

Nome N°

Escolha um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda.

1. (4 valores) Considere a equação recursiva

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n.$$

- Determine a solução geral.
- Calcule o valor x_7 da solução com condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.
- Calcule o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}/x_n$ da solução com condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

2. (4 valores) Considere uma rotação da circunferência
- $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$
- , definida por

$$R_\alpha(x + \mathbb{Z}) = x + \alpha + \mathbb{Z},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Para quais valores $\alpha \in \mathbb{R}$ e pontos $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} R_\alpha^n(x + \mathbb{Z})$?
- Dê um exemplo de um valor $\alpha \in \mathbb{R}$ e um ponto inicial $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tais que a órbita de $x + \mathbb{Z}$ seja finita. Justifique.
- Dê um exemplo de um valor $\alpha \in \mathbb{R}$ e um ponto inicial $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tais que a aderência da órbita de $x + \mathbb{Z}$ seja \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Justifique.

3. (4 valores) Estude a dinâmica (ou seja, determine os pontos fixos, os pontos periódicos, e, se possível, o limite de todas as trajetórias quando o tempo
- $n \rightarrow \infty$
-) da transformação
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$
- definida por

$$f(x) = 2x - 2x^2.$$

4. (4 valores) Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação contínua de um espaço métrico completo.

- Defina o conjunto ω -limite $\omega_f(x)$ de um ponto $x \in X$.
- Diga, justificando, se $\omega_f(x)$ pode ser vazio.
- Diga, justificando, se $\omega_f(x)$ pode ser o próprio X .

5. (4 valores) Seja A um número positivo.

- Descreva o método de Heron para aproximar \sqrt{A} .
- Prove que a sucessão (x_n) das aproximações sucessivas converge para \sqrt{A} se o valor inicial x_0 é positivo.

6. (4 valores) Considere o sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= x - y\end{aligned}$$

- Diga se o equilíbrio $(0, 0)$ é um nodo, um ponto de sela ou um foco, e se é estável.
- Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas trajetória) numa vizinhança da solução de equilíbrio $(0, 0)$.
- Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$.

7. (4 valores) Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por

$$f(x + \mathbb{Z}) = 10 \cdot x + \mathbb{Z}.$$

- Dê um exemplo de uma órbita finita.
- Dê um exemplo de uma órbita infinita.
- Mostre que f é topologicamente misturadora.