11/11/2010 1^o teste	1405R1 - Tópicos de sistemas dinâmicos	MAT

Escolha um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda.

1. *(4 valores)* Considere a equação recursiva

$$x_{n+1} = \beta x_n + \alpha\,.$$

- Determine a solução estacionária e a solução com condição inicial $x_0 = 7$.
- Para quais valores dos parâmetros α e β todas as trajectórias convergem para a solução estacionária?

- Se $\beta \neq 1$, a solução estacionária é $\overline{x} = \alpha/(1-\beta)$. A diferença $y_n = x_n - \overline{x}$ satisfaz a equação recursiva $y_{n+1} = \beta y_n$, cuja solução é a progressão geométrica $y_n = y_0 \cdot \beta^n$. Portanto, a solução com condição inicial $x_0 = 7$ é

$$x_n = \overline{x} + (7 - \overline{x}) \cdot \beta^n\,.$$

Se $\beta = 1$, qualquer $x \in \mathbb{R}$ é um estado estacionário no caso trivial em que $\beta = 1$ e $\alpha = 0$. A solução com condição inicial $x_0 = 7$ é a progressão aritmética

$$x_n = 7 + n\alpha\,.$$

- O limite da trajectória $x_n = \overline{x} + (x_0 - \overline{x}) \cdot \beta^n$ quando $n \to \infty$ existe e é igual a $\overline{x}$ se $x_0 = \overline{x}$ ou $|\beta| < 1$. Portanto, todas as trajectórias convergem para a solução estacionária quando $|\beta| < 1$.
Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq 0$, todas as trajectórias são divergentes. No caso trivial em que $\beta = 1$ e $\alpha = 0$ todas as trajectórias são constantes.

2. *(4 valores)* Use o algoritmo dos babilónios/de Heron para estimar uma aproximação racional de $\sqrt{3}$ com um erro ≤ 0.001.

Se $x_1 = 3/2$ é uma primeira aproximação racional, uma segunda é $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 3/x_1) = 7/4$, e uma terceira é $x_3 = \frac{1}{2}(x_3 + 3/x_2) = 97/56$. O valor de $\sqrt{3}$ está entre $x_3 = 97/56$ e $y_3 = 3/x_3 = 168/97$. Dado que a diferença é $|x_3 - y_3| = 1/5432 < 0.0002$, concluimos que $|\sqrt{3} - 97/56| < 0.0002$, ou seja,

$$\sqrt{3} \simeq 1.7321 \pm 0.0002\,.$$

3. *(4 valores)* Os números de Fibonacci são definidos pela equação recursiva

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

com condições iniciais $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$.

- Mostre que a sucessão $x_n = z^n$ é solução da equação recursiva $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ se e só se $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- Deduza uma fórmula para o n-ésimo número de Fibonacci f_n.

- A sucessão $n \mapsto x_n = z^n$ é uma solução da equação recursiva $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ se $z^{n+1} = z^n + z^{n-1}$, ou seja, se $z = 0$ ou se $z^2 = z + 1$. Portanto, $x_n = z^n$ é uma solução não trivial se z é uma das raizes de $z^2 - z - 1$, que são $\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

- A solução geral da equação recursiva é
$$c_+\lambda_+^n + c_-\lambda_-^n$$
com $c_\pm$ constantes. As condições iniciais $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$ dizem que
$$c_+ + c_- = 0 \qquad \text{e} \qquad c_+\lambda_+ + c_-\lambda_- = 1$$
donde
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

4. *(4 valores)* Estude a dinâmica (ou seja, determine os pontos fixos e a sua natureza, os pontos periódicos, e, se possível, o limite de todas as trajectórias quando o tempo $n \to \infty$) da transformação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = |x-1| .$$

O único ponto fixo é $x = 1/2$. Todo ponto $x \in [0,1]\backslash\{1/2\}$ é periódico de período 2.
Se $x < 0$, então $f(x) > 0$. Se $x > 1$, então $f(x) = x - 1$, logo existe um tempo $n = [x] \geq 1$ tal que $f^n(x) \in [0,1]$. Portanto, todos os pontos $x \in]-\infty, 0[\cup]1,\infty[$ são pré-periódicos: se $x = m + 1/2$ com $m \in \mathbb{Z}$, então existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = 1/2$, e se $x - [x] \neq 1/2$, existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \in [0,1]\backslash\{1/2\}$.

