the solution starting, for example, at $x_0 = 1$ reaches (or better comes from) the singular point $x_- = 0$ in finite time, since

$$\begin{aligned} t(x_-) - t(x_0) &= \int_1^0 \frac{1}{3} y^{-2/3} dy \\ &= -1. \end{aligned}$$

One-dimensional Newtonian motion in a time independent force field. The one-dimensional motion of a particle of mass m subject to a force $F(x)$ that does not depend on time is described by the Newton equation

$$m\ddot{x} = -U'(x),$$

where the potential $U(x) = -\int F(x)dx$ is some primitive of the force. The total energy

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

(which of course is defined up to an arbitrary additive constant) of the system is a constant of the motion, i.e. is constant along solutions of the Newton equation. In particular, once a value E of the energy is given (depending on the initial conditions), the motion takes place in the region where $U(x) \leq E$, since the kinetic energy $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ is non-negative. Conservation of energy allows to reduce the problem to the first order ODE

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x)),$$

which has the unpleasant feature to be quadratic in the velocity $\dot{x}$. Meanwhile, if we are interested in a one-way trajectory going from some x_0 to x , say with $x > x_0$, we may solve for $\dot{x}$ and find the first order autonomous ODE

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

There follows that the time needed to go from x_0 to x is

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(y))}}.$$

The inverse function of the above $t(x)$ will give the trajectory $x(t)$ with initial position $x(0) = x_0$ and initial positive velocity $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x_0))}$, at least for sufficiently small times t .

3.3 Exponential

The exponential. The exponential function, according to Walter Rudin “the most important function in mathematics” ([Ru87], 1st line of page 1), is the unique solution of the autonomous differential equation

$$\dot{x} = x$$

with initial condition $x(0) = 1$. Actually, it is convenient to complexify time, i.e. take $z = t + i\theta \in \mathbb{C}$ with $t, \theta \in \mathbb{R}$, and define the *exponential* as the power series

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

Since $\limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n!)^{1/n} = 0$, the radius of convergence is ∞ , hence the power series defines an entire function, i.e. a holomorphic function $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Deriving each term of the series, we easily verify that indeed $\exp' = \exp$. The initial condition $\exp(0) = 1$ is obvious. From absolute convergence of the series and algebraic manipulation we also get the group property

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$$

for any $z, w \in \mathbb{C}$, saying that $\exp$ is a homomorphism of the additive group $\mathbb{C}$ into the multiplicative group $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. In particular, $\exp(-z) = 1/\exp(z)$, so that the exponential $\exp(z)$ is never 0. This also justifies our notation $\exp(z) = e^z$, where

$$e := \exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \simeq 2.7182818284590452353602874713526624977572\dots$$

(another famous irrational, actually a transcendental number!). For real time $z = t$, we recover the familiar model of “exponential growth” $t \mapsto e^t$, a strictly increasing function from the additive group $\mathbb{R}$ onto the multiplicative group $\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$, growing faster than any power t^n as $t \rightarrow \infty$. For pure imaginary times, say $z = i\theta$ with $\theta \in \mathbb{R}$, we get the *Euler’s formula*

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

(and of course you may take the last identity as the “definition” of the trigonometric functions!). So, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ defines a periodic function with period 2π , sending the real line $\mathbb{R}$ onto the unit circle $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$. There follows from the group property that

$$\exp(t + i\theta) = e^t (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) .$$

Finally, the exponential $\exp$ is a periodic entire function with period $i2\pi$ which only omits the value 0, a holomorphic bijection of the cylinder $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$ onto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

e.g. Interest rates and the exponential. Let x be the annual interest paid for a deposit (so that an interest of 0.2% mean $x = 0.02$). If the interest is paid once each year, an initial deposit of a euros increases to

$$a + xa = a \cdot (1 + x)$$

after one year. If, however, the interest is “computed” every six months, the same initial deposit produces

$$a + \frac{x}{2}a + \left(a + \frac{x}{2}a\right) \frac{x}{2} = a \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

after one year. By induction, we see that if the interest is computed every $12/n$ months, after one year we get a final capital of

$$a \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

The limit of the gain factor as $n \rightarrow \infty$,

$$E(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

is another definition of the exponential function. If the argument lives in the Riemann sphere, you may think that $\exp(z) = (1 - z/\infty)^\infty$ has a zero of order ∞ at the point $p = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

e.g. Population dynamics. The exponential models the dynamics of a population in a unlimited environment. The *Malthusian/exponential model*¹⁰ is

$$\dot{N} = \lambda N$$

where $N(t)$ is the population at time t , and $\lambda > 0$ is some growth constant (the difference $\alpha - \beta$ between the natality rate and the mortality rate). The solution is $N(t) = N(0)e^{\lambda t}$. If we retire specimen at fixed rate $\alpha > 0$

$$\dot{N} = \lambda N - \alpha$$

we have a non-trivial stationary solution $\overline{N} = \alpha/\lambda$, and the difference $x(t) = N(t) - \overline{N}$ is still exponential.

This behaviour has to be compared with the *super-exponential model*

$$\dot{N} = \lambda N^2.$$

¹⁰T.R. Malthus, *An Essay on the Principle of Population*, London, 1798.

which undergoes a catastrophe (infinite population) in finite time! Indeed, the solution with $N(0) = N_0 > 0$ is $N(t) = N_0/(1 - \lambda t/N_0)$.

A more realistic model of population dynamics in a finite environment is the *logistic equation*¹¹

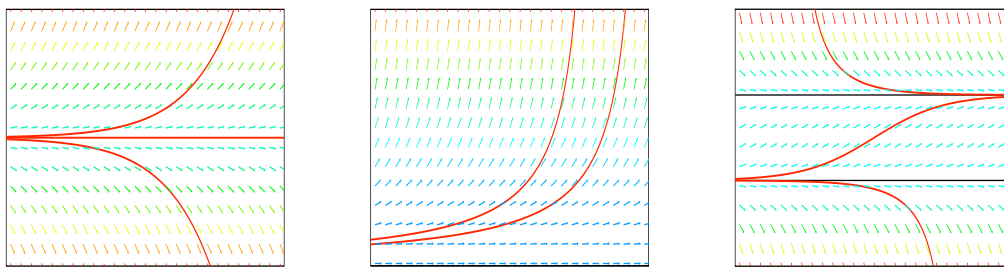
$$\dot{N} = \lambda N(1 - N/M)$$

where $\lambda > 0$ and the constant $M > 0$ is a maximal population. Observe that $\dot{N} \simeq \lambda N$ if $N \ll M$, and that $\dot{N} \rightarrow 0$ when $N \rightarrow M$. The relative population $x(t) = N(t)/M$ satisfies the “adimensional” logistic equation

$$\dot{x} = \lambda x(1 - x).$$

Here we see two equilibria: the trivial equilibrium $x(t) = 0$ and the maximum allowed population $x(t) = 1$. The generic solution with initial condition $0 < x(0) < 1$ is

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}},$$



Exponential growth, super-exponential growth and logistic model.

3.4 Linear systems

Linear systems and exponential. Consider a *linear system*

$$\dot{x} = Ax$$

for the trajectory $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$, defined by the square matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. The solution is given formally by

$$x(t) = e^{tA}x(0)$$

where the “exponential operator” e^{tA} is defined by the power series

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

Hyperbolic systems. O campo linear $v(x) = Ax$ é dito *hiperbólico* se o espectro de A , o conjunto

$$\text{sp}(A) = \{\lambda_k = \rho_k + i\omega_k \in \mathbb{C} \quad \text{t.q.} \quad \det(A - \lambda_k I) = 0\}$$

dos valores próprios de A , é disjunto do eixo imaginário (ou seja, $\rho_k \neq 0 \forall k$).

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\rho_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 t} \end{pmatrix}$$

A origem é dita *nodo estável* se $\rho_1, \rho_2 < 0$, *nodo instável* se $\rho_1, \rho_2 > 0$, *ponto de sela* se $\rho_1 < 0 < \rho_2$.

¹¹Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho & \omega \\ -\omega & \rho \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

A origem é dita *foco estável* se $\rho < 0$, *foco instável* se $\rho > 0$.

- Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + y \end{aligned}$$

Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$.

3.5 Simulations

There is no hope to solve generic or interesting differential equations, as long as they are non linear. Very few famous cases are solvable by “elementary” functions, as, for example, Kepler’s problem. Indeed, differential equations are the way mathematicians “define” new (transcendental) functions!

Euler method. Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x) \tag{3.1}$$

O *método de Euler* consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) \simeq x(t) + v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo” dt suficientemente pequeno. Portanto, a solução $x(t_n)$, nos tempos $t_n = t_0 + n \cdot dt$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é estimada pela sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt.}$$

Numa linguagem como **c++** ou **Java**, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) = x$, é

```
while (time < t)
{
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
}
```

ex: Euler formula for the exponential. We may apply Euler’s idea to the differential equation

$$\dot{x} = x$$

with initial condition $x(0) = 1$, whose unique solution we “defined” to be the $\exp(t)$. Given a step $dt = \varepsilon$ and a final time $t = n\varepsilon$ with $n \in \mathbb{N}$, we get the approximation

$$x(t) \simeq x_n = (1 + \varepsilon)^n$$

where $n = t/\varepsilon$ is the number of steps. In the limit when $\varepsilon \rightarrow 0$, these approximations converge to

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t.$$

ex: Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...

ex: Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

A priori bounds for the finite-difference method. It is important to have some control on the difference between the true solution $x(t)$ of a autonomous ODE

$$\dot{x} = v(x)$$

and the conjecture x_n obtained with the finite-difference method with time-step $\tau > 0$, hence $t = n\tau$ (thus, n is the number of steps). A crude bound is (see [?], page 544)

$$|x(t) - x_n| \leq \frac{1}{2} C \tau (e^{Lt} - 1)$$

where

$$C := \sup_{x \in \Omega} |v(x)| \quad \text{and} \quad L := \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right|$$

(C is the maximal speed, and L is the Lipschitz constant of the velocity field) and $\Omega \subset \mathbb{R}$ is a convex region where we know “a priori” the solution is confined to. Observe that for small times $t \ll 1/L$, the error is $|x(t) - x_n| \approx \frac{1}{2} CL\tau^2 n$.

Método RK-4. O método de Runge-Kutta (de ordem) 4 para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \quad \text{com condição inicial} \quad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um “passo” dt , e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dt}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$, e os coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)$$

ex: Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

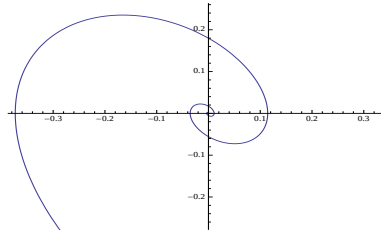
Simulações com software proprietário. Existem software proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinárias e parciais. Por exemplo, a função `ode45` do [MATLAB®](#), ou a função `NDSolve` do [Mathematica®](#), calculam soluções aproximadas de EDOs $\dot{x} = v(t, x)$ utilizando variações do método de Runge-Kutta.

- Verifique se os PC do seu Departamento/da sua Universidade têm acesso a um dos software proprietários [MATLAB®](#) ou [Mathematica®](#).
- Em caso afirmativo, aprenda a usar as funções `ode45` ou `NDSolve`.

Por exemplo, o pêndulo com atrito pode ser simulado, no [Mathematica®](#), usando as instruções

```
s = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -Sin[x[t]] - 0.7 y[t],
  x[0] == y[0] == 1}, {x, y}, {t, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 20}]
```

O resultado é



3.6 Existence and uniqueness theorems

Here we consider a generic first order ODE of the form

$$\dot{x} = v(x, t)$$

where the velocity field v is a (continuous) function defined in some extended phase space $X \times \mathbb{R}$. The phase space X may be some interval of the real line, an open subset of some Euclidean $\mathbb{R}^n$, or a differentiable manifold.

The problem we address is the existence and uniqueness of solutions of the initial value (or Cauchy) problem. A *local solution* passing through the point $(x_0, t_0) \in X \times \mathbb{R}$ is a solution $t \mapsto \varphi(t)$, defined in some neighborhood I of t_0 , such that $\varphi(t_0) = x_0$. Eventually, we'll be interested also in the possibility of extending such local solutions to larger intervals of times.

The basic existence theorem is ¹²

Theorem 3.2 (Peano). *Let $v(x, t)$ be a continuous velocity field in some domain A of the extended phase space $\mathbb{R}^2$. Then for any point $(x_0, t_0) \in A$ passes at least one integral curve of the differential equation $\dot{x} = v(x, t)$.*

Proof. (Idea) Natural guesses for the solutions are Euler lines starting through (x_0, t_0) . If we restrict to a sufficiently small neighborhood of (x_0, t_0) , we can assume that the velocity field is bounded, say $|v(x, t)| \leq K$, and that all such Euler lines lies in the “papillon” made of two triangles touching at (x_0, t_0) with slopes $\pm K$. Construct a family of Euler lines, graphs of $\varphi_n(t)$, such that the maximal step ε_n of the n -th line goes to 0 as $n \rightarrow \infty$. One easily sees that the family (φ_n) is bounded and equicontinuous. By the Ascoli-Arzelà theorem it admits a (uniformly) convergent subsequence. Finally, we claim that the sublimit $\varphi_{n_i} \rightarrow \varphi$ solves the differential equation. $\square$

Both existence and uniqueness may fail. The Hamilton-Jacobi equation

$$(\dot{x})^2 - xt + 1 = 0$$

cannot have solutions satisfying the initial condition $x(0) = 0$, for otherwise we would have a negative “kinetic energy” $(\dot{x})^2 = -1$ at that point!

Some regularity of the functions involved in a differential equation is also needed to ensure the uniqueness of solutions. For example, both curves $t \mapsto 0$ and $t \mapsto t^3$ solve the equation

$$\dot{x} = 3x^{2/3}$$

with initial condition $x(0) = 0$. The problem here is that the velocity field $v(t, x) = 3x^{2/3}$, although continuous, is not differentiable and not even Lipschitz at the origin.

¹²G. Peano, Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine, *Atti Accad. Sci. Torino* **21** (1886), 677-685. G. Peano, Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Mathematische Annalen* **37** (1890) 182-228.

Uniqueness of solutions. A velocity field $v(t, x)$, defined in a domain $I \times D$ of the extended phase space $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, is *locally Lipschitz* w.r.t. to the variable x if for any $(t_0, x_0) \in I \times D$ there is a neighborhood $J \times U \ni (t_0, x_0)$ and a constant $L \geq 0$ such that

$$\|v(t, x) - v(t, y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall (t, x), (t, y) \in J \times U$$

If $v(t, x)$ has continuous derivative w.r.t. x , i.e. if the Jacobian

$$D_x v(t, x) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t, x) \right)$$

exists and is continuous, then $v(t, x)$ is locally Lipschitz in any compact convex domain $I \times K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. The basic uniqueness theorem is the following classical result by Lindelöf¹³ and Picard.

Theorem 3.3 (Picard-Lindelöf). *Let $v(t, x)$ be a continuous velocity field defined in some domain D of the extended phase space $\mathbb{R} \times X$. If v is locally Lipschitz (for example continuously differentiable) w.r.t. the second variable x , then there exist one and only one local solution of $\dot{x} = v(t, x)$ passing through any point $(t_0, x_0) \in D$.*

Geometrically, the uniqueness theorem says that through any point (t_0, x_0) of the domain D there pass one and only one solution. Hence solutions, considered as curves in the extended phase space, cannot intersect each other.

In a domain where Picard's theorem applies, if two local solutions agree in a common interval of times then they are indeed restrictions of a unique solution defined in the union of the respective domains. There follows that solutions are always extendible to a maximum domain. Such solutions are called *maximal solutions*.

Strategy of the proof of the Picard's theorem. The first observation is that a function $\varphi(t)$ is a solution of the Cauchy problem for $\dot{x} = v(t, x)$ with initial condition $\varphi(t_0) = x_0$ iff

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \varphi(s)) ds$$

Now, we notice that the above identity is equivalent to the statement that φ is a fixed point of the so called *Picard's map* $\phi \mapsto \mathcal{P}\phi$, sending a function $t \mapsto \phi(t)$ into the function

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \phi(s)) ds$$

At this point, one must choose cleverly the domain of the Picard's map, which is the space of functions where we think a solution should be. It will be a certain space $\mathcal{C}$ of continuous functions, defined in an appropriate neighborhood I of t_0 , equipped with a norm that makes it a complete metric space (hence a Banach space). The Lipschitz condition, together with continuity, satisfied by the velocity field will imply that if the interval I is sufficiently small then the Picard's map $\mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ is a contraction. The contraction principle (theorem 7.4) finally guarantees the existence and uniqueness of the fixed point of $\mathcal{P}$ in $\mathcal{C}$.

Picard's iterations. The contraction principle actually says that the fixed point, i.e. the solution we are looking for, is the limit of any sequence $\phi, \mathcal{P}\phi, \dots, \mathcal{P}^n\phi, \dots$ of iterates of the Picard map starting with any initial guess $\phi \in \mathcal{C}$. In other words, the existence part of the theorem is "constructive", it gives us a procedure to find out the solution, or at least a sequence of functions which approximate the solution.

¹³M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457. Digitized version online via <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3074>

e.g. Simple ODEs. Consider the simple ODE $\dot{x} = v(t)$ with initial condition $x(t_0) = x_0$. Picard's recipe, starting from the initial guess $\phi(t) = x_0$ gives, already at the first step,

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

which is the solution we know.

e.g. The exponential. Suppose you want to solve $\dot{x} = x$ with initial condition $x(0) = 1$. You start with the guess $\phi(t) = 1$, and then compute

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = 1 + t \quad (\mathcal{P}^2\phi)(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \quad \dots \quad (\mathcal{P}^n\phi)(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^n$$

Hence the sequence converges (uniformly on bounded intervals) to the Taylor series of the exponential function

$$(\mathcal{P}^n\phi)(t) \rightarrow 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \dots = e^t,$$

which is the solution we already knew.

Details of the proof of the Picard's theorem. Choose a sufficiently small rectangular neighborhood

$$I \times B = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_\delta(x_0)$$

around (t_0, x_0) , where $B = \overline{B}_\delta(x_0)$ denotes the closed ball with center x_0 and radius δ in X . There follows from continuity of v that there exists K such that

$$|v(t, x)| \leq K$$

for any $(t, x) \in I \times B$. There follows from the local Lipschitz condition for v that there exists M such that

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leq M|x - y|$$

for any $t \in I$ and any $x, y \in B$. Now restrict, if needed, the (radius of the) interval I in such a way to get both the inequalities $K\varepsilon \leq \delta$ and $M\varepsilon < 1$. Let $\mathcal{C}$ be the space of continuous functions $t \mapsto \phi(t)$ sending I into B . Equipped with the sup norm

$$\|\phi - \varphi\| = \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|$$

this is a complete space. One verifies that the Picard's map sends $\mathcal{C}$ into $\mathcal{C}$, since

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s))| ds \leq K\varepsilon \leq \delta.$$

Finally, given two functions $\phi, \varphi \in \mathcal{C}$, one sees that

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - (\mathcal{P}\varphi)(t)| \leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s)) - v(s, \varphi(s))| ds \leq M\varepsilon \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|$$

hence $\|\mathcal{P}\phi - \mathcal{P}\varphi\| < M\varepsilon \|\phi - \varphi\|$. Since $M\varepsilon < 1$, this proves that the Picard's map is a contraction and the fixed point theorem allows to conclude. $\square$

We may not be able to solve them! Last but not least, we must keep in mind that we are not able to solve all equations. Actually, although we may prove the existence and the uniqueness for large classes of equations, we are simply not able to explicitly integrate the really interesting differential equations...

Ultimately we must recur to numerical methods to find approximate solutions and to qualitative analysis

Dependence on initial data and parameters Consider a family of ODEs

$$\dot{x} = v(t, x, \lambda)$$

where λ is a real parameter. We want to understand how solutions depend on the parameter λ . A basic instrument is the¹⁴

Theorem 3.4 (Grönwall's lemma). *Let $\phi(t)$ and $\psi(t)$ be two non-negative real valued functions defined in interval $[a, b]$ such that*

$$\phi(t) \leq K + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds$$

for any $a \leq t \leq b$ and some constant $K \geq 0$. Then

$$\phi(t) \leq K e^{\int_a^t \psi(s)ds}.$$

Proof. First, assume $K > 0$. Define

$$\Phi(t) = K + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds$$

and observe that $\Phi(a) = K > 0$, hence $\Phi(t) > 0$ for all $a \leq t \leq b$. The logarithmic derivative is

$$\frac{d}{dt} \log \Phi(t) = \frac{\psi(t)\phi(t)}{\Phi(t)} \leq \psi(t)$$

where we used the hypothesis $\phi(t) \leq \Phi(t)$. Integrating the inequality we get, for $a \leq t \leq b$,

$$\log \Phi(t) \leq \log \Phi(a) + \int_a^t \psi(s)ds.$$

Exponentiation gives the result, since

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq K \cdot e^{\int_a^t \psi(s)ds}$$

The case $K = 0$ follows taking the limit of the above inequalities for a sequence of $K_n > 0$ decreasing to zero. $\square$

Continuous dependence on initial conditions. If $x(t)$ and $y(t)$ are two solutions of the same differential equation

$$\dot{x} = v(t, x)$$

then

$$x(t) - y(t) = x(0) - y(0) + \int_{t_0}^t (v(s, x(s)) - v(s, y(s))) ds$$

If $L(s)$ denotes the Lipschitz constant of $v(s, \cdot)$, we get

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(0) - y(0)\| + \int_{t_0}^t L(s)\|x(s) - y(s)\|ds$$

The Gronwall's lemma 3.4 gives the estimate

$$\|x(t) - y(t)\| \leq e^{\int_{t_0}^t L(s)ds} \|x(0) - y(0)\|$$

Observe that the above control also gives an alternative proof of uniqueness of solutions given a Lipschitz condition on the vector field.

¹⁴T. H. Gronwall, Note on the derivative with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, *Ann. of Math* **20** (1919), 292-296.

Theorem 3.5 (smooth dependence on parameters). *Let $v(t, x, \lambda)$ be a family of vector fields defined on some domain of the extended phase space $D \subset \mathbb{R} \times X$ depending on a parameter $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$. If v is of class C^k with $k \geq 1$, then in some neighborhood of any $(t_0, x_0, \lambda_0) \in D \times \Lambda$ the local solutions of*

$$\dot{x} = v(t, x, \lambda)$$

with initial condition $x(t_0) = x_0$ are differentiable (indeed C^k) functions of (t, x, λ) .

A proof may be found in [BN05].

Warning. Continuous dependence does not exclude sensitive dependence on both initial conditions and parameters, even in the linear case! For example, the distance between solutions of $\dot{x} = \mu x$ with different $x(0)$ and/or μ may diverge for large time ...

4 Oscillations and cycles

4.1 Harmonic oscillator

Harmonic oscillator. The *harmonic oscillator* is the (phenomenon modeled by the) Newton equation

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

This is a quite universal equation, since it describes small oscillations around a “generic” stable equilibrium of any one-dimensional Newtonian system¹⁵ (indeed, take a Newton equation $m\ddot{x} = -dU'(x)$ of a particle in a potential field U . An equilibrium position is a zero of the force, i.e. a point x_0 where $U'(x_0) = 0$. It is “stable” if x_0 is a local minimum of the potential, so that the Taylor expansion of the potential around x_0 in powers of $q = x - x_0$ starts with $U(x) = \alpha + \frac{1}{2}\beta q^2 + \dots$, for some positive second derivative $U''(x_0) = \beta$. If we are only interested in small displacements of x around x_0 , we can safely disregard high order terms and approximate the Newton equation as $m\ddot{q} \simeq -\beta q$, which is an harmonic oscillator with resonant frequency $\omega = \sqrt{\beta/m}$).

Call $p = \dot{q}$ the momentum. The Newton equation $\ddot{q} = -\omega^2 q$ is equivalent to Hamilton’s first order equations

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 q.\end{aligned}$$

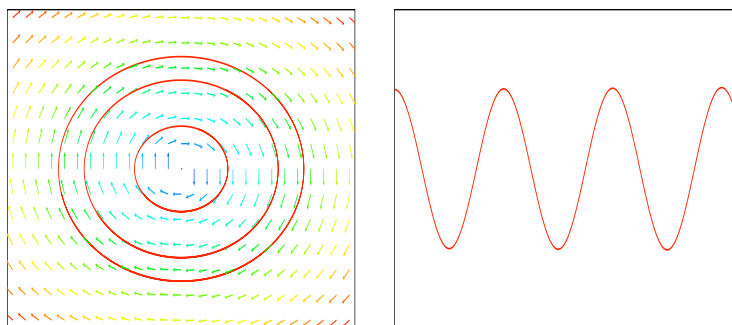
If we define the complex variable $z = \omega q + i\dot{q}$, Newton equation then takes the form of a first order linear equation in the complex line, namely $\dot{z} = -i\omega z$, whose solution is $z(t) = e^{-i\omega t} z(0)$.

In terms of the original (physical) variables, the solutions read

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

where the amplitude A and the initial phase ϕ depend on the initial conditions $q(0) = q_0$ and $\dot{q}(0) = v_0$. So, all trajectories are periodic with common period $2\pi/\omega$, and orbits are ellipses in the q - $\dot{q}$ plane, determined by the conserved energy

$$E = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) = \omega^2 A^2.$$



Harmonic oscillator, phase curves and time series.

¹⁵ “The harmonic oscillator, which we are about to study, has close analogs in many other fields; although we start with a mechanical example of a weight on a spring, or a pendulum with a small swing, or certain other mechanical devices, we are really studying a certain *differential equation*. This equation appears again and again in physics and other sciences, and in fact is a part of so many phenomena that its close study is well worth our while. Some of the phenomena involving this equation are the oscillations of a mass on a spring; the oscillations of charge flowing back and forth in an electrical circuit; the vibrations of a tuning fork which is generating sound waves; the analogous vibrations of the electrons in an atom, which generate light waves; the equations for the operation of a servosystem, such as a thermostat trying to adjust a temperature; complicated interactions in chemical reactions; the growth of a colony of bacteria in interaction with the food supply and the poison the bacteria produce; foxes eating rabbits eating grass, and so on; ...”

Richard P. Feynman [Fe63]

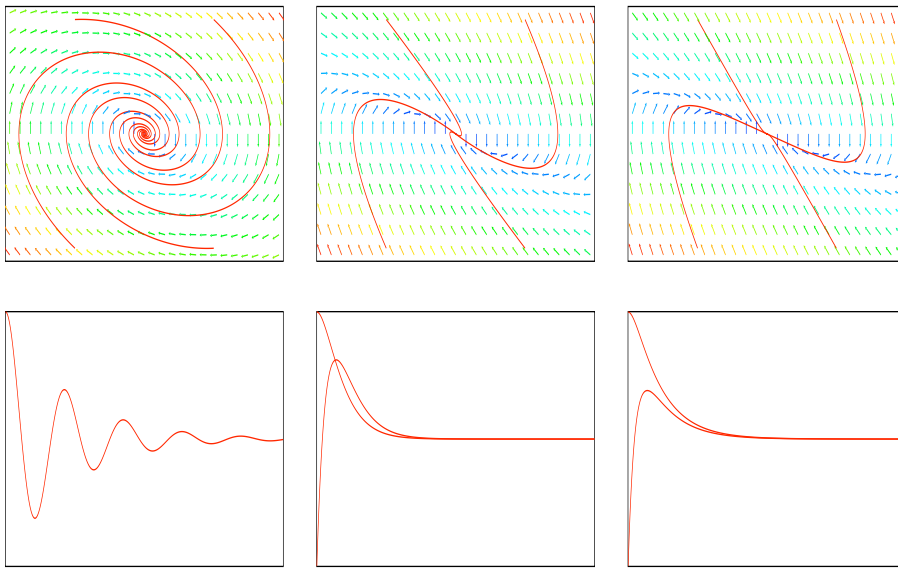
Damped oscillations. Adding friction to an harmonic oscillator we get

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2q,$$

where $\alpha > 0$ is some friction coefficient. The guess $q(t) = e^{-\alpha t}y(t)$ gives $\ddot{y} = \delta y$ where the “discriminant” is $\delta = \omega^2 - \alpha$. Find the general solution, draw pictures and discuss the cases $\alpha^2 < \omega^2$ (under-critical damping), $\alpha^2 = \omega^2$ (critical damping), and $\alpha^2 > \omega^2$ (overcritical damping). Show that the energy

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2q^2$$

decreases with time outside equilibrium points.



Underdamped, critical and overdamped oscillations (phase portrait and time series).

4.2 Mathematical pendulum and Jacobi's elliptic integrals

Mathematical pendulum. The Newton equation

$$I\ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta$$

models the motion of an idealized pendulum (meaning a point mass attached to a wire of negligible weight, under a constant gravitational force) with mass m and length ℓ , where $I = m\ell^2$ is the moment of inertia, g is the gravitational acceleration (near the Earth's surface), and θ is the angle of the wire with the origin $\theta = 0$ located at the stable equilibrium point. The energy

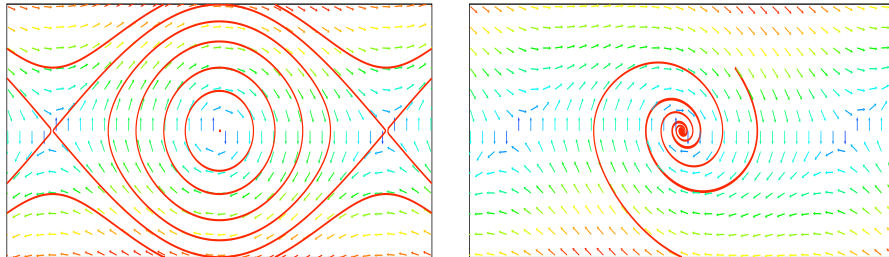
$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$$

is a constant of the motion. We can define the resonant frequency $\omega = \sqrt{mg\ell/I} = \sqrt{g/\ell}$ and write the equation as

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

Observe that in the limit of small oscillations we could replace $\sin \theta \simeq \theta$ and we are back to the harmonic oscillator $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$. To simplify things, let's take $\omega = 1$. Solving the energy for $\dot{\theta}^2$ we see that the motion with energy E is given implicitly by the “elliptic integral”

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - \cos(\theta))}}$$



Phase portrait of a mathematical pendulum (without and with friction)

Jacobi elliptic functions. What does a mathematician/physicist do when he/she face an integral and doesn't see how to solve in terms of known functions? He/she gives a name to it.

Define $k = \sqrt{\frac{E+1}{2}}$ and then $x = \frac{1}{k} \sin(\theta/2)$. The conservation of energy reads

$$\dot{x} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

There follows that time is given by the so called *Jacobi's elliptic integral of the first kind*

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

The solution, actually the inverse function $x = \text{sn}(t, k)$ as a function of t and the parameter k , is "named" *Jacobi elliptic function*.

This is the beginning of a long and interesting story. You may want to know that sn , as well its relatives, is a quotient of products of *Jacobi's theta functions*, hence, we are at the intersection between complex analysis, algebraic geometry, number theory, ...

4.3 Central forces and planetary motions

Central forces.

Theorem 4.1 (Bertrand ¹⁶). *The unique central forces $F(r)$ such that any bounded orbit is periodic are the Newtonian force $F(r) = k/r^2$ and the elastic force $F(r) = kr$.*

Two-body problem. Kepler problem deals with the motion of two point-like bodies (planets and/or stars) under mutual gravitational interaction. Let $m_1, m_2 > 0$ be their masses, and $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^3$ their positions, respectively. Gravitational interaction is described by the conservative force $-\nabla V$ with potential energy

$$V(q_1, q_2) = G \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|}$$

where G is the gravitational constant. This force verifies the "third law of dynamics", hence the total linear and angular momentum

$$P = m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_2 \quad \text{and} \quad M = m_1 q_1 \wedge \dot{q}_1 + m_2 q_2 \wedge \dot{q}_2$$

are conserved. This implies that the center of mass moves at uniform rectilinear speed and that the motion of the two bodies takes place in a plane orthogonal to the angular momentum M . If we choose a Galileian reference system where $P = 0$ and M is parallel to the z -axis (in particular M is supposed different from the zero vector, a case which leads to a collision ...), the full system is described by the single vector $q_2 - q_1$ in the x - y plane, which we write in polar coordinates as $\rho e^{i2\pi\theta}$. It turns out that the two-body problem is equivalent to the motion of a single point

¹⁶J. Bertrand, Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, *C. R. Acad. Sci.* **77** (1873), 849-853.

mass $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ moving on a plane under the influence of a potential energy $V(\rho) = -G\frac{m}{\rho}$, the (conserved) energy being

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + V(\rho)$$

Observe that if one of the bodies is much bigger than the other (like the Sun and the Earth), say $m_1 \gg m_2$, then the center of mass nearly coincides with the position q_1 of the bigger body, while the reduced mass m is essentially the mass m_2 of the smaller one (hence it looks like the Earth moving around the Sun, as Galileo had suggested).

Central forces. Consider the Newton equation

$$m\ddot{r} = F(|r|)\hat{r}$$

describing the motion of a particle (planet) of mass m in a central force field F . Conservation of angular momentum implies that the motion is planar, hence we may take $r \in \mathbb{R}^2$. In polar coordinates $r = \rho e^{i\theta}$, the equations read

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 &= F(\rho)/m \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= 0.\end{aligned}$$

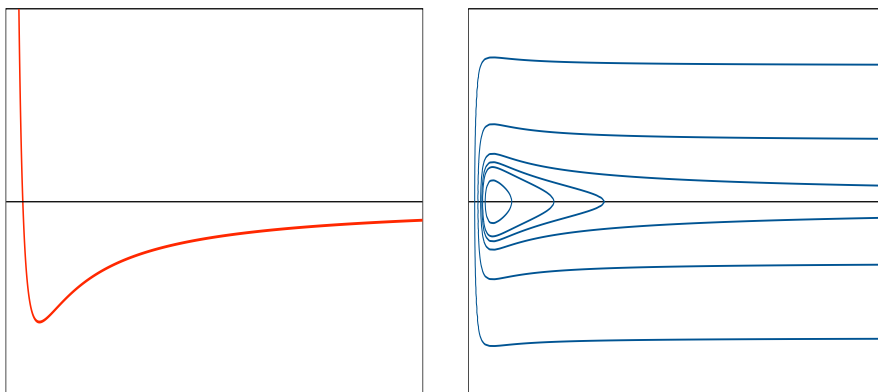
The second equation says that the “areal velocity” (“velocidade areal”) $\ell = \rho^2\dot{\theta}$ is a constant of the motion (Kepler’s second law).

Taking Newton’s gravitational force $F(\rho) = -\frac{GmM}{\rho^2}$ (where M is the mass of the Sun and G is the gravitational constant), the first equation may be written as

$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho}V_\ell(\rho),$$

where we defined the “effective potential energy” as $V_\ell(\rho) = \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{\rho^2} - G\frac{mM}{\rho}$. The conserved energy is

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{\rho^2} - G\frac{mM}{\rho}.$$



Kepler’s effective potential and some energy level sets.

Now we set $\rho = 1/x$ and look for a differential equation for x as a function of θ . Computation shows that $dx/d\theta = -\dot{\rho}/\ell$, and, using conservation of ℓ , that $d^2x/d\theta^2 = -\rho^2\ddot{\rho}/\ell^2$. There follows that the first Newton equation reads

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{1}{\ell^2 x^2 m} F(1/x).$$

we get

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{GM}{\ell^2}.$$

The general solution of this second order linear differential equation is

$$x(\theta) = \frac{GM}{\ell^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)),$$

for some constants e and θ_0 . Back to the original radial variable we get the solution

$$\rho(\theta) = \frac{\ell^2/GM}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)},$$

Hence, orbits are conic sections with eccentricity (“excentricidade”) e and focus at the origin: an ellipse for $0 \leq e < 1$ (corresponding to negative energy, hence to planets, and this is Kepler’s first law), a parabola for $e = 1$ (corresponding to zero energy), an hyperbola for $e > 1$ (corresponding to positive energy).

