

Escolha um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda.

1. (4 valores) Considere a equação recursiva

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}.$$

- Determine as soluções estacionárias.
- Determine o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ da solução com condição inicial $x_0 = 2$.

2. (4 valores) Considere a equação recursiva

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

- Determine a solução geral.
- Determine a solução com condições iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$, e calcule explicitamente os primeiro 7 termos da sucessão.
- Calcule o limite dos quocientes $q_n := x_{n+1}/x_n$ quando $n \rightarrow \infty$.

3. (4 valores) Estude a dinâmica (ou seja, determine os pontos fixos, os pontos periódicos, e, se possível, o limite de todas as trajetórias quando o tempo $n \rightarrow \infty$) da transformação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x - x^3.$$

4. (4 valores) Considere a representação

$$x = x_0.x_1x_2x_3 \cdots := x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}$$

de um número $x \geq 0$ na base b (com $b = 2, 3, 4, \dots$), onde $x_0 \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $x_n \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ se $n \geq 1$.

- Determine as representações de $1/3$ na base 3 e na base 5.
- Mostre que a representação decimal (ou seja, na base 10) de um número real $x \geq 0$ é periódica se e só se x é racional.
- Dê um exemplo de um número irracional, e justifique.

5. (4 valores) Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Determine $f^2(\{1/3 + \mathbb{Z}\})$.
- Determine a cardinalidade do conjunto dos pontos fixos de $f^3 = f \circ f \circ f$.
- A órbita de $x + \mathbb{Z}$ com x irracional é finita ou infinita? Justifique.

6. (4 valores) Enuncie e prove o princípio das contrações, ou seja, o teorema do ponto fixo de Banach.

7. (4 valores) O método de Newton para aproximar as raízes de um polinómio $P(z)$ consiste em escolher uma primeira aproximação z_0 , e iterar

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}.$$

- Mostre que se z_0 está suficientemente próximo de uma raiz ζ e $P'(\zeta) \neq 0$ então a sucessão dos z_n converge para esta raiz.
- Use o método de Newton para estimar $\sqrt{5}$ com $z_0 = 2$ e 5 iterações.

8. (4 valores) Considere uma rotação $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}.$$

- Dê um exemplo de um ponto recorrente quando α é racional.
- Dê um exemplo de um conjunto $F \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ fechado, invariante e não vazio, quando α é irracional.

9. (4 valores) Dê uma definição e um exemplo de homeomorfismo minimal.

10. (4 valores) Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto 2 \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Determine o conjunto dos pontos pré-periódicos.
- Mostre que f é topologicamente mixing.