5. *(4 valores)* Considere uma rotação do círculo $R_\alpha : x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$.
   - Mostre que se α é racional então todas as trajectórias são periódicas.
   - Mostre que se α é irracional então nenhuma trajectória é periódica.

- Se α é racional, ou seja $\alpha = p/q$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, então
$$R_\alpha^q(x+\mathbb{Z}) = x + q \cdot p/q + \mathbb{Z} = x + \mathbb{Z}$$
para todos os $x + \mathbb{Z}$.
- Se α é irracional, não existe nenhum natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\alpha \in \mathbb{Z}$. Portanto,
$$R_\alpha^n(x+\mathbb{Z}) = x + n\alpha + \mathbb{Z} \neq x + \mathbb{Z}$$
para todos os $x + \mathbb{Z}$ e todos os tempos $n \in \mathbb{N}$.

6. *(4 valores)* Considere a transformação do círculo $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por
$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}$$
   - Determine a cardinalidade dos pontos fixos de $f^3 = f \circ f \circ f$.
   - A órbita de $x + \mathbb{Z}$ com x racional é finita ou infinita? Justifique.

Seja $0.x_1x_2x_3\dots$, com $x_n \in \{0,1,2,\dots,9\}$, a expansão decimal de um ponto $x \in [0,1]$. A transformação f envia $0.x_1x_2x_3\cdots + \mathbb{Z}$ em $0.x_2x_3x_4\cdots + \mathbb{Z}$.

- O ponto $x + \mathbb{Z} = 0.x_1x_2x_3\cdots + \mathbb{Z}$ é um ponto fixo de f^3 se $x_{n+3} = x_n$ para todos os $n \geq 1$, ou seja se $x = 0.\overline{abc}$ com $a,b,c \in \{0,1,2,\dots,9\}$. Sendo $0.\overline{999} + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$, a cardinalidade dos pontos fixos de f^3 é $\mathrm{Fix}(f^3) = 10^3 - 1 = 999$.
- A expansão decimal de um número racional $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ é "periódica", ou seja, é da forma
$$x = 0, x_1x_2x_3\dots\overline{abc\dots z}$$
com $x_1, x_2, x_3, \dots a, b, c, \dots z \in \{0,1,2,\dots,9\}$. Portanto, a órbita de $x + \mathbb{Z}$ com x racional é finita.

7. *(4 valores)* Seja $f : I \to I$ uma transformação contínua do intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
   - Prove que se $J = [a, b] \subset I$ é um intervalo compacto tal que $f(J) \subset J$ então f tem um ponto fixo em J.
   - Prove que se $J = [a, b] \subset I$ é um intervalo compacto tal que $J \subset f(J)$ então f tem um ponto fixo em J.

   Os pontos fixos de $f(x)$ são os zeros da função contínua $g(x) = f(x) - x$. Podemos assumir que $a < b$, pois se $a = b$ então a é o ponto fixo de f.

   - Se $f[a, b] \subset [a, b]$ então $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$.
     Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, então a ou b é um ponto fixo de f em $[a, b]$. Caso contrário, a função $g(x) = f(x) - x$ é positiva em a, pois $f(a) > a$, e negativa em b, pois $f(b) < b$. Pelo teorema de Bolzano existe um ponto $z \in (a, b)$ onde $g(z) = 0$.
   - Se $[a, b] \subset f[a, b]$, então $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ e $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$, logo existe um intervalo não trivial $[c, d] \subset [a, b]$ tal que $f(c) = a$ e $f(d) = b$ ou tal que $f(c) = b$ e $f(d) = a$.
     No primeiro caso, se $c = a$ ou $d = b$, então c ou d é um ponto fixo de f em $[c, d]$. Caso contrário, a função $g(x)$ é negativa em c, pois $c > a = f(c)$ e positiva em d, pois $d < b = f(d)$. Pelo teorema de Bolzano existe um ponto $z \in (c, d)$ onde $g(z) = 0$.
     No segundo caso, a função $g(x)$ é positiva em c, pois $c < b = f(c)$ e negativa em d, pois $d > a = f(d)$. Pelo teorema de Bolzano existe um ponto $z \in (c, d)$ onde $g(z) = 0$.