The 3-body problem and chaos. ¹⁷

“Que lon cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d’une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n’est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et, en général, de tous les problèmes de dynamique où il n’y a pas d’intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.”

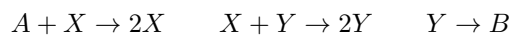
Henri Poincaré, 1884. ¹⁸

4.4 Cycles in chemistry and biology

Lotka-Volterra. Considere o sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy\end{aligned}$$

Foi proposto por Vito Volterra¹⁹ para modelar a competição entre x presas e y predadores, e por Alfred J. Lotka²⁰ para modelar o comportamento cíclico de certas reacções químicas, como o esquema abstracto



Preys increase exponentially at rate a and are killed at rate proportional to the probability of being captured by a predator, while predators decrease exponentially at rate c and increase at rate proportional to the probability of capturing preys.

A função

$$H(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$. Deduza que as órbitas do sistema estão contidas nas curvas de nível de $H(x, y)$.

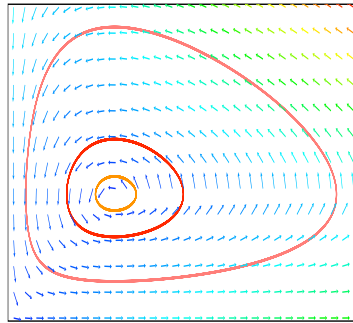
Discuss the possible dynamics depending on the values of the parameters.

¹⁷A palavra grega $\chi\alpha\sigma$, que pode ser traduzida como “abismo”, contém a mesma base $\chi\alpha$ - (e provavelmente deriva de) dos verbos $\chi\alpha\iota\nu\epsilon\iota\nu$ e $\chi\alpha\sigma\chi\epsilon\iota\nu$, que significam “abrir-se”, “escancarar”, e “abrir a boca”, “bocejar” (cfr. $\chi\alpha\sigma\mu\alpha$, “abismo”). Foi utilizada em algumas cosmogonias gregas para indicar “a mistura desordenada de elementos anterior à formação do $\chi\sigma\sigma\mu\sigma\sigma$, o universo ordenado”.

¹⁸H. Poincaré, Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique, *Œuvres, volume VII*, Gauthier Villars 1951.

¹⁹Vito Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d’individui in specie di animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei* **2** (1926), 31-113. Vito Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

²⁰Alfred J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc.* **27** (1920), 1595. Alfred J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.

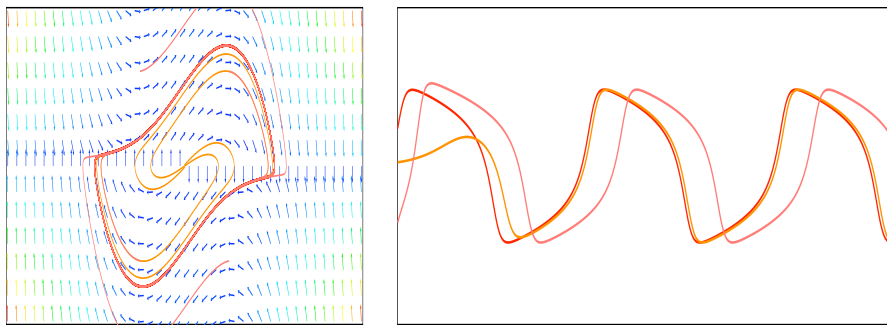


Retrato de fase do sistema de Lotka-Volterra.

Van der Pols. Considere o *oscilador de van der Pol*²¹

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = 0$$

que modela a corrente num circuito com um elemento não-linear.



Retrato de fase e trajectórias do oscilador de van der Pol.

Brusselator. O *Brusselator* é um modelo autocatalítico proposto por Ilya Prigogine e colaboradores²² que consiste na reacção abstracta



Simule o sistema é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (\beta + 1)x + x^2y \\ \dot{y} &= \beta x - x^2y\end{aligned}$$

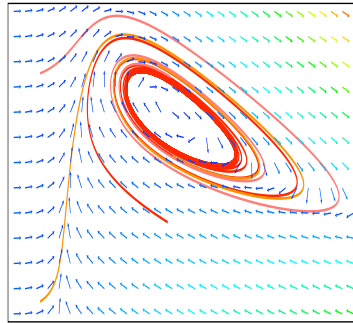
para as concentrações das espécies catalíticas X e Y , obtido quando as concentrações $[A] \sim \alpha$ e $[B] \sim \beta$ são mantidas constantes. Simule o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (b + 1)x + x^2y \\ \dot{y} &= bx - x^2y \\ \dot{b} &= -bx + \delta\end{aligned}$$

para as concentrações de X , Y e B , obtido quando a concentração $[A] \sim \alpha$ é mantida constante e B é injectado a uma velocidade constante $v \sim \delta$.

²¹B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* **1** (1920), 701-710 and 754-762. B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency demultiplication, *Nature* **120** (1927), 363-364.

²²I. Prigogine and R. Lefever, Symmetry breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* **48** (1968), 1655-1700. P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Wiley, New York 1971. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in non-equilibrium chemical systems*, Wiley, New York 1977.

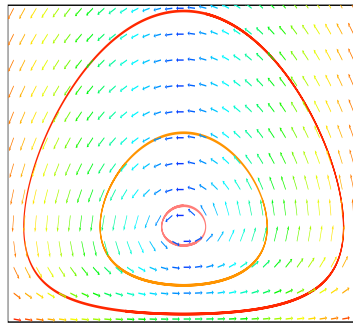


Retrato de fase do Brusselator.

Oscilador bioquímico de Goodwin. Um modelo de interações proteínas-mRNA proposto por Goodwin²³ é

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \frac{1}{1+P} - \alpha \\ \dot{P} &= M - \beta\end{aligned}$$

onde M e P denotam as concentrações relativas de mRNA e proteína, respectivamente.



Retrato de fase do sistema de Goodwin.

Epidemias/SIR models. http://en.wikipedia.org/wiki/Epidemic_model#The_SIR_Model

4.5 Weather report

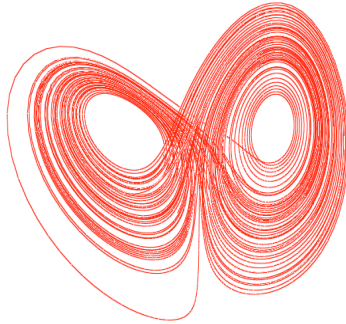
Atrator de Lorenz Considere o *sistema de Lorenz*²⁴

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

- Analize o comportamento assintótico das trajetórias ao variar os parâmetros σ , ρ e β .
- Observe o comportamento das trajetórias quando $\sigma \simeq 10$, $\rho \simeq 28$ e $\beta \simeq 8/3$.

²³B.C. Goodwin, *Temporal organization in cells*, Academic Press, London/New York 1963. B.C. Goodwin, Oscillatory behaviour in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* **3** (1965), 425-438.

²⁴E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmospheric Science* **20** (1963), 130-141.



Atractor de Lorenz.

5 Topological dynamical systems, basic definitions

5.1 Transformations

Transformations. In these notes, we'll be mainly interested in discrete time dynamical systems, i.e. actions of $\mathbb{N}_0$ or $\mathbb{Z}$ on some space X , generated by a transformation/map

$$f : X \rightarrow X.$$

Apart from some special cases, X will be a topological space (or even a metric space). The transformation will be continuous, or at least piecewise continuous. In such cases we speak of *topological dynamical system*.

The “(forward) iterates” of a transformation f are the transformations $f^n : X \rightarrow X$, with $n \in \mathbb{N}_0$, defined inductively according to

$$f^0 = \text{id} \quad \text{and} \quad f^{n+1} = f \circ f^n \quad \text{if } n \geq 0$$

(warning! with this notation $f^2(x)$ is not the square of $f(x)$, but $f(f(x)) \dots$).

In general, if $n \in \mathbb{N}$ and $A \subset X$, then $f^{-n}(A)$ denotes the set

$$f^{-n}(A) = \{x \in X \text{ t.q. } f^n(x) \in A\}.$$

If f is invertible (e.g. is an homeomorphism), we can also define the backward iterates, and therefore the transformations $f^n : X \rightarrow X$ for all $n \in \mathbb{Z}$.

We have therefore an action $\Phi : \mathbb{N}_0 \times X \rightarrow X$, or $\Phi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ if f is invertible, defined by $\Phi_n(x) = f^n(x)$.

Phase/states space. In the following, (X, d) will be a metric space equipped with its natural topology τ , locally compact (any point admits a compact neighborhood) and separable (admits a countable dense subset, and therefore, being a metric space, a countable basis for the topology). For example, regions of $\mathbb{R}^n$, intervals of the line, the circle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, the torus $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, the complex plane $\mathbb{C}$, the Riemann sphere $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, Cantor sets, and Cartesian products of finite spaces. Also, in order to avoid trivialities, we'll always assume tacitly that X is not a finite set.

e.g. Translations in homogeneous spaces. The simplest, tautological, way to construct actions is algebraic. Let G be a topological group (a group equipped with a Hausdorff topology such that the group operations $(g, g') \mapsto gg'$ and $g \mapsto g^{-1}$ are continuous). Given a closed subgroup $\Gamma \subset G$, one can consider the homogeneous space $X = G/\Gamma = \{g\Gamma \text{ com } g \in G\}$, equipped with the quotient topology (the finer topology in G/Γ such that the projection $\pi : G \rightarrow G/\Gamma$ is continuous). If Γ is not too large or wild, for example if Γ is discrete, X is a sufficiently big and interesting space.

Every subgroup $S \subset G$ acts on $X = G/\Gamma$, the action $S \times G/\Gamma \rightarrow G/\Gamma$ being $(s, g\Gamma) \mapsto sg\Gamma$. The space of orbits is the quotient $S \backslash G/\Gamma$.

In particular, a cyclic subgroup $S = \{s^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ generates an action $\Phi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ defined by $\Phi_n(g\Gamma) = s^n g\Gamma$, which consists in iterating the left translations $g\Gamma \mapsto sg\Gamma$ of a generator.

Generic properties. We will often want to talk about “most trajectories”, or “almost all trajectories”.

Being X a topological space, one could consider (probability or infinite) measures on the Borel σ -algebra of X . Given such a measure μ , one says that a properties is satisfied for μ -almost all points if the subset $N \subset X$ of those points which do not have the property has measure $\mu(N) = 0$.

The topological counterpart of the dichotomy “zero-one probability” is possible when X is a *Baire space*, i.e. a Hausdorff (any two distinct points have disjoint neighborhoods) topological space where a countable intersection of dense open sets is dense. Baire theorem says that examples of Baire spaces are complete metric spaces. A subset $R \subset X$ is said *residual* if it contains a countable intersection of dense open sets. A subset $M \subset X$ is said *meager* if it is a countable union of “nowhere dense” subsets (subsets such that the closure has empty interior), i.e. if its complement $X \setminus M$ is residual. A property is said *generic* if the subset $P \subset X$ of those points with this property is residual.

5.2 Trajectories and orbits

Trajectories. Given a transformation $f : X \rightarrow X$, we are mainly interested in the asymptotic behavior of the “history” of a point $x \in X$, the sequence of points

$$x \mapsto f(x) \mapsto f^2(x) \mapsto f^3(x) \mapsto \dots$$

obtained recursively applying f to the point x . If X is the space state of a physical system, and if the system is (prepared) in the state x at time $t = 0$, then it will be in the state $f(x)$ at time 1, in the state $f^2(x) = f(f(x))$ at time 2, and so on.

The *trajectory* of $x \in X$ is the sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, the function that, given the “initial condition” $x_0 = x$, produces the states $x_n = f^n(x)$ of the system at each time $n \geq 0$. Thus, the trajectory of x is the solution of the recurrence

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

with initial condition $x_0 = x$.

Orbits. The *orbit* of $x \in X$ is the image of its trajectory, i.e. the set

$$\mathcal{O}_f^+(x) := \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

(we put the superscript “+” to remind that we are only allowed to go forward in time, since in general f will not be invertible). It is the “future” of a point.

A point x may have more than one pre-image, and therefore its “past” is not unique. The *big orbit* of a point $x \in X$ is the set

$$\mathcal{GO}_f(x) := \{x' \in X : \exists n, m \geq 0 : f^n(x') = f^m(x)\}$$

i.e. the set of points which have eventually the same future of x .

If f is invertible, we may also define the *complete orbit* of a point x as

$$\mathcal{O}_f(x) := \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

(which actually coincide with the big-orbit), the past and future of a point.

Observe that “being in the same big-orbit” is an equivalence relation, and therefore X is a disjoint union of equivalence classes, i.e. orbits. It must be said that the quotient space, the space of orbits X/f , may be messy if trajectories are not regular (and this is when things get interesting!). For example, if there exists a dense orbit, then the quotient topology in X/f is the trivial topology. Thus, the space of orbits, as a topological space, does not contain much informations on the dynamics of the system.

5.3 Periodic orbits

Fixed points. The simplest orbits are (composed of) *fixed points* of f , those states $p \in X$ such that

$$f(p) = p.$$

If X is a linear space, fixed points are roots of the equation $f(x) - x = 0$.

Órbitas periódicas. A seguir, as *órbitas periódicas*. O ponto $p \in X$ é dito *periódico* de *período* $n \geq 1$ se $f^n(p) = p$ e se n é o menor dos tempos $k \geq 1$ tais que $f^k(p) = p$. Assim, a órbita do ponto periódico p é um conjunto finito

$$\{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$$

de pontos que são permutados pela transformação f .

Um ponto x pode ter órbita finita sem ser periódico: pode acontecer que existe $k \geq 1$ tal que $f^k(x)$ é um ponto periódico. Tais pontos, que “caem” numa órbita periódica passado um tempo positivo, são ditos *pré-periódicos*.

$\text{Fix}(f^n)$ denota o conjunto dos pontos fixos da transformação f^n , ou seja o conjunto dos pontos periódicos de f cujos períodos dividem n .

$$\text{Per}_f = \cup_{n \geq 1} \text{Fix}(f^n)$$

denota o conjunto dos pontos periódicos da transformação f . Observe que cada um dos conjuntos $\text{Fix}(f^n)$ é fechado, pois f^n é contínua, mas a reunião Per_f pode não ser.

e.g. Endomorphisms of linear spaces. Se $L : V \rightarrow V$ é um endomorfismo do espaço linear V , então os pontos fixos são os vetores próprios com valor próprio $\lambda = 1$, e os pontos periódicos de período n são os vetores próprios com valor próprio λ tal que $\lambda^n = 1$.

ex: Estude a dinâmica, ou seja a estrutura das órbitas, de uma transformação arbitrária definida num conjunto finito $\{1, 2, \dots, n\}$. Observe que o estudo da dinâmica das transformações bijetivas consiste essencialmente no estudo dos grupos simétricos S_n .

ex: Draw some orbits of the transformations of the complex plane $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ defined by

$$f(z) = z + \alpha \quad \text{or} \quad f(z) = \lambda z$$

for different values of the parameters $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$. Explain for which values of those parameters there exists periodic orbits.

ex: Find periodic orbits (of small period) of the transformations of the interval defined in ...

5.4 Observáveis

Observáveis. Os *observáveis* são funções $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Se o sistema está inicialmente no estado x , e portanto é observado o valor $\varphi(x)$ de φ , passado um tempo n a observação de φ dará o valor $\varphi(f^n(x))$.

Constantes do movimento. Particularmente interessantes são os observáveis que não mudam no tempo, que os físicos chamam “constantes do movimento”. A função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *invariante* se

$$\varphi \circ f = \varphi$$

ou seja se é constante em cada órbita. Observe que, se φ é invariante, $I \subset \mathbb{R}$ e $A = \varphi^{-1}(I)$, então $f^{-1}(A) = A$. A existência de uma função invariante φ contém a seguinte informação: se sabemos que $\varphi(x) = a$, então o futuro e o passado de x pertencem ao conjunto de nível $\Sigma_a = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) = a\}$, i.e. $\mathcal{GO}_f(x) \subset \Sigma_a$. As funções invariantes, portanto, reduzem o espaço disponível às trajetórias.

Funções de Lyapunov. Também úteis são observáveis monótonos, crescentes ou decrescentes, ao variar o tempo, conhecidos em física como “funções de Lyapunov”. Por exemplos, se sabemos que $\varphi \circ f \leq \varphi$, e que $\varphi(x) = a$, então o futuro de x “não sai” do conjunto de sub-nível $\Sigma_{\leq a} = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) \leq a\}$, e o passado de x “vem” de $\Sigma_{\geq a} = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) \geq a\}$.

e.g. Energy. The energy $E(q, p) = p^2/2 + q^2/2$, which is a constant of the motion for the harmonic oscillator $\ddot{q} = -q$ (here $p = \dots q$), is a Lyapunov function for the damped oscillator $\ddot{q} = -\alpha\dot{q} - q$, since its time derivative is $\frac{d}{dt}E = -\alpha p^2 \leq 0$.

ex: Mostre que, se $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante, $I \subset \mathbb{R}$ e $A = \varphi^{-1}(I)$, então $f^{-1}(A) = A$.

ex: Mostre que a função característica do subconjunto $A \subset X$ é invariante sse $f^{-1}(A) = A$.

Médias temporais. A *média temporal* (ou *média de Birkhoff*) do observável φ até ao tempo $n \geq 0$ é o observável $\bar{\varphi}_n$ definido por

$$\bar{\varphi}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(f^k(x))$$

i.e. o valor de $\bar{\varphi}_n$ no ponto x é a média aritmética dos valores de φ na “ n -órbita de x ”, o subconjunto $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\}$.

Se o limite

$$\bar{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n(x)$$

existe, tem o significado de “valor médio assintótico” de φ ao longo da órbita de x . Observe também que $\bar{\varphi}(x) = (\bar{\varphi} \circ f)(x)$ nos pontos onde o limite existe.

Se, em particular, 1_A denota a função característica de um subconjunto $A \subset X$, então o limite

$$\bar{1}_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \text{card} \{0 \leq k \leq n \text{ t.q. } f^k(x) \in A\}$$

se existir, representa “a fração de tempo assintótica” que a trajetória de x passa em A , ou seja a “frequência com que a trajetória de x visita o conjunto A ”.

5.5 Conjuntos invariantes

Conjuntos invariantes. A função característica do subconjunto $A \subset X$ é invariante sse $f^{-1}(A) = A$. Uma definição consistente com esta observação é a seguinte: um subconjunto $A \subset X$ é dito *invariante* se

$$f^{-1}(A) = A$$

Esta condição implica que $f(A) \subset A$, e portanto um ponto de um conjunto invariante tem toda a sua história, futura e passada, contida no conjunto.

Observe que $\mathcal{GO}_f(x)$ é o menor conjunto invariante que contém x , e portanto um conjunto invariante é uma reunião de grandes órbitas, é composto pelas histórias possíveis passadas e futuras dos seus pontos.

Se f é invertível, $\mathcal{O}_f(x)$ é o menor conjunto invariante que contém x . Isto implica que, se $f : X \rightarrow X$ é invertível, um subconjunto $A \subset X$ é invariante sse é uma reunião de órbitas completas, i.e. se $A = \cup_{x \in A} \mathcal{O}_f(x)$.

Conjuntos $\pm$ invariantes. Não há maneira de evitar o problema de distinguir entre outras noções de invariância. Um subconjunto $A \subset X$ é dito *+invariante* se $f(A) \subset A$ (se o futuro dos pontos de A vive em A), e é dito *-invariante* se $f^{-1}(A) \subset A$ (se o passado dos pontos de A está em A , ou os pontos de A “veem” de A).

Em particular, se A é +invariante é possível definir o sistema dinâmico $f|_A : A \rightarrow A$.

ex: Descubra as implicações entre as condições

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) = A, \quad f(A) \subset A, \quad f^{-1}(A) \subset A, \\ f(A) = A, \quad \text{e} \quad f^{-1}(A) = A = f(A) \end{aligned}$$

para uma transformação qualquer, uma transformação sobrejetiva e uma transformação bijetiva.

ex: Considere o conjunto C igual a $\mathcal{GO}_f(x)$, $\mathcal{O}_f(x)$ ou $\mathcal{O}_f^+(x)$ para algum ponto $x \in X$, e determine as propriedades de invariância dos conjuntos C , $\bar{C}$, ∂C e C' .

ex: Seja $A \subset X$. Mostre que $\cup_{n \geq 0} f^n(A)$ é um conjunto +invariante, de fato o menor conjunto +invariante que contém os pontos de A .

ex: Seja $A \subset X$. Mostre que, se $f : X \rightarrow X$ é invertível, então $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(A)$ é um conjunto invariante, de fato o menor conjunto invariante que contém os pontos de A .

ex: Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um observável, e seja $A \subset X$ o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que o limite $\bar{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n(x)$ existe. Mostre que A é invariante, e que o observável $\bar{\varphi} : A \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante com respeito à transformação $f|_A : A \rightarrow A$.

5.6 Conjugação topológica

Conjugação. Os sistemas dinâmicos topológicos $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ são (*topologicamente*) *conjugados* se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, dito *conjugação*, tal que

$$h \circ f = g \circ h$$

Observe que a condição pode também ser escrita como $f = h^{-1} \circ g \circ h$, e que é uma relação de equivalência. Por indução, vê-se que $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$ para todo tempo $n \geq 0$. Em particular, uma conjugação h envia órbitas de f em órbitas de g .

A ideia é que duas transformações topologicamente conjugadas são indistinguíveis do ponto de vista topológico (estamos simplesmente a mudar o nome aos pontos do espaço dos estados), e portanto mais vale estudar a dinâmica de um representante por cada classe de equivalência.

Semi-conjugação. Uma função contínua e sobrejetiva $h : X \rightarrow Y$ é dita *semiconjugação* entre os sistemas dinâmicos $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ se $h \circ f = g \circ h$. Neste caso, g é dito um *fator* de f . A h -imagem de toda órbita de f é uma órbita de g . Numa linguagem informal, “a dinâmica de g está contida na dinâmica de f ”. Esta definição é interessante sobretudo quando o conjunto dos pontos onde h não é injetiva é “pequeno”.

5.7 Estabilidade estrutural

Espaços de transformações. Uma distância natural no espaço das transformações contínuas dum espaço métrico (X, d) é a distância do sup

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

ou seja, f e g estão δ -próximos se $d(f(x), g(x)) < \delta$ para todo $x \in X$ (cuidado: dois pontos f e g podem estar a distância ∞ se X não é limitado!).

Se X tem uma estrutura diferenciável, por exemplo se X é um domínio $V \subset \mathbb{R}^n$, ou em geral uma variedade diferenciável, podemos considerar a classe das transformações que têm derivadas parciais de ordem $\leq k$ contínuas, munida da topologia de Whitney $\mathcal{C}^k$. Sem entrar em detalhes técnicos, se X é um intervalo compacto da reta real, as topologias $\mathcal{C}^k$ são geradas pelas normas

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}^0} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \quad \|f - g\|_{\mathcal{C}^1} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} |f'(x) - g'(x)| \quad \dots \text{etc.}$$

Estabilidade estrutural. Uma transformação $f : X \rightarrow X$ é $\mathcal{C}^k$ -*estruturalmente estável* se toda transformação $g : X \rightarrow X$ suficientemente próxima de f na topologia $\mathcal{C}^k$ é topologicamente conjugada a f .

Se o espaço X tem uma estrutura diferenciável, parece natural procurar conjugações diferenciáveis. O problema é que desta maneira uma divisão em classes de equivalência resulta muito fina e pouco significativa, devido a existência de “moduli”...

6 Numbers and dynamics

“317 is a prime, not because we think so, or because our minds are shaped in one way rather than another, but because it is so, because mathematical reality is built that way.”

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, 1940.

6.1 Decimal expansion and multiplication by ten

ref: [HW59], chapter IX.

Expansão decimal. When children we learn to represent numbers as decimals, like

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 \dots$$

Of course, there is nothing special with the number 10, it is but the number of fingers in our hands. Any other integer $d \geq 2$ would work. Representing a non-negative (for simplicity) real number $x \in \mathbb{R}_+$ in base 10 means writing x as the sum of a convergent series

$$\begin{aligned} x &= "X_m \dots X_2 X_1 X_0 . x_1 x_2 x_3 \dots" \\ &:= X_m \cdot 10^m + \dots + X_2 \cdot 10^2 + X_1 \cdot 10 + X_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^m X_n \cdot 10^n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \end{aligned}$$

where $X_n, x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ and $m \geq 0$. Some representations terminate, i.e. have $x_n = 0$ starting from some $n \geq N$, and some others are recurring, i.e. of the form

$$X_m \dots X_2 X_1 X_0 . x_1 x_2 \dots x_{k-1} \overline{x_k \dots x_{k+n}} := X_m \dots X_2 X_1 X_0 . x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k \dots x_{k+n} x_k \dots x_{k+n} \dots$$

(and of course a terminating decimal is a recurring one with recurring word $\bar{0}$). The representation is unique, hence defines a bijection between $\mathbb{R}$ and the space of infinite words $X_m \dots X_2 x_1 X_0 . x_1 x_2 x_3 \dots$ as above, if we do not admit recurrent 9's, i.e. if we substitute $\dots x_{k-1} \bar{9}$ with $\dots (x_{k-1} + 1) \bar{0}$ (where we assume $x_{k-1} \neq 9$).

The finite sum

$$[x] := \sum_{n=0}^m X_n \cdot 10^n \in \mathbb{Z}$$

is the *integral part* of x , the largest of those integers n such that $n \leq x$. The possibly infinite sum

$$\{x\} := 0.x_1 x_2 x_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \in [0, 1)$$

is the *fractional part* of x , the difference $\{x\} = x - [x]$. Consequently, $[x] + \{x\} = x$.

Division algorithm. The iterative scheme to obtain the decimal representation of a rational number is the “division algorithm” that we also learn when children. Consider a positive rational number $x = p/q$ with $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\frac{p}{q} = x_0 . x_1 x_2 x_3 \dots$$

The integer $[x] = x_0$ is “the number of times q is contained in p ”, i.e. the unique integer such that

$$p = x_0 \cdot q + r_0$$

for some rest r_0 which is an integer $0 \leq r_0 < q$. Hence, $p/q = x_0 + r_0/q$ and $0 \leq r_0/q < 1$. The “geometric” meaning of x_1 is that the point r_0/q lies between $0.x_1$ and $0.x_1 + 0.1$. Multiplying by 10 and then by q this means that

$$x_1 \cdot q \leq 10 \cdot r_0 < x_1 \cdot q + q$$

or, equivalently, that x_1 is the unique integer between 0 and 9 such that

$$10 \cdot r_0 = x_1 \cdot q + r_1$$

where, again, the rest r_1 is a non-negative integer $0 \leq r_1 < q$. And so on. Hence, the digits of the decimal expansion of p/q are iteratively determined by

$$10 \cdot r_{n-1} = x_n \cdot q + r_n \quad \text{where} \quad 0 \leq r_n < q$$

Since the possibilities for the rests are finite, they necessarily recur. On the other side, a simple computation shows that a recurring decimal is a (series converging to a) rational number.

Theorem 6.1. *The rational numbers are precisely those real numbers whose representation in base 10 (or any other base $d \geq 2$) is (eventually) repeating/recurring.*

Meanwhile, there exist irrational numbers. For example,

$$0.101001000100001 \dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{10}} + \frac{1}{10^{15}} + \dots$$

is irrational, since it is not recurring.

Indeed, almost all numbers are irrational, in a precise probabilistic sense, since rationals are countable.

The weight of the rationals. Consider the unit interval $I = [0, 1]$, and cut out all its rational points. What is left is a set, $I \setminus \mathbb{Q}$, whose length is equal to the length of the interval. Indeed, the rationals are countable, for example those inside I may be ordered according to

$$0 \quad 1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 2/3 \quad 1/4 \quad 3/4 \quad 1/5 \quad 2/5 \quad 3/5 \quad 4/5 \quad \dots$$

say $I \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$. Given an (arbitrarily small) $\varepsilon > 0$, we may even cut out a whole interval $J_n = (r_n - \ell_n/2, r_n + \ell_n/2)$ of finite diameter $\ell_n = \varepsilon/2^n$ around each r_n . The measure of what is left of the unit interval is

$$\text{length}(I \setminus (\cup_n J_n)) \geq 1 - \sum_n \varepsilon/2^n = 1 - \varepsilon$$

In other words, the rationals inside the unit interval have neighborhoods of arbitrarily small length! Mathematicians say that

Theorem 6.2. *Rationals form a set of Lebesgue measure zero inside the real line.*

ex:

- Show that the decimal representation of a (reduced) rational p/q terminates iff the denominator is of the form $q = 2^\alpha 5^\beta$ for some non-negative integers α and β .
- Write $1/3$ in base 2, and $2/3$ in base 3 and 7.
- Show that the decimal (or any other base) representation of a rational number is repeating (observe that the possibilities for the rests r_n are finite).
- Show the converse: a repeating decimal represents a rational number (compute the sum of the series).
- Give examples of non-repeating decimal expansions (see [HW59], section 9.4).
- Prove that *Euler's number*

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

is irrational (Fourier's idea: assume that $e = p/q$ for some positive integers p and q , and deduce that $x = q!(e - \sum_{n=0}^q 1/n!)$ is then an integer. Estimate the series $x = \sum_{n=q+1}^{\infty} q!/n!$ and prove that $0 < x < 1$).

Multiplicação $\times d$. Seja $d \geq 2$ um inteiro. A transformação $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que envia cada número x no seu múltiplo $d \cdot x$ tem uma dinâmica trivial. As coisas ficam mais interessantes se consideramos os números módulo os inteiros, e definimos a *multiplicação por d* como sendo a transformação do círculo $\times d : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que envia

$$x + \mathbb{Z} \mapsto d \cdot x + \mathbb{Z}$$

Se $x = 0.x_1x_2x_3 \dots$ é a representação de $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0, 1)$ na base d , então a transformação $\times d$ envia

$$0.x_1x_2x_3 \dots \mapsto 0.x_2x_3x_4 \dots$$

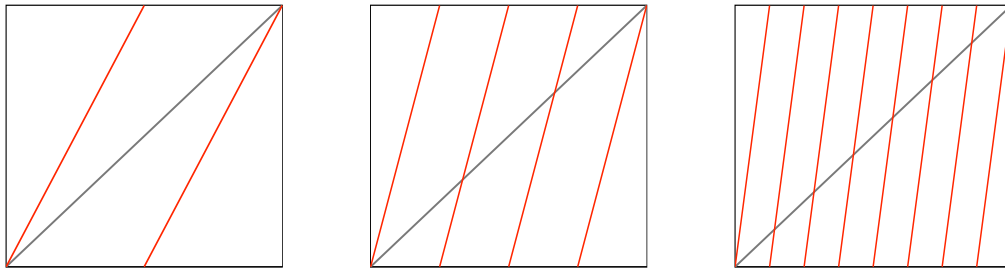
ex: Verifique que $\times d$ é contínua.

ex: Determine a cardinalidade da imagem inversa de um ponto arbitrário de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

ex: Determine os pontos periódicos e pré-periódicos de $\times d$.

e.g. Doubling map. The simplest case is that of the *doubling map*,

$$f(x + \mathbb{Z}) = 2x + \mathbb{Z}$$



Graph of the doubling map, and its first two iterates.

6.2 Deslocamentos de Bernoulli

Espaço das palavras infinitas. Seja $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, z\}$ um “alfabeto” de $z \geq 2$ letras, um conjunto finito munido da topologia discreta, e seja $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ o produto topológico de infinitas cópias de $\mathcal{A}$. Os pontos de Σ^+ são denotados por $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, com $x_n \in \mathcal{A}$, e são “palavras” infinitas nas letras do alfabeto $\mathcal{A}$.

A topologia produto é a menor topologia em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ tal que as projeções $\pi_n : \Sigma^+ \rightarrow \mathcal{A}$, que enviam $x \mapsto x_n$, sejam contínuas. Uma base da topologia produto τ em Σ^+ é a família $\mathcal{C}$ dos “cilindros centrados”, os subconjuntos do gênero

$$C_\alpha = \{x \in \Sigma^+ \text{ t.q. } x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_k = \alpha_k\}$$

palavras infinitas que “começam” pela palavra $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, ao variar α no conjunto $\bigcup_k \mathcal{A}^k$ de todas as palavras finitas nas letras de $\mathcal{A}$. Observe que a família dos cilindros centrados é uma base de uma topologia porque é uma cobertura, pois $\Sigma^+ = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_z$, e porque a interseção de dois cilindros centrados é um cilindro centrado ou o conjunto vazio. De fato, C_α e C_β têm interseção não vazia sse uma das duas palavras, por exemplo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, é o pedaço inicial da outra palavra, no sentido em que $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{k+i})$, e neste caso $C_\alpha \cap C_\beta = C_\beta$. A ideia é que, quanto maior for o comprimento da palavra α , quanto “menor” é o cilindro C_α . Um aberto do produto topológico Σ^+ é, por definição, uma reunião de cilindros centrados.

A topologia produto é metrizável. Uma possibilidade é a métrica

$$d_\lambda(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cdot |x_n - x'_n|$$

onde $\lambda > 1$ (por exemplo, $\lambda = z$). Outra possibilidade é

$$d_\infty(x, x') = z^{-\min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x'_n\}}$$

Os cilindros centrados são as bolas abertas, e também fechadas, de (Σ^+, d_∞) . A métrica d_∞ é uma ultra-métrica, ou seja, uma métrica tal que $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

O espaço Σ^+ é um espaço métrico compacto, perfeito e totalmente desconexo, logo homeomorfo a um conjunto de Cantor.

ex: Mostre que d_∞ é uma ultra-métrica.

ex: Mostre que se X é um espaço munido de uma ultra-métrica, então cada bola aberta $B_\varepsilon(a) = \{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) < \varepsilon\}$ é também uma bola fechada, e que cada ponto de uma bola é um seu centro.

Deslocamentos de Bernoulli. O *deslocamento de Bernoulli* (em inglês, *Bernoulli shift*) é a transformação $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ que ‘esquece a primeira letra’, definida por

$$\sigma : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Observe que σ é uma transformação contínua, pois a imagem inversa de um cilindro centrado é uma reunião finita de z cilindros centrados, e portanto a imagem inversa de um aberto é uma reunião de cilindros centrados, logo um aberto. Observe também que σ não é invertível, todo ponto de Σ^+ tem z pré-imagens.

A ideia é que o alfabeto $\mathcal{A}$ representa os possíveis resultados de uma experiência, como lançar um dado com z faces, e um ponto de Σ^+ representa os resultados de uma sequência infinita de experiências idênticas. Iterar n vezes o deslocamento corresponde a “esquecer” os resultados das primeiras n experiências.

ex: Describe periodic and pre-periodic points of $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$. Show that they are dense in Σ^+ .

ex: Consider the alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Define a map $h : \mathcal{A}^\mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ as

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto 0.x_1x_2x_3\dots$$

Show that h is onto, and describe the map sending $h(x)$ into $h(\sigma(x))$.

6.3 Rotações do círculo/toro

O círculo. O *círculo* (o esfera de dimensão 1) é o espaço quociente $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ do grupo comutativo $\mathbb{R}$ pelo subgrupo $\mathbb{Z}$, munido da topologia quociente herdada da topologia euclidiana da reta.

A métrica euclidiana da reta induz uma métrica invariante d no círculo, definida por

$$\begin{aligned} d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) &= \min_{y \in \pi^{-1}\{x + \mathbb{Z}\}, y' \in \pi^{-1}\{x' + \mathbb{Z}\}} |y - y'| \\ &= \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - x' + n| \end{aligned}$$

onde $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ denota a projeção $x \mapsto x + \mathbb{Z}$.

Rotações. As *rotações* do círculo são as transformações $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definidas por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Observe que o círculo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é um grupo comutativo, e que as transformações $+\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, são as translações do grupo.

As rotações do círculo são as isometrias de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, d)$ que preservam a orientação.

Em notação multiplicativa, se o círculo é identificado com $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$, as rotações do círculo são as transformações $z \mapsto e^{i2\pi\alpha}z$.

