

Nome N°

Escolha um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda.

1. (4 valores) Use o método de Heron para estimar $\sqrt{3}$ com uma conjectura inicial $x_0 = 1$ e 4 iterações.

2. (4 valores) Considere a equação recursiva linear

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 7.$$

- Determine as soluções estacionárias (ou seja, constantes).
- Determine a solução com condição inicial $x_0 = 100$ e o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3. (4 valores) Considere a equação recursiva linear homogênea

$$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}.$$

- Determine a solução geral.
- Determine o valor x_{100} da solução com condições iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$.

4. (4 valores) Considere uma rotação $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Mostre que se α é racional então todas as trajetórias são periódicas.
- Mostre que se α é irracional então nenhuma trajetória é periódica.

5. (4 valores) Considere a representação

$$x = x_0.x_1x_2x_3\cdots := x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}$$

de um número $x \geq 0$ na base b (com b inteiro e $b \geq 2$), onde $x_0 \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $x_n \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ se $n \geq 1$.

- Dê um exemplo de um número cuja representação na base 3 seja periódica.
- Dê um exemplo de um número cuja representação na base 2 não seja periódica.

6. (4 valores) Estude a dinâmica (ou seja, determine os pontos fixos, os pontos periódicos, e, se possível, o limite de todas as trajetórias quando o tempo $n \rightarrow \infty$) da transformação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x - 2|.$$

7. (4 valores) Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação contínua do intervalo $X \subset \mathbb{R}$.

- Mostre que, se existe um intervalo compacto $K \subset X$ tal que $f(K) \subset K$, então f admite um ponto fixo.
- Mostre que, se existe um intervalo compacto $K \subset X$ tal que $K \subset f(K)$, então f admite um ponto fixo.

8. (4 valores) Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Determine os pontos fixos de $f^2 = f \circ f$.
- A órbita de $\sqrt{2} + \mathbb{Z}$ é finita ou infinita? Justifique.

Nome N°

Escolha um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda.

1. (4 valores) Enuncie e prove o princípio das contrações.

2. (4 valores) Considere a família de transformações $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definidas por

$$x \mapsto \lambda x(1 - x),$$

com $\lambda \in [0, 4]$.

- Determine os pontos fixos de f_λ .
- Diga para quais valores do parâmetro λ os pontos fixos de f_λ são atrativos ou repulsivos.
- Determine os conjuntos limite $\omega_{f_\lambda}(x)$ de todos os pontos $x \in [0, 1]$ quando $\lambda = 2$.

3. (4 valores) Seja $p(z)$ um polinómio com coeficientes complexos ou reais.

- Descreva o método de Newton para aproximar as raízes de $p(z)$, ou seja, os pontos r onde $p(r) = 0$.
- Prove que a sucessão das aproximações sucessivas converge para uma raiz não degenerada (uma raiz r onde $p'(r) \neq 0$) se a condição inicial está suficientemente próxima da raiz.

4. (4 valores) Considere o sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y \\ \dot{y} &= -x - 2y\end{aligned}$$

- Diga se o equilíbrio $(0, 0)$ é um nodo, um ponto de sela ou um foco, e se é estável.
- Esboce o retrato de fase numa vizinhança do equilíbrio $(0, 0)$.
- Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = 2$.

5. (4 valores) Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\sin(q) - p.\end{aligned}$$

- Determine os pontos de equilíbrio.
- Linearize o sistema em torno dos pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase (ou seja, algumas trajetórias típicas) dos sistemas linearizados.
- Discuta a estabilidade dos equilíbrios do sistema.

6. (4 valores) Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por

$$f(x + \mathbb{Z}) = 10 \cdot x + \mathbb{Z}.$$

- Dê um exemplo de um ponto não periódico.
- Mostre que f é topologicamente misturadora.
- Existem pontos com órbitas densas? Justifique.

7. (4 valores) Sejam $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, z\}$ um conjunto finito de cardinalidade $z > 1$, e $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ o espaço das palavra infinitas $x = (x_1 x_2 x_3 \dots)$ nas letras $x_k \in \mathcal{A}$, munido da topologia produto, gerada, por exemplo, pela métrica d_∞ (definida por $d_\infty(x, x') = z^{-\inf\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n \neq x'_n\}}$ se $x \neq x'$). O deslocamento de Bernoulli é a transformação $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ definida por

$$\sigma((x_1 x_2 x_3 \dots)) = (x_2 x_3 x_4 \dots).$$

- Dê um exemplo de um ponto periódico de período 3.
- Mostre que o conjunto dos pontos periódicos é denso.
- Existem pontos $x \in \Sigma^+$ não periódicos cuja órbita não é densa? Justifique.

8. (4 valores) Considere o conjunto de Cantor standard

$$K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1].$$

- Mostre que K é compacto, perfeito (i.e. $K' = K$) e tem interior vazio.
- Mostre que K é homeomorfo a $K \times K$.