8. *(4 valores)* Estude a natureza dos pontos fixos da transformação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \alpha x + \beta x^2$$

   ao variar os parâmetros α e β.

   Os pontos fixos de f, soluções de $\alpha x + \beta x^2 = x$, são 0 e, se $\beta \neq 0$, $\overline{x} = \frac{1-\alpha}{\beta}$.
   A origem é um ponto fixo atrativo quando $|\alpha| < 1$, e repulsivo quando $|\alpha| > 1$, porque $f'(0) = \alpha$.
   O ponto fixo $\overline{x}$ é atrativo quando $|2 - \alpha| < 1$, e repulsivo quando $|2 - \alpha| > 1$, porque $f'(\overline{x}) = 2 - \alpha$.

9. *(4 valores)* Dê exemplos de transformações contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem:
   - nenhum ponto é periódico,
   - existem pontos periódicos de período 2,
   - 3 é um ponto fixo repulsivo,
   - f é uma contração.

   - Se $f(x) = x + 1$, nenhum ponto é periódico (as trajectórias são $x_n = x_0 + n$).
   - Se $f(x) = -x$, todos os pontos $x \neq 0$ são periódicos de período 2 (as trajectórias são $x_n = (-1)^n x_0$).
   - Se $f(x) = 3 + 2(x - 3)$, o ponto fixo 3 é repulsivo, pois $|f'(3)| = 2 > 1$.
   - Se $f(x) = x/2$, f é uma contração, porque $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x - y|$.

10. *(4 valores)* Seja $z \in \mathbb{R}$ uma raiz do polinómio $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p'(z) \neq 0$. Mostre que, se $x_0 \in \mathbb{R}$ está suficientemente próximo de z, então a sucessão (x_n), definida indutivamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$$

   se $n \geq 0$, converge para z.

   A raiz z é um ponto fixo da transformação $f(x) = x - p(x)/p'(x)$, porque $f(z) = z$ se $p(z) = 0$. A derivada é

$$f'(z) = 1 - \frac{(p'(z))^2 - p(z)p''(z)}{(p'(z))^2} = 0\,,$$

   e portanto z é um ponto fixo super-atrativo. Em particular, a trajectória de cada ponto x_0 numa vizinhança de z converge para a raiz.

21/01/2011 2^o teste	1405R1 - Tópicos de sistemas dinâmicos	MAT

Escolha um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda.

1. *(4 valores)* Dê exemplos de transformações contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem:
   - nenhum ponto da recta é errante,
   - o conjunto dos pontos recorrentes é $[0, \infty[$,
   - o conjunto ω-limite de todo o ponto da recta é $\left\{\sqrt{3}\right\}$,
   - f é expansora.

   - Se $f(x) = x$, nenhum ponto é errante.
   - O conjunto dos pontos recorrentes de $f(x) = |x|$ é $[0, \infty[$
   - Se $f(x) = \sqrt{3}$, o conjunto ω-limite de todo $x \in \mathbb{R}$ é $\{\sqrt{3}\}$.
   - $f(x) = 3 \cdot x$ é expansora.

2. *(4 valores)* Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua de um espaço métrico completo e separável X. Prove que se f é +transitiva, então o conjunto Rec_f dos pontos recorrentes é residual.

   Se f é +transitiva então o conjunto R dos pontos $x \in X$ tais que $\omega_f(x) = X$ é residual. Mas se $x \in R$ então $x \in \omega_f(x) = X$, portanto x é recorrente. Ou seja, $R \subset \mathrm{Rec}_f$, e portanto Rec_f é residual.

3. *(4 valores)* Mostre que uma rotação racional do círculo, uma transformação

$$R_\alpha \,:\, x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$$

   com $\alpha \in \mathbb{Q}$, não é topologicamente transitiva.

   Se α é racional então todo o ponto do círculo é periódico. Em particular, a órbita $\mathcal{O}_f(x+\mathbb{Z})$ de todo o ponto $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é finita, logo a sua aderência $\overline{\mathcal{O}_f(x + \mathbb{Z})} = \mathcal{O}_f(x + \mathbb{Z})$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

4. *(4 valores)* Sejam $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, z\}$ um conjunto finito de cardinalidade $z \geq 2$, e $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ o espaço das palavra infinitas $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ com $x_n \in \mathcal{A}$, munido da topologia produto. Mostre que o deslocamento de Bernoulli $\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma^+$, definido por

$$\sigma \,:\, (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots)\,,$$

   é topologicamente mixing.