Theorem 6.3. *Uma rotação R_α tem pontos periódicos sse α é racional.*

Proof. De facto, se $\alpha = p/q$ com $(p, q) = 1$ e $q > 0$, então todo ponto do círculo é periódico de período q , pois $x + q\alpha + \mathbb{Z} = x + \mathbb{Z}$ para todo x . Por outro lado, se α é irracional, não existe nenhum natural $n \geq 1$ tal que $x + \mathbb{Z} = x + n\alpha + \mathbb{Z}$, independentemente de x . $\square$

Exercícios.

- Verifique que

$$d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - x' + n|$$

é uma métrica no círculo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

- Identifique o círculo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com o intervalo $[0, 1[$ (toda classe $x + \mathbb{Z}$ tem um e só um representante x neste intervalo), e dê uma expressão analítica para a distância $d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z})$ em função de x e x' .

(Observe que se $|x - x'| \leq 1/2$ então $d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) = |x - x'|$)

- Verifique que as rotações $R_\alpha : x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, são isometrias, e portanto homeomorfismos, de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, d)$.

Transformações do círculo. Uma transformação contínua do círculo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pode ser pensada como uma transformação contínua da reta real que “respeita” o retículo $\mathbb{Z}$. Formalmente, seja $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a projecção $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$. Toda função contínua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x+1) = F(x) \bmod \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ induz uma função contínua $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por

$$f(x + \mathbb{Z}) = F(x) + \mathbb{Z}$$

Por outro lado, pode-se mostrar que toda função contínua $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admite um *levantamento*, i.e. uma função contínua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ F$. O levantamento não é único, mas dois levantamentos F e G de f diferem por um inteiro, no sentido em que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x) = G(x) + n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, $F - G$ é uma função contínua da reta real (que é conexa) com valores inteiros, e portanto é constante. Isto implica que o número inteiro

$$\deg(f) = F(x+1) - F(x)$$

dito *grau* de f , não depende do levantamento. O grau de f é a cardinalidade algébrica das pré-imagens $x' \in f^{-1}\{x\}$ de um ponto genérico x do círculo, onde cada x' conta ± 1 dependendo se f preserva ou inverte a orientação numa sua vizinhança.

Um homeomorfismo do círculo tem grau ± 1 , dependendo se preserva ou menos a orientação. Os *recobribentos do círculo de grau k* , com $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, são as transformações $\times k : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definidas por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto k \cdot x + \mathbb{Z}$$

Observe que cada ponto do círculo tem precisamente $|k|$ pré-imagens.

Em geral, uma transformação do círculo de grau k tem um levantamento que é da forma $F(x) = k \cdot x + h(x)$, onde h é uma função contínua periódica de período um, i.e. tal que $h(x+1) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Rotações do toro. O *toro* de dimensão n é o espaço quociente $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, munido da métrica

$$d(x + \mathbb{Z}^n, x' + \mathbb{Z}^n) = \min_{y \in \pi^{-1}\{x + \mathbb{Z}^n\}, y' \in \pi^{-1}\{x' + \mathbb{Z}^n\}} |y - y'|$$

onde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é a projecção. As *rotações* do toro são os homeomorfismos $+\alpha : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ definidos por

$$x + \mathbb{Z}^n \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}^n$$

onde agora $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

here?

6.4 Dyadic adding machine

p -adic number fields and integers. The field $\mathbb{R}$ of real numbers may be considered (actually constructed) as the completion of the rational number field $\mathbb{Q}$ with respect to the Euclidean norm $|x|_\infty := \max\{\pm x\}$. This means that real numbers are equivalence classes of fundamental sequences of rationals, two fundamental sequences (x_n) and (y_n) being in the the same class, i.e. representing the same real ‘ $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ’, if $|x_n - y_n|_\infty \rightarrow 0$.

It happens that there exist other “norms” (positive and homogeneous functionals $x \mapsto |x| \in \mathbb{Q}$ satisfying the triangular inequality) on $\mathbb{Q}$ which respect the multiplicative structure, i.e. such that $|xy| = |x||y|$. Such norms are called *valuations*.

Let $p = 2, 3, 5, 7, \dots$ be a rational prime, also called *place* in this context. The *order* of a non-zero rational $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ at the place p is the unique integer $\text{ord}_p(x) = n$ such that $x = p^n a/b$ for some $a, b \in \mathbb{Z}$ which are not divided by p . The *p -adic valuation/place* is the absolute value on $\mathbb{Q}$ defined as

$$|x|_p := p^{-\text{ord}_p(x)} \quad \text{if } x \neq 0$$

and $|0|_p = 0$ otherwise. Clearly $\text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p(x) + \text{ord}_p(y)$ (just like the degree of polynomials), and this gives homogeneity of $\|\cdot\|_p$. Triangular inequality follows from the observation that

$$\text{ord}_p(x + y) \geq \min\{\text{ord}_p(x), \text{ord}_p(y)\}$$

One can show that those, together with the euclidean norm, are the only valuations on $\mathbb{Q}$, modulo trivial equivalences. The *p -adic (topological) number field* $\mathbb{Q}_p$ is the completion of $\mathbb{Q}$ with respect to $|\cdot|_p$ (uniqueness is trivial, and existence may be proved as usual considering equivalence classes of fundamental sequences, the only annoying issue being keeping track of the field operations). The p -adic valuation, naturally extended to $\mathbb{Q}_p$, is “non-Archimedean” (i.e. does not satisfy the “Archimedean property” that for all $\varepsilon > 0$ and all N there exists an integer n such that $n\varepsilon > N$) since triangular inequality is enhanced by the stronger “ultra-metric” inequality

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

This causes many paradoxical properties. For example, closed balls are open as well (hence called “clopen”), and any point of a ball is its center. The ultrametric inequality also implies that

$$|b_1 + b_2 + \dots + b_n|_p \leq \max_{1 \leq k \leq n} |b_k|_p.$$

Consequently, a series $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converges (for the p -adic metric, of course!) iff the norm of its terms $|b_n|_p \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ (there is no room for divergent series like the harmonic series in the p -adic world!).

The ring of *p -adic integers* $\mathbb{Z}_p$ is the closure of $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}_p$. One can describe the p -adic integers as the inductive limit $\mathbb{Z}_p = \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, and represent a p -adic integer as a series

$$z = \dots z_n \dots z_2 z_1 z_0 := \sum_{n=0}^{\infty} z_n p^n \quad (6.1)$$

with $z_n \in \mathcal{A}_p := \{0, 1, 2, \dots, p-1\} \approx \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, which converges in $\mathbb{Q}_p$ because the norm of the generic term $z_n p^n$ is bounded by $|z_n p^n|_p = p^{-n} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Thus, as a topological space (not as a ring!), $\mathbb{Z}_p$ is isomorphic to the topological product $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, the space of infinite words (written backwards!) $(\dots z_n \dots z_3 z_2 z_1)$ in the letters of the alphabeth $\mathcal{A}_p$. Observe that $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \text{ s.t. } |x|_p \leq 1\}$, i.e. the ring of p -adic integers is the clopen ball of radius one around 0 in $\mathbb{Q}_p$.

Any p -adic number $x \in \mathbb{Q}_p$ can be represented uniquely as $x = z + r$ where $z = [x]_p = \sum_{n \geq 0} x_n p^n \in \mathbb{Z}_p$ is the “ p -adic integer part” and $r = \{x\}_p = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p^{-n} \in \mathbb{Z}[1/p]$ is the “ p -adic fractional part”. In symbols,

$$x = \dots x_n \dots x_2 x_1 x_0 x_{-1} \dots x_{-N} = \sum_{n=-N}^{\infty} x_n p^n$$

The quotient $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ is a discrete (additive) group where the norm $|\cdot|_p$ takes values p^n with $n \in \mathbb{N}$. Multiplication by p is a uniform contraction $x \mapsto px$ of $\mathbb{Q}_p$ with Lipschitz constant p^{-1} , and its inverse $x \mapsto xp^{-1}$ uniformly expands distances by a factor p . Thus, $\mathbb{Z}_p$ is the disjoint union $\cup_{a_i=0}^{p-1} (a_i + p\mathbb{Z}_p)$ of p clopen balls of radius p^{-1} (and so on, iterating the contraction). Also, one can represent the field of p -adic numbers as a union $\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p^{-n} \mathbb{Z}_p$.

ex: Compute the following sums in $\mathbb{Z}_2$.

$$\dots 011 + \dots 001 \quad \dots 0101 + \dots 1010 \quad \dots 111 + \dots 001$$

Find the additive opposite of $1 = \dots 001$ in $\mathbb{Z}_2$.

Adding machine. Consider the ring $\mathbb{Z}_2$ of dyadic integers, thought as an additive topological group. The *dyadic adding machine* (or “*Kakutani-von Neumann odometer*”) is the translation $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, defined by

$$z \mapsto z + 1$$

Observe that f changes the first (starting from the right) digit of $x = \dots x_2 x_1 x_0$, and consequently its n -th iterate changes the n -th digit of x . Thus, we have one more example of a translation in a compact topological group without periodic points.

Solenoids. ...

ex: Show that $z \mapsto z + 1$ is a homeomorphism of $\mathbb{Z}_2$, and find its inverse.

6.5 Continued fractions and Gauss map

ref: [HW59] chapter X, and [Kh35].

Continued fractions. Any real number $x \in \mathbb{R}$ can be represented (uniquely for irrationals, and with only a minor ambiguity for rationals) as a *continued fraction*

$$x \sim [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

with $a_0 \in \mathbb{Z}$ and “partial quotients” $a_n \in \mathbb{N}$ if $n \geq 1$. This means that x is equal to the limit of the *convergents*, the finite continued fractions defined as

$$p_n/q_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

as $n \rightarrow \infty$. Observe that finite continued fractions are rationals, and obey the recursion

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + 1/a_{n+1}] \quad (6.2)$$

Construction and Gauss map. The continued fraction converging to a given number $x \in \mathbb{R}$ is given essentially by Euclid’s algorithm to find the m.c.d. of two integers. One starts with $a_0 = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ (here the “floor” function $\lfloor x \rfloor$ returns the smallest integer n such that $n \leq x < n+1$), and write $x = a_0 + x_0$ for some $x_0 = \{x\} \in [0, 1)$. Then define the *Gauss map* $G : (0, 1] \rightarrow [0, 1]$ as

$$G(x) := 1/x - \lfloor 1/x \rfloor, \quad (6.3)$$

(thus, $G(x)$ is the fractional part of the inverse of x) and inductively define the partial quotients $a_n \in \mathbb{N}$ and the “rests” $x_n \in [0, 1)$ as

$$a_{n+1} = \lfloor 1/x_n \rfloor \quad x_{n+1} = G(x_n),$$

provided all the $x_0, x_1, \dots, x_n \neq 0$. Then,

$$x = a_0 + x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + x_2}} = \dots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + x_n}}}}$$

If some $x_n = 0$, the iteration stops and x is equal to a finite continued fraction as above. Conversely, if $x = p/q$ is rational, all the x_n 's are positive rationals, and have strictly decreasing denominators (for if $x_n = a/b$, then $1/x_{n+1} = x_n - a_n = (a - a_n b)/b = c/b$, and $c < b$ because $x_n - a_n < 1$). So, there must be some first x_n which is an integer, and the algorithm stops. Thus, finite continued fractions correspond to rationals (and are unique if we demand the the last non-zero partial quotient be $a_n > 1$).

Convergence of the convergents. We must therefore understand the case of infinite continued fractions, which, as we already know, correspond to irrationals. The key observation is that the convergents $p_n/q_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ of a continued fraction $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ are determined by the partial quotients a_n 's according to the recursive equation

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned} \tag{6.4}$$

with initial conditions $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$, e $p_{-1} = 1$ e $q_{-1} = 0$. The proof is by induction, using (6.2) (see, for example, [Kh35, HW59]).

This recursion is solved by

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix}$$

In particular, since all the factors above on the right have determinant -1 ,

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1},$$

A first consequence is that all the pairs (p_n, q_n) , (p_{n-1}, q_{n-1}) , $\dots$ are pairs of relatively prime integers. In particular, the convergents p_n/q_n are reduced fractions. There also follows that

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n}$$

Also, one can easily show that convergents with n even form an increasing sequence, and convergents with n odd form a decreasing sequence. Another consequence of the recursion (6.4) is that the denominators q_n of an infinite continued fraction (i.e. such that $a_n \geq 1$ for all $n \geq 1$) satisfy

$$q_{n+2} \geq q_{n+1} + q_n \geq 2q_n,$$

and therefore grow exponentially fast:

$$q_{n+1} \geq 2^{n/2}.$$

(indeed, they grow at least like the Fibonacci sequence starting with $f_0 = 1$ and $f_1 = 1$, hence like $q_n \geq c\phi^n$, where $\phi = (1 + \sqrt{2})/2$ is the “ratio” and c is some positive constant). This implies that

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_{n+1} q_n} \leq \frac{2}{2^n}$$

and therefore the sequence of the convergents p_n/q_n is fundamental. Its limit $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n = x$ is called “value” of the continued fraction, and denoted by

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] := \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

It is also possible to find a lower bound to the difference between an irrational x and its convergents, and the two-sided estimate reads as follows:

$$\frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n)} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_n}$$

ex: Use the quadratic equation $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ to show that the “ratio” ϕ has the simplest continued fraction, namely

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$$

(observe that $\phi^{-1} = \phi - 1$ is a root of $x^2 + x - 1 = 0$, hence $x = 1/(1 + 1/x)$, and so on). Its convergents are $1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, \dots$, ratios between successive Fibonacci numbers. It is also the (irrational) number with worse rational approximations, namely $|\phi - p/q| > (1/\sqrt{5})/q^2$ for any rational p/q .

ex: Also, the most famous irrational has a simple continued fraction. Show that

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$$

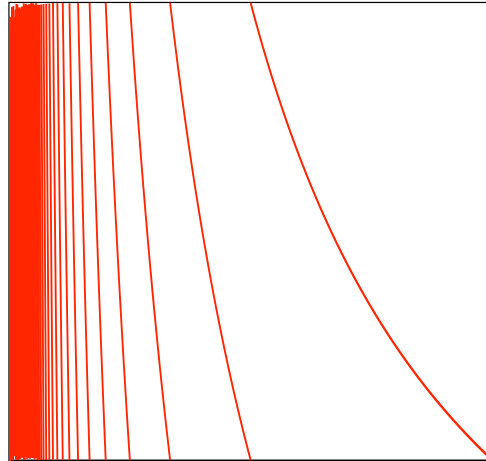
(observe that $1 + \sqrt{2}$ is the positive root of $x^2 - 2x - 1 = 0$. Hence $x = 2 + 1/x$, and so on). Its convergents are $1, 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, 239/169, 577/408, \dots$

Continued fractions and Bernoulli shift. The continued fraction development, the map

$$x \mapsto [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

realizes a conjugation between the restriction of the Gauss map (6.3) to the irrationals, the transformation $G : (0, 1] \setminus \mathbb{Q} \rightarrow (0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, and the shift $\sigma : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ over an alphabeth $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ of infinite letters. Indeed,

$$G : [0; a_1, a_2, a_3, \dots] \mapsto [0; a_2, a_3, a_4, \dots].$$



Graph of the Gauss map.

ex: Find the (largest two or three) fixed points of the Gauss map, and compute their values.

Periodic continued fractions and quadratic irrationals. *Quadratic irrationals* (or *quadratic surds*) are irrational roots of quadratic polynomials with integer coefficients

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(with $a, b, c \in \mathbb{Z}$), i.e. numbers like

$$x = \frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{\delta}$$

where $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}$, $\delta \neq 0$ and $\beta > 0$ which is not a square.

Theorem 6.4 (Lagrange). *The continued fraction of an irrational number $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ is periodic iff x is a quadratic irrational.*

Proof. See [Kh35, HW59]. The “if” part is easy, and is suggested in the following exercise. $\square$

ex: Mostre, por indução, que se x é um irracional quadrático então $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, x]$ é também um irracional quadrático, para todos os inteiros $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ e todos $a_0, a_1, \dots, a_n$ inteiros,

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, x] = \frac{ax + b}{cx + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Observe que se $x = [\overline{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n}]$, então

$$x = \frac{ax + b}{cx + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, e portanto é um irracional (porque a sua fração contínua é infinita) quadrático (porque $x(cx + d) = ax + b$, donde $cx^2 + (d - a)x - b = 0$).

Deduza que se a fração contínua de x é periódica então x é um irracional quadrático.

7 Simple orbits and perturbations

7.1 Topological fixed point theorems

To find periodic points of a transformation $f : X \rightarrow X$, namely fixed points of its iterates f^n , may be difficult. For example, when $f(x)$ is a polynomial of degree $d > 1$, its iterates are polynomials of exponentially growing degree.

Fixed point theorems in intervals. In real dimension one, connected and convex sets coincide, and are called intervals. This “miracle” is responsible of two very simple criteria to prove the existence of fixed points of continuous interval transformations. They say that if a compact interval is squeezed or enlarged, at least one of its points remain fixed.

Theorem 7.1 (fixed point theorem for intervals). *Let $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous transformation defined in an interval $I \subset \mathbb{R}$.*

- i) If $J \subset I$ is a compact interval such that $f(J) \subset J$, then f has a fixed point in J .*
- ii) If $J \subset I$ is a compact interval such that $J \subset f(J)$, then f has a fixed point in J .*

The proof is an elementary application of Bolzano theorem to the continuous function $f(x) - x$. A more abstract proof, which can be generalized to higher dimension (with the help of some non-trivial algebraic topology), is as follows. Suppose that f has no fixed points in J . Then the function

$$g(x) = \frac{f(x) - x}{|f(x) - x|}$$

would be a continuous map of an interval (J itself in case i) or some sub-interval of J in case ii)), which are connected spaces, onto the disconnected space $\{-1, 1\} \dots$

ex: Prove theorem 7.1.

ex: Find examples of continuous functions $f : I \rightarrow I$ and non-compact intervals J such that $f(J) \subset J$ or $J \subset f(J)$ which do not contain fixed points of f .

Other topological fixed point theorems. In higher, but finite, dimension, part i) of theorem 7.1 generalizes as

Theorem 7.2 (Brouwer). *A continuous map of the closed unit disk $D \subset \mathbb{R}^n$ into itself has a fixed point.*

In infinite dimension, one has the

Theorem 7.3 (Schauder-Tychonov). *A continuous transformation $f : K \rightarrow K$ of a compact and convex subset $K \subset X$ of a Banach space X (or of a locally convex topological vector space) has a fixed point.*

7.2 Basin of attraction

Convergent trajectories. Let $f : X \rightarrow X$ be a continuous dynamical system. If a trajectory is convergent, then its limit is a fixed point of f . Indeed, if $f^n(x) \rightarrow p$, the continuity of f implies that

$$f(p) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = p.$$

Basin of attraction. Let p be a fixed point of $f : X \rightarrow X$. The *basin of attraction*, or *stable set*, of p is the set of those points $x \in X$ whose trajectories converge to p , i.e.

$$W^s(p) := \left\{ x \in X \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p \right\}$$

Uniqueness of limits of convergent sequences in a metric space implies that stable sets of different fixed points are disjoint.

e.g. Squaring complex numbers. Consider the transformation $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ of the complex plane defined by “squaring”, i.e.

$$f(z) = z^2.$$

The basin of attraction of the fixed point 0 is the unit disk $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Indeed, if $|z| = \lambda < 1$, then $|f^n(z)| = \lambda^{2^n} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. We may also extend f to an endomorphism of the Riemann sphere $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, and then, by the same reasoning, we see that the basin of attraction of ∞ is the exterior of the disk, the set $\mathbb{D}^- = \{|z| > 1\}$. Meanwhile, it is not obvious to describe the basin of attraction of the fixed point $p = 1$. It is clear that its basin belongs to the unit circle $\mathbb{S} = \{|z| = 1\}$, and that it contains ± 1 , its square roots $\pm i$, the square roots of these points, and so on ... a countable and dense subset of the unit circle.

ex: Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be the linear homogeneous transformation of the line defined by $f(x) = \lambda x$. Study the basin of attraction of $p = 0$ depending on the “multiplier” λ . Do the same for $f(z) = \lambda z$ defined in the complex line $\mathbb{C}$.

ex: Find the basin of attraction of the origin for the linear maps $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined, in the canonical basis, by the following 2×2 real matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Find the basins of attraction of the fixed points of $f(x) = x^2$ and $f(x) = x^3$, considered as transformations of the real line $\mathbb{R}$.

7.3 Dynamics of contractions

Contractions. Let (X, d) be a metric space. A map $f : X \rightarrow X$ is called *contraction* (or λ -*contraction* if one wants to keep track of the constant λ) if it is Lipschitz and has Lipschitz constant $\lambda < 1$, i.e. if there exists a $0 \leq \lambda < 1$ such that for all $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot d(x, x') \quad (7.1)$$

Clearly, a constant transformation, sending any $x \in X$ into $f(x) = p$, is trivially a contraction. A linear homogeneous transformation $f(z) = \lambda z$ of the complex plane $\mathbb{C}$ or of the real line $\mathbb{R}$ is a contraction provided $|\lambda| < 1$. Observe that a contraction, as any Lipschitz map, is continuous (take $\delta = \varepsilon/\lambda$ in the ε - δ definition).

e.g. Smooth contractions. By the mean value theorem, a continuously differentiable transformation $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (or of a convex subset $X \subset \mathbb{R}^n$) is a contraction provided there exists a positive $\lambda < 1$ such that $|f'(x)| \leq \lambda$ for any $x \in \mathbb{R}^n$.

ex: Show that a contraction of a compact metric space X cannot be invertible, provided the space contains more than one point (compare the diameters X and $f(X)$)

ex: Give non-trivial (i.e. non constant) examples of contractions of

$$[0, 1] \quad [0, 1] \times [0, 1] \quad B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } d(x, y) < r\} \quad \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$$

Contraction principle. The dynamics of a contraction is described by the following fundamental theorem, which we state with all details.

Theorem 7.4 (Contraction principle/Banach fixed point theorem). *All trajectories of a contraction $f : X \rightarrow X$ of a metric space (X, d) are fundamental sequences, and the distance between any two trajectories tends to zero exponentially fast. If X is complete, then f admits one and only one fixed point p . The trajectory of any initial point $x_0 \in X$ converges exponentially fast to the fixed point, i.e. $d(f^n(x), p) \leq C \lambda^n$, where $C > 0$ is a positive constant and $0 \leq \lambda < 1$ is the Lipschitz constant of f .*

Proof. Let $f : X \rightarrow X$ be a λ -contraction. Let $x_0 \in X$ be any initial point, and let (x_n) be its trajectory, defined by the recursion $x_{n+1} = f(x_n)$. Iterating (7.1), one sees that

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^k$$

Using k times the triangular inequality and then the convergence of the geometric series of ratio $\lambda < 1$, we get

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

This implies that (x_n) is fundamental, since we can make $\lambda^n \cdot d(x_1, x_0)/(1-\lambda)$ smaller than any $\varepsilon > 0$ choosing a sufficiently large $n = n(\varepsilon)$. Continuity of f implies that the limit $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, which exists if X is complete, is a fixed point of f . Uniqueness is clear, for if p and p' were two different fixed points, then by (7.1) their distance $\delta = d(p, p') > 0$ would be $\leq \lambda \delta$, which is impossible if $\lambda < 1$. Again by (7.1) and finite induction, the distance between any two trajectories $x_n = f^n(x_0)$ and $x'_n = f^n(x'_0)$ decay as $d(x_n, x'_n) \leq \lambda^n \cdot d(x_0, y_0)$. In particular, the distance between an arbitrary trajectory and the fixed point p is bounded by $d(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot d(x_0, p)$, proving our last assertion with $C = d(x_0, p)$. $\square$

ex: Mostre que uma transformação $f : X \rightarrow X$ do espaço métrico completo (X, d) tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$ distintos pode não ter pontos fixos.

(Um exemplo com X não completo é obvio: basta retirar o ponto fixo de uma contração de um espaço completo. Um exemplo “minimalista” com X completo, é um espaço formado por uma única órbita, ou seja um espaço que só contém um ponto x_0 e os pontos $x_n = f^n(x_0)$ com $n \geq 1$. Se d_n denota a distância $d(x_n, x_{n-1})$, então $d_{n+1} < d_n$. Não queremos pontos fixos, portanto a sucessão (x_n) não pode ser convergente. Uma condição suficiente é que a série $\sum d_n$ seja divergente ...)

ex: Heron algorithm. Sejam $a > 0$ e $x_0 > 0$. Mostre que a sucessão (x_n) definida indutivamente por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

converge para $\sqrt{a}$. Assuma que $a = 2$, escolha um ponto inicial $x_0 > 0$, e estime a distância entre x_n e $\sqrt{2}$. Utilize o resultado para dar uma aproximação de $\sqrt{2}$ com dois dígitos decimais correctos²⁵.

(A sucessão é uma trajetória da transformação $f(x) = (x + a/x)/2$. Observe que a restrição de f ao domínio $[\sqrt{a}, \infty[$ é uma contração, e que $f(\mathbb{R}_{>0}) \subset [\sqrt{a}, \infty[$, logo toda trajetória cai neste domínio passada uma iteração ...)

Stability of contractions. A contraction $f : X \rightarrow X$ of a complete metric space X may be thought as a “machine” that compute the fixed point $p = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ starting with any initial guess $x \in X$.

O problema é decidir se uma pequena perturbação de f , digamos $g : X \rightarrow X$, produz um ponto fixo p' próximo de p . A resposta consiste em formular um resultado de “continuidade”, que diga que uma estimação da “distância” entre f e g permite ter uma estimação da distância entre p' e p . Ora, se $d_\infty(f, g) < \delta$, a transformação g pode não ser uma contração, por quanto pequeno seja o $\delta > 0$ (para se convencer, pode traçar gráficos de contrações da reta real, e ver que numa δ -vizinhança cabem gráficos de transformações com derivada arbitrariamente grande). Uma solução é admitir que X tenha uma estrutura diferenciável e que as transformações sejam de classe C^1 . A condição $\|f - g\|_{C^1} < \delta$ implica que, se f é uma λ -contração e $\delta < 1 - \lambda$, então também g é uma contração e tem constante de Lipschitz $\leq \lambda + \delta$. Mais vale procurar o teorema de estabilidade diretamente dentro do espaço das contrações.

Theorem 7.5. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma λ -contração do espaço métrico completo (X, d) , e seja $p \in X$ o seu ponto fixo. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1 - \lambda$ tal que se $g : X \rightarrow X$ uma $(\lambda + \delta)$ -contração a distância $d_\infty(f, g) < \delta$, e se p' é ponto fixo de g , então*

$$d(p, p') < \varepsilon$$

Proof. Se p' é o ponto fixo de g , então em particular $g^n(p) \rightarrow p'$ quando $n \rightarrow \infty$. Utilizando a desigualdade do triângulo vê-se que

$$\begin{aligned} d(p, p') &\leq \sum_{n=0}^{\infty} d(g^{n+1}(p), g^n(p)) \leq d(g(p), p) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + \delta)^n \\ &\leq \delta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + \delta)^n = \frac{\delta}{1 - (\lambda + \delta)} \end{aligned}$$

e esta quantidade é $< \varepsilon$ desde que δ seja suficientemente pequeno. $\square$

Classes de equivalência das contrações lineares da reta. As contrações da reta real fornecem também um exemplo simples de como pode ser utilizada a dinâmica para construir uma conjugação topológica.

Sejam $f : x \mapsto \alpha x$ e $g : x \mapsto \beta x$ duas contrações lineares de $\mathbb{R}$, com $0 < \alpha, \beta < 1$. A origem é o ponto fixo das duas contrações. O conjunto $A = [-1, -\alpha[\cup]\alpha, 1]$ é um “domínio fundamental” pela ação de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, no sentido em que, dado um $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrário, existe e é único um tempo $n(x) \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{n(x)}(x) \in A$. Analogamente, um domínio fundamental pela ação de g em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é $B = [-1, -\beta[\cup]\beta, 1]$. Seja $H : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ um homeomorfismo que verifique $H(-1) = -1$, $H(-\alpha) = -\beta$, $H(\alpha) = \beta$ e $H(1) = 1$ (por exemplo, podem escolher um homeomorfismo afim). É imediato verificar que a receita

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ g^{-n(x)}(H(f^{n(x)}(x))) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

²⁵Este era o método utilizado pelos babilônios (embora posteriormente atribuído a Arquitas de Taranto, a Heron de Alexandria, ou até ao Newton!) para “calcular” o lado de um quadrado de área a . Eles chegaram a ter uma aproximação de $\sqrt{2}$ que, em notação decimal, era 1.414213, um erro de apenas $\simeq 10^{-6}$! Uma conjectura sobre a origem do método está em O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Dover, New York 1969.

define um homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Observando que $n(x) = n(f(x)) + 1$, vê-se que

$$\begin{aligned}(h \circ f)(x) &= g^{-n(f(x))} \left(H \left(f^{n(f(x))} f(x) \right) \right) = g^{-n(x)+1} \left(H \left(f^{n(x)-1} (f(x)) \right) \right) \\ &= g \left(g^{-n(x)} \left(H \left(f^{n(x)}(x) \right) \right) \right) = (g \circ h)(x)\end{aligned}$$

e portanto h é uma conjugação topológica entre f e g .

O caso em que $-1 < \alpha, \beta < 0$ pode ser tratado da mesma maneira. Não é difícil verificar que as contrações $x \mapsto \alpha x$ e $x \mapsto \beta x$ não podem ser conjugadas se $\alpha \cdot \beta < 0$, i.e. se uma é crescente e a outra é decrescente. O resultado é que todas as contrações lineares e não triviais da reta real com a mesma orientação são topologicamente conjugadas, e portanto só existem duas classes de equivalências de contrações lineares da reta.

É importante observar que uma conjugação h entre $f : x \mapsto \alpha x$ e $g : x \mapsto \beta x$ não pode ser de classe $\mathcal{C}^1$, a não ser que $\alpha = \beta$. Pois, se $f = h^{-1} \circ g \circ h$ e se h é diferenciável, então a regra da cadeia implica que $f'(0) = g'(0)$, logo que $\alpha = \beta$. Este fenómeno explica porque na definição de estabilidade estrutural é melhor pedir que a conjugação seja só contínua.

ex: Mostre que as contrações lineares da reta $x \mapsto \alpha x$ e $x \mapsto \beta x$ não podem ser conjugadas se $\alpha \cdot \beta < 0$, i.e. se uma é crescente e a outra é decrescente.

(Uma conjugação é um homeomorfismo da reta, em particular é monótono...)

Observação: princípio das contrações, teoremas de ponto fixo “analíticos” e métodos variacionais.

O princípio das contrações é o ingrediente de muitos teoremas de existência em matemática (pense só no teorema de existência das soluções das equações diferenciais). Se queremos provar a existência e a unicidade de um ponto $p \in X$ que satisfaz uma certa propriedade P , podemos tentar escrever a condição “ x satisfaz P ” na forma “ $f(x) = x$ ”, onde $f : X \rightarrow X$ é uma transformação. Se existe uma métrica d tal que f seja uma contração do espaço métrico completo (X, d) , então a trajetória de todo ponto $x \in X$ converge para o único ponto p que satisfaz a propriedade em causa. O método funciona porque $(f^n(x))$ é uma sucessão convergente, e a distância $d(f^n(x), p)$ converge para 0 quando $n \rightarrow \infty$. Em outras palavras, a função $x \mapsto d(x, p)$ é estritamente decrescente nas trajetórias de f , e tem um mínimo, único, no ponto p . Em falta de uma contração natural f , isto sugere uma outra estratégia. A ideia agora é tentar provar a existência de uma função φ tal que “ x satisfaz P ” sse “ $\varphi(x) < \varphi(x')$ para todo $x' \neq x$ ” (ou pelo menos para todo $x' \neq x$ numa vizinhança de x , o que quer dizer que φ tem um mínimo local em x), e depois utilizar resultados de compacidade para provar que o mínimo de φ existe e, com alguma sorte, é até único. Estes métodos são ditos “princípios variacionais”, e tiveram origem na física do século XIX. As próprias leis da física costumam ser enunciadas na forma de princípios variacionais. Por exemplo, em mecânica clássica, a trajetória de um ponto material com posição inicial q_0 e condição final q_T é a (derivada da) curva $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $q(0) = q_0$ e $q(T) = q_T$, que é um ponto crítico de um certo funcional

$$\varphi(q) = \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

dito “ação”, o integral da Lagrangiana L = “energia cinética–energia potencial” ao longo da trajetória. Esta é também a estratégia utilizada para provar a existência e a unicidade das soluções das equações às derivadas parciais da física matemática: procurar uma ação φ que tenha um ponto crítico nas soluções.

7.4 Ordem da reta real e trajetórias

A ordem da reta real implica restrições às trajetórias de transformações monótonas.

Transformações crescentes do intervalo. Por exemplo, seja $f : I \rightarrow I$ uma transformação contínua e crescente do intervalo I . Então toda trajetória $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é monótona, crescente ou decrescente. A sucessão monótona $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ só pode fazer duas coisas: ser convergente, i.e. $x_n \rightarrow p$ para algum ponto fixo p , se é limitada, ou ser divergente, no sentido em que $x_n \rightarrow \pm\infty$, se não é

limitada. Em particular, se o intervalo I é compacto, a segunda possibilidade é impossível, logo toda trajetória é convergente. Isto implica que, se I é compacto, existe um compacto não vazio $F \subset I$ de pontos fixos, e que os pontos em cada componente conexa de $I \setminus F$ têm trajetórias contidas na componente conexa, e convergentes para um ponto de ∂F .

Exercícios.

- Prove que um homeomorfismo $f : I \rightarrow I$ de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ não tem pontos periódicos com período superior a 2. Quando tem pontos periódicos de período 2 ?
(Se o homeomorfismo é crescente então nenhum ponto pode ter período superior a 1. De fato, as trajetórias são monótonas, portanto ou $f(x) = x$, ou $f^{n+1}(x) > f^n(x) > \dots > x$ para todo $n \geq 1$, ou $f^{n+1}(x) < f^n(x) < \dots < x$ para todo $n \geq 1$. Seja agora f um homeomorfismo decrescente. Não é difícil ver que f tem um, e um único, ponto fixo p , e que p divide I em dois subintervalos I_- e I_+ que são permutados pela transformação f . Observe também que, se f é decrescente, então f^2 é crescente. Seja $x \neq p$ tal que $f^2(x) \neq x$. Então as sucessões $(f^{2n}(x))$ e $(f^{2n+1}(x))$ são estritamente monótonas e estão em "lados" distintos de p , i.e. uma em I_+ e a outra em I_- ...)
- Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $f : I \rightarrow I$ uma função contínua e crescente. Prove que a trajetória de cada ponto de I converge para um ponto fixo de f . Discuta a dinâmica de f .
- Estude também a dinâmica de uma transformação contínua e decrescente $f : I \rightarrow I$ definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$.
(Observe que, se f é decrescente, então f^2 é crescente...)

Desafio. Sejam I um intervalo da reta real, e $f : I \rightarrow I$ e $g : I \rightarrow I$ dois homeomorfismos de I sem pontos periódicos. Prove que f e g são topologicamente conjugados.

Teorema de Sharkovskii. A ordem da reta também influi na distribuição dos períodos das órbitas periódicas. Um resultado de Alexander N. Sharkovskii diz que *existe uma ordem $\prec$ nos naturais*

$$\begin{aligned} 1 &\prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \prec 2^m \prec \dots \prec 2^k \cdot (2n-1) \prec \dots \\ \dots &\prec 2^k \cdot 3 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec \dots \prec 2n-1 \prec \dots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3 \end{aligned}$$

tal que, se uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma órbita periódica de período k e se $j \prec k$, então também tem uma órbita periódica de período j . Em particular, a existência de uma órbita de período 3 implica a existência de órbitas de todos os períodos!

7.5 Análise local: pontos fixos atrativos e repulsivos

A diferenciabilidade das transformações e o princípio das contrações ajudam a compreender as trajetórias dos pontos numa vizinhança dos pontos periódicos.

Pontos fixos atrativos. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, e $p \in X$ um ponto fixo de f .

Theorem 7.6. Se $|f'(p)| < 1$, então p é "atrativo", ou seja, admite uma vizinhança B tal que $f^n(x) \rightarrow p$ para todo $x \in B$.

Proof. Pela continuidade de f' , existem $\lambda < 1$ e uma bola $B = B_\varepsilon(p)$ centrada em p tais que $|f'(x)| < \lambda$ para todo $x \in B$. O teorema do valor médio implica que $f(\overline{B}) \subset \overline{B}$, pois se $d(x, p) \leq \varepsilon$ então

$$d(f(x), p) \leq \lambda \cdot d(x, p) < \varepsilon$$

e que $d(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot d(x, x')$ se $x, x' \in \overline{B}$. Portanto, $f|_{\overline{B}} : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ é uma contração, e o princípio das contrações diz que a trajetória de todo ponto de $\overline{B}$ converge para p . O resultado é que $B \subset W^s(p)$, i.e. a bacia de atração de p é uma vizinhança de p . $\square$

Pontos fixos repulsivos. A ordem da reta real permite codificar um comportamento “oposto” à atratividade. Sejam $f : I \rightarrow I$ uma transformação de classe C^1 definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e $p \in I$ um ponto fixo de f .

Theorem 7.7. *Se $|f'(p)| > 1$, então p é “repulsivo”, i.e. admite uma vizinhança B tal que a trajetória de todo ponto $x \in B$ distinto de p sai da vizinhança em tempo finito.*

Proof. Pela continuidade de f' , existem $\lambda > 1$ e um intervalo $B = [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ centrado em p tais que $|f'(x)| > \lambda$ para todo $x \in B$. Observem também que f é estritamente crescente ou decrescente em B , dependendo do sinal de $f'(p)$, e portanto envia bijetivamente intervalos em intervalos. Agora, seja $x \in B$ um ponto diferente de p , e suponhamos que $f^k(x) \in B$ para todo tempo $0 \leq k \leq n$. A regra da cadeia implica que as derivadas das f^k em x crescem exponencialmente, pois

$$\left| (f^k)'(x) \right| = |f'(f^{k-1}(x))| \cdot |f'(f^{k-2}(x))| \cdots |f'(x)| > \lambda^k$$

para todo $k \leq n$. O teorema do valor médio implica que n não pode ser arbitrariamente grande, porque

$$d(p, f^n(x)) \geq \lambda^n \cdot d(p, x) \quad \text{e} \quad d(p, f^n(x)) \leq \varepsilon$$

são incompatíveis quando n é grande. Portanto, existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \notin B$. $\square$

Cuidado: este resultado é “local”. A condição $|f'(p)| > 1$ não contém informação acerca da bacia de atração de p .

Também, a condição $|f'(p)| > 1$ não é suficiente para decidir a repulsividade de um ponto fixo em dimensão maior, pois podem existir “direções” onde f estica as distâncias e outras onde f reduz as distâncias...

Exercícios.

- Dê exemplos que mostram que o conjunto estável de um ponto fixo repulsivo p pode conter estritamente $\{p\}$.
- Procure uma boa definição de *órbita periódica atrativa*.

(Observe que, se $\{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$ é uma órbita, a derivada de f^n é a mesma em todos os seus pontos pela regra da cadeia. Se $|(f^n)'(p)| < 1$, então p é um ponto fixo atrativo da transformação f^n , e portanto existe uma vizinhança B de p tal que $f^{kn}(x) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} p$ para todo $x \in B$. Então $B \cup f^{-1}(B) \cup \dots \cup f^{-(n-1)}(B)$ é uma vizinhança da órbita periódica, e as trajetórias dos seus pontos são assintóticas à órbita de p ...)

- Consider the family of quadratic maps

$$x \mapsto \lambda x^2$$

depending on the parameter λ . Find the basin of attraction of the fixed point $p = 0$, and describe the speed of convergence of convergent trajectories.

- Se p é um ponto fixo de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(p) = 1$, então tudo ou quase tudo pode acontecer! O conjunto estável de p pode ser uma vizinhança de p , pode ser só $\{x\}$, ou pode conter uma “meia vizinhança” de p , um intervalo do género $[p, p + \varepsilon[$...

Estude os exemplos

$$x \mapsto x \pm x^3 \quad \text{e} \quad x \mapsto x \pm x^2$$

e invente outros.

A família quadrática. A *família quadrática*, ou *logística* (do francês “logement”²⁶), é a família de transformações $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definidas por

$$x \mapsto \lambda x(1 - x)$$

onde o parâmetro λ tem valores no intervalo $[0, 4]$.

Os pontos fixos de f_λ são 0, que é atrativo quando $0 \leq \lambda < 1$, e $p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, que é atrativo quando $1 < \lambda < 3$.

Se $\lambda \in [0, 1]$ então toda trajetória $(f_\lambda^n(x))$ converge para 0. De fato, toda trajetória é uma sucessão decrescente e limitada, logo convergente, e o limite é o único ponto fixo 0.

Se $\lambda \in]1, 3]$ então toda trajetória $(f_\lambda^n(x))$ converge para p_λ . De fato, se $1 < \lambda < 3$, existe uma vizinhança V de p_λ tal que $f_\lambda|_V$ é uma contração e tal que para todo $x \in [0, 1]$ existe um tempo $n \geq 0$ tal que $f_\lambda^n(x) \in V$. O caso em que $\lambda = 3$ não é muito diferente ...

7.6 Convergência no método de Newton

Newton method. Let $F \in \mathbb{R}[x]$ be a polynomial with real coefficients. Newton method to find the roots of F , i.e. to solve the equation $F(x) = 0$, consists in choosing a first approximation x_0 , and then

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}.$$

This means that we try to refine our bet x_n using the linear approximation (first order Taylor)

$$F(x) \simeq F(x_n) + F'(x_n) \cdot (x - x_n)$$

It is clear that if the sequence (x_n) converges to some p , and if $F'(p) \neq 0$, then the limit $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ is a root of the polynomial F . Vice-versa, if p is a root of F , and if $F'(p) \neq 0$, then p is a fixed point of the map

$$x \mapsto f(x) := x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

The derivative of f at p is

$$f'(p) = 1 - \frac{(F'(p))^2 - F(p)F''(p)}{(F'(p))^2} = 0$$

Therefore, p is an attracting fixed point of f : the trajectory of any initial guess x_0 sufficiently close to p converges to p .

Quadratic convergence. Indeed, since the derivative is $f'(p) = 0$, any root of F is a super-attracting fixed point of f , and the convergence is much better than exponential.

Theorem 7.8. Let p be a non-critical root of the polynomial $F \in \mathbb{R}[x]$, i.e. a root where $F'(p) \neq 0$. Then Newton's iterations starting with some x_0 sufficiently near the root p converge to this root, and the convergence is “quadratic”, i.e. the error $\varepsilon_n = |x_n - p|$ decreases as

$$\varepsilon_{n+1} \leq K \cdot \varepsilon_n^2$$

for some $K > 0$.

²⁶A família quadrática nasceu como modelo de dinâmica de populações. Num meio ambiente ilimitado, uma população tem crescimento exponencial, e um modelo razoável a tempo discreto é $z_{n+1} = \lambda z_n$, onde z_n é o tamanho da população no tempo n e $\lambda > 0$ é um parâmetro que caracteriza a “fertilidade” da espécie. Se o meio ambiente (a disponibilidade de espaço e comida) é limitado, parece razoável acrescentar um termo negativo $-\beta z_n^2$, onde $\beta > 0$, que toma conta da mortalidade devida à falta de recursos (a probabilidade de dois indivíduos estar num mesmo sítio, e portanto disputar a comida, é proporcional a z_n^2). O modelo é portanto $z_{n+1} = \lambda z_n - \beta z_n^2$. A maior população suportada pelo meio ambiente resulta ser λ/β e, se chamamos $x_n = z_n\beta/\alpha$ a população relativa, obtemos o modelo $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$.

Proof. We may assume, without loss of generality, that the root we are looking for is the origin, so that $F(0) = 0$. Now, suppose we are at x_n after n iterations. Taylor's formula with Lagrange estimate of the error around x_n says that

$$F(x) = F(x_n) + F'(x_n) \cdot (x - x_n) + \frac{1}{2} F''(y) \cdot (x - x_n)^2$$

for some y between x and x_n . Taking $x = 0$ (the root!) and dividing by $F'(x_n)$ we get

$$0 = F(0) = F(x_n) - F'(x_n) \cdot x_n + \frac{1}{2} F''(y) \cdot x_n^2 \quad \text{i.e.} \quad x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = \frac{1}{2} \frac{F''(y)}{F'(x_n)} \cdot x_n^2$$

But the l.h.s. is x_{n+1} . There follows that the distance $\varepsilon_n = |x_n - 0|$ between the n -th iterate and the root satisfies the iterative bound

$$|x_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{F''(y)}{F'(x_n)} \right| \cdot |x_n|^2$$

Since $F'(0) \neq 0$ (and polynomials have continuous derivatives), there is an interval $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ around the root 0 where $M = \sup_{x \in I} |F''(x)| < \infty$ and $\delta = \inf_{x \in I} |F'(x)| > 0$. Let $K = M/2\delta$. There follows that if $|x_0| < 1$ and $|x_0| < 1/K$, then

$$|x_{n+1}| \leq K \cdot |x_n|^2$$

□

ex: Check that Newton's method applied to the quadratic polynomial $z^2 - a$, with $a > 0$, corresponds to Heron's algorithm.

ex: Estimate $\sqrt{17}$.

ex: Write down Newton's recipe to solve $z^n - a = 0$, with $a > 0$ and $n \geq 2$.

ex: Use Newton's method to estimate the roots of

$$z^2 + 1 + z \quad z^3 - z - 1 \quad z^5 + z + 1 \quad z^3 - 2z - 5$$

7.7 Dynamics of Möbius transformations

The Riemann sphere. The *Riemann sphere* is the one-point compactification $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ of the complex plane. One can describe the Riemann sphere as a complex manifold using two “charts”, or coordinate systems: a coordinate $z \in \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ and a coordinate $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \approx \mathbb{C}$, related by the transformation $w = 1/z$ in the intersection $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ where $z \neq 0, \infty$.

Alternatively, one can figure out a real 2-dimensional sphere $\mathbb{S}^2 = \{|z|^2 + (t - 1)^2 = 1\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^3$, touching the $\{t = 0\} \approx \mathbb{C}$ plane at the origin $0 \approx$ South Pole, and use stereographic projection $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ from the North Pole $\approx \infty$ (here one may want to write the explicit formulae).

More abstractly, the Riemann sphere is the complex projective line $\mathbb{CP}^1$, the space of complex lines through the origin in $\mathbb{C}^2$. Points are determined by their “homogeneous coordinates” $[z_1, z_2] := \mathbb{C}^*(z_1, z_2)$ (i.e. points (z_1, z_2) modulo the equivalence relation $(z_1, z_2) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2)$ with $\lambda \in \mathbb{C}^\times$). In the domain where $z_2 \neq 0$, we may use the coordinate $z = z_1/z_2 \in \mathbb{C}$, and in the domain where $z_1 \neq 0$, we may use the coordinate $w = z_2/z_1 \in \mathbb{C}$, thus recovering the first description.

The Möbius group. The group of conformal automorphisms of the Riemann sphere is the *Möbius group* $\text{Möb} \approx \text{PSL}_2(\mathbb{C})$, made of equivalence classes of 2×2 invertible complex matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ acting on $\overline{\mathbb{C}}$ as “fractional linear transformations”

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (7.2)$$

where $M(\infty) = a/c$ and $M(-d/c) = \infty$. Proportional matrices define the same map, therefore we may assume they have $\det(M) = 1$ (and this explains the name “projective special linear group”). The fact that composition in the Möbius group corresponds to standard multiplication of representing matrices is clear if we observe that the action on $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{CP}^1$ comes from the standard linear action of $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ on $\mathbb{C}^2$.

It is clear from (7.2) that any Möbius transformation is a composition of *complex homotheties* $z \mapsto cz$, *translations* $z \mapsto z + a$, and the *inversion* along the unit circle

$$z \mapsto I(z) := -1/z,$$

(sending the interior of the unit disk onto the exterior and vice-versa).

As all holomorphic bijections, Möbius transformations are “conformal maps”, i.e. preserve angles. The important fact is that Möbius transformations sends circle into circle, once we understand that “circles” in the Riemann sphere appears as either Euclidean circles or straight lines in the complex plane (under stereographic projection). This is obvious for homotheties and translations, and may be easily checked for the inversion along the unit circle.

Dynamics of single Möbius transformations. The Möbius group acts triply transitively on the Riemann sphere. This means that for any three distinct points $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ we may find a (unique) $M \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ such that $M(a) = 0$, $M(b) = 1$ and $M(c) = \infty$. Indeed, this map is

$$M(z) = \frac{(z - a)(b - c)}{(z - c)(b - a)}.$$

A non-trivial Möbius transformation $M \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ fixes one or two points in the Riemann sphere, since the fixed point equation $M(z) = z$ is quadratic. If it fixes one point, we may assume, after conjugation, that this is ∞ , and therefore the transformation is conjugated to a translation

$$z \mapsto T_a(z) = z + a$$

with $a \neq 0$. These Möbius maps are called *parabolic*. If it fixes two points, we may assume, after conjugation, that they are 0 and ∞ , and therefore the transformation is conjugated to

$$z \mapsto D_{\lambda^2}(z) := \lambda^2 z$$

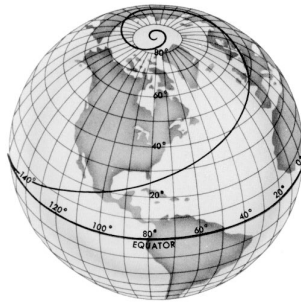
with $\text{tr}(D_{\lambda^2}) = \lambda + \lambda^{-1}$, for some non-trivial multiplier $\lambda^2 \neq 0, 1$. The generic case is when the multiplier $\lambda^2 = \rho e^{i\theta}$ does not lie in the unit circle. Such a map

$$z \mapsto \rho e^{i\theta} z,$$

with $\rho \neq 1$, is called *loxodromic* since its iterates displace points along “loxodromes”, paths which form a constant angle θ with “parallels” in the Riemann sphere (the circles with constant $|z|$). The fixed points 0 and ∞ are a sink and a repeller (if $|\lambda| < 1$, or viceversa). A loxodromic transformation is called *hyperbolic* when the multiplier is real, and therefore it preserve meridians of the Riemann sphere (the circles $\arg z = \text{constant}$). The transformation is called *elliptic* if $|\lambda| = 1$, in which case it is a rotation

$$z \mapsto R_\theta(z) := e^{i\theta} z$$

of some angle $\theta \notin \mathbb{Z}2\pi$, and the fixed points 0 and ∞ are indifferent.



Loxodromes

(from http://en.wikisource.org/wiki/The_American_Practical_Navigator/Chapter_1)

ex: Show that the fixed points of a Möbius map like (7.2) with $c \neq 0$ are

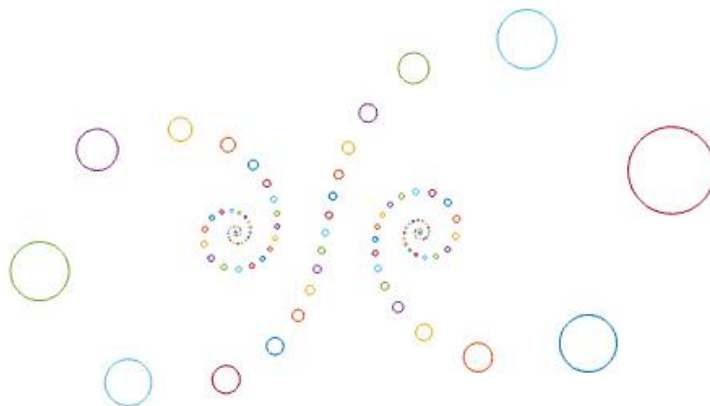
$$z_{\pm} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{\text{tr}(M)^2 - 4}}{2c}$$

(in the above formula it is important that the matrix has been normalized so to have determinant one). Deduce that the transformation is elliptic if $\text{tr}(M)^2 \in [0, 4)$, parabolic if $\text{tr}(M)^2 = 4$ and loxodromic otherwise.

Pictures. Here you may want to produce pictures of orbits of such different Möbius transformations. In particular, you may draw a “picture” of the orbits of a loxodromic Möbius map with two finite fixed points, say 0 and 1. A Möbius map fixing 0 and sending 1 to ∞ is $S(z) = z/(z - 1)$, whose inverse is $S^{-1}(z) = z/(z + 1)$. Therefore if $M(z) = \lambda z$, say with $|\lambda| < 1$, the conjugation

$$SMS^{-1}(z) = \frac{\lambda z}{(\lambda - 1)z + 1}$$

is a loxodromic map with a sink at 0 and a repeller at 1.

Orbit of a circle under a loxodromic Möbius map with a sink at 1 and a repeller at -1 .

8 Linearização

8.1 Linearização conforme

Linearização conforme. Seja $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ uma função racional definida na esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Cada ponto fixo p de f tem uma sua bacia de actração B_p . A procura de metodos rápidos para calcular iteradas, em 1871 E. Schröder introduziu a ideia de procurar conjugações conformes da restrição $f|_{B_p}$ com funções racionais mais simples, do género $g : z \mapsto \lambda z$, numa vizinhança B da origem. O método consiste em resolver a equação funcional $h \circ f|_{B_p} = g \circ h$, onde $h : B_p \rightarrow B$ é uma função analítica. E. Schröder, G. Koenig e J.H. Poincaré trataram o problema com $|\lambda| \neq 1$, e depois Carl S. Siegel resolveu o caso $|\lambda| = 1$ por volta de 1940.

Koenigs linearization theorem. *Let z_0 be a fixed point of f with multiplier $f'(z_0) = \lambda$ such that $|\lambda| \neq 0, 1$. Then there exists a conformal map ϕ , unique up to a non-zero factor, from a neighborhood of z_0 onto a neighborhood of 0 such that $\phi \circ f = \lambda \cdot \phi$.*

Proof. We assume that z_0 is attracting, i.e. $|\lambda| < 1$, since the repelling case follows from considering the local inverse of f . Also, after conjugation, we can assume that $z_0 = 0$, hence the map has the form $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$

Now define $\phi_n(z) = f^n(z)/\lambda^n$. There exists a $\delta > 0$ and a constant $c < |\lambda| < 1$ such that for $|z| < \delta$

$$|\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z)| \leq k \cdot (c/|\lambda|)^n$$

for some $k > 0$. Hence the sequence of holomorphic functions ϕ_n converges uniformly in a small ball around 0. The functional equation $\phi \circ f = \lambda \cdot \phi$ follows immediatly from its definition.

Comparing coefficients it is easy to see that any conjugation of $z \mapsto \lambda z$ to itself is a constant multiple of the identity, as long as $|\lambda| \neq 0, 1$. Uniqueness follows. $\square$

Böttcher theorem *Let z_0 be a superattracting fixed point of f , where*

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots$$

with $a_p \neq 0$ and $p \geq 2$. Then there exists a conformal map ϕ , unique up to multiplication by a $(p-1)$ -root of unity, from a neighborhood of z_0 onto a neighborhood of 0 such that $\phi \circ f = \phi^p$.

Idea of the proof. We can assume that $z_0 = 0$ and that $a_p = 1$. As in Koenigs proof, we look for the conjugation as a limit af the functions

$$\phi_n(z) = f^n(z)^{p^{-n}}.$$

It can be shown that the ϕ_n converge uniformly in some sufficiently small ball around 0, and the functional equation follows from the definition. Uniqueness, up to a $(p-1)$ -root of unity, can be checked comparing power series. $\square$

8.2 Hiperbolicidade e linearização

Hiperbolicidade. As transformações lineares dos espaços euclidianos têm dinâmicas simples, e fornecem modelos para o comportamento de uma transformação diferenciável numa vizinhança de um ponto fixo. Um bom exercício é procurar entender a dinâmica de uma transformação linear do plano $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por uma matriz real 2×2 . A ideia é esboçar o retrato de fase da transformação, ou seja descrever algumas trajetórias típicas, pelo menos uma por cada comportamento possível. Comece por estudar uma transformação diagonalizável

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

e reparar as diferenças no comportamento qualitativo das trajetórias ao variar os autovalores λ e μ . Ajuda observar que as curvas $x^{\log \mu} = k \cdot y^{\log \lambda}$ são invariantes. Depois, estude o caso

$$T = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ao variar λ e θ . Escreva a transformação em coordenadas polares (r, φ) , e observe que as curvas $r \cdot \lambda^{\varphi/\theta} = k$ são invariantes. Enfim, trate o caso geral, e discuta quando duas transformações lineares são topologicamente conjugadas.

Seja agora $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear arbitrária ...

Linearização e hiperbolicidade. Seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e seja $p \in V$ um ponto fixo de f . A derivada $f'(p)$ é a transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que “melhor aproxima” $f(x) - p$ numa vizinhança de p . Isto sugere que tal vez seja possível que a dinâmica de f numa vizinhança B de p seja “igual” à dinâmica de L numa vizinhança A da origem. Tecnicamente, o problema é decidir se a restrição $f|_B : B \rightarrow B'$ é topologicamente conjugada à restrição $L|_A : A \rightarrow A'$, por meio de uma “conjugação local” $h : B \cup B' \rightarrow A \cup A'$. Em geral, a resposta é negativa. É possível dizer algo quando p é um ponto fixo *hiperbólico*, ou seja quando L não tem valores próprios λ com módulo $|\lambda| = 1$. O resultado importante é o

Teorema de Grobman-Hartman *Um difeomorfismo local $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ com um ponto fixo hiperbólico p é localmente topologicamente conjugado à sua parte linear $f'(p)$.*

9 Transversalidade e bifurcações

9.1 Transversalidade e persistência dos pontos fixos

Transversalidade. Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e p um ponto fixo de f . Se $f'(p) \neq 1$, então o ponto fixo p é “isolado”, ou seja, é o único ponto fixo de f numa vizinhança B de p . De fato, um ponto fixo é uma solução da equação

$$F(x) = f(x) - x = 0$$

Se $f'(p) \neq 1$ então $F'(p) \neq 0$. O teorema da função inversa diz então que F é invertível numa vizinhança B de p , e isso implica que p é o único zero de F em B . Os pontos fixos que satisfazem a condição $f'(p) \neq 1$ são ditos *transversais*, porque a tagente ao gráfico $\text{graph}(f) = \{(x, y) \text{ t.q. } y = f(x)\}$ de f em p é transversal ao gráfico da função identidade, a reta $\{(x, y) \text{ t.q. } y = x\}$.

Peristência. A condição $f'(p) \neq 1$ é uma condição aberta, e isto faz suspeitar que também seja estável por pequenas perturbações de f .

Teorema *Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$, e p um ponto fixo transversal de f . Toda transformação $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente $\mathcal{C}^1$ -próxima de f tem um, e um único, ponto fixo, também transversal, numa vizinhança de p .*

dem. Seja $g = f - h$ uma perturbação de f , com $\|h\|_{\mathcal{C}^1} < \delta$. Um ponto fixo de g é uma solução da equação $g(x) - x = 0$, ou seja da equação

$$F(x) = h(x)$$

onde definimos $F(x) = f(x) - x$. Sabemos que F é invertível numa vizinhança B' de p , logo um ponto fixo de g em B' é uma solução de $x = (F^{-1} \circ h)(x)$, ou seja um ponto fixo de $F^{-1} \circ h$. A estratégia é provar que $F^{-1} \circ h$ é uma contração numa vizinhança de p . Se a vizinhança $B = \overline{B_r(p)}$ é suficientemente pequena, a inversa de F tem derivada limitada, por exemplo $\left| (F^{-1})'(x) \right| < \lambda$ em $F(B)$. Se δ é suficientemente pequeno, a derivada $\left| (F^{-1} \circ h)'(x) \right| < \lambda \cdot \delta$ é uniformemente < 1 em B , e portanto $F^{-1} \circ h$ tem boas chances de ser uma contração. O que falta verificar é que a imagem $(F^{-1} \circ h)(B)$ seja contida em B . Ora, dado $x \in B$, a desigualdade do triângulo, o teorema do valor médio e a regra da cadeia, implicam que

$$\begin{aligned} d((F^{-1} \circ h)(x), p) &\leq d(F^{-1}(h(x)), F^{-1}h(p)) + d(F^{-1}(h(p)), p) \\ &\leq d(F^{-1}(h(x)), F^{-1}h(p)) + d(F^{-1}(h(p)), F^{-1}(0)) \\ &\leq \lambda \cdot \delta \cdot r + \lambda \cdot \delta \end{aligned}$$

(onde utilizamos o fato de que p é um ponto fixo de f) e esta quantidade é $< r$ se δ é suficientemente pequeno. O princípio das contrações enfim implica que um ponto fixo $p' \in B$ de g existe e é único. A derivada de g neste ponto está δ -próxima da derivada de f em p , e isto implica a transversalidade de p' se δ é pequeno. $\square$

Exercícios.

- Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$, e seja p um ponto periódico de período n tal que $(f^n)'(p) \neq 1$. Toda transformação g suficientemente $\mathcal{C}^1$ -próxima de f tem um ponto periódico de período n próximo de p . (Repita a demonstração anterior com f^n em vez de f)
- Sejam $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e p um ponto fixo de f . A transversalidade de p se traduz na condição de que o operador $f'(p)$ não tenha 1 como autovalor. Prove que se o operador $f'(p)$ não tem 1 como autovalor, então o ponto fixo p é “isolado”, existe uma vizinhança B de x tal que x é o único ponto fixo de f em B . Enuncie e prove um resultado de “persistência” análogo ao caso da reta.

9.2 Bifurcações

Os pontos fixos não transversais não são persistentes, em presença de perturbações genéricas podem desaparecer ou mudar de natureza. Este fenómeno é chamado bifurcação. A ideia da teoria das bifurcações é tratar famílias de transformações f_λ definidas numa vizinhança de um ponto fixo, e descrever as possíveis mudanças da dinâmica ao variar o parâmetro λ .

Considere a família de transformações

$$f_\lambda(x) = x + x^2 - \lambda$$

definidas na reta real. A origem é um ponto fixo não transversal de f_0 . Se $\lambda \neq 0$ é pequeno, então f_λ tem dois pontos fixos $\pm\sqrt{\lambda}$, um repulsivo e outro atrativo, quando $\lambda > 0$, ou nenhum quando $\lambda < 0$. A família

$$f_\lambda(x) = x + x^3 + \lambda x$$

mostra um comportamento diferente.

O problema é decidir quais fenómenos são “genéricos”, e possivelmente “estáveis” num sentido a precisar. Admitindo a existência de um número suficiente de derivadas parciais contínuas, uma família arbitrária de transformações tais que a origem seja um ponto fixo não transversal de f_0 é da forma

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= a_\lambda + b_\lambda x + c_\lambda x^2 + \dots \\ &= (a'\lambda + a''\lambda^2 + \dots) + (1 + b'\lambda + b''\lambda^2 + \dots)x + (c + c'\lambda + c''\lambda^2 + \dots)x^2 + \dots \end{aligned}$$

O caso genérico é quando $c \neq 0$ (ou seja f_0 é da forma $x + cx^2 + \dots$) e uma perturbação genérica tem $a' \neq 0$ (ou seja o termo constante de f_λ é diferente de zero desde que $\lambda \neq 0$). Não é difícil convencer-se que o comportamento qualitativo desta família é o mesmo da família $x + x^2 - \lambda$: uma pequena perturbação de f_0 pode destruir o ponto fixo, numa direção, ou criar dois novos pontos fixos, na outra direção. Enuncie este resultado, e dê uma demonstração formal. Observe que procurar raízes da equação $f_\lambda(x) = x$, em função de λ , é equivalente a definir funções $\lambda \mapsto x(\lambda)$ que verifiquem $G(\lambda, x) = f_\lambda(x) - x = 0$, e a este problema responde o teorema da função implícita.

9.3 Duplicação do período e cascata de Feigenbaum

Também interessante é o caso de uma família f_λ de transformações do intervalo tal que f_0 tenha um ponto fixo em 0 com $f'_0(0) = -1$. Observe que este ponto fixo é transversal, logo persistente. Por outro lado, $(-1)^2 = 1$, e portanto a derivada de f_0^2 em 0 é igual a $(f_0^2)'(0) = 1$. Isto diz que 0 não é transversal em quanto ponto fixo de f_0^2 . Uma perturbação de f_0 pode produzir pontos periódicos de período 2, em proximidade do ponto fixo persistente 0. Para ver um exemplo, considere o caso da família

$$f_\lambda(x) = -x + x^2 + \lambda x$$

Este tipo de bifurcação é dito “duplicação do período”. Ao fazer simulações num computador, Mitchell J. Feigenbaum descobriu nos anos '70 que certas famílias de transformações produzem uma “cascata” de duplicações do período, no sentido em que existe uma sucessão $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \dots$ de valores do parâmetro λ tal que, ao passar λ_{n+1} nascem órbita de período 2^{n+1} em proximidade das órbitas de período 2^n criadas pelo valor anterior λ_n . Este fenómeno pode ser facilmente observado com a ajuda de um computador. Aliás, parece que aconteça para toda família em que podemos pensar, desde que acertamos o ponto certo onde centrar uma lupa e ve-lo. Ainda mais misterioso é o fato, também observado por Feigenbaum, de que o limite $\lambda_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ parece existir, é exponencial, i.e. $|\lambda_\infty - \lambda_n| \simeq \text{const} \times \delta^{-n}$ onde

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

e que $\delta \simeq 4.669201609102990671853 \dots$ independentemente da família f_λ ! O misterio só foi explicado mais tarde por Lanford, Epstein, Dennis Sullivan...

10 Statistical description of orbits

Together with the topological point of view, a source of informations about dynamical systems is their statistical description. The idea is to measure the relative size of those points whose orbits have certain definite properties. This is done looking for invariant probability measures, and the main result is the Birkhoff-Khinchin ergodic theorem. To state and prove the Birkhoff-Khinchin ergodic theorem, we need to recall many standard facts and results of integration theory. You can find most of them in the classical manuals by W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York 1966, or by P. Halmos, *Measure theory*, Springer-Verlag, New York 1974.

10.1 Probability measures

Probability spaces. A *measurable space* is a pair $(X, \mathcal{E})$, a non-empty set X together with a σ -algebra of subsets $\mathcal{E}$. Recall that a (Boolean) algebra is a nonempty family $\mathcal{A}$ of subsets of X which contains X , which contains the complement of any of its elements, and which is closed under finite unions and intersections. A σ -algebra is an algebra which is also closed under countable unions and intersections. Given any family $\mathcal{C}$ of subsets of X , there exists a minimal σ -algebra $\sigma(\mathcal{C})$ which contains all the elements of $\mathcal{C}$, which is called the σ -algebra generated by $\mathcal{C}$.

If (X, τ) is a topological space, the *Borel σ -algebra* is $\sigma(\tau)$, the smallest σ -algebra which contains all open sets.

A *measure* on the measurable space $(X, \mathcal{E})$ is a σ -additive function $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ such that $\mu(\emptyset) = 0$. Here σ -additivity means that, if (S_n) is a countable family of pairwise disjoint elements of $\mathcal{E}$, then

$$\mu(\cup_n S_n) = \sum_n \mu(S_n)$$

The triple $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ is said a *measure space*, or *probability space* if it happens that $\mu(X) = 1$. Given a probability space, measurable sets $A \in \mathcal{E}$ are commonly called "events", and the number $\mu(A)$ is called "probability of the event A ". Basic properties of probability measures are the following: probability measures are monotone, i.e. $\mu(S) \leq \mu(T)$ if $S \subset T$, and σ -subadditive, i.e. if (S_n) is a countable family of elements of $\mathcal{E}$ then

$$\mu(\cup_n S_n) \leq \sum_n \mu(S_n)$$

Probability measures are continuous from below and from above, in the following sense: if $S_n \uparrow S$ then $\mu(S_n) \uparrow \mu(S)$, and if $S_n \downarrow S$ then $\mu(S_n) \downarrow \mu(S)$. Both continuity properties are equivalent, and indeed a simple argument shows that they are equivalent to continuity from above at $\emptyset$: if $S_n \downarrow \emptyset$ then $\mu(S_n) \downarrow 0$. Moreover, continuity is equivalent to σ -aditivity if the set function μ is only assumed (finitely) additive.

A subset $E \subset X$ has *zero measure* if it is contained in a measurable set $S \in \mathcal{E}$ with $\mu(S) = 0$. If any set with zero measure belongs to $\mathcal{E}$, then the measure space $(X, \mathcal{E}, \mu)$ is said *complete*. Any measure space can be canonically completed, extending the measure to the σ -algebra $\bar{\mathcal{E}}$ made of $\mathcal{E}$ and of subsets of zero measure. A property (like continuity of a function, or convergence of a sequence of functions) holds *μ -a.e.* ("almost everywhere" with respect to the measure μ) if the set of points of X where it does not hold has zero measure.

Construction of probability measures. Measures are never "explicitly" given as functions on a σ -algebra. A set function $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ is an *exterior measure* if it is monotone, σ -subadditive, and if $\mu(\emptyset) = 0$. It happens that, given an exterior measure μ , the family of *μ -measurable sets*, defined as

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \text{ such that } \mu(S) = \mu(S \cap E) + \mu(S \cap E^c) \text{ for any } S \subset X\}$$

is a σ -algebra, and that μ is a complete measure if restricted on $\mathcal{E}$ (the proof is quite long and delicate, but the only idea it uses is the following: in order to check that $E \in \mathcal{E}$ it is indeed sufficient, by virtue of monotonicity and subadditivity of μ , to check that $\mu(S) \geq \mu(S \cap E) + \mu(S \cap E^c)$ for any $S \subset X$). A strategy to construct interesting measures on uncountable spaces is: start with an

exterior measure (it is very easy to produce exterior measures, for example by means of variational principles) and then check that the σ -algebra of measurable sets is sufficiently big for our purpose.

The idea of Carathéodory is the following. A *probability measure* on an algebra $\mathcal{A}$ of subsets of X is an additive function $m : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ such that $m(\emptyset) = 0$, $m(X) = 1$, and such that $A_n \downarrow \emptyset$ implies $m(A_n) \downarrow 0$. Given a probability measure m on a algebra $\mathcal{A}$, the recipe

$$\mu(S) = \inf \left\{ \sum m(A_n) \text{ with } S \subset \cup_n A_n \text{ e } A_n \in \mathcal{A} \right\}$$

defines an exterior measure on $\mathcal{P}(X)$, hence the above construction produces a measure μ on the σ -algebra of μ -measurable sets, which contains $\mathcal{A}$ and so contains $\sigma(\mathcal{A})$. One then checks that $\mu(A) = m(A)$ for any $A \in \mathcal{A}$, so that μ is an “extension” of the measure m . Carathéodory’s extension theorem is then stated in the following form:

Theorem 10.1 (Carathéodory’s extension theorem). *Given a probability measure m on a algebra $\mathcal{A}$ of subsets of X , there exists a unique measure μ on $\sigma(\mathcal{A})$ which extends m .*

The following corollary of Carathéodory’s theorem is also useful, for example when trying to prove that some event has a definite probability.

Theorem 10.2 (Approximation theorem). *Let $(X, \mathcal{E}, \mu)$ be a probability space, and let $\mathcal{A}$ be an algebra of subsets of X such that $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. Then, for any $A \in \mathcal{E}$ and any $\varepsilon > 0$, we can find a $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ such that*

$$\mu(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Indeed, one easily sees that the family $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{E} \text{ s.t. } \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon\}$ is a σ -algebra. Since $\mathcal{A}$ is obviously contained in $\mathcal{C}$, this implies that $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$.