   Cada aberto não vazio $U \subset \Sigma^+$ contém um cilindro centrado $C_\alpha = \{x = (\alpha, *)\}$. Se $\overline{n} = |\alpha|$ é o comprimento da palavra α, então $\sigma^n(C_\alpha) = \Sigma^+$ para todos os tempos $n \geq \overline{n}$. Portanto, se $V \subset \Sigma^+$ é um aberto não vazio, $\sigma^n(U) \cap V = V \neq \emptyset$ desde que $n \geq \overline{n}$.

5. *(4 valores)* Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a transformação do círculo definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z} \,.$$

Diga se existe um ponto $p \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ cuja órbita $\mathcal{O}_f^+(p)$ é densa no círculo, e justifique a sua resposta.

A transormação f é topologicamente mixing, portanto existe um conjunto residual R de pontos $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tais que $\omega_f(x) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Em particular, se $p \in R$ a órbita $\mathcal{O}_f^+(p)$ é densa no círculo.

6. *(4 valores)* Determine a fracção contínua de

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \,,$$

a raiz positiva da equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Da equação quadrática $\varphi^2 = \varphi + 1$ deduzimos, ao dividir por φ,

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \,, \qquad \text{donde} \qquad \varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}} \qquad \dots \qquad \varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Portanto, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \dots]$.

7. *(4 valores)* Mostre que o conjunto de Cantor

$$K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \quad \text{com } \; x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1]$$

é um conjunto perfeito (ou seja, $K' = K$).

Seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ um ponto do conjunto de Cantor K. Para cada $k = 1, 2, \dots$, seja

$$y^{(k)} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{2 - x_k}{3^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

Então $y^{(k)} \in K$, $y^{(k)} \neq x$ para cada k, e $|x - y^{(k)}| = 2/3^k$, donde $\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = x$.

8. *(4 valores)* Dê um exemplo de uma figura geométrica auto-semelhante, e justifique a sua resposta.

Uma figura geométrica auto-semelhante é o intervalo fechado $K = [0, 1]$. Se $U \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto tal que $U \cap K \neq \emptyset$, então $U \cap K$ contém um intervalo não trivial $[a, b] \subset K$. A transformação afim

$$f(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

define um homeomorfismo de $[a, b]$ sobre K.

9. *(4 valores)* Dê uma definição de conjunto de Mandelbrot, e diga como escrever um programa que desenhe o conjunto de Mandelbrot.

O conjunto de Mandelbrot $M \subset \mathbb{C}$ é o conjunto dos valores do parâmetro $c \in \mathbb{C}$ tais que a órbita de $0 \in \mathbb{C}$ pela transformação $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f_c(z) = z^2 + c\,,$$

é limitada.
Se $|c| > 2$, então $|f_c^n(0)| \geq |c| \cdot (|c| - 1)^{2^{n-1}}$ (por indução), portanto a trajectória $f_c^n(0)$ é divergente e $c \notin M$.
Seja $|c| < 2$. Se $|f_c^n(0)| = 2 + \delta$ com $\delta > 0$, então

$$|f_c^{n+1}(0)| \geq (2+\delta)^2 - 2 \geq 2 + 4\delta \qquad \text{donde} \qquad |f_c^{n+k}(0)| \geq 2 + 4^k \delta \to_{k \to \infty} \infty$$

Isto implica que para decidir se $c \in M$ é "suficiente" decidir se $|f_c^n(0)| \leq 2$ para todos os tempos $n \in \mathbb{N}$. Na prática, podemos verificar se $|f_c^n(0)| \leq 2$ para todos os tempos $n \leq N$, onde N é um "tempo máximo" suficientemente grande.

10. *(4 valores)* Escreva a função de Lagrange de um pêndulo, e deduza as equações do movimento linearizadas numa vizinhança da posição de equilíbrio.

Sejam θ o ângulo que o pêndulo forma com a vertical, m a massa, g a aceleração gravitacional, e ℓ o cumprimento do pêndulo. A função de Lagrange é

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos\theta\,.$$

Se $|\theta| \ll 1$, então $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, e as equações de Euler-Lagrange são

$$\ddot{\theta} \simeq -(g/\ell) \cdot \theta\,.$$