Lebesgue measure. The collection $\mathcal{I}$ of intervals of the real line is a *semi-algebra*, i.e. the intersection of two elements of $\mathcal{I}$ is in $\mathcal{I}$ and the complement of an element of $\mathcal{I}$ is a union of elements of $\mathcal{I}$. The function $m : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$, defined as $m([a, b]) = |b - a|$ if a e b are finite, and ∞ if the interval is unbounded, is monotone and gives value zero to the empty set. Postulating additivity, the function m extends to a measure on the algebra $\mathcal{A}$ made of disjoint unions of elements of $\mathcal{I}$ (this is not trivial!, the proof uses the Heine-Borel theorem about compact subsets of the real line). The function $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$, defined as

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum m(C_n) \text{ with } E \subset \cup_n C_n \text{ e } C_n \in \mathcal{A} \right\}$$

is then an exterior measure on the real line. The σ -algebra $\mathcal{L}$ of μ -measurable sets, called *Lebesgue σ -algebra*, contains the Borel sets, because it contains the intervals. The restriction $\ell = \mu|_{\mathcal{L}}$, as well as $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, is called *Lebesgue measure*.

Observe that Lebesgue measure on the real line is not a probability measure, having infinite mass. Nevertheless, one can easily define probability measures on bounded intervals taking normalized restrictions of Lebesgue measure. For example, take $X = [0, 1]$, and $\mathcal{E} = \mathcal{B}(X) = \{X \cap B \text{ with } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, the Borel subsets of the interval. The restriction of ℓ to $\mathcal{E}$ is a probability measure, called Lebesgue measure on the unit interval.

The very same construction works in $\mathbb{R}^n$, starting with the semi-algebra of “rectangles” measured by the “euclidean volume”, and produces a measure ℓ on $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, also called Lebesgue measure. Lebesgue measure is the unique measure over the Borel sets of the euclidean space which is invariant under traslations, i.e. $\ell(\lambda + B) = \ell(B)$ for any $\lambda \in \mathbb{R}^n$ and any Borel set B , and which is normalized to give measure one to the unit square, i.e. $\ell([0, 1]^n) = 1$.

The axiom of choice allows one to “give examples” of subsets wich are not Lebesgue-measurable (for example, the set made of one point for each orbit of an irrational rotation of the circle).

The following result is useful (see [Mat95] for a proof). Below, $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|x - y\|_2 < \varepsilon\}$ denotes the open ball of radius $\varepsilon > 0$ and center $x \in \mathbb{R}^n$ w.r.t. the Euclidean distance $\|x - y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2$.

Theorem 10.3 (Lebesgue density theorem). *Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a Lebesgue-measurable set. For ℓ -almost any $x \in A$ the density*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ell(A \cap B_\varepsilon(x))}{\ell(B_\varepsilon(x))} = 1$$

Kolmogorov extension. Let X be a finite space, equipped with the discrete topology, and let Σ^+ be the topological product $X^\mathbb{N} = \{x : \mathbb{N} \rightarrow X\}$, its point identified with sequences $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ with $x_n \in X$. Let $\mathcal{C}$ be the collection of *cylinders* of X , the subsets of the form

$$C_B = \{x \in \Sigma^+ \text{ s.t. } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B\}$$

with B an open subset of X^n . Cylinders form a basis of the product topology of Σ^+ , which makes Σ^+ a compact metrizable space. In particular, the Borel σ -algebra of Σ^+ is $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$. Let $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n, \dots$ be probability measures defined on the Borel sets of $X, X^2, \dots, X^n, \dots$, respectively. The sequence (μ_n) is said *consistent* if

$$\mu_{n+1}(B \times X) = \mu_n(B)$$

for any n and any Borel subset $B \subset X^n$. The (most elementary version of) Kolmogorov extension theorem says that

Theorem 10.4 (Kolmogorov extension theorem). *Given a consistent family of probability measures as above, there exists a unique probability measure μ , defined on the Borel σ -algebra of Σ^+ , such that*

$$\mu(C_B) = \mu_n(B)$$

for any cylinder C_B .

Proof. The proof consists in the following two steps. First, observe that cylinders form an algebra, and use consistency of the μ_n 's to verify that the formula above does define a function $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ on cylinders (i.e. it does not depend on the different ways the same cylinder may be presented) which is additive and properly normalized. Then, use compactness of X to check that μ is continuous at $\emptyset$, in order to apply Carathéodory theorem. Indeed, let (A_n) be a sequence of cylinders such that $A_n \downarrow \emptyset$, and assume by contradiction that $\mu(A_n) > \delta > 0$ for any n . This implies that $A_n \neq \emptyset$ for any n , but, since the A_n are compact, then the Cantor intersection theorem says that $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$, contrary to the hypothesis. $\square$

Kolmogorov theorem is the key tool in probability theory, since it allows one to construct measures which describe an infinite sequence of trials starting with some rule which gives information about the n -th trial given the knowledge of the first $n-1$. It actually works with much more general spaces and in a more general setting. Also, one can easily adapt the construction to $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, the topological product of a countable family of finite spaces. In some precise sense, this is a universal model of a dynamical system.

e.g. Bernoulli trials. If $X = \{0, 1\}$, then $\Sigma^+ = X^\mathbb{N}$ is the state space of infinite Bernoulli trials with two possible outcomes: success and failure. Let $\mu_1 : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ be a any probability measure, defined by $\mu_1(\{1\}) = p$. Kolmogorov construction can be applied postulating the independence of different trials, i.e. declaring that the family formed by the cylinders $\{x_n = 1\}$ is an independent family, and giving measure p to each $\{x_n = 1\}$. The resulting probability space $(\Sigma^+, \mathcal{B}, \mu)$ describes the infinite independent Bernoulli trials. Of course, the very same construction can be made when X is a finite space with any finite number z of elements.

10.2 Transformations and invariant measures

Measurable transformations. A transformation $f : X \rightarrow X$ of the measurable space $(X, \mathcal{E})$ is said *measurable* if $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ for any $A \in \mathcal{E}$. A measurable transformation f is said an *endomorphism* of the measurable space, or an *automorphism* if it is invertible and its inverse is measurable too.

Observe that an endomorphism f of a measurable space $(X, \mathcal{E})$ acts naturally on the space of measures on $\mathcal{E}$ by "push forward": if μ is a measure, then $f_*\mu$, defined by $(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$ for any $A \in \mathcal{E}$, is also a measure.

Let f be an endomorphism of the measurable space $(X, \mathcal{E})$. A probability measure μ on $\mathcal{E}$ is *invariant* (w.r.t. the transformation f) if $f_*\mu = \mu$, namely if

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

for any $A \in \mathcal{E}$. If this happens, we also say that f is an *endomorphism* (resp. an *automorphism*) of the probability space $(X, \mathcal{E}, \mu)$. The meaning of this definition is that "mean values" of integrable observables $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ with respect to invariant probability measures do not change with time, in the sense that $\int_X \varphi d\mu = \int_X (\varphi \circ f) d\mu$.

Given an endomorphism f of the probability space $(X, \mathcal{E}, \mu)$, one says that an event $A \in \mathcal{E}$ is *invariant mod 0* if $\mu(A \Delta f^{-1}(A)) = 0$. The set of invariant mod 0 events form a sub- σ -algebra of $\mathcal{E}$, denoted by $\mathcal{E}_f$.

How to prove that a measure is invariant. The very definition of invariance does not help too much if we want to prove that a certain measure μ on the σ -algebra $\mathcal{E}$ is invariant w.r.t. the measurable transformation $f : X \rightarrow X$. The trick is the following. Suppose that we can prove that $\mu(f^{-1}(C)) = \mu(C)$ for any $C \in \mathcal{C}$, where $\mathcal{C}$ is some subset of $\mathcal{E}$. Caratheodory theorem implies that $f_*\mu$ and μ are the same measure on the σ -algebra $\sigma(\mathcal{C})$ generated by $\mathcal{C}$. On the other side, the family of those $A \in \mathcal{E}$ such that $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ is easily seen to be a σ -algebra. Hence, if it happens that $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$, then μ is actually invariant. In other words, in order to prove that μ is invariant it is sufficient to check that $\mu(f^{-1}(C)) = \mu(C)$ for any C belonging to a family of subsets of X which generate the σ -algebra $\mathcal{E}$.

Observables as random variables. When dealing with a endomorphism $f : X \rightarrow X$ of the probability space $(X, \mathcal{E}, \mu)$, one should consider *measurable* observables $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$), those functions such that $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ for any Borel set $A \subset \mathbb{R}$. In the context of probability theory they are called "random variables", and the sequence of observables $\varphi \circ f^n$ may be interpreted as a "random process". If φ is integrable, the Lebesgue integral $\int_X \varphi d\mu$ is interpreted as the "mean value" of φ . Of course, invariance of a measurable observable must be intended modulo sets of zero measure. Then, one can consider the Banach spaces $L^p(\mu)$ of (equivalence classes of) observables equipped with the L^p -norm

$$\|\varphi\|_p = \left(\int |\varphi|^p d\mu \right)^{1/p}$$

and use the full power of integration theory to get informations about the dynamical system. In particular, $L^2(\mu)$ is a Hilbert space if equipped with the inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_X \varphi \bar{\psi} d\mu$$

Conditional mean. Recall that, given a measurable space $(X, \mathcal{E})$, a measure ν is said *absolutely continuous* w.r.t. the measure μ if $\nu(A) = 0$ whenever $\mu(A) = 0$. The following technical result (which may be proved using Hilbert space techniques) is particularly useful:

Theorem 10.5 (Radon-Nikodym). *Let $(X, \mathcal{E}, \mu)$ be a probability space, and let ν be a finite measure over $\mathcal{E}$ which is absolutely continuous with respect to μ . Then there exists a nonnegative integrable random variable ρ (called the Radon Nikodym derivative of ν w.r.t. μ and denoted by $d\nu/d\mu$) such that*

$$\nu(A) = \int_A \rho d\mu$$

for any $A \in \mathcal{E}$.

A particularly important tool, taken from the theory of probability, is the conditional mean. Let $(X, \mathcal{E}, \mu)$ be a probability space, and let $\mathcal{F}$ be a sub- σ -algebra of $\mathcal{E}$. Given an integrable random

variable φ , there exists a unique random variable $\varphi_{\mathcal{F}}$, called the *conditional mean* of φ w.r.t. $\mathcal{F}$, which is $\mathcal{F}$ -measurable (i.e. the inverse image of any Borel set belongs to $\mathcal{F}$) and such that

$$\int_A \varphi_{\mathcal{F}} d\mu = \int_A \varphi d\mu$$

for any $A \in \mathcal{F}$. Indeed, if $\varphi \geq 0$, then one can define $\varphi_{\mathcal{F}}$ as equal to the Radon-Nikodym derivative of the measure $A \mapsto \int_A \varphi d\mu$, defined on $\mathcal{F}$, with respect to the restriction $\mu|_{\mathcal{F}}$. The general case is treated by linearity, writing φ as a difference of two non-negative random variables. Uniqueness is intended μ -a.e., i.e. modulo sets of zero probability. The conditional mean is monotone, namely if $\varphi \geq 0$ then $\varphi_{\mathcal{F}} \geq 0$, and preserves the mean value, since $\int_X \varphi_{\mathcal{F}} d\mu = \int_X \varphi d\mu$. It can be considered as a "projection" of φ onto the space of $\mathcal{F}$ -measurable random variable, preserving the mean value. In particular, if $\mathcal{N}$ is the trivial σ -algebra made of events of measure 0 or 1, then $\varphi_{\mathcal{N}}$ is constant a.e. and equal to $\int_X \varphi d\mu$.

Topological dynamical systems and Borel measures. If we are interested in the dynamics of a continuous transformation $f : X \rightarrow X$ of a topological space X , it is natural to consider the Borel σ -algebra $\mathcal{B}$, the smallest σ -algebra of subsets of X which contain all open sets. The map f is then an endomorphism of $(X, \mathcal{B})$. Probability measures on $\mathcal{B}$ are said *Borel probability measures*. If, moreover, X is a compact metric space, one can consider the space $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ of bounded continuous real valued functions of X (observe that, since X is compact, any continuous function is automatically bounded), equipped with the sup norm

$$\|\varphi - \psi\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |\varphi(x) - \psi(x)|$$

These observables are clearly integrable w.r.t. to any Borel probability measure μ , and the mean value map

$$\varphi \mapsto \int_X \varphi d\mu$$

is a bounded, positive definite (in the sense that $\int_X \varphi d\mu \geq 0$ for any $\varphi \geq 0$) linear functional on $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$. The basic fact about Borel measures is the converse of that, namely

Theorem 10.6 (Riesz-Markov representation theorem). *Let X be a compact metric space. Given any bounded and positive definite linear functional L on $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ such that $L(1) = 1$, there exists a unique Borel probability measures μ such that*

$$L(\varphi) = \int_X \varphi d\mu$$

for any $\varphi \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$

The space of invariant probability measures. The space Prob of probability measures on a measurable space $(X, \mathcal{E})$ has a natural convex structure: convex combinations of probability measures are also probability measures. An arbitrary measurable transformation $f : X \rightarrow X$ of a measurable space may not admit any invariant probability measure. On the other side, if μ_0 and μ_1 are invariant probability measures, so are their convex combinations $\mu_t = (1-t)\mu_0 + t\mu_1$ for any $t \in [0, 1]$. This means that the set Prob_f of invariant probability measures on $\mathcal{E}$ is a convex set: if it contains two points, it contains the whole segment between them.

Now, let (X, d) be a compact metric space and let $\mathcal{B}$ its Borel σ -algebra. The space Prob of probability measures on $\mathcal{B}$ can be equipped with a natural topology, called the *weak* topology*, which says essentially that two measures are near if they give nearby mean values to some well behaved observables. Formally, one says that a sequence of measures (μ_n) converge weakly* to a measure μ , which we denote simply as $\mu_n \rightarrow \mu$, if

$$\int_X \varphi d\mu_n \rightarrow \int_X \varphi d\mu$$

for any (bounded) continuous function $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. The space $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ of bounded continuous real valued functions on X , equipped with the sup norm, is a separable Banach space. In particular, it admits a countable set of points $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ which is dense in its unit sphere. Given that, one defines, for any couple of Borel probability measures μ and ν , a distance

$$d(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \left| \int_X \varphi_n d\mu - \int_X \varphi_n d\nu \right|$$

It turns out that d is indeed a metric, and that it induces the weak* topology on Prob. The important fact (somewhere called "Helly's theorem"), which follows from the Ascoli-Arzelà theorem together with the above Riesz-Markov representation theorem, is that Prob, equipped with the weak* topology, is a compact space: any sequence (μ_n) of Borel probability measures admits a weakly* convergent subsequence $\mu_{n_i} \rightarrow \mu$.

Now, we are in position to prove the existence of invariant probability measures for certain well behaved dynamical systems.

Theorem 10.7 (Krylov-Bogolyubov). *A continuous transformation $f : X \rightarrow X$ of a metrizable compact space X admits at least one Borel invariant probability measure.*

Proof. Take any Borel probability measure μ_0 on X , and inductively define a family of probability measures μ_n by $\mu_{n+1} = f_* \mu_n$. Consider the family of Cesaro means

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \mu_k$$

Since the space of Borel probability measures on a compact metrizable space is compact w.r.t. weak* convergence, there exist a weakly* convergent subsequence $\bar{\mu}_{n_i} \rightarrow \mu$. One then easily sees that

$$\begin{aligned} \int_X (\varphi \circ f) d\mu &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i + 1} \sum_{k=0}^{n_i} \int_X (\varphi \circ f) d\mu_k \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i + 1} \sum_{k=0}^{n_i} \int_X \varphi d\mu_{k+1} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i + 1} \sum_{k=0}^{n_i} \int_X \varphi d\mu_k + \frac{1}{n_i + 1} \left(\int_X \varphi d\mu_{n_i+1} - \int_X \varphi d\mu_0 \right) \\ &= \int_X \varphi d\mu \end{aligned}$$

for any bounded continuous observable φ , hence that μ is an invariant measure. $\square$

10.3 Invariant measures and time averages

The relevance of invariant measures when studying the dynamics of continuous transformations is due to the following crucial observations.

Invariant measures and time averages. Assume that, for a given point $x \in X$, the time averages

$$\bar{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(f^k(x))$$

do exist for any bounded continuous observable φ . One easily shows that the functional $\mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $\varphi \mapsto \bar{\varphi}(x)$ is linear, bounded and positive definite. There follows from the Riesz-Markov representation theorem that there exists a unique Borel probability measure μ_x on X such that

$$\bar{\varphi}(x) = \int_X \varphi d\mu_x$$

for any $\varphi \in \mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{R})$. The invariance property $\bar{\varphi}(x) = (\bar{\varphi} \circ f)(x)$ then implies that $\int_X (\varphi \circ f) d\mu_x = \int_X \varphi d\mu_x$ for any φ , hence that μ_x is an invariant probability measure. In the language of physicists, this says that "time averages" along the orbit of x are equal to "space averages" with respect to the measure μ_x .

One is thus lead to consider the following questions. Do there exist points x for which time averages exists? Given an invariant measure μ , do there exist, and how many, points x such that $\mu = \mu_x$?

e.g. Periodic orbits. Let p be a periodic point with period n . The time average $\bar{\varphi}(p)$ of any observable φ exists, and is equal to the arithmetic mean of φ along the orbit, namely

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(p))$$

If μ_p denotes the normalized sum $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(p)}$ of Dirac masses placed on the orbit of p , this amount to say that $\bar{\varphi}(p) = \int_X \varphi d\mu_p$.

Let p be a fixed point, and $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ be an observable which is continuous at p . If $x \in W^s(p)$, then the time average $\bar{\varphi}(x)$ exists and is equal to $\varphi(p)$, i.e. time averages of points in the basin of attraction of p are described by the Dirac measure $\mu_p = \delta_p$.

The Birkhoff-Khinchin ergodic theorem. Ergodic theorems are the milestones of ergodic theory, and deal with various type of convergence of the time means $\bar{\varphi}_n$ for certain classes of observables φ . In particular, the Birkhoff-Khinchin ergodic theorem must be thought as the generalization of the Kolmogorov strong law of large numbers, as it says that time means of certain well-behaved observables exist almost everywhere. The Birkhoff-Khinchin ergodic theorem was actually preceded by the von Neumann's "statistic" ergodic theorem, which says that

Theorem 10.8 (von Neumann "statistic" ergodic theorem). *Let U be a unitary operator on a Hilbert space H , let $H_U = \{v \in H \text{ s.t. } Uv = v\}$ denote the closed subspace of those vectors which are fixed by U , and $P_U : H \rightarrow H_U$ denote the orthogonal projection onto H_U . Then, for any vector $v \in H$ we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U^k v - P_U v \right\|_H = 0$$

If $f : X \rightarrow X$ is an endomorphism of the probability space $(X, \mathcal{E}, \mu)$, one can consider the "shift" operator $U : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ given by $(U\varphi)(x) = \varphi(f(x))$. It is clearly unitary, its fixed point set is the space of invariant L^2 -observable. The von Neumann theorem then asserts convergence of time means $\bar{\varphi}_n \rightarrow \bar{\varphi}$ in $L^2(\mu)$. Here, we prove the

Theorem 10.9 (Birkhoff-Khinchin "individual" ergodic theorem). *Let $f : X \rightarrow X$ be an endomorphism of the probability space $(X, \mathcal{E}, \mu)$, and let $\varphi \in L^1(\mu)$ be an integrable observable. Then the limit*

$$\bar{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(f^k(x))$$

exists for μ -almost any $x \in X$. Moreover, the observable $\bar{\varphi}$ is in $L^1(\mu)$, is invariant, and satisfies

$$\int \bar{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$$

Proof. (by A. Garsia, as explained in [KH95]) Let $\mathcal{E}_f$ be the invariant σ -algebra. For any $\psi \in L^1$, set $\psi_n = \max_{k \leq n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k$ and observe that $E_\psi = \{x \in X \text{ s.t. } \psi_n(x) \rightarrow \infty\} \in \mathcal{E}_f$. One easily sees that the sequence $\psi_{n+1} - \psi_n \circ f$ is decreasing, and converges to ψ at the points of E_ψ . The monotone convergence theorem and the invariance of μ imply that

$$0 \leq \int_{E_\psi} (\psi_{n+1} - \psi_n) d\mu = \int_{E_\psi} (\psi_{n+1} - \psi_n \circ f) d\mu \rightarrow \int_{E_\psi} \psi d\mu = \int_{E_\psi} \psi_{\mathcal{E}_f} d\mu|_{\mathcal{E}_f}$$

In particular, if $\psi_{\mathcal{E}_f} < -\varepsilon < 0$ then $\mu(E_\psi) = 0$. On the other side,

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ f^k(x) \leq \limsup \frac{1}{n} \psi_n \leq 0$$

on $X \setminus E_\psi$. Applying twice these observations to the observables $\varphi - \varphi_{\mathcal{E}_f} - \varepsilon$ and $-\varphi + \varphi_{\mathcal{E}_f} - \varepsilon$, with $\varepsilon > 0$, we find

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k(x) - \varphi_{\mathcal{E}_f} - \varepsilon \leq 0 \quad \liminf \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k(x) - \varphi_{\mathcal{E}_f} + \varepsilon \geq 0$$

μ -almost everywhere. Since ε was arbitrary, the limit $\bar{\varphi}(x)$ exists and is equal to $\varphi_{\mathcal{E}_f}(x)$ for μ -almost every x . The rest of the theorem then follows easily from the properties of the conditional mean. $\square$

10.4 Examples of invariant measures

Haar measures. Any locally compact topological group G admits a *Haar measure*, a measure μ on its Borel sets which is left-invariant, i.e. satisfies $L_g \mu = \mu$ for any $g \in G$. Moreover, the Haar measure is unique up to a constant factor. It is an exercise that μ is a finite measure, hence can be renormalized to give a probability measure, iff G is compact. There follows that translations on compact topological groups admits invariant probability measures.

On the other side, for some groups G , called *unimodular*, the Haar measure μ is both left and right invariant. If $\Gamma \subset G$ is a lattice, i.e. a subgroup such that $\mu(G/\Gamma) < \infty$, then the normalized Haar measure on the homogeneous space G/Γ is an invariant probability measure for any left translation $g\Gamma \mapsto sg\Gamma$.

Rotations of the circle. Lebesgue probability measure ℓ on the circle is invariant for the rotations $+\alpha : x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$, with $\alpha \in \mathbb{R}$. Indeed, rotations of the circle are isometries, and the Lebesgue measure $\ell(I)$ of an interval is its "length".

Coverings of the circle. Lebesgue probability measure ℓ on the circle is invariant for the maps $\times \lambda : x + \mathbb{Z} \mapsto \lambda \cdot x + \mathbb{Z}$, with $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. This comes from the fact that the inverse image of a sufficiently small interval I with length $\ell(I)$ is the disjoint union of $|\lambda|$ intervals with length $\ell(I)/|\lambda|$.

Bernoulli shifts. Consider the Bernoulli shift $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ over the alphabet $X = \{1, 2, \dots, z\}$. Let p be a "probability on X ", i.e. a finite set of nonnegative numbers $p_1, p_2, \dots, p_z$ such that $p_1 + p_2 + \dots + p_z = 1$. Given a centered cylinder C_α , we define $\mu(C_\alpha)$ as equal to the product $p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_n}$. This function μ extends in a unique way as a finitely additive function on the algebra $\mathcal{A}$ generated by the centered cylinders, the algebra which contains all finite unions of centered cylinders as well as the empty set and Σ^+ . One then show that μ is σ -additive on $\mathcal{A}$ (for example, showing that if a decreasing sequence $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ has empty intersection then $\mu(A_n) \rightarrow 0$). Since centered cylinders generates the topology of Σ^+ , Carathéodory theorem implies that there exists a unique extension, which we still call μ , of this measure on the Borel σ -algebra of Σ^+ . This measure is called the *Bernoulli measure* defined by p .

As for the "physical" meaning of this measure, you may imagine that X represents the possible outcomes when tossing a coin with z sides, and p_k is the probability of obtaining the k -th side. Then points in Σ^+ represent the outcomes of an infinite sequence of tossings, and the very definition of μ says that each trial is described by the probability p , and each trial is "independent" from any finite collection of different trials.

It is not surprising that μ is indeed an invariant probability measure. This comes from the fact that the inverse image $\sigma^{-1}(A)$ of any $A \in \mathcal{A}$ is the disjoint union of z elements $B_1, B_2, \dots, B_z$ of the algebra (obtained from A choosing the first letter in z different ways) with measures $\mu(B_k) = p_k \cdot \mu(A)$, so that

$$\mu(\sigma^{-1}(A)) = \sum_{k=1}^z p_k \cdot \mu(A) = \mu(A)$$

Absolutely continuous invariant measures for maps and flows. Let U be a domain in some euclidean $\mathbb{R}^n$, and let vol denote the Lebesgue measure on U , given locally as $d\text{vol} = dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$. A local diffeomorphism $f : U \rightarrow U$ of class $\mathcal{C}^1$ preserves the measure vol iff

$$\sum_{x \in f^{-1}\{x'\}} \frac{1}{|\det f'(x)|} = 1$$

for any point $x' \in U$, as one can check using the change of coordinates formula. Also interesting is to see wheather f preserves an absolutely continuous measure $\mu = \rho \text{vol}$, and this happens iff the "density" ρ satisfies the equation

$$\sum_{x \in f^{-1}\{x'\}} \frac{\rho(x)}{|\det f'(x)|} = \rho(x')$$

for any point $x' \in U$.

Now, let ϕ be the flow of a vector field $\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ on U . The above obviously applies, considering the Jacobian of the diffeomorphisms ϕ_t . Since

$$\det \phi'_t = \int_0^t \text{div} \xi \circ \phi_s ds$$

we get the result that Lebesgue measure vol is invariant under the flow of ξ iff

$$\text{div} \xi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} = 0$$

In general, the absolutely continuous measure $\mu = \rho \text{vol}$ is invariant under the flow of ξ iff its density satisfies $\text{div}(\rho \xi) = 0$.

Hamiltonian flows. Consider a symplectic manifold (X, ω) . Liouville measure $d\text{vol} = \omega^n$ is invariant under the Hamiltonian flow of any Hamiltonian function H . If X has finite volume, it can be normalized to give an invariant probability measure.

Geodesic flows. Consider a geodesic flow on the unit tangent bundle $\pi : SM \rightarrow M$ of the Riemannian manifold (M, g) . Let $d\text{vol} = \sqrt{g} dx$ denote the Riemannian volume form on M , and let $d\sigma_m$ denotes the Lebesgue probability measure on the sphere $S_m M = \pi^{-1}\{m\}$. The Liouville measure μ , defined locally as $d\text{vol}(m) \times d\sigma_m$, is invariant under the geodesic flow.

Gauss map. Any irrational real number $x \in]0, 1]$ has a unique continued fraction representation of the form

$$x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

where the a_n are nonnegative integers. The equality sign and the “infinite fraction” above mean that the sequence of finite continued fractions

$$p_n/q_n = [0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

which are called “convergents”, do converge to x as $n \rightarrow \infty$. The sequence of partial quotients a_n is inductively constructed as follows. First, observe that if $a_1 = [1/x]$ and $x_1 = 1/x - a_1$ we may write

$$x = \frac{1}{a_1 + x_1}$$

with $x_1 \in [0, 1]$. Then, since $x_1 \neq 0$, for otherwise x would be rational, we may define $a_2 = [1/x_1]$ and $x_2 = 1/x_1 - a_2$ to get

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + x_2}}$$

Inductively, we see that

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + x_n}}}}$$

where $x_n = 1/x_{n-1} - a_n$ and $a_n = [1/x_{n-1}]$. This amounts to say that the sequence (x_n) is the trajectory of x under the *Gauss map* $G :]0, 1] \rightarrow]0, 1]$, defined as

$$x \mapsto 1/x - [1/x]$$

Observe that G is not defined at the origin, hence to iterate G we need to avoid all the preimages of 0, which are the rationals. This is not a problem if we want to study the statistical properties of G with respect to Lebesgue measure, since rationals form a subset of zero measure. The Gauss map admits an absolutely continuous invariant measure $\mu = \rho dx$, defined as

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \cdot \int_A \frac{1}{1+x} dx$$

for any Borel subset $A \subset]0, 1]$. The denominator $\log 2$ is there to normalize the measure, so we just have to check the invariance criterium for the density $\rho(x) = 1/(1+x)$. Since any $x' \in]0, 1]$ has one preimage $x_k = 1/(x' + k)$ in each interval $]1/(k+1), 1/k]$, we compute

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G^{-1}\{x'\}} \frac{\rho(x)}{|G'(x)|} &= \sum_{k \geq 1} \frac{x_k^2}{1+x_k} \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{x' + k} - \frac{1}{x' + k + 1} \right) \\ &= \frac{1}{1+x'} = \rho(x') \end{aligned}$$

and we are done.

11 Recurrences

11.1 Limit sets and recurrent points

Omega and alpha limit sets. Let $f : X \rightarrow X$ be a continuous transformation of a topological space X . The simplest thing that an infinite (i.e. not periodic) orbit can do is to be (the image of a) convergent (trajectory). In this case, as we already know, the limit must be a fixed point of the transformation.

Trajectories, even when not convergent, may have at least convergent subsequences. The ω -limit set of a point $x \in X$ is the set

$$\omega_f(x) := \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\}}$$

that is, the set of those points $x' \in X$ such that there exists a sequence of times $n_i \rightarrow \infty$ (i.e. an increasing map $i \mapsto n_i$) such that $f^{n_i}(x) \rightarrow x'$ when $i \rightarrow \infty$. Observe that, if the orbit of x is not finite (i.e. if x is not periodic), then the ω -limit set of x is the derived set of its forward orbit, i.e. $\omega_f(x) = \mathcal{O}_f^+(x)'$. It is clear that $\omega_f(x)$ is a closed (possibly empty) and $+$ -invariant subset of X .

$\text{Lim}_f = \bigcup_{x \in X} \omega_f(x)$ denotes the set of ω -limit points of all the $x \in X$. If x is periodic, then $\omega_f(x)$ coincides with its orbit. There follows that

$$\text{Per}_f \subset \text{Lim}_f.$$

If f is invertible, we may also define the α -limit set of $x \in X$ as $\alpha_f(x) := \omega_{f^{-1}}(x)$, i.e. the set of points $x' \in X$ such that there exists a sequence of times $n_i \rightarrow \infty$ such that $f^{-n_i}(x) \rightarrow x'$ when $i \rightarrow \infty$. In this case, both $\omega_f(x)$ and $\alpha_f(x)$ are closed and invariant subsets of X . $\text{Lim}_{f^{-1}} = \bigcup_{x \in X} \alpha_f(x)$ denotes the set of all α -limit points of an invertible transformation f .

Limit sets in compact spaces. Both the ω and the α -limit sets of a generic point can be empty. For example, all the limit points for the translation $f(x) = x + 1$ of the real line are empty.

This may happen, of course, only if the phase space X is not compact. Indeed, if X is compact, then the trajectory of any point admits convergent subsequences (by sequential compactness, which holds for compact metric spaces), and therefore $\omega_f(x) \neq \emptyset$ for all $x \in X$. For the same reason, if f is a homeomorphism of a compact metric space, $\alpha_f(x) \neq \emptyset$ for all points $x \in X$. In particular, the sets $\text{Lim}_{f^{\pm 1}}$ are not empty.

ex: Show that $\omega_f(x)$ is closed and $+$ -invariant. Show that if f is a homeomorphism, then $\omega_f(x)$ and $\alpha_f(x)$ are closed and invariant.

ex: Give examples such that $\omega_f(x)$ and $\alpha_f(x)$ are empty.

ex: Show that $\text{Per}_f \subset \text{Lim}_f$.

Recurrent points. Let $f : X \rightarrow X$ be a topological dynamical system. The point $x \in X$ is *recurrent* if $x \in \omega_f(x)$. This means that given any neighborhood B of x there exists a time $n \geq 1$ such that $f^n(x) \in B$, and clearly implies that the trajectory of x passes infinitely often in any neighborhood of x .

Rec_f denotes the set of recurrent points for f . A periodic point is obviously recurrent, therefore

$$\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f.$$

If f is a homeomorphism, it also makes sense to consider the set $\text{Rec}_{f^{-1}}$, the set of those points $x \in X$ such that $x \in \alpha_f(x)$.

ex: Define a partial order in X as follows: $x \prec x'$ if for any neighborhood U of x and V of x' there exists a time $n \geq 1$ such that $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Show that x is recurrent iff $x \prec x$.

ex: Show that $\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f$.

ex: Give examples which show that both Rec_f and $\text{Rec}_{f^{-1}}$ may be empty.

Non-wandering set. O ponto x é *errante*²⁷ se admite uma vizinhança disjunta de todas as suas iteradas, i.e. se existe um aberto U que contém x tal que $U \cap f^n(U) = \emptyset$ para todo tempo $n \geq 1$. O ponto x não é errante se para toda vizinhança U de x existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

O conjunto não-errante NW_f (do inglês “non-wandering set”) é o conjunto dos pontos x que não são errantes. A ideia informal é que conjunto não-errante é onde acontece a dinâmica interessante, enquanto o conjunto errante é o conjunto dos pontos que a dinâmica esquece.

O conjunto não-errante NW_f é fechado (o conjunto dos pontos errantes é aberto quase por definição, pois, se x é errante, todo ponto numa sua vizinhança é errante) e $+$ -invariante. Contém os ω -limites de todos os pontos de X , assim como os pontos recorrentes. As inclusões são

$$\text{Per}_f \subset \text{Lim}_f \subset NW_f \quad \text{e} \quad \text{Per}_f \subset \text{Rec}_f \subset NW_f$$

Se f é um homeomorfismo, NW_f , que é igual a $NW_{f^{-1}}$, é também invariante, e contém os ω - e α -limites de todos os pontos de X .

(X compacto $\Rightarrow NW_f \neq \emptyset$) Se X é compacto, então $NW_f \neq \emptyset$, porque todo ponto $x \in X$ tem $\omega_f(x) \neq \emptyset$ e porque $\text{Lim}_f \subset NW_f$.

Exercícios.

- Prove que o conjunto não-errante de um homeomorfismo é fechado, invariante e contém os ω - e α -limites de todos os pontos.
- Mostre que, se f é um homeomorfismo, então $NW_f = NW_{f^{-1}}$.
- Dê exemplos que mostram que NW_f pode ser vazio.
- Mostre que $\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f \subset NW_f \subset \text{Rec}_f^{\varepsilon}$. Dê exemplos que mostram que as inclusões podem ser estritas.
- Mostre que $\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f \subset NW_f$ e portanto $\overline{\text{Per}_f} \subset \overline{\text{Rec}_f} \subset NW_f$. Mais difícil é arranjar exemplos que mostram que as inclusões podem ser estritas.
- Determine os conjuntos não errantes das transformações lineares do plano.

11.2 Dirichlet theorem on Diophantine approximation

Rotations of the circle and Dirichlet theorem on Diophantine approximation. Consider a rotation $R_\alpha : x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$ of the circle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. If α is rational, all points are trivially recurrent, being periodic. When α is irrational, recurrence of a point $x + \mathbb{Z}$ means that for any $\varepsilon > 0$ there exist an infinity of times $q \in \mathbb{N}$ such that that

$$d(x + \mathbb{Z}, x + q\alpha + \mathbb{Z}) < \varepsilon$$

or, equivalently, that for any $\varepsilon > 0$ there exist an infinity of rationals p/q such that

$$|q\alpha - p| < \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}$$

Indeed, much more is true, and is a consequence of the following classical result by Dirichlet on Diophantine approximation.

Theorem 11.1 (Dirichlet, 1842). *For any number θ and any positive integer $Q \in \mathbb{N}$ there exist $p \in \mathbb{Z}$ and $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ such that*

$$|q\theta - p| < 1/Q \quad \text{and} \quad |q| \leq Q. \quad (11.1)$$

and, a fortiori,

$$|q\theta - p| < 1/q^2. \quad (11.2)$$

²⁷A palavra grega por “errante”, ou seja, “vagabundo”, “que vagueia ao acaso”, era $\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta\varsigma$, ou seja, *planeta*.

Proof. Divide the unit interval $[0, 1)$ into the Q subintervals

$$[0, 1/Q), [1/Q, 2/Q), \dots, [(Q-1)/Q, 1)$$

of equal length $1/Q$, and consider the $Q+1$ points²⁸

$$\{0\}, \{\theta\}, \{2\theta\}, \dots, \{Q\theta\}$$

inside $[0, 1)$. By the box principle (which Dirichlet stated to prove this theorem!), at least two of those points, say $\{k\theta\}$ and $\{k'\theta\}$ with $k > k'$, belong to the same subinterval. Therefore, there exist integers a, a' such that $|k\theta - a - (k'\theta - a')| < 1/Q$. The theorem follows taking $q = k - k'$ and $p = a - a'$, and observing that $q \leq Q$. $\square$

For rational θ , there are only finitely many integers q and p satisfying the above inequalities (11.1). Indeed, if $\theta = a/b$ and $p/q \neq a/b$ (we may assume that both are reduced fractions), then

$$|q\theta - p| = \frac{|qa - pb|}{|b|} \geq \frac{1}{|b|}$$

(because the numerator is the absolute value of a non-zero integer) and therefore no fraction different from a/b may satisfy the inequalities (11.1) if Q is larger than $|b|$.

On the other hand, if θ is irrational and $p_1/q_1, p_2/q_2, \dots, p_n/q_n$ are any finite number of fractions satisfying (11.2), we may consider an integer Q larger than the inverse of

$$\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq n} |q_k \theta - p_k| > 0$$

and produce, by theorem 11.1, one more fraction p/q satisfying (11.2). Thus,

Theorem 11.2 (Dirichlet, 1842). *For any irrational number θ there exist infinitely many reduced fractions p/q such that*

$$|\theta - p/q| < 1/q^2.$$

In particular, any point $x + \mathbb{Z}$ is recurrent for an irrational rotation of the circle.

11.3 Poincaré recurrence theorem

If f satisfies a condition (natural in physics) like “preserving a probability measure”, then there are a lot of recurrent points, actually almost any point is recurrent. If, moreover, the probability measure is diffuse, i.e. any non-empty open set has positive measure, then the set of recurrent points is also dense. These results, discovered by Henri Poincaré around 1890, motivated the modern theory of dynamical systems. They show how weak informations on the transformation f may yield significant qualitative information about “almost all” orbits of the system. Here follow the precise statements, together with all the necessary technical details. If you don’t know the meaning of some words, like “measurable” or “Borel set”, don’t worry, just try to understand what’s going on. Poincaré himself didn’t know, yet!

A wonderful lecture on Poincaré recurrence theorem by Etienne Ghys may be watched in YouTube: <https://www.youtube.com/watch?v=21fHNMccrY8#t=1741>

Theorem 11.3 (Poincaré recurrence theorem). *Let $f : X \rightarrow X$ be an endomorphism of a probability space $(X, \mathcal{E}, \mu)$, and let $A \in \mathcal{E}$. Then the set*

$$A^{rec} = \{x \in A \text{ t.q. } f^n(x) \in_{i.o.} A\}$$

of those points of A whose orbit passes through A infinitely often has total probability, namely $\mu(A^{rec}) = \mu(A)$

²⁸As usual, $\{x\}$ denotes the “fractional part” of x , so that any real number may be written as a sum $x = [x] + \{x\}$ for some unique $[x] \in \mathbb{Z}$ and $\{x\} \in [0, 1)$.

Proof. For $k \geq 1$, let

$$B_k = \{x \in A \text{ s.t. } f^n(x) \notin A \forall n \geq k\}$$

be the set of those points of A which never return in A after $n \geq k$ iterates. Observe that $B_k = A \cap (\cap_{n \geq k} f^{-n}(X \setminus A))$ and that $A^{\text{rec}} = A \setminus (\cup_{k \geq 1} B_k)$. In particular, this shows that A^{rec} is measurable. It is clear that $f^{-nk}(B_k) \cap B_k = \emptyset$ for any $n \geq 1$, since a point in the intersection would be a point $x \in B_k \subset A$ such that $f^{kn}(x) \in A$, and $kn \geq k$, contradicting the definition of B_k . For the same reason, $f^{-nk}(B_k) \cap f^{-mk}(B_k) = \emptyset$ for any $n > m \geq 0$. Therefore, the sets $f^{-nk}(B_k)$, for $n \in \mathbb{N}$, are pairwise disjoint. They also have all the same measure $\mu(f^{-nk}(B_k)) = \mu(B_k)$, because μ is invariant. This implies that $\mu(B_k) = 0$, because

$$\sum_{n \geq 1} \mu(B_k) = \sum_{n \geq 1} \mu(f^{-nk}(B_k)) = \mu(\cup_{n \geq 1} f^{-nk}(B_k)) \leq \mu(X) = 1.$$

There follows that $\mu(A^{\text{rec}}) = \mu(A)$. □

Now, let $f : X \rightarrow X$ be a continuous transformation of a metrizable topological space X , and let μ be an invariant Borel probability measure. Assume that (the topology of) X admits a countable basis $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$. We can apply the above theorem 11.3 to every open set U_i , and this easily implies that the set of recurrent points has full measure, i.e.

$$\mu(\text{Rec}_f) = 1.$$

In particular, since any set of full measure is dense in the support of a Borel measure, we get the following general result.

Theorem 11.4 (topologic Poincaré recurrence theorem). *Let $f : X \rightarrow X$ be a continuous transformation of a separable metrizable topological space X . The support of any invariant Borel probability measure μ is contained in the closure of the set of recurrent points, namely*

$$\text{supp}(\mu) \subset \overline{\text{Rec}_f}.$$

In particular, if f admits an invariant measure μ which is diffuse (i.e. gives positive measure to any nonempty open set) then the set of recurrent points is dense in X , namely

$$\overline{\text{Rec}_f} = X.$$

Observe that if f is a homeomorphism, then the same applies to $\text{Rec}_{f^{-1}}$, and the support of any invariant Borel probability measure is contained in the closure of $\text{Rec}_f \cap \text{Rec}_{f^{-1}}$.

If you don't like the above proof, here is another, perhaps more elementary, of the last statement.

Proof. (of the last statement of theorem 11.4) Assume that the continuous map $f : X \rightarrow X$ preserves a diffuse Borel probability measure μ . For each $n \geq 1$, let

$$R_n := \{x \in X \text{ s.t. } \exists k \geq 1 \text{ s.t. } d(f^k(x), x) < 1/n\}$$

be the set of “ $1/n$ -recurrent” points. It is plain that $\text{Rec}_f = \cap_{n=1}^{\infty} R_n$. The sets R_n are clearly open. To show that Rec_f is dense we must therefore show that each R_n is dense, since then the Baire theorem implies that also their countable intersection is dense. So, take any nonempty ball $B = B_r(p)$ with diameter $2r < 1/n$. Its inverse images $f^{-1}(B)$, $f^{-2}(B)$, $f^{-3}(B)$, ... have all the same measure by invariance, which is positive, i.e. $\mu(B) > 0$ (because the measure μ is diffuse). Since $\mu(X) = 1$, the $f^{-n}(B)$, for $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, cannot be pairwise disjoint. There follows that there exist $k > 0$ and $n \geq 0$ such that $f^{-(n+k)}(B) \cap f^{-n}(B) \neq \emptyset$, and this implies that B contains a $1/n$ -recurrent point (for a point x in the intersection has both images $f^n(x)$ and $f^{n+k}(x) = f^k(f^n(x))$ in B , hence at distance $< 1/n$). Since B was arbitrary, this proves that each R_n is dense, and Baire theorem implies that Rec_f is dense too. □

11.4 Transitivity and minimality

Transformações transitivas. Seja X um espaço métrico completo e separável. Uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ é (*topologicamente*) *+transitiva* se verifica uma das condições equivalentes:

- i) para cada dois abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,
- ii) existe um ponto $x \in X$ tal que $\omega_f(x) = X$,
- iii) existe um conjunto residual de pontos $x \in X$ tais que $\omega_f(x) = X$.

As implicações $\text{iii}) \Rightarrow \text{ii}) \Rightarrow \text{i})$ são óbvias, pois se $\omega_f(x) = X$, então a trajetória de x passa uma infinidade de vezes por todos os abertos não vazios de X . Para provar que $\text{i}) \Rightarrow \text{iii})$, a primeira observação é que a condição i) é equivalente a dizer que, para todo aberto não vazio V , a sua órbita $\cup_{n \geq 0} f^{-n}(V)$ é densa, e ainda mais, as suas órbitas $\cup_{n \geq k} f^{-n}(V) = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(f^{-k}(V))$ são densas para todo $k \geq 0$. Agora, seja $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma base enumerável da topologia de X . A família dos $\cup_{n \geq k} f^{-n}(U_i)$, com $k \geq 0$ e $i \geq 1$, é uma família de abertos densos em X . A sua interseção enumerável $R = \cap_{i \in \mathbb{N}} \cap_{k \geq 0} \cup_{n \geq k} f^{-n}(U_i)$ é um conjunto residual, e um ponto $x \in R$ tem uma trajetória que passa infinitas vezes por cada um dos abertos U_i , i.e. $\omega_f(x) = X$.

Também, é fácil de ver que i) implica que X não tem pontos isolados (desde que não tenha cardinalidade finita, caso trivial em que X é composto por uma única órbita). A ausência de pontos isolados implica que, de fato, $\mathcal{O}_f^+(x)' = X$ se $x \in R$.

(*+transitivo* $\Rightarrow \text{NW}_f = X$) Se $f : X \rightarrow X$ é *+transitivo*, então o seu conjunto não-errante é X , porque NW_f contém os conjuntos ω -limite dos pontos de X .

(*+transitivo* $\Rightarrow \text{Rec}_f$ residual) Observe também que uma transformação *+transitiva* tem muitos pontos recorrentes, de fato um conjunto residual, porque se $\omega_f(x) = X$ então $x \in \omega_f(x)$.

Homeomorfismos transitivos. Existe uma noção mais fraca de transitividade, que só é significativa para as transformações invertíveis. Um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é um *homeomorfismo* (*topologicamente*) *transitivo* se verifica uma das condições equivalentes:

- i) para cada dois abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,
- ii) existe um ponto $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$,
- iii) existe um conjunto residual de pontos $x \in X$ tais que $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$.

As implicações $\text{iii}) \Rightarrow \text{ii}) \Rightarrow \text{i})$ são óbvias, pois, se a órbita completa de x é densa, passa pelo menos uma vez por todos os abertos não vazios de X . Para provar que $\text{i}) \Rightarrow \text{iii})$, a primeira observação é que a condição i) é equivalente a dizer que a órbita $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$ de todo aberto não vazio V é densa em X . Agora, seja $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma base enumerável da topologia de X . A família dos $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_i)$ é uma família de abertos densos. A sua interseção enumerável $R = \cap_{i \in \mathbb{N}} \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_i)$ é um conjunto residual, e um ponto $x \in R$ tem uma trajetória completa que passa pelo menos uma vez por cada um dos abertos U_i , i.e. $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$.

Observe que $f : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo transitivo sse f^{-1} é um homeomorfismo transitivo. Um homeomorfismo transitivo pode não ser *+transitivo*, e, aliás, pode até não ter pontos recorrentes e ter conjunto não-errante vazio, desde que X não seja compacto!

(*transitivo* $\Leftrightarrow$ “*dinamicamente conexo*”) Mais interessante é observar que um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo transitivo sse X não contém uma reunião disjunta de dois subconjuntos abertos invariantes e não vazios. A implicação $\Rightarrow$ é trivial. Para provar a implicação $\Leftarrow$, observe que, se $U, V \subset X$ são dois abertos não vazios, então $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$ e $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$ são abertos, invariantes e não vazios. Se não forem disjuntos, existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $f^n(U) \cap f^m(V) \neq \emptyset$, o que implica $f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$.

(*transitivo* $\Rightarrow$ as funções contínuas invariantes são triviais) Se $f : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo transitivo, então toda função contínua $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ invariante é constante. De fato, se φ não é constante, então assume pelo menos dois valores, $a < b$. Logo existe $c = (a + b)/2$ tal que $\{\varphi < c\}$ e $\{\varphi > c\}$ são invariantes, abertos, disjuntos, e não vazios, mas isto contradiz o resultado anterior.

Exercícios.

- Prove as implicações $\text{iii}) \Rightarrow \text{ii}) \Rightarrow \text{i})$ na definição de “transformação +transitiva”.
- Prove que, se $f : X \rightarrow X$ é +transitiva, então $\text{NW}_f = X$.
- Prove que se $f : X \rightarrow X$ é +transitiva, então o conjunto Rec_f dos pontos recorrentes é residual.
- Prove as implicações $\text{iii}) \Rightarrow \text{ii}) \Rightarrow \text{i})$ na definição de “homeomorfismo transitivo”.
- Prove que um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é transitivo sse X não contém uma reunião disjunta de dois subconjuntos abertos invariantes e não vazios.
- Prove que, se $f : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo transitivo, então toda função contínua $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ invariante é constante.
- Dê exemplos de homeomorfismos $f : X \rightarrow X$ que sejam transitivos mas que não sejam +transitivos.

Desafios.

- (*transitivo e $\text{NW}_f = X \Leftrightarrow +transitivo$*) Mostre que um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é +transitivo sse é um homeomorfismo transitivo e o seu conjunto não-errante é X . A implicação $\Leftarrow$ é imediata ...
- Pode acontecer que uma transformação $f : X \rightarrow X$ seja topologicamente +transitiva mas tenha uma iterada f^n , com $n > 1$, que não é topologicamente +transitiva. Um exemplo trivial é uma permutação de um espaço finito, pois alguma iterada é a identidade. Em geral, se X é compacto, o que acontece é o seguinte: existe uma cobertura $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$, onde k é um inteiro que divide n e os X_i são subconjuntos compactos com interseções $X_i \cap X_j$ nowhere dense se $i \neq j$, tal que $f(X_i) = X_{i+1 \bmod k}$ e as restrições $f^n|_{X_i}$ são topologicamente +transitivas. A ideia é escolher um ponto $x \in X$ tal que $\omega_f(x) = X$, e definir $X_i = \omega_{f^n}(f^i(x)) \dots$

Conjuntos minimais. Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação contínua. Um subconjunto fechado e não vazio $K \subset X$ é dito *minimal* se é +invariante e se não contém subconjuntos próprio fechados e +invariantes.

A órbita de um ponto periódico é um exemplo de um conjunto minimal.

Se K é minimal, então a órbita de todo $x \in K$ é densa em K , pois caso contrário a aderência $\mathcal{O}_f^+(x)$ seria um subconjunto próprio de K , fechado e +invariantes. Isto implica que em particular $x \in \omega_f(x)$, e portanto todo ponto de um conjunto minimal é recorrente.

Se Min_f denota a reunião dos subconjuntos minimais de X , as inclusões são

$$\text{Per}_f \subset \text{Min}_f \subset \text{Rec}_f$$

Uma transformação arbitrária $f : X \rightarrow X$ pode não admitir conjuntos minimais (pense numa translação da reta real).

(X compacto $\Rightarrow \text{Min}_f \neq \emptyset$) Se o espaço X é compacto, podemos considerar a família $\mathcal{C}$ dos subconjunto $C \subset X$ que são fechados, não vazios e +invariantes, munida da ordem parcial “ $\subset$ ”. A família contém pelo menos um elemento, o próprio X . Pelo lema de Zorn²⁹ (observe que toda cadeia $\dots \subset C_{i+1} \subset C_i \subset \dots$ de elementos de $\mathcal{C}$ tem um limite inferior, porque uma

²⁹O lema de Zorn é um teorema de existência equivalente ao axioma da escolha.

Seja Ω um conjunto não vazio. Uma *ordem parcial* em Ω é uma relação $\preceq$ reflexiva ($x \preceq x \forall x \in \Omega$), anti-simétrica ($x \preceq y$ e $y \preceq x \Rightarrow x = y$) e transitiva ($x \preceq y$ e $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$). Um *conjunto parcialmente ordenado* é um par $(\Omega, \preceq)$, um conjunto não vazio Ω munido de uma ordem parcial $\preceq$.

Uma *ordem* em Ω é uma ordem parcial $\preceq$ tal que $\forall x, x' \in \Omega$ temos $x \preceq x'$ ou $x' \preceq x$. Um *conjunto (totalmente) ordenado* é um par $(\Omega, \preceq)$, um conjunto não vazio Ω munido de uma ordem $\preceq$.

Seja $(\Omega, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Uma *cadeia* em Ω é um subconjunto não vazio $C \subset \Omega$ tal que a restrição de $\preceq$ define uma ordem em C , i.e. tal que $\forall c, c' \in C$ temos $c \preceq c'$ ou $c' \preceq c$.

Sejam $(\Omega, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e seja $A \subset \Omega$ um subconjunto não vazio. Um elemento $s \in \Omega$ é

interseção de compactos encaixados é um compacto não vazio, e a invariância é preservada), C contém um elemento minimal K , e este elemento minimal é um conjunto minimal. Em geral, se uma transformação $f : X \rightarrow X$ admite um compacto $C \subset X$ tal que $f(C) \subset C$, então admite pelo menos um conjunto minimal $K \subset C$.

(X compacto $\Rightarrow \text{Rec}_f \neq \emptyset$) Corolário é que uma transformação $f : X \rightarrow X$ definida num compacto admite pelo menos um ponto recorrente (que pode ser único!), pois $\text{Min}_f \subset \text{Rec}_f$.

Transformações minimais. Uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ é *minimal* se verifica uma das condições equivalentes:

- i) toda órbita $\mathcal{O}_f^+(x)$ é densa em X ,
- ii) X não contém um subconjunto próprio fechado e $+$ -invariante, e portanto é um conjunto minimal.

A equivalência i) $\Leftrightarrow$ ii) acima é óbvia. Se X é um espaço discreto, a minimalidade implica que X é composto por uma única órbita, que pode ser finita. Caso contrário, uma transformação minimal não tem pontos periódicos.

(minimal $\Rightarrow$ $+$ transitiva) Obviamente, uma transformação minimal é $+$ transitiva.

Homeomorfismos minimais. O homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é um *homeomorfismo minimal* se toda órbita completa $\mathcal{O}_f(x)$ é densa em X , ou seja se X não contém um subconjunto próprio fechado e invariante.

Os homeomorfismos minimais são transitivos. A discussão acima pode ser repetida tirando os “+”... Em particular, um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ definido num espaço compacto admite pelo menos um subconjunto minimal K , ou seja neste caso um subconjunto fechado, não vazio e invariante que não contém subconjuntos próprios fechados e invariantes.

Exercícios.

- Dê exemplos de transformações $f : X \rightarrow X$ tais que $\text{Min}_f = \emptyset$.
- Prove as implicações i) $\Leftrightarrow$ ii) na definição de “transformação minimal”.
- Prove as implicações i) $\Leftrightarrow$ ii) na definição de “homeomorfismo minimal”.

11.5 Kronecker theorem on irrational rotations

Irrational rotations of the circle. *Kronecker theorem*³⁰ ([HW59] XXIII, Theorems 438, 439 and 440) says that, given an irrational α , for any $Q > 0$ and any $y \in \mathbb{R}$ there exist integers p and $q > Q$ such that

$$|q\alpha - p - y| < 3/q \quad (11.3)$$

In particular, let $R_\alpha(x + \mathbb{Z}) = x + \alpha + \mathbb{Z}$ denotes the rotation of the circle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ by the irrational angle $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Then for all $x + \mathbb{Z}$ and $x' + \mathbb{Z}$ in $\mathbb{T}$ and any precision $\varepsilon > 0$ there exists a time $q > 0$ such that $d(R_\alpha^q(x), x') < \varepsilon$. In our language, this means the following.

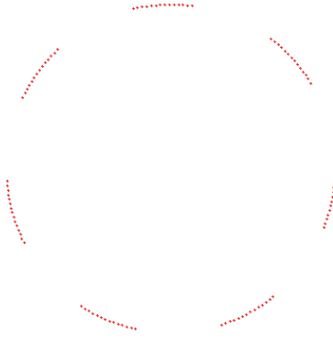
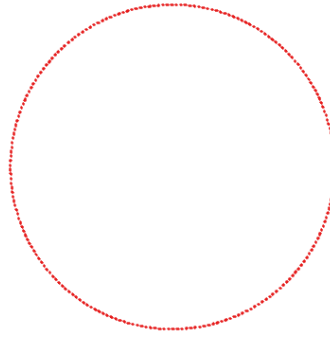
Theorem 11.5 (Kronecker, 1884). *An irrational rotation of the circle is minimal (i.e. all its orbit are dense in the circle).*

dito um *limite superior (inferior)* de A se $s \preceq a \forall a \in A$ (se $a \preceq s \forall a \in A$). Um elemento $m \in A$ é dito *elemento maximal (minimal)* de A se nenhum outro elemento de A é maior (menor) que m , ou seja se $\forall a \in A \ m \preceq a$ ($a \preceq m$) $\Rightarrow a = m$.

Lema de Zorn. *Seja Ω um conjunto não vazio e parcialmente ordenado por $\preceq$, tal que toda cadeia $C \subset \Omega$ tem limite superior (inferior). Então Ω contém um elemento maximal (minimal).*

³⁰L. Kronecker, Die Periodensysteme von Funktionen Reeller Variablen, *Berliner Sitzungsberichte* (1884), 1071-1080.

Proof. Let $F \subset \mathbb{T}$ be the closure of an irrational rotation of the circle. If F is not the whole circle, then its complement $I = \mathbb{T} \setminus F$ is a countable union of open intervals (arcs if the circle). Let J be (one of) the intervals of I of maximal length (why does it exist?), say $|J| > 0$. We claim that its images $f^n(J)$, with $n \in \mathbb{Z}$, are pairwise disjoint. Indeed, two such intervals $f^n(J)$ and $f^m(J)$, with $n \neq m$, cannot coincide, for otherwise the boundary points would be periodic points of the rotation (which is irrational), and also cannot have non-empty intersection, for otherwise their union would be an interval of I of bigger length. Since the rotation preserves the lengths, all $f^n(J)$ have the same positive length $|J|$, and this is impossible because the circle has finite (unit) length. $\square$

Orbit of a rotation by an angle $x = 3.1416$ up to time $N = 100$ Orbit of a rotation by an angle $x = 3.1416$ up to time $N = 10000$ Orbits of a rotation by an angle $\alpha \simeq \pi$ up to time 100 and 10000.

A informação “aritmética” deste teorema é que, dado $\alpha \notin \mathbb{Q}$, toda órbita

$$\{x + n\alpha + \mathbb{Z}, \text{ com } n \in \mathbb{Z}\}$$

é densa no círculo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. De fato, é possível provar mais: toda órbita é “equidistribuída” no círculo, no sentido em que, dada uma função integrável φ no intervalo $[0, 1]$, as médias aritmética

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \varphi(\{x + j\alpha\})$$

convergem para o integral $\int_0^1 \varphi(x) dx$ (veja o teorema de Kronecker e Weyl no capítulo sobre a ergodicidade).

Existe também a possibilidade de dar uma leitura “algébrica” deste resultado. Basta observar que a órbita de 0, a identidade do grupo, é o subgrupo cíclico de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ gerado por $\alpha + \mathbb{Z}$. Portanto o teorema diz que *os subgrupos próprios e fechados de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ são os subgrupos finitos.*

e.g. Example of a non-measurable set. If you believe the axiom of choice, you may consider a set B made of one (exactly one!) point for any orbit of an irrational rotation R_α of the circle. The images $B_n = R_\alpha^n(B)$, for $n \in \mathbb{Z}$, are pairwise disjoint and cover the circle. If B , hence all its images, were Lebesgue-measurable, then

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |B| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |B_n| = |\cup_{n \in \mathbb{Z}} B_n| = |\mathbb{R}/\mathbb{Z}| = 1$$

since rotations preserve Lebesgue measure, so that $|B_n| = |B|$. But there exists no size $b = |B| \geq 0$ such that $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b = 1$.

ex: Embora o resultado seja óbvio, é instructivo provar que as rotações racionais não são topologicamente transitivas usando o critério das funções invariantes, porque a demonstração pode estender-se às translações do toro. (Basta observar que, se $\alpha = p/q$ com p e q inteiros, a função $x \mapsto \sin(2\pi qx)$ está bem definida no círculo, é contínua, não é constante, e é invariante pela rotação $+\alpha$)

ex: Rotações do toro. This is a particular case of a general result by Kronecker [?]. We say that the frequencies/numbers $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ are *linearly independent over the rationals* if the only rational solution of the equation

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_k\omega_k = 0$$

is the trivial solution $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 0$. An important example: the logarithms $\omega_k = \log p_k$ of different primes p_k are linearly independent, as follows from the uniqueness of prime decomposition.

Theorem 11.6 (Kronecker, 1884). *Let $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$. If $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, 1$, are linearly independent over the rationals, then any orbit*

$$\mathbf{x} + \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}^n$$

is dense in the torus $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

This means that for any $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n \approx \mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ and any precision $\varepsilon > 0$ we can find integers $p_1, p_2, \dots, p_n$ and $q \in \mathbb{Z}$ such that $|q\theta_k - p_k - x_k| < \varepsilon$ for all $k = 1, 2, \dots, n$ (Chapter XXIII of [HW59] contains some different proofs).

Seja $+\alpha : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ a translação do toro definida por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mathbb{Z}^n \mapsto (x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \dots, x_n + \alpha_n) + \mathbb{Z}^n$$

Prove que, se os α_i não são racionalmente independentes, i.e. se existe $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tal que $\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i = 0 \pmod{\mathbb{Z}}$, então $+\alpha$ não é topologicamente transitiva. Mais difícil é provar que a translação $+\alpha$ é minimal sse os α_i são racionalmente independentes, i.e. se não existe $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tal que $\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i = 0 \pmod{\mathbb{Z}}$.

11.6 Homeomorfismos do círculo

O estudo dos campos de vetores no toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ levou Poincaré a considerar a necessidade de classificar as possíveis dinâmicas dos homeomorfismos do círculo. Um modelo é constituído pelas rotações $+\alpha$, cujo comportamento é determinado pela racionalidade ou menos do “número de rotação” α . Se α é racional, todo ponto é periódico, logo as órbitas são finitas. Se α é irracional, o sistema é minimal, e portanto toda órbita é densa. A chave para compreender homeomorfismos genéricos é a definição de um “invariante” que jogue o papel de α ...

Número de rotação Sejam $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ um homeomorfismo do círculo, e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um levantamento de f . A seguir, assumimos que f “preserva a orientação”, ou seja que $\deg(f) = 1$, e portanto F é uma função contínua e estritamente crescente que verifica $F(x+1) = F(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O número de rotação de f é

$$\rho(f) = \tau(F) \pmod{\mathbb{Z}} \quad (11.4)$$

onde $\tau(F)$ é o número de translação de F , definido por

$$\tau(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \quad (11.5)$$

onde x é um ponto arbitrário da reta. A prova de que a definição acima faz sentido, e que o número de rotação é um invariante topológico, está contida nas seguintes observações.

O limite $\tau(F)$ existe. A transformação F e as suas iteradas F^n são homeomorfismos crescentes da reta que satisfazem $F^n(x+1) = F^n(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $F^n - \text{id}$ são funções periódicas de período um. Isto implica que

$$\max_{x, x'} |(F^n(x) - x) - (F^n(x') - x')| \leq 1$$

pois, pela periodicidade basta calcular o máximo no intervalo $[0, 1]$, e sabemos que F^n é crescente e que a imagem $F^n([0, 1])$ é um intervalo de comprimento um. Seja agora $a_n = F^n(x) - x$. A desigualdade acima implica que a sucessão (a_n) é “quase-subaditiva”, i.e. satisfaz

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m + c$$

para todos $n, m \geq 0$, onde c é uma constante. De fato,

$$\begin{aligned} F^{n+m}(x) - x &= F^n(F^m(x)) - F^m(x) + F^m(x) - x \\ &= F^n(x) - x - F^n(x) + x + F^n(F^m(x)) - F^m(x) + F^m(x) - x \\ &\leq F^n(x) - x + F^m(x) - x + 1 \end{aligned}$$

e portanto basta escolher $c = 1$.

The existence of a limit now is a consequence of the following general and useful statement about quasi-subadditive sequences

Theorem 11.7 (subadditive lemma). *Let (a_n) be a quasi-subadditive real sequence, ...*

Proof. A existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$ é equivalente à existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/n$, onde $b_n = a_n + c$. A sucessão (b_n) é subaditiva, ou seja satisfaz $b_{n+m} \leq b_n + b_m$. A sucessão (b_n) é crescente, e pela subaditividade satisfaz $b_n \leq nb_1$. Portanto, a sucessão (b_n/n) é limitada, logo existe $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n/n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um natural $N = N(\varepsilon)$ tal que $b_N/N < \lambda + \varepsilon$. Seja agora $n = kN + r$, com k inteiro não negativo e $0 \leq r < N$, e seja $B = \max_{1 \leq i < N} b_i$. Utilizando a subaditividade temos

$$\begin{aligned} b_n/n &\leq (b_{kN} + b_r)/n \leq (kb_N + b_r)/n \\ &\leq b_N/N + b_r/n \leq \lambda + \varepsilon + B/n \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ε , a desigualdade acima implica que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n/n \leq \lambda$, e portanto que o limite $\lim b_n/n$ existe e é igual a λ . $\square$

O limite $\tau(F)$ não depende do ponto x . Já vimos que $|(F^n(x) - x) - (F^n(x') - x')| \leq 1$, portanto

$$\left| \frac{F^n(x) - x}{n} - \frac{F^n(x') - x'}{n} \right| \leq 1/n$$

para todos x, x' e n . Isto implica que $\tau(F)$ é independente do ponto x escolhido na sua definição.

$\rho(f)$ não depende do levantamento F . Observe que dois levantamentos F e G de f diferem por um inteiro, ou seja $G(x) = F(x) + k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Isto implica que $\tau(F) = \tau(G) + k$, pois $G^n(x) - x = F^n(x) - x + nk$. Portanto o número de rotação $\rho(f)$ está bem definido, não depende do levantamento escolhido.

$\rho(f)$ é invariante para conjugações topológicas. Seja $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma conjugação entre os homeomorfismos f e g . Se H é um levantamento de h e F é um levantamento de f , é imediato verificar que $H \circ F \circ H^{-1}$ é um levantamento de g . Não é difícil mostrar que a diferença $(H \circ F \circ H^{-1})^n(x) - F^n(x)$ é limitada, independentemente de x e de n . Basta observar que $(H \circ F \circ H^{-1})^n = H \circ F^n \circ H^{-1}$, que $|H(x) - x|$ e $|H^{-1}(x) - x|$ são limitados por uma constante independente de x , e utilizar a desigualdade do triângulo. Isto implica que $\tau(F) = \tau(H \circ F \circ H^{-1})$, e portanto que $\rho(f) = \rho(g)$.

ex: Determine o número de rotação de uma rotação do círculo.

ex: Seja f um homeomorfismo do círculo. Mostre que $\rho(f^q) = q \cdot \rho(f) \pmod{\mathbb{Z}}$. (Observe que, se F é um levantamento de f , então F^q é um levantamento de f^q ...)

Teorema de classificação de Poincaré O número de rotação contém a seguinte informação acerca da dinâmica de f .

Theorem 11.8. *O número de rotação $\rho(f)$ é racional sse f tem pontos periódicos.*

Proof. ($\Leftarrow$) Se $F^q(x) = x + p$ com q e p inteiros, então $F^{nq}(x) - x = np$ para todo n , e portanto $\tau(F) = p/q$.

($\Rightarrow$) Observando que $\rho(f^q) = q \cdot \rho(f) \bmod \mathbb{Z}$, basta provar que $\rho(f) = 0$ implica que f tem um ponto fixo. Se f não tem pontos fixos, então a função $F - \text{id}$ tem valores em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Em particular, existe um levantamento tal que $F - \text{id}$ tem valores no intervalo $]0, 1[$ (porque $F - \text{id}$ é contínua e o seu domínio é conexo). Observando que $F - \text{id}$ é periódica de período um, deduzimos que o seu máximo e o seu mínimo são diferentes de 1 e 0 respetivamente, i.e. existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < F(x) < 1 - \varepsilon$ para todo $x \in [0, 1]$. Iterando as desigualdades, isto implica que $n\varepsilon < F^n(0) < n(1 - \varepsilon)$ e portanto que $\tau(F)$ não é inteiro. $\square$

É possível provar com pouco esforço que, se $\rho(f)$ é racional, então todos os pontos periódicos de f têm o mesmo período. Portanto, para compreender a estrutura das órbitas de um homeomorfismo com número de rotação racional é suficiente compreender as órbitas de um homeomorfismo f com pontos fixos. Se $F = \text{Fix}(f)$, então f induz homeomorfismos em cada componente conexa I de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus F$. As imagens $f^n(x)$ dos pontos $x \in I \subset (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus F$ convergem para pontos de $\partial I \subset F$ quando $n \rightarrow \pm\infty$. A estrutura de F é arbitrária: todo subconjunto compacto do círculo é o conjunto dos pontos fixos de um homeomorfismo.

A dinâmica dos homeomorfismos com número de rotação irracional é descrita pelo seguinte resultado.

Theorem 11.9 (Poincaré). *Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ um homeomorfismo do círculo (que preserva a orientação) com número de rotação irracional. Então*

- i) ou f é minimal, i.e. a órbita de todo ponto é densa no círculo,*
- ii) ou existe um conjunto invariante $K \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, compacto, perfeito e com interior vazio (i.e. um conjunto de Cantor), tal que o conjunto ω -limite de todo ponto do círculo é igual a K .*

Proof. Pelo lema de Zorn, a família dos subconjuntos não vazios do círculo que são compactos e invariantes, parcialmente ordenada pela inclusão, admite um elemento minimal K . Pela minimalidade, a órbita de todo ponto de K é densa em K . A fronteira ∂K e o conjunto derivado K' são compactos, invariantes e contidos em K , logo têm que ser vazios ou iguais a K . O homeomorfismo não tem pontos periódicos, logo K não pode ser finito. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass $K' \neq \emptyset$, logo $K' = K$, i.e. K é perfeito. Se $\partial K = \emptyset$, então $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e portanto f é minimal. Se, por outro lado, $\partial K = K$, então K tem interior vazio. Seja $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus K$ e seja I a componente conexa de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus K$ que contém x . As imagens $f^n(I)$ são dois a dois disjuntas (sempre porque f não tem pontos periódicos), e portanto $\text{diam}(f^n(I)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Se $x' \in \partial I \subset K$, então $\omega_f(x') = K$, e a observação anterior implica que também $\omega_f(x) = K$, pois $d(f^n(x), f^n(x')) \leq \text{diam}(f^n(I)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Em particular, isto mostra que o conjunto minimal K é único. $\square$

Mais interessante ainda é o seguinte resultado.

Theorem 11.10 (Poincaré classification theorem). *Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ um homeomorfismo do círculo (que preserva a orientação) com número de rotação irracional.*

- i) Se f é minimal, então f é topologicamente conjugado à rotação $+\rho(f)$.*
- ii) Se f não é minimal, então a rotação $+\rho(f)$ é um fator de f .*

Se f é minimal, podemos construir uma conjugação H entre uma órbita de f e uma órbita de $+\rho(f)$, e depois definir uma conjugação $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ por continuidade, utilizando o fato das órbitas serem densas. Isto é possível porque as órbitas de f têm “a mesma ordem” das órbitas de

$+\rho(f)$. Se f não é minimal, é possível construir uma semiconjugação $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que o próprio $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ seja a imagem $h(K)$ do conjunto minimal de f . De alguma maneira, a semiconjugação “esquece” $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus K$, o conjunto errante de f .

Difeomorfismos do círculo e teorema de Denjoy Um homeomorfismo $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com número de rotação irracional pode não ser minimal, logo ter um conjunto não errante $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus K$, composto por intervalos abertos I com imagens $f^n(I)$ disjuntas. Se f é de classe $\mathcal{C}^1$, um controle sobre a derivada f' e o teorema do valor médio ajudam a estimar os comprimentos dos $f^n(I)$. O resultado, obtido por Arnaud Denjoy nos anos '30, é o seguinte.

Theorem 11.11 (Denjoy). *Um homeomorfismo $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com número de rotação irracional, de classe $\mathcal{C}^1$ e com derivada de variação limitada, é minimal, e portanto topologicamente conjugado à rotação $+\rho(f)$.*

A ideia é provar que, se f' tem variação limitada e I é um “intervalo errante”, os comprimentos dos $f^n(I)$ são uniformemente $> \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. Sendo disjuntos, isto leva a um absurdo. O próprio Denjoy mostrou como construir homeomorfismos de classe $\mathcal{C}^1$, com derivada f' de classe α -Holder e $\alpha < 1$ arbitrário, que têm número de rotação irracional sem seres minimais.

ex: Discuta a dinâmica da família de transformações do círculo $f_{\alpha,\varepsilon} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definidas por

do it

$$x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi x) + \mathbb{Z}$$

ao variar os parâmetros α e ε .

12 Perda de memória e independência assintótica

12.1 Órbitas desordenadas

Dicotomia: pontos regulares ou não regulares. Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação do espaço métrico (X, d) . As iterações de f dividem de maneira natural o espaço X em duas classes de pontos, dependendo se as órbitas são “estáveis” ou “instáveis” por pequenas perturbações da condição inicial.

O ponto $x \in X$ é *regular* se a família de transformações $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ é equicontínua em x , ou seja, se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança B de x tal que para todo $x' \in B$ e todo tempo $n \geq 0$

$$d(f^n(x), f^n(x')) < \varepsilon$$

Do ponto de vista físico isto quer dizer que, se os instrumentos têm sensibilidade ε , as trajetórias de apenas um ponto em cada ε -bola são suficientes para descrever todas as trajetórias dos pontos regulares. Em particular, se X é compacto e todo ponto é regular, um número finito de trajetórias descreve o comportamento de todas as trajetórias a menos de um erro ε , por tempos arbitrariamente grandes.

O ponto $x \in X$ *não é regular* se existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer vizinhança B de x existem $x' \in B$ e um tempo $n \geq 0$ tais que

$$d(f^n(x), f^n(x')) > \delta$$

O significado desta condição é que f “tem dependência sensível das condições iniciais” nas vizinhanças de x . Num certo sentido, as trajetórias de pontos numa vizinhança arbitrária de x “perdem memória” de x .

Dependência sensível das condições iniciais. Se o conjunto dos pontos não regulares for compacto, o δ acima pode ser escolhido independente do ponto. Isto sugere a seguinte definição.

A transformação $f : X \rightarrow X$ *tem dependência sensível das condições iniciais* se todos os pontos de X são “uniformemente” não regulares, ou seja, se existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ e toda vizinhança B de x , existem $x' \in B$ e um tempo $n \geq 0$ tais que

$$d(f^n(x'), f^n(x)) > \delta$$

O significado físico deste fenómeno é: não importa quanto pequena seja a sensibilidade ε dos nossos instrumentos, as trajetórias de dois pontos x e x' que nos consideramos “indistinguíveis” (ou seja a distância $d(x, x') < \varepsilon$) distam mais de um certo δ , independente de ε , passado um certo tempo n .

Conjuntos de Julia e de Fatou. A dicotomia acima é particularmente significativa para os endomorfismos da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, as transformações racionais $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, definidas por

$$z \mapsto f(z) = p(z)/q(z)$$

onde p e q são polinómios. Um ponto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ é dito “regular” se admite uma vizinhança U tal que a família $\{f^n|_U\}_{n \geq 1}$ é uma família normal (i.e. toda sucessão de elementos da família admite uma subsucessão localmente uniformemente convergente). O conjunto F dos pontos regulares, que é um subconjunto aberto da esfera de Riemann, é dito *conjunto de Fatou*. O conjunto complementar, o fechado $J = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, é dito *conjunto de Julia*. O conjunto de Julia é onde acontece a dinâmica “desordenada” de f . Se a transformação é da forma $f(z) = z^n$ com $n > 1$ (ou conformemente conjugada a um polinómio deste tipo), então J é um círculo. Se f é mais complicado, acontece que J é tipicamente um conjunto muito irregular: um conjunto de Cantor, uma curva não retificável de dimensão de Hausdorff > 1 , ou um conjunto ainda mais esquisito. O estudo destes fenómenos começou por volta de 1918-19, com os trabalhos de Gaston Julia e Pierre Fatou. A compreensão da dinâmica dos endomorfismos da esfera de Riemann (devida essencialmente às técnicas disponíveis de análise complexa) é um dos maiores sucessos da moderna teoria dos sistemas dinâmicos. Uma introdução excelente está nas notas de John Milnor, *Dynamics in one complex variable*, IMS-SUNY Stony Brook 1990.

12.2 Mixing topológico

Transformações mixing. A transformação $f : X \rightarrow X$ é *topologicamente mixing* (ou seja, “misturadora”) se para cada dois abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $n \geq 0$ tal que para todo tempo $k \geq n$

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

(ou seja, basta esperar um certo tempo finito n para ver pontos de U cujas órbitas visitam V).

O mixing topológico captura a ideia de que o futuro $f^k(U)$, com $k > 1$, de cada aberto U é “assimptoticamente independente” do seu presente, pois intersesta estavelmente cada outro aberto não vazio V .

(*mixing* $\Rightarrow$ *+transitivo*) Uma transformação topologicamente mixing é topologicamente +transitiva. Em particular, $\text{NW}_f = X$, e $\omega_f(x) = X$ é uma propriedade genérica.

(*mixing* $\Rightarrow$ *dependência sensível*) O mixing topológico é uma propriedade ainda mais forte de que a dependência sensível das condições iniciais. Pois, seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação topologicamente mixing do espaço métrico (X, d) com pelo menos dois pontos, e sejam U e V dois abertos disjuntos a distância $> 2\delta$, com $\delta > 0$. Dado $x \in X$, a órbita de toda vizinhança B de x intersesta os dois abertos a partir de um certo tempo $n \geq 0$, e portanto existe um ponto $x' \in B$ tal que $d(f^n(x'), f^n(x)) > \delta$.

Em particular, uma isometria não pode ser topologicamente mixing.

Desafios.

- Existe um homeomorfismo minimal (portanto topologicamente transitivo) que não é topologicamente mixing?
- Existe uma transformação topologicamente transitiva que não é nem minimal nem topologicamente mixing?
- Uma transformação $f : X \rightarrow X$ é dita *weakly mixing* se a “transformação produto” $f \times f : X \times X \rightarrow X \times X$, definida por

$$(x, x') \mapsto (f(x), f(x'))$$

é topologicamente mixing. Mostre que uma transformação weak mixing (de um espaço X que contém mais do que um ponto) tem dependência sensível das condições iniciais. Mostre que todas as iteradas f^n de uma transformação weak mixing de um espaço compacto são +transitivas. Prove que

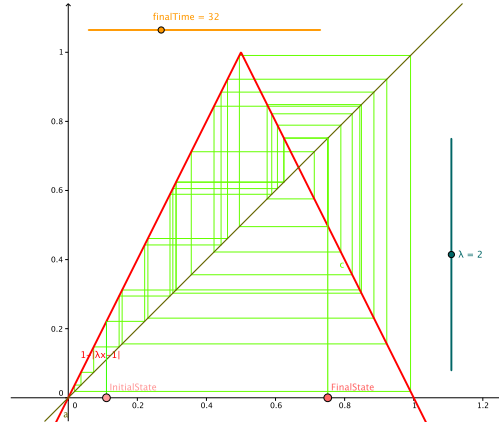
$$\text{mixing} \Rightarrow \text{weak mixing} \Rightarrow +\text{transitivo}$$

e dê exemplos que mostram que as implicações contrárias são falsas.

e.g. Transformação tenda. A transformação tenda ³¹ é a transformação $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$

³¹Um padeiro estica, dobra e amassa repetidamente a sua massa com o objetivo de “misturar”, ou seja de chegar a ter uma mistura de farinha e água e outros ingredientes que seja o quanto mais possível homogênea... Isto é mais ou menos o que faz a transformação tenda. Por alguma razão, o nome de *transformação do padeiro* é reservado ao seu análogo bidimensional e invertível.



Cobweb diagram of the tent map.

A iteração de T é simples, pois a composição de duas transformações afins é uma transformação afim.

Não é difícil provar por indução que em cada um dos intervalos $I_{k,n} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ com $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ a transformação T^n tem a forma

$$x \mapsto T^n(x) = \begin{cases} 2^n x + k & \text{se } k \text{ é par} \\ -2^n x + k + 1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Em particular, T^n é uma bijeção estritamente crescente ou decrescente de $I_{k,n}$ sobre o intervalo $[0, 1]$. O teorema de ponto fixo implica que T^n tem um e um único ponto fixo em cada um dos intervalos $I_{k,n}$ (que é repulsivo, pois a derivada de T^n é $2^n > 1$, e só coincide com um dos extremos quando $k = 0$), e portanto que $|\text{Fix}(T^n)| = 2^n$. Além disso, sendo que todo aberto não vazio $U \subset [0, 1]$ contém um dos intervalos $I_{k,n}$ se n é suficientemente grande, os pontos periódicos de T são densos no intervalo $[0, 1]$.

A transformação T é topologicamente mixing. De fato, todo aberto não vazio $U \subset [0, 1]$ contém um dos intervalos $I_{k,n}$ com n suficientemente grande, logo $T^n(U) = [0, 1]$ e portanto $T^k(U) = [0, 1]$ para todo tempo $k \geq n$ porque T é sobrejetiva. Isto implica que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo tempo $k \geq n$ e para todo aberto não vazio $V \subset [0, 1]$. Portanto existe um conjunto residual (i.e. grande!) de pontos x tais que $\omega_f(x) = [0, 1]$, ou seja cuja trajetória é essencialmente imprevisível!

Exercícios.

- Verifique que $h : x \mapsto \sin^2(\pi x/2)$ realiza uma conjugação topológica entre a transformação tenda T e a transformação $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ da família quadrática, definida por $f_4(x) = 4x(1-x)$. Deduza
- Discuta a dinâmica da transformação $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$

Cuidado, S não é contínua!, mas não é muito diferente da transformação tenda...

12.3 Dinâmica dos deslocamentos de Bernoulli

O deslocamento de Bernoulli $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ sobre um alfabeto finito $X = \{1, 2, \dots, z\}$ é o protótipo de uma transformação topologicamente mixing, e tem todas as propriedades típicas desta classe de transformações.

Uma base da topologia produto em $\Sigma^+ = X^{\mathbb{N}}$ é a família dos “cilindros centrados”, a família dos subconjuntos $C_\alpha = \{x = (\alpha, *)\}$ = “palavras infinitas que começam pela palavra α ”, ao variar α entre todas as palavras finitas nas letras do alfabeto X . Ora, se $U \subset \Sigma^+$ é um aberto não vazio, existe um cilindro centrado $C_\alpha \subset U$, e, se $|\alpha|$ denota o comprimento da palavra α , é imediato ver que $\sigma^n(C_\alpha) = \Sigma^+$ para todo $n \geq |\alpha|$, logo a fortiori $\sigma^n(U)$ intersesta todo aberto não vazio a partir do tempo $|\alpha|$. Isto prova que σ é topologicamente mixing.

Sendo σ topologicamente mixing, logo +transitiva, um ponto genérico de Σ^+ tem órbita densa.

Uma curiosidade é que neste exemplo é de fato imediato “construir” um ponto com órbita densa. Basta enumerar o conjunto das palavras finitas nas letras de X , por exemplo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, e depois observar que a trajetória do ponto $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ passa por todos os elementos da base da topologia.

Menos obvio é construir um ponto x tal que $\omega_\sigma(x) = \Sigma^+$, que também sabemos ser uma propriedade genérica! Um exemplo é o ponto

$$x = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots)$$

cujas trajetória passa infinitas vezes por todos os elementos da base da topologia.

O shift de Bernoulli tem também muitos pontos periódicos. Per_f é um conjunto enumerável e denso em Σ^+ . De fato, dada uma palavra finita α arbitrária, o ponto $x = (\alpha, \alpha, \alpha, \dots)$ é periódico, e o seu período é um inteiro positivo que divide $|\alpha|$. Isto prova que a cardinalidade de $\text{Fix}(\sigma^n)$ é igual a cardinalidade das palavras de comprimento n nas letras do alfabeto X . Além disso, todo cilindro centrado contém um ponto periódico, pois C_α contém $(\alpha, \alpha, \alpha, \dots)$, logo os pontos periódicos são densos em Σ^+ .

Além de pontos periódicos e de pontos cuja órbita é densa, o shift de Bernoulli admite pontos cuja órbita é densa em subconjuntos próprios de Σ^+ . Por exemplo, a restrição de σ ao subconjunto $(X \setminus \{1\})^{\mathbb{N}} \subset \Sigma^+$ formado pelas palavras infinitas que não contêm a letra “1” é uma transformação topologicamente mixing (basta repetir a demonstração anterior), logo um ponto genérico $x \in (X \setminus \{1\})^{\mathbb{N}}$ tem órbita densa em $(X \setminus \{1\})^{\mathbb{N}}$...

Exercícios.

- Discuta em detalhes a dinâmica do deslocamento de Bernoulli. Considere o produto cartesiano $\Sigma^+ = X^{\mathbb{N}}$, onde $X = \{1, 2, \dots, z\}$ é um alfabeto finito. Verifique que a família dos cilindros centrados é uma base de uma topologia em Σ^+ , dita topologia produto.

Verifique que o shift de Bernoulli $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ sobre um alfabeto finito é uma transformação contínua

(observe que a imagem inversa de um cilindro centrado é uma reunião finita de z cilindros centrados, e deduza que a imagem inversa de um aberto é um aberto).

Prove que $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ é uma transformação expansora se a métrica em Σ^+ é definida por $d(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cdot |x_n - x'_n|$, onde $\lambda > 1$.

Mostre que $|\text{Fix}(\sigma^n)| = |X|^n$.

Mostre que todo cilindro centrado de Σ^+ contém um ponto periódico de σ , e que portanto o conjunto dos pontos periódicos Per_σ é denso em Σ^+ .

Prove que $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ é topologicamente mixing.

Dê exemplos de pontos $x \in \Sigma^+$ tais que $\omega_\sigma(x) = X$.

De exemplos de pontos não pré-periódicos $x \in \Sigma^+$ tais que a aderência da órbita $\mathcal{O}_\sigma^+(x)$ seja um subconjunto próprio de Σ^+ .

- Seja $\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$, o espaço das palavras infinitas $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ nas letras do alfabeto finito $X = \{1, 2, \dots, z\}$, munido da topologia produto. Verifique que o shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, definido por $(\sigma(x))_k = x_{k+1}$, é um homeomorfismo.

Determine a cardinalidade de $\text{Fix}(\sigma^n)$, e prove que os pontos periódicos são densos em Σ .

Prove que $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é topologicamente mixing.

Cadeias de Markov topológicas e codificação. A restrição do shift σ a um subconjunto invariante de Σ^+ (ou Σ) é dita um *sistema dinâmico simbólico*. A maneira mais simples de produzir subconjuntos invariantes é por meio de matrizes de transição (a ideia vem da teoria das cadeias de Markov). Seja $A = (a_{ij})$ uma "matriz de transição", ou seja uma matriz $z \times z$ com entradas 0 ou 1. Seja

$$\Sigma_A^+ = \{x \in \Sigma^+ \text{ t.q. } a_{x_n x_{n+1}} = 1 \forall n \geq 0\}$$

É fácil de ver que $\sigma(\Sigma_A^+) \subset \Sigma_A^+$. A restrição $\sigma_A = \sigma|_{\Sigma_A^+} : \Sigma_A^+ \rightarrow \Sigma_A^+$ é dita *cadeias de Markov topológicas* (ou *subshift of finite type*). A ideia é que o alfabeto representa os possíveis "estados" do sistema, e a "transição" entre o estado i e o estado j é possível se $a_{ij} = 1$.

Uma palavra finita $x_1, x_2, \dots, x_n$ é *admissível* se $a_{x_k x_{k+1}} = 1$ para todos $k = 1, 2, \dots, n-1$, i.e. se é um pedaço de uma história possível do estado x_1 . O número de palavras admissíveis de comprimento $n+1$ que começam pela letra i e terminam pela letra j é igual a $(A^n)_{ij}$. Isto mostra que $|\text{Fix}(\sigma_A^n)| = \text{tr} A^n$. Este número pode ser estimado utilizando o teorema de Perron-Frobenius.

A cadeia de Markov topológica σ_A é dita *transitiva* se existe um tempo $k \geq 1$ tal que todas as entradas de A^k (e portanto as entradas de A^n se $n \geq k$) são positivas. O resultado relevante é que uma cadeia de Markov topológica transitiva é topologicamente mixing, e tem órbitas periódicas densas.

Os sistemas dinâmicos simbólicos são modelos abstratos de sistemas dinâmicos. Uma das ideias centrais da teoria é procurar "codificar" um sistema "concreto" $f : X \rightarrow X$ com um sistema simbólico. Uma estratégia possível é dividir X em subconjuntos fechados $B_1, B_2, \dots, B_z$ tais que a história de todo $x \in X$, definida por $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ onde $x_n = i$ sse $f^n(x) \in B_i$, determina univocamente o ponto x . Então, se $A = (a_{ij})$ é a matriz de 0 e 1's definida por $a_{ij} = 1$ se $B_j \subset f(B_i)$, e se f é suficientemente "desordenada", a cada história $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \Sigma_A^+$ corresponde um único ponto $x = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(B_{x_n})$. A esperança é que f seja conjugado a σ_A . Se X é conexo, os B_i têm que ter interseções não vazias, e portanto a correspondência entre Σ_A^+ e X não pode ser biunívoca. Mesmo assim, fora das histórias ambíguas, a dinâmica de f é descrita pela dinâmica de σ .

e.g. Transformação de padeiro. A *transformação do padeiro* é $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ definida por

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (2x, y/2) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ (2x-1, (y+1)/2) & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Discuta a sua dinâmica. Considere o shift de Bernoulli $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ no produto cartesiano $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Mostre que a aplicação $h : \Sigma \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ definida por

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{-n}}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \right)$$

é uma semiconjugação entre σ e f . Deduza ...

12.4 Conjuntos de Cantor

As aderências das órbitas de transformações suficientemente "desordenadas" podem ter uma estrutura complicada, e, se forem desconexas, são tipicamente conjuntos de Cantor. Um *conjunto de Cantor* é um espaço métrico compacto, perfeito e totalmente desconexo.

Middle-third Cantor set. O arquétipo é o *conjunto de Cantor standard* (“middle-third Cantor set”)

$$K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1]$$

o conjunto dos números entre 0 e 1 cuja representação em base 3 utiliza só as letras 0 e 2.

Outra definição é $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, onde os intervalos abertos I_k são definidos iterativamente da seguinte maneira: I_1 é o terço central $]1/3, 2/3[$ de $[0, 1]$, I_2 e I_3 são os terços centrais dos intervalos de $[0, 1] \setminus I_1$, a saber $]1/9, 2/9[$ e $]7/9, 8/9[$, ...etc.

Mais uma definição é $K = \bigcap_{k \geq 0} K_k$, onde

$$K_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_1, x_2, \dots, x_k \in \{0, 2\} \text{ e } x_i \in \{0, 1, 2\} \text{ se } i > k \right\}$$

Observe que $\dots \subset K_{n+1} \subset K_n \subset \dots \subset K_0 = [0, 1]$, e que cada K_n é uma reunião disjunta de 2^n intervalos fechados de comprimento 3^{-n} . Em particular, K é compacto, pois é uma interseção enumerável de compactos encaixados.

As estranhas propriedades do conjunto de Cantor tem demonstrações muito simples observando que K é homeomorfo ao produto topológico $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, i.e. ao espaço do deslocamentos de Bernoulli num alfabeto de duas letras. O homeomorfismo é simplesmente

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n / 3^n \in K$$

K não tem pontos isolados, e portanto $K' = K$, i.e. é perfeito. De fato, um ponto $x \in K$ pertence a uma interseção $\bigcap_{n \geq 1} J_n$, onde $J_n = [a_n, b_n]$ são certas componentes conexas dos compactos K_n . Logo, pelo menos as duas sucessões distintas (a_n) e (b_n) de pontos de K convergem para x , pois $|b_n - a_n| = 3^{-n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

A componente conexa de todo ponto $x \in K$ é $\{x\}$, i.e. K é totalmente desconexo. De fato, sejam x e x' dois pontos distintos de K . Se n é suficientemente grande, i.e. se $3^{-n} < d(x, x')$, os pontos x e x' estão em duas componentes conexas distintas de K_n .

A função $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto ((x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}, \dots), (x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots))$$

induz um homeomorfismo de K sobre $K \times K$. Por indução, vê-se que K é homeomorfo a K^n para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, não é difícil provar que K é homeomorfo a $K^{\mathbb{N}}$.

Observe que $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ é homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, e que a representação binária dos reais entre 0 e 1 é uma aplicação contínua de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sobre o intervalo $[0, 1]$. Portanto, existe uma função contínua de K sobre o intervalo $[0, 1]$, e em particular, pelo teorema de Schröder-Bernstein, K tem a cardinalidade do intervalo.

Outra propriedade muito apreciada do conjunto de Cantor é a “auto-similaridade”. Assim como um intervalo compacto da reta é homeomorfo a todo seu subintervalo (não trivial) compacto, o conjunto de Cantor K contém muitos subconjuntos próprios homeomorfos a K . Por exemplo, a aplicação $x \mapsto 3x$ define um homeomorfismo de $K \cap [0, 1/3]$ sobre K (isto não é casual, mas tem muito a ver com a dinâmica da transformação $\times 3$ no círculo). De fato, todo aberto não vazio do conjunto de Cantor contém uma “cópia” do próprio conjunto. Formalmente, todo intervalo aberto da reta I tal que $I \cap K \neq \emptyset$ contém um subconjunto $J \subset I \cap K$ homeomorfo a K . Pois, se um intervalo aberto contém um ponto de K , então contém pelo menos uma das componentes conexas de K_n , digamos $J_n = [a_n, b_n]$, desde que n seja suficientemente grande. Não é difícil depois arranjar um homeomorfismo (por exemplo afim, da forma $x \mapsto 3^n(x - a_n)$) de J_n sobre K .

O “comprimento” (i.e. a medida de Lebesgue) de K é

$$|K| = \lim_{n \rightarrow \infty} |K_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot 3^{-n} = 0.$$

O conjunto de Cantor é “muito pequeno”, mesmo tendo “o mesmo número de pontos” do intervalo!

Cantor invariante pela família quadrática. Seja $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a transformação definida por $x \mapsto \lambda x(1-x)$, onde $\lambda > 0$. A trajetória dos pontos $x \notin I = [0, 1]$ diverge, de fato $|f_\lambda^n(x)| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. O conjunto dos pontos da reta que têm órbitas limitadas é

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f_\lambda^{-n}(I)$$

Se $\lambda > 4$, então $f_\lambda^{-1}([0, 1])$ é a reunião disjunta de dois intervalos fechados I_0 e I_1 contidos em I . Se λ é suficientemente grande, o módulo da derivada f'_λ é uniformemente > 1 nos pontos de I_0 e I_1 . Mostre que, se λ é suficientemente grande, $f_\lambda^{-(n+1)}(I)$ é uma reunião disjunta de 2^{n+1} intervalos compactos estritamente contidos, em pares, nos 2^n intervalos de $f_\lambda^{-n}(I)$. Deduza que Λ é um conjunto de Cantor, e que a transformação $f_\lambda|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é topologicamente conjugada ao shift de Bernoulli $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ no alfabeto $\{0, 1\}$.

12.5 Transformações expansoras

A dependência sensível das condições iniciais pode ser induzida por propriedades mais fortes. Uma maneira óbvia é “obrigar” f a esticar as distâncias, e isto pode ser feito de muitas maneiras.

Transformações expansoras. Uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ é *expansiva* se existe $\delta > 0$ tal que para todos $x, x' \in X$ distintos existe um tempo $n \geq 0$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(x')) > \delta$$

Uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ é *expansora* se existem $\mu > 1$ e $\varepsilon > 0$ tais que para todos $x, x' \in X$ distintos com $d(x, x') < \varepsilon$

$$d(f(x), f(x')) > \mu \cdot d(x, x')$$

Esta é uma condição local, porque se ε fosse infinito nenhum espaço compacto admitiria transformações expansoras. Por outro lado, é precisamente nos espaços compactos que a expansividade causa recorrências interessantes das trajetórias: os pontos querem fugir uns dos outros, mas não têm muito espaço por onde ir, e acabam se reencontrando de vez em quando...

A existência de transformações expansoras implica fortes restrições topológicas sobre o espaço X . Se X é uma variedade, o recobrimento universal de X tem que ser $\mathbb{R}^n$ e o grupo fundamental de X não pode ser arbitrário. Por exemplo, entre as superfícies fechadas e orientáveis, só o toro admite transformações expansoras!

Exercício. Dê exemplos de transformações expansoras de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Desafios.

- Prove que não existe nenhuma transformação expansiva $f : I \rightarrow I$ definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. Observe que uma tal transformação seria localmente injetiva, logo estritamente crescente ou decrescente...
- Uma transformação expansora de um espaço compacto pode ser um homeomorfismo? A resposta é sim, mas só se o espaço compacto tiver cardinalidade finita! Arranjar um exemplo não é difícil. Por outro lado, mostrar que um espaço compacto e infinito não admite homeomorfismos expansores não é trivial...

Expansão decimal. Seja F a função $x \mapsto 10 \cdot x$ definida na reta real. Mostre que ela “induz” uma transformação contínua $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ do círculo, por meio de

$$f(x + \mathbb{Z}) = F(x) + \mathbb{Z}$$

(ou seja, mostre que esta expressão é independente do representante x escolhido para o ponto $x + \mathbb{Z}$ do círculo, e mostre que f é contínua).

Mostre que f é expansora, se o círculo é munido da métrica standard herdada da métrica euclidiana da reta. (Observe que, se $d(x, x') < 1/20$, então $d(f(x), f(x')) = 10 \cdot d(x, x')$...)

Seja $x = 0, x_1x_2x_3\dots$, com $x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, uma representação decimal de $x \in [0, 1[$, pensado como um ponto de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Mostre que $f(0, x_1x_2x_3\dots + \mathbb{Z}) = 0, x_2x_3x_4\dots + \mathbb{Z}$.

Procure os pontos fixos, periódicos, e pré-periódicos de f .

Calcule a cardinalidade de $\text{Fix}(f^n)$. Mostre que os pontos periódicos de f são densos no círculo.

Um número x é dito "periódico" se a sua representação decimal é da forma

$$x = b_nb_{n-1}\dots b_0.x_1x_2\dots x_n(a_1a_2\dots a_k)$$

Existem número não periódicos? Quantos? Sabe fazer exemplos?

Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, existem $x' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e um tempo $n \geq 0$ tais que

$$d(x, x') < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(f^n(x), f^n(x')) > 1/4$$

ou seja, que a transformação f tem a propriedade de dependência sensível das condições iniciais. (Observe que, se $d(x, x') < 1/2 \cdot 10^{-n}$, então $d(f^n(x), f^n(x')) = 10^n \cdot d(x, x') \dots$)

Mostre que, para todo intervalo não vazio $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, existe um tempo $n \geq 0$ tal que $f^k(I) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo tempo $k \geq n$. Deduza que f é topologicamente mixing.

Seja $b = (b_1b_2\dots b_n)$ uma palavra finita no alfabeto $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Prove que existe um conjunto residual de pontos $x \in [0, 1[$ tais que a representação em base 10 de x contém a palavra b uma infinidade de vezes (no sentido em que, se x é da forma $0.x_1x_2x_3\dots x_k\dots$, existem uma infinidade de $k \geq 0$ tais que $(x_{k+1}x_{k+2}\dots x_{k+n}) = (b_1b_2\dots b_n)$). Prove que existe um conjunto residual de pontos $x \in [0, 1[$ tais que a representação em base 10 de x contém todas as palavras finitas no alfabeto $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ uma infinidade de vezes. Dê exemplos.

(Emile Borel provou um teorema muito mais forte: o conjunto dos números $x \in [0, 1[$ tais que a representação em base 10 de x contém cada palavra finita b com frequência assintótica igual a 1 sobre o comprimento de b tem probabilidade (medida de Lebesgue) igual a 1. Veja a observação sobre números normais no capítulo sobre a ergodicidade.)

Transformações expansoras do círculo Seja λ um inteiro tal que $|\lambda| > 1$. A *transformação expansora standard* de grau λ é a transformação $\times \lambda : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto \lambda \cdot x + \mathbb{Z}$$

A transformação $\times \lambda$ é topologicamente mixing. De fato, todo aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ contém um intervalo I de comprimento $|I| > |\lambda|^{-n}$, para algum n suficientemente grande, e $(\times \lambda)^k(I) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo tempo $k \geq n$.

A transformação $\times \lambda$ tem um conjunto enumerável e denso de pontos periódicos.

A transformação $\times \lambda$ é um fator do shift de Bernoulli sobre um alfabeto de $|\lambda|$ letras (e o conjunto onde a semiconjugação falha de ser injetiva é pequeno!).

As transformações expansoras, além de pontos periódicos densos e de órbitas densas, admitem trajetórias que se acumulam em conjuntos bem mais complicados. Por exemplo, a transformação $\times 3$ preserva o conjunto de Cantor standard K (pensado como um subconjunto do círculo), i.e. $\times 3(K) \subset K$. Agora, a restrição $\times 3|_K : K \rightarrow K$ é topologicamente conjugada ao shift de Bernoulli $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ sobre o alfabeto $\{0, 2\}$ (quase!, de fato é um fator, pois a semiconjugação óbvia não é injetiva no ponto $(2, 2, 2, 2, \dots)$, que é igual a $(0, 0, 0, 0, \dots) \bmod 1$), que é topologicamente mixing, logo existem (e muitos!) pontos de $K \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ cuja $\times 3$ -órbita é densa em K .

Transformações expansoras não lineares. Seja agora $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma transformação expansora de classe $\mathcal{C}^1$, ou seja tal que um seu levantamento $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$. Sendo F' uma função periódica de período um, a expansividade de f implica que existe $\mu > 1$ tal que $|F'(x)| > \mu$ em todo $x \in \mathbb{R}$, e que F' não muda de sinal. Em particular, o grau de f tem módulo > 1 , porque

$$|\deg(f)| = |F(1) - F(0)| = \left| \int_0^1 F'(t) dt \right| = \int_0^1 |F'(t)| dt > 1.$$

Theorem 12.1. *Toda transformação expansora $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de classe $\mathcal{C}^1$ e grau λ é topologicamente conjugada à transformação expansora standard $\times \lambda$.*

Proof. Por simplicidade, assumimos que λ seja um inteiro > 1 . A ideia é construir uma conjugação entre os conjuntos das pré-imagens de um ponto fixo pelas iteradas de f e $\times\lambda$, e aproveitar do fato deles ser densos para estender a conjugação em todo o círculo. Sejam $x_k^i = i/\lambda^k$ com $i = 0, 1, \dots, \lambda^k - 1$. Então $\times\lambda(x_k^i) = x_{k-1}^{i'}$, onde i' é o único inteiro entre 0 e $\lambda^{k-1} - 1$ tal que $i = i' \bmod \lambda^{k-1}$. Sejam F um levantamento de f , e p o ponto fixo de F . Como F é estritamente crescente e $F(p+1) = p + \lambda$, existem $p = y_1^0 < y_1^1 < \dots < y_1^{\lambda-1} < p+1$ tais que $F(y_1^i) = p + i$. Indutivamente (em k) definimos os pontos y_k^i com $i = 0, 1, \dots, \lambda^k - 1$ tais que

$$y_{k-1}^i = y_k^{\lambda i} < y_k^{\lambda i+1} < \dots < y_k^{\lambda i+\lambda-1} < y_k^{\lambda i+\lambda} = y_{k-1}^{i+1}$$

e $F(y_k^i) = y_{k-1}^{i'}$, onde i' é o único inteiro entre 0 e $\lambda^{k-1} - 1$ tal que $i = i' \bmod \lambda^{k-1}$. Para cada intervalo $I_k^i = \pi([y_k^i, y_k^{i+1}])$ temos que $f^k(I_k^i) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Como f é expansora, i.e. existe $\mu > 1$ tal que $|F'(x)| > \mu$ em todo ponto x , cada um desses intervalos tem comprimento $|I_k^i| < \mu^{-k}$, e portanto a família de pontos $\{y_k^i\}_{k \in \mathbb{N}, i=0,1,\dots,\lambda^k-1}$ é densa em $[p, p+1]$. A função

$$H : \{y_k^i\}_{k \in \mathbb{N}, i=0,1,\dots,\lambda^k-1} \rightarrow \{x_k^i\}_{k \in \mathbb{N}, i=0,1,\dots,\lambda^k-1}$$

definida por $H(y_k^i) = x_k^i$ é estritamente monótona. A densidade dos pontos $\{y_k^i\}$ e $\{x_k^i\}$ permite estender H como um homeomorfismo $H : [p, p+1] \rightarrow [0, 1]$, logo como um homeomorfismo $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Vê-se facilmente que $\times\lambda \circ h = h \circ f$. $\square$

Em particular, dada uma transformação expansora do círculo $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de classe $\mathcal{C}^1$, toda transformação g suficientemente próxima de f na topologia $\mathcal{C}^1$ é topologicamente conjugada a f , porque a expansividade é uma condição aberta, e o grau é localmente constante (pois é uma função contínua com valores inteiros). Acabamos de provar o seguinte

Theorem 12.2. *As transformações expansoras do círculo de classe $\mathcal{C}^1$ são $\mathcal{C}^1$ -estruturalmente estáveis.*

12.6 Automorfismos hiperbólicos do toro

A expansividade não é necessária para induzir o mixing topológico. Foi o Dmitri Victorovich Anosov que, a partir dos exemplos geométricos dos fluxos geodésicos em superfícies de curvatura negativa estudados por Hadamard, Hopf, ..., descobriu nos anos sessenta uma classe muito grande de transformações "desordenadas" e estruturalmente estáveis. O protótipo é a família dos automorfismos hiperbólicos do toro.

O toro de dimensão dois é o espaço quociente $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por uma matriz 2×2 com coeficientes inteiros, induz uma aplicação contínua $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, definida por

$$f(x + \mathbb{Z}^2) = A(x) + \mathbb{Z}^2$$

Se a matriz A tem determinante ± 1 , então também a sua inversa tem coeficientes inteiros, logo respeita o retículo $\mathbb{Z}^2$, e portanto f é invertível, é um "automorfismo" do toro. A existência de tais homeomorfismos é devida a razões aritméticas: as linhas e as colunas destas matrizes são pares de inteiros relativamente primos.

Os automorfismos do toro que preservam a orientação, i.e. induzidos por matrizes com determinante $+1$, formam o grupo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Um exemplo é o automorfismo f induzido pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

É imediato verificar que, se $x \in \mathbb{T}^2$ é um ponto periódico, então as suas coordenadas são racionais. Por outro lado, o conjunto dos pontos do toro cujas coordenadas são múltiplos inteiros de $1/n$ é um conjunto finito e $+$ -invariante. Isto implica que todos os pontos com coordenadas racionais

são periódicos, e portanto que os pontos periódicos são densos. Também, é possível mostrar que $|\text{Per}_n(f)| = |\det(A^n - \text{id})|$. Os autovalores de A são

$$\lambda_+ = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_- = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Como A é simétrica, os vetores próprios são ortogonais. Resulta que $\mathbb{R}^2$ é a soma direta $E_+ \oplus E_-$ dos espaços próprios de A . A transformação A estica os vetores de E_+ pelo fator λ_+ e contrai os vetores de E_- pelo fator λ_- . Observe que f preserva a área, pois $\lambda_+ \cdot \lambda_- = 1$, mas não preserva as "formas". As projeções das linhas $x + E_{\pm} \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{T}^2$ contêm as órbitas de uma translação minimal do toro (porque $\lambda_{\pm}$ são irracionais) e portanto são densas. Seja R um pequeno quadrado com lados de comprimento ε paralelos às linhas $E_{\pm}$. A imagem $f^n(R)$ é um "retângulo" com lados $\varepsilon \cdot \lambda_+^n$ e $\varepsilon \cdot \lambda_-^n$, paralelos às linhas $E_{\pm}$, respetivamente. Quando n cresce, o complementar $\mathbb{T}^2 \setminus f^n(R)$ não contém bolas de raio maior de ε , onde $\varepsilon \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo $f^n(R)$ intersesta estavelmente cada aberto não vazio do toro. Isto mostra que f é topologicamente mixing. O resultado realmente interessante é o teorema de Anosov, que diz que f é $\mathcal{C}^1$ -estruturalmente estável.

ex: Show that for any relatively prime integers p and q there exists a unimodular integer matrix with (p, q) as a column (or as a row), i.e.

$$A = \begin{pmatrix} p & n \\ q & m \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

13 Dimensions, fractals and entropy

13.1 Dimensions of metric spaces

Conjunto ε -denso e ε -separados. The following notions of the approximate massiveness of a metric space (X, d) are due to Kolmogorov's school³².

An ε -covering of (X, d) is a covering of $X \subset \cup_{\alpha} C_{\alpha}$ by subsets of diameters $\text{diam}(C_{\alpha}) < 2\varepsilon$. Call $C_{\varepsilon}(X, d)$ the minimal cardinality of an ε -covering of X .

An ε -net for (X, d) is a collection $A \subset X$ of points such that any point of X is at a distance not exceeding ε from some point of A , i.e. $X \subset \cup_{a \in A} \{x \in X \text{ s.t. } d(x, a) < \varepsilon\}$. Call $N_{\varepsilon}(X, d)$ the minimal cardinality of an ε -net for X . If X is a centered space (any subset of diameter $2r$ is contained in a ball of radius r centered in some point of X) then $N_{\varepsilon}(X, d) = C_{\varepsilon}(X, d)$.

A subset $B \subset X$ is said ε -separated if its points are a distance greater than ε from each other. Call $S_{\varepsilon}(X, d)$ the maximal cardinality of a set of ε -separated points inside X .

These three definitions make sense if the above extremal cardinalities are finite for every $\varepsilon > 0$, and it is not difficult to see that this happens simultaneously. The class of metric spaces with this property is called the class of *totally bounded sets* and the main examples are compact spaces.

The base 2 logarithms of these quantities have interpretations related to the probabilistic theory of transmission of signal, and are called

$$\begin{aligned} \log_2 C_{\varepsilon}(X, d) & \quad \text{minimal (or absolute) } \varepsilon\text{-entropy of } (X, d) \\ \log_2 N_{\varepsilon}(X, d) & \quad \varepsilon\text{-entropy of } (X, d) \\ \log_2 S_{\varepsilon}(X, d) & \quad \varepsilon\text{-capacity of } (X, d) \end{aligned}$$

ex: Show that an ε -net defines an ε -covering, and any ε -covering determines a 2ε -net, so that

$$C_{\varepsilon}(X, d) \leq N_{\varepsilon}(X, d) \leq C_{2\varepsilon}(X, d)$$

ex: Show that a maximal ε -separated set is a ε -net, and that any ε -ball centered at a point of a minimal ε -net cannot contain more than one point of a 2ε -separated set, so that

$$S_{2\varepsilon}(X, d) \leq N_{\varepsilon}(X, d) \leq S_{\varepsilon}(X, d)$$

Box-counting dimensions. The *upper* and *lower box counting dimension* (also known as *Minkowski dimensions* or *metric dimensions*) of the metric space (X, d) are defined as

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_b(X) &= \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} -\frac{\log N_{\varepsilon}(X, d)}{\log \varepsilon} \\ \underline{\dim}_b(X) &= \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} -\frac{\log N_{\varepsilon}(X, d)}{\log \varepsilon} \end{aligned}$$

We get the same values if we substitute $S_{\varepsilon}(X, d)$ or $C_{\varepsilon}(X, d)$ to $N_{\varepsilon}(X)$ in the above formulas (just compare the counting functions at the values ε and 2ε).

For reasonable self-similar metric spaces the two limits coincide, and their common value $\dim_b(X)$ is simply called *box counting dimension*.

ex: Show that the box-counting dimension of the n -dimensional cube $[0, 1]^n$ is what you expect, namely $\dim_b([0, 1]^n) = n$.

ex: Consider the interval $[0, 1]$ equipped with the Euclidean metric d , and define new metrics $d_{\alpha}(x, y) = d(x, y)^{\alpha}$, for $\alpha \leq 1$. Compute the box-counting dimension of $([0, 1], d_{\alpha})$.

³²A.N. Kolmogorov and V.M. Tihomirov, ε -entropy and ε -capacity of sets in functional spaces, *Uspekhi Mat. Nauk* **14** (1959), 3-86. [Translated in *Amer. Math. Soc. Transl.*, series 2, **17** (1961), 277-364.]

13.2 Fractals

The word “fractal” (from the Latin FRACTUS) was coined by [Benoît Mandelbrot](#) in 1975 [Ma75] to generically denote a family of self-similar, scale-invariant metric spaces with non-integer box-counting (or other) dimension. Many such examples were already known one century before ...

Drawing fractals. The page <http://homepages.ulb.ac.be/~dgonze/FRACTALS/fractals.html> by Didier Gonze contains some simple MATLAB codes to draw the most famous fractals.

Much more sophisticated figures may be found in Jos Leys’ page [Mathematical Imagery](#), and have been created using the proprietary software [UltraFractal](#).

e.g. Peano curves. The dimension is not preserved under continuous maps! In 1890 Giuseppe Peano³³ discovered the existence of “space-filling curves”, continuous maps of the interval $[0, 1]$ onto the unit square $[0, 1] \times [0, 1]$.

Here is a modern construction. The middle-third Cantor set $K \subset [0, 1]$ is homeomorphic to its powers, in particular to $K \times K$. Since there exists a continuous map of K onto $[0, 1]$, one can define a continuous map f of K onto the unit square $[0, 1] \times [0, 1]$. This map can be extended (the complement $[0, 1] \setminus K$ is a countable union of open intervals (a_n, b_n) , where we may take, for example, the affine segment joining $f(a)$ to $f(b)$) to a continuous map of the unit interval onto the unit square.

e.g. Middle-third Cantor set and devil’s staircase.



Seven stages of the construction of the Cantor set and graph of the Cantor function
(from http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set and http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function)

e.g. Sierpinski gasket.

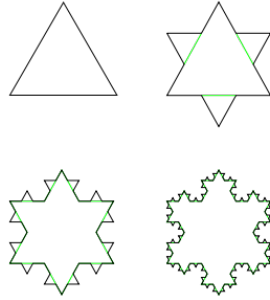


Five stages of the construction of the Sierpinski gasket
(from http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_gasket)

e.g. von Koch snowflake. The *von Koch snowflake* is a continuous nowhere differentiable curve³⁴. The box-counting dimension is $\log 4 / \log 3$.

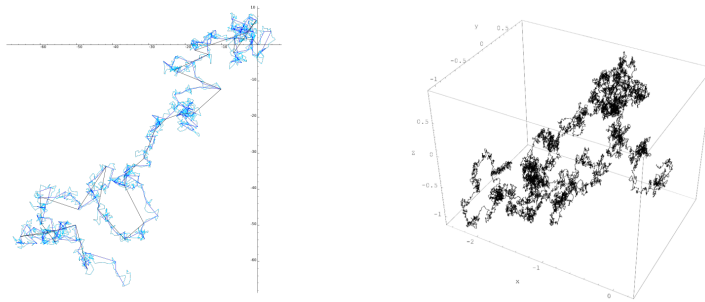
³³G. Peano, Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane”, *Mathematische Annalen* **36** (1) (1890), 157-160. doi: [10.1007/BF01199438](https://doi.org/10.1007/BF01199438)

³⁴Helge von Koch, Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire, *Archiv för Matemat., Astron. och Fys.* **1** (1904), 681- 702.



Four stages of the construction of the von Koch snowflake
(from http://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake)

e.g. Brownian trajectories. Other continuous curves which are not differentiable are “typical” paths of a Brownian motion.



Trajectories of a random walk on the plane and a Wiener process in 3-dimensional space
(from http://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_motion)

13.3 Self-similarity and iterated function systems

Iterated Function Systems. An *iterated function system (IFS)* is a finite collection

$$f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \dots, \quad f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

of contractions of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. An *invariant set* for the IFS is a compact subset $K \subset \mathbb{R}^n$ such that

$$K = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \dots \cup f_m(K)$$

Let $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ be the space of non-empty compact subsets $X \subset \mathbb{R}^n$, equipped with the *Hausdorff metric*

$$\begin{aligned} d_H(X, Y) &:= \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\} \\ &= \inf \{ \varepsilon > 0 \text{ s.t. } X \subset Y_\varepsilon \text{ and } Y \subset X_\varepsilon \} \end{aligned}$$

(above, $C_\varepsilon = \cup_{c \in C} \{x \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } d(x, c) < \varepsilon\}$ denotes the ε -neighborhood of a subset $C \subset \mathbb{R}^n$). One can prove that $(\text{Comp}(\mathbb{R}^n), d_H)$ is a complete space.

The *Hutchinson operator*³⁵ attached to an iterated function system $(f_1, f_2 \dots f_m)$ is the operator $H : \text{Comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$, defined as

$$H(X) = \cup_{k=1}^m f_k(X),$$

is a contraction of $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$. There follows from the Banach fixed point theorem 7.4 that

Theorem 13.1. *There exists a unique non-empty compact subset $K \subset \mathbb{R}^n$ such that $H(K) = K$. Moreover, $K = \lim_{n \rightarrow \infty} H(C)$ for any non-empty compact set $C \subset \mathbb{R}^n$.*

³⁵J.E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* **30**, no. 5 (1981), 713-747.

The “chaos game” to plot the attractor. To plot the attractor, one can start with a (small) set of points, apply randomly the contractions f_k ’s a large number of times, and forget the first images ...

ex: Show that the middle-third Cantor set is the invariant set for the contractions

$$x \mapsto \frac{1}{3}x \quad x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

on the real line.

Sierpinski gasket.

von Koch snowflake. The snowflake may be defined as the invariant set $K \subset \mathbb{C}$ for the IFS

$$z \mapsto az \quad z \mapsto a + (1-a)z$$

with $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{\sqrt{12}}$.

De Rham’s curves. ³⁶

Paul Lévy’s dragon curve. The *Lévy’s dragon*, or *Lévy C curve*, is a curve with non-empty interior ³⁷

$$z \mapsto az \quad z \mapsto a + \bar{a}z$$

with $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

Leaves. Using affine contractions of the plane $\mathbb{R}^2$,

$$f_k : x \mapsto A_k x + \alpha_k$$

with $A_k \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ and $\alpha_k \in \mathbb{R}^2$, playing with their parameters, Michael Barnsley was able to reproduce patterns similar to the one observed in ferns.

Below are different kinds of *Barnsley fern*.



Pictures taken from http://en.wikipedia.org/wiki/Barnsley's_fern

13.4 Kleinian groups

[MSW02] ...

<http://www.geogebra.org/student/m25636>

to be done?

13.5 Entropia topológica

O fenómeno da dependência sensível das condições iniciais por ser “quantificado”, e isto produz um importante invariante topológico chamado “entropia topológica”.

³⁶G. de Rham, Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles, *Rend. Sem. Mat. Torino* **16** (1957), 101-113.

³⁷P. Lévy, Les courbes planes ou gauches et les surfaces composées de parties semblables au tout, *J. Ecole Polytechn.* (1938), 227-247, 249-291.

Entropia topológica. Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação contínua do espaço topológico compacto X . Se d é uma métrica que induz a topologia de X , podemos definir uma família de métricas d_n , dependentes do tempo $n \geq 0$, por meio de

$$d_n(x, y) := \max_{0 \leq k \leq n} d(f^k(x), f^k(y))$$

Ou seja, $d_n(x, y)$ é “a distância máxima distância entre as n -trajetórias de x e y ”.

Se pensamos em $\varepsilon > 0$ como a precisão dos nossos instrumentos, $N_\varepsilon(X, d_n)$ representa “o número mínimo de n -órbitas necessárias para descrever as órbitas de todos os pontos de X com erro $\leq \varepsilon$ ”, e $S_\varepsilon(X, d_n)$ representa “o número máximo de n -órbitas que os nossos instrumentos com sensibilidade ε conseguem distinguir”. Se X é compacto, estes números são finitos, e crescem quando n cresce e quando ε decresce.

De facto, é imediato ver que

$$C_\varepsilon(X, d_{n+m}) \leq C_\varepsilon(X, d_n) \cdot C_\varepsilon(X, d_m)$$

Portanto, a sequência $c_n = \log C_\varepsilon(X, d_n)$ é subaditiva, ou seja, satisfaz $c_{n+m} \leq c_n + c_m$.

Theorem 13.2 (Subadditive sequence lemma). *Let $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a quasi-subadditive real sequence, i.e. a sequence such that*

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m + c$$

for any $n, m \in \mathbb{N}$ and some $c \geq 0$. Then there exists the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Proof. A existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$ é equivalente à existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/n$, onde $b_n = a_n + c$. A sucessão (b_n) é subaditiva, ou seja satisfaz $b_{n+m} \leq b_n + b_m$, donde $b_n \leq nb_1$. Portanto, a sucessão (b_n/n) é limitada, logo existe $\lambda = \varliminf_{n \rightarrow \infty} b_n/n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_N/N < \lambda + \varepsilon$. Seja agora $n = kN + r$, com $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < N$, e seja $B = \max_{1 \leq i < N} b_i$. Utilizando a subaditividade temos

$$\begin{aligned} b_n/n &\leq (b_{kN} + b_r)/n \leq (kb_N + b_r)/n \\ &\leq b_N/N + b_r/n \leq \lambda + \varepsilon + B/n \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ε , a desigualdade acima implica que $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} b_n/n \leq \lambda$, e portanto que o limite $\lim b_n/n$ existe e é igual a λ . $\square$

A entropia topológica da transformação $f : X \rightarrow X$ é a taxa de crescimento exponencial de $C_\varepsilon(X, d_n)$ e $S_\varepsilon(X, d_n)$, ou seja,

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 C_\varepsilon(X, d_n)}{n} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 S_\varepsilon(X, d_n)}{n} \end{aligned}$$

A notação sugere que o limite iterado não depende da métrica, mas apenas da topologia de X e da transformação f .

Theorem 13.3. *A entropia topológica não depende da métrica utilizada na sua definição, mas só da topologia de X e da transformação f . Em particular, $h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(g)$ se f e g são topologicamente conjugadas.*

Proof. Sejam d e d' duas métricas equivalentes que geram a topologia de X . Sendo X compacto, a transformação identidade é um homeomorfismo uniformemente contínuo de (X, d) sobre (X, d') . Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta'(\varepsilon)$ tal que se $d'(x, y) < \delta'(\varepsilon)$ então $d(x, y) < \varepsilon$. Isto implica que $C_\varepsilon(X, d_n) \leq C_{\delta'(\varepsilon)}(X, d'_n)$. Por outro lado, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon)$ tal que se $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$ então $d'(x, y) < \varepsilon$. Isto implica que $C_\varepsilon(X, d'_n) \leq C_{\delta(\varepsilon)}(X, d_n)$. As duas desigualdades provam que a entropia topológica não depende da métrica.

Seja $h : X \rightarrow Y$ é uma conjugação topológica entre $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$. Se d' é uma métrica que induz a topologia de Y , então $d(x, y) = d'(h(x), h(y))$ é uma métrica que induz a topologia de X , e a conjugação $h : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é uma isometria. Isto implica que $C_\varepsilon(X, d_n) = C_\varepsilon(Y, d'_n)$. $\square$

Além disso, não é difícil provar que, como esperado, se g é um fator de f então $h_{\text{top}}(g) \leq h_{\text{top}}(f)$.

Exercícios.

- Mostre que as contrações e as isometrias têm entropia topológica igual a zero.
- Calcule a entropia topológica da multiplicação $x + \mathbb{Z} \mapsto d \cdot x + \mathbb{Z}$ quando $d = 2, 3, 4, \dots$. Deduza que a entropia topológica de uma transformação expansora do círculo $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ é

$$h_{\text{top}}(f) = \log(\deg(f)) .$$

- Seja $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ o deslocamento de Bernoulli num alfabeto de z letras. Use a métrica

$$d(x, y) = z^{-\min\{k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x_k \neq y_k\}}$$

em $\Sigma^+ = \{1, 2, \dots, z\}^{\mathbb{N}}$ para mostrar que

$$h_{\text{top}}(\sigma) = \log z .$$

14 Ergodicity and convergence of time means

14.1 Ergodicity

Ergodic maps. Let $f : X \rightarrow X$ be an endomorphism of the measurable space $(X, \mathcal{E})$. The invariant probability measure μ is said *ergodic* if any of the following equivalent conditions is satisfied:

i) for any observable $\varphi \in L^1(\mu)$, the time average

$$\bar{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(f^k(x))$$

exists and is equal to the mean value $\int_X \varphi d\mu$ for μ -almost any $x \in X$,

ii) any invariant event $A \in \mathcal{E}$ has probability $\mu(A) = 0$ or 1 , namely the invariant σ -algebra $\mathcal{E}_f$ is equal to the trivial σ -algebra $\mathcal{N}$ generated by events of zero measure,

iii) any invariant (measurable) observable φ is constant μ -a.e.

If this happens, one also says that f is an *ergodic endomorphism* of the probability space $(X, \mathcal{E}, \mu)$.

Condition i) is the physical meaning of ergodicity, as it says that “time averages are almost everywhere constant and equal to space averages”. In particular, taking φ equal to the characteristic function of any event A , almost any trajectory spend in A a fraction of time asymptotically proportional to $\mu(A)$, as dreamed by Boltzmann in his ergodic hypothesis.

Condition ii) is what one usually check in order to prove ergodicity of a probability measure. To see that i) $\Rightarrow$ ii), let A be an invariant event, and φ its characteristic function. Invariance of A implies that φ is invariant, hence that $\bar{\varphi} = \varphi$. There follows from i) that $\mu(A) = \int_X \varphi d\mu = \varphi(x)$ for some $x \in X$, hence that $\mu(A) = 0$ or 1 , the only values of characteristic functions.

Conditions ii) and iii) are clearly equivalent, since any invariant event defines an invariant function (its characteristic function), and conversely level sets of invariant functions are invariant events.

Finally, in order to show that iii) $\Rightarrow$ i), let $\varphi \in L^1(\mu)$ be an integrable observable. According to the Birkhoff-Khinchin ergodic theorem, the time average $\bar{\varphi}(x)$ exists for μ -almost any $x \in X$ and $\int_X \bar{\varphi} d\mu = \int_X \varphi d\mu$. Since $\bar{\varphi}$ is invariant mod 0, by iii) it is constant with probability one. This implies that $\bar{\varphi}(x) = \int_X \varphi d\mu$ for μ -almost any $x \in X$.

Warning. Ergodic dynamical systems exist, and some are listed below. On the other side, to show that a physically interesting system is ergodic turns out to be extremely difficult, and very few examples are known. The most famous are some “billards”, systems of hard spheres inside a billard table interacting via elastic collisions, studied by Yakov Sinai in the sixties...

Ergodic measures as extremal measures. We already saw that the space Prob_f of invariant probability measure is a convex and closed subset of the compact space Prob . Here, we observe that ergodic measures are the “indecomposable” elements of this set.

Proposition. *Ergodic invariant measures are the extremals of Prob_f . Namely, an invariant measure μ is ergodic iff it cannot be written as*

$$\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_0$$

where $t \in]0, 1[$ and μ_0 and μ_1 are distinct invariant measures.

proof. First, observe that if ν is an invariant measure which is absolutely continuous w.r.t. the ergodic measure μ , then $\nu = \mu$. Indeed, one easily verifies that the Radon-Nykodim derivative $\rho = d\nu/d\mu$ is an invariant function, and ergodicity of μ implies that it is constant and equal to one μ -a.e. Now, let μ be an ergodic measure, and assume that $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_0$ for some $t \in]0, 1[$. Since both μ_0 and μ_1 are absolutely continuous w.r.t. μ , they coincide with μ , hence, are not

different. To prove the converse, assume that the invariant measure μ is not ergodic, hence there exists an invariant event C such that $0 < \mu(C) < 1$. Let μ_0 and μ_1 be the "conditional probability measures" defined as $\mu_1(A) = \mu(A \cap C) / \mu(C)$ and $\mu_0(A) = \mu(A \cap C^c) / \mu(C^c)$. Clearly they are different, both are invariant, and $\mu = \mu(C) \mu_1 + (1 - \mu(C)) \mu_0$. $\square$

Ergodic decomposition. In the first lines of the above proof, we actually showed that any two ergodic invariant measure μ and ν are either equal or "mutually singular", namely, if $\mu \neq \nu$ then there exists a measurable set A such that $\mu(A) = \nu(A^c) = 1$ and $\mu(A^c) = \nu(A) = 0$. This suggests that maybe any invariant measure could be "disintegrated" along a partition whose atoms are the support of all the different ergodic measure, in other word that μ is a "convex combination", namely an integral, of the ergodic measures. This is true, sometimes, but both its statement and proof are quite technical: we just quote the result.

Ergodic decomposition theorem. *Let $f : X \rightarrow X$ be a continuous transformation of the compact metrizable space X . There exists a partition $\mathcal{P} = \{P_e\}_{e \in E}$ of X (modulo sets of zero measure) into invariant measurable sets indexed by a Lebesgue space E , and a measurable map $E \ni e \mapsto \mu_e \in \text{Prob}_f$ with values in the space of ergodic Borel probability measures and with the property that $\mu_e(P_e) = 1$ for any $P_e \in \mathcal{P}$, such that any invariant Borel probability measure μ can be written as an integral*

$$\mu = \int_E \mu_e d\bar{\mu}(e)$$

where $\bar{\mu}$ is some probability measure on E .

Observe that the above theorem contains the statement that any continuous transformation of a compact space admits at least one ergodic Borel probability measure.

14.2 Examples of ergodic maps

Bernoulli shift. *Let $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ be the Bernoulli shift over the alphabet $X = \{1, 2, \dots, z\}$, and p any probability on X . The Bernoulli invariant measure μ defined by p is ergodic.* First observe that, given two centered cylinders C_α and C_β , the definition of μ implies that there exists a time $n \geq 1$ such

$$\mu(C_\alpha \cap \sigma^{-k}(C_\beta)) = \mu(C_\alpha) \cdot \mu(\sigma^{-k}(C_\beta)) = \mu(C_\alpha) \cdot \mu(C_\beta)$$

whenever $k \geq n$. Indeed, one can take $n = |\alpha| + 1$, and the above reflect the "independence" of the different trials encoded in the construction of the Bernoulli measure. By additivity, the same holds true for any couple of elements of $\mathcal{A}$, the algebra made of finite unions of centered cylinders. Now, assume that $A \in \mathcal{B}$ is invariant. Since any Borel set $A \in \mathcal{B}$ can be approximated in measure by an elements of $\mathcal{A}$, given any $\varepsilon > 0$ one can find an $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ such that $\mu(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$. Using the above result, we can find an $n \geq 1$ such that

$$\mu(A_\varepsilon \cap \sigma^{-n}(A_\varepsilon)) = \mu(A_\varepsilon) \cdot \mu(\sigma^{-n}(A_\varepsilon)) = \mu(A_\varepsilon)^2$$

where the last equality comes from invariance of μ . Then, observe that the symmetric difference between $A \cap \sigma^{-n}(A)$ and $A_\varepsilon \cap \sigma^{-n}(A_\varepsilon)$ is contained in $(A \Delta A_\varepsilon) \cup \sigma^{-n}(A \Delta A_\varepsilon)$. This gives

$$\begin{aligned} |\mu(A \cap \sigma^{-n}(A)) - \mu(A_\varepsilon \cap \sigma^{-n}(A_\varepsilon))| &\leq \mu(A \Delta A_\varepsilon) + \mu(\sigma^{-n}(A \Delta A_\varepsilon)) \\ &\leq 2 \cdot \mu(A \Delta A_\varepsilon) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

which, together with

$$|\mu(A)^2 - \mu(A_\varepsilon)^2| \leq 2 \cdot \mu(A \Delta A_\varepsilon) < 2\varepsilon$$

gives

$$|\mu(A) - \mu(A)^2| < 4\varepsilon$$

Since $\varepsilon > 0$ was arbitrary, we just showed that the measure of any invariant Borel set A satisfies $\mu(A) = \mu(A)^2$, hence it is either 0 or 1. Observe that this proof is very similar to the argument in the Kolmogorov zero-one law for tail events in the theory of stochastic processes.

Now, let φ_k be the characteristic function of $\{x \in \Sigma^+ \text{ s.t. } x_1 = k\}$. The observables $\varphi_k \circ \sigma^n$ form a sequence of independent and identically distributed random variables with mean p_k . One can interpret the event $\{\varphi_k \circ \sigma^n = 1\} = \{x \in \Sigma^+ \text{ s.t. } x_n = k\}$ as "success in the n -th trial", where the probability of success in each trial is p_k . The Birkhoff-Khinchin ergodic theorem, together with the ergodicity of μ , gives the result that

$$\mu \left\{ x \in \Sigma^+ \text{ s.t. } \frac{1}{n+1} (\varphi_k + \varphi_k \circ \sigma^1 + \varphi_k \circ \sigma^2 + \dots + \varphi_k \circ \sigma^n)(x) \rightarrow p_k \right\} = 1$$

which is the Kolmogorov strong law of large numbers.

Expanding endomorphisms of the circle. Let $\times \lambda : x + \mathbb{Z} \mapsto \lambda \cdot x + \mathbb{Z}$, with $\lambda \in \mathbb{Z}$ and $|\lambda| > 1$, be an expanding endomorphism of the circle. Lebesgue probability measure ℓ is an ergodic measure for $\times \lambda$. To prove ergodicity, let A be an invariant Borel set, and assume that $\ell(A) < 1$. We must show that the complement $B = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus A$, that has positive measure, has indeed probability one. The argument goes as follows: if $\ell(B) > 0$, then, according to Lebesgue density theorem, B contains nearly all the mass of some nonempty interval. Namely, given any $\varepsilon > 0$, we can find an open interval I_n with length $\ell(I_n) = |\lambda|^{-n}$ and centered at a density point of B such that

$$\ell(B \cap I_n) > (1 - \varepsilon) \cdot \ell(I_n)$$

Now observe that the restriction $(\times \lambda)^n|_{I_n}$ is an injective map sending I_n onto the circle minus one point, in particular, $\ell((\times \lambda)^n(I_n)) = 1$. Since $\times \lambda$ uniformly dilates lengths by a factor $|\lambda|$, there follows that

$$\frac{\ell((\times \lambda)^n(B \cap I_n))}{\ell((\times \lambda)^n(I_n))} = \frac{\ell(B \cap I_n)}{\ell(I_n)}$$

Since, moreover, A is invariant, its complement B is $+$ -invariant, and this implies that the left-hand side above is equal to $\ell(B)$. There follows that

$$\ell(B) = \frac{\ell(B \cap I_n)}{\ell(I_n)} > (1 - \varepsilon)$$

and, since ε was arbitrary, that $\ell(B) = 1$.

14.3 Normal numbers

Normal numbers. In particular, Lebesgue measure ℓ is ergodic w.r.t. multiplication by 10 in the unit circle. Identify the circle with the interval $[0, 1[$, and let $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ be the base 10 expression of a point of the circle, which is unique outside a subset of Lebesgue measure zero. For $k = 0, 1, 2, \dots, 9$, let φ_k be the characteristic function of the interval $[k/10, (k+1)/10[$, i.e. the observable which is equal to $\varphi_k(x) = 1$ if $x_1 = k$ and $\varphi_k(x) = 0$ otherwise. The time mean of φ_k is

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \varphi_k((\times 10)^j(x)) = \frac{1}{n+1} \cdot \text{card} \{1 \leq j \leq n+1 \text{ s.t. } x_j = k\}$$

that is the number of k 's within the first $n+1$ digits of the decimal expansion of x . The limit as $n \rightarrow \infty$, if it exists, is the "asymptotic frequency" of k 's contained in the expansion of x . Ergodicity of μ implies that there exists a set $A_k \subset [0, 1[$ of Lebesgue measure one where the limit $\bar{\varphi}_k(x)$ exists and is equal to $\int \varphi_k d\ell = 1/10$. Since the intersection $A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_9$ has still probability one, the result is that Lebesgue almost any number $x \in [0, 1[$ contains in its decimal expansion any of the letters $0, 1, 2, \dots, 9$ with asymptotic frequency $1/10$.

Actually, one could repeat the same argument considering any finite word $b = b_1 b_2 \dots b_n$ in the alphabeth $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, and show that there is a set $A_b \subset [0, 1[$ of probability one such that the base 10 expansion of any $x \in A_b$ contains the word b with asymptotic frequency 10^{-n} . A real number x whose base 10 expansion contains any finite word with the right asymptotic frequency is called *10-normal* (meaning "normal in base 10"). Since finite words in the alphabeth $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ are countable, and a countable union of zero measure sets still has zero measure, we just showed that *Lebesgue almost any real number x is 10-normal*. This observation, and indeed the stronger

statement that *Lebesgue almost any real number is normal in every base $m \geq 2$* , is due to Emile Borel³⁸.

It is not so easy to give examples of normal numbers, actually of series whose sum is a normal number. Much more difficult is to show that a “given” number, such as π , $\sqrt{2}$ or e ..., is normal. Here we quote Mark Kac:³⁹

“As is often the case, it is much easier to prove that an overwhelming majority of objects possess a certain property than to *exhibit* even one such object. The present case is no exception. It is quite difficult to exhibit a ‘normal’ number! The simplest example is the number (written in decimal notation) $x = 0.1234567891011 \dots$ where after the decimal point we write the positive integers in succession. The proof that this number is normal is by no means trivial.”

to be done

Continued fractions and Gauss map. Kintchin’s constant

14.4 Unique ergodicity and equidistribution

Unique ergodicity. A homeomorphism $f : X \rightarrow X$ of a compact metric space (X, d) is *uniquely ergodic* if it admits one, and only one, invariant Borel probability measure μ . The above discussion implies that this unique invariant measure is ergodic.

This notion is the probabilistic counterpart of minimality, and indeed both minimality and unique ergodicity are often observed simultaneously (this means that, although equivalence of the two is false, it is not easy to think at a counterexample!). Observe that we defined unique ergodicity in the context of continuous transformations. The reason is that this notion is interesting due to the following

Theorem 14.1 (Oxtoby). *Let $f : X \rightarrow X$ be a homeomorphism of a compact metric space X . The following statements are equivalent:*

- i) f is a uniquely ergodic,
- ii) there exists an invariant Borel probability measure μ such that, for any continuous observable φ , the time averages $\bar{\varphi}(x)$ exist and are equal to $\int_X \varphi d\mu$ for any initial condition $x \in X$.
- iii) there exists an invariant Borel probability measure μ such that, for any continuous observable φ , the convergence

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(f^k(x)) \rightarrow \int_X \varphi d\mu$$

as $n \rightarrow \infty$ holds and is uniform in $x \in X$.

Weyl equidistribution theorem. ⁴⁰

Theorem 14.2 (Weyl, 1916). *An irrational rotation of the circle is uniquely ergodic.*

Proof. Indeed, let $+\alpha : x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$ be an irrational rotation. We must check that time means of continuous observables φ converge uniformly to the average $\int \varphi d\ell$, where ℓ is Lebesgue probability measure on the circle. Since, according to Weierstrass theorem, trigonometric polynomials are dense in the space of continuous functions of the circle, it suffices to check that the above holds for any of the functions $x \mapsto \varphi_k(x) = e^{i2\pi kx}$ with $k \in \mathbb{Z}$. A computation gives, for $k \neq 0$,

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \varphi_j \left((+\alpha)^j(x) \right) \right| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n e^{i2\pi k j \alpha} \right| \leq \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{|1 - e^{i2\pi k \alpha}|} \rightarrow 0$$

³⁸E. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **27** (1909), 247-271.

³⁹Mark Kac, *Statistical independence in probability, analysis, and number theory*, Carus Math. Monographs, **12**, New York 1959 (pag. 18).

⁴⁰H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.* **77** (1916), 313-352.

uniformly in x , while the time averages of φ_0 are constant and equal to 1. Hence, the time means of each φ_k converge uniformly to their space means as times goes to infinity, and we are done. The theorem owes its name to the fact that

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \varphi(x+j\alpha) \rightarrow \int \varphi d\ell$$

uniformly for any continuous function φ on the circle, and this is interpreted as saying that the sequence of points $\{x, x+\alpha, x+2\alpha, x+3\alpha, \dots\}$ is “equidistributed” w.r.t. Lebesgue measure. $\square$

Linear flows on tori. Now, consider the torus $X = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ of dimension $n \geq 2$, and the linear flow $\phi_t : x + \mathbb{Z}^n \mapsto x + t\alpha + \mathbb{Z}^n$ defined by the differential equation

$$\dot{x} = \alpha$$

where $\alpha \in \mathbb{R}^n$. The “frequency vector” $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ is said *non resonant* if the scalar product $\langle \alpha, k \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j k_j \neq 0$ for any $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. As above, one can approximate any continuous function on the torus with trigonometric functions. One then checks that

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i2\pi \langle k, x+t\alpha \rangle} dt = \frac{e^{i2\pi \langle k, x \rangle}}{iT \langle k, \alpha \rangle} (e^{i2\pi T \langle k, \alpha \rangle} - 1) \rightarrow 0$$

as $T \rightarrow \infty$, for any $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, while the time mean of the observable 1 is constant and equal to one. There follows that *a non resonant linear flow on the torus is uniquely ergodic w.r.t. to Lebesgue measure.*

Dyadic adding machine.

to be done

References

- [AA67] V.I. Arnold and A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, 1967.
- [Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.
- [Ar78] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, Roma 1978.
- [Ar79] V.I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Edizioni MIR - Editori Riuniti, Roma 1979.
- [Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR 1985.
- [AS64] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, 1964.
- [BN05] P. Buttà e P. Negrini, *Note del corso di Sistemi Dinamici*, Università di Roma “La Sapienza”, 2005.
- [BS03] M. Brin and G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2003.
- [CG93] L. Carleson and T.W. Gamelin, *Complex dynamics*, UTX, Springer-Verlag, 1993.
- [Chaos] P. Cvitanović, R. Artuso, P. Dahlqvist, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, N. Whelan and A. Wirzba, *Chaos: Classical and Quantum*, <http://ChaosBook.org> (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2008).
- [CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948.
- [De89] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1989.
- [De92] R.L. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1992.
- [Fa85] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.
- [Fe63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [Gh07] E. Ghys, *Résonances et petits diviseurs*, in *L’héritage scientifique de Kolmogorov*, Berlin 2007.
- [GL] E. Ghys and J. Leys, *Lorenz and Modular Flows: A Visual Introduction*
- [HK03] B. Hasselblatt and A. Katok, *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, 2003.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press (Pure and Applied Mathematics. A series of Monographs and Textbooks), San Diego 1974.
- [HSD04] M.W. Hirsch, S. Smale and R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 2nd ed., Elsevier Academic Press, 2004.
- [HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford University Press, 1959.
- [Kh35] A.Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, 1935 [translation by University of Chicago Press, 1954].
- [KH95] A. Katok and B. Hasselblat, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1995.

- [Ma75] B. Mandelbrot, *Les object fractals: forme, hasard, et dimension*, Flammarion, Paris 1975.
- [Mat95] P. Mattila *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and rectifiability*, Cambridge University Press, 1995.
- [Mi91] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, IMS preprint (1991)
- [MSW02] D. Mumford, C. Series and D. Wright, *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002.
- [Ro99] J.C. Robinson, *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamic and Chaos*, CRC Press, Cambridge 1999.
- [Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 2004.
- [Ru87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [Sm67] S. Smale, [Differentiable dynamical systems](#), *Bull. of the AMS* **73** (1967), 747-817.
- [SS03] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis. An Introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [St94] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, 1994.
- [Vi06] J. Villate, [Introdução aos sistemas dinâmicos. Uma abordagem prática com Maxima](#), 2006.
- [Wa82] P. Walters, *An Introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Math. **79**, Springer-Verlag, 1982