

1405R1 - Tópicos de sistemas dinâmicos  
Folhas práticas  
MAT 20010/11

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086 (atendimento: 4<sup>a</sup>-feira 14h-18h)

e-mail [scosentino@math.uminho.pt](mailto:scosentino@math.uminho.pt)

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

5 de Dezembro de 2010

## Conteúdo

1	Crescimento e decaimento	2
2	Iteração e modelos discretos	6
3	Fluxos e modelos contínuos	10
4	Simulações e sistemas de EDOs	15
5	Sistemas dinâmicos topológicos	21
6	Números e dinâmica	24
7	Órbitas regulares e perturbações	28
8	Linearização/análise local	31
9	Linearização de fluxos	33
10	Persistência e bifurcações	36
11	Recorrências	38
12	Transitividade e órbitas densas	40
13	Perda de memória e independência assintótica	42

## 1 Crescimento e decaimento

1. (**progressão e série geométrica**) Uma *progressão geométrica* de “razão”  $\lambda$  é uma sequência

$$a \quad a\lambda \quad a\lambda^2 \quad a\lambda^3 \quad \dots \quad a\lambda^n \quad a\lambda^{n+1} \quad \dots$$

obtida do termo inicial  $x_0 = a$  usando a recursão  $x_{n+1} = \lambda x_n$ . A identidade

$$(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n)(\lambda - 1) = \lambda^{n+1} - 1$$

mostra que, se  $\lambda \neq 1$ , a soma dos primeiros  $n + 1$  termos da progressão geométrica (com  $a = 1$ ) é

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$$

Em particular, quando  $|\lambda| < 1$ , a *série geométrica*  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$  é convergente, e a sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n + \dots = \frac{1}{1 - \lambda}$$

- Diga se as seguintes séries são convergentes, e, se for o caso, calcule a soma.

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots \quad 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots \quad 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4/5)^n \quad 9/10 + 9/100 + 9/1000 + \dots \quad 0.3333\dots$$

2. (**duplicação de células**) As experiências mostram que a população de uma colónia de bactérias, num período de tempo em que podemos considerar ilimitado o nutrimento e desprezáveis as toxinas produzidas, duplica-se em cada hora.

- Se a população inicial é de 1000 células, determine a população passadas 2, 3, 10 horas.
- Quantas horas devo esperar para ver 1024 bactérias a partir de uma única célula inicial?
- Escreva uma fórmula para  $P_n$ , a população no tempo  $n$  horas, dada uma população inicial  $P_0$ .

3. (**invenção do xadrez**). Dizem que Sissa inventou o jogo do xadrez e o ofereceu ao rei de Pérsia. Ao rei, que o convidou a escolher uma recompensa, pediu um grão de arroz para o primeiro quadrado do tabuleiro, o dobro, ou seja, dois grãos, para o segundo quadrado, o dobro, ou seja, quatro grãos, pelo terceiro quadrado, e assim a seguir até o último dos quadrados do tabuleiro.

- Quanto grãos de arroz o rei teve que pagar?
- Se 1 Kg de arroz contém à volta de 30000 grãos, quantas toneladas de arroz foram necessárias ao rei para pagar o seu jogo?

4. (**tempo de meia-vida**) O decaimento de uma substância radioactiva pode ser caracterizado pelo “tempo de meia-vida”  $\tau$ , passado o qual aproximadamente metade dos núcleos inicialmente presentes terá decaído. Portanto, se  $Q_n$  denota a quantidade de substância radioactiva presente no instante  $n\tau$ , com  $n$  inteiro, então

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2} Q_n.$$

- Determine  $Q_n$  em função da quantidade inicial  $Q_0$ .
- Determine  $P_n$ , a quantidade de producto do decaimento no instante  $n\tau$ .
- Passado quanto tempo a substância radioactiva fica reduzida a  $\frac{1}{32}$ -ésimo da quantidade inicial?

- O tempo de meia-vida do radiocarbono  $^{14}\text{C}$  é  $\tau \simeq 5730$  anos. Mostre como “datar” um fóssil, sabendo que a proporção de  $^{14}\text{C}$  num ser vivente é fixa e conhecida.<sup>1</sup>
5. (crescimento exponencial) O crescimento exponencial de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado com a equação recursiva

$$P_{n+1} = \lambda P_n$$

onde  $P_n$  representa a população no tempo  $n$ , dada uma certa população inicial  $P_0$ .

- Interprete o parâmetro  $\lambda$  imaginando que em cada unidade de tempo o incremento  $P_{n+1} - P_n$  da população é a soma de uma parcela  $\alpha P_n$ , onde  $\alpha > 0$  é um coeficiente de fertilidade, e uma parcela  $-\beta P_n$ , onde  $\beta > 0$  é um coeficiente de mortalidade.
  - Discuta o comportamento das soluções da equação recursiva ao variar o parâmetro  $\lambda$ .
6. (sequência de Fibonacci) Considere o seguinte problema, posto por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci, ou seja, “filius Bonacci”)<sup>2</sup>:

*Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?*

A resposta de Leonardo Pisano consiste no seguinte modelo. Se  $F_n$  o número de pares de coelhos no  $n$ -ésimo mês, então

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Esta é uma ”lei” que prescreve recursivamente os valores dos  $F_n$  dados uns valores iniciais  $F_0$  e  $F_1$ .

- Responda ao problema de Fibonacci, ou seja, determine  $F_{12}$ , sabendo que  $F_0 = 1$  e  $F_1 = 1$ .
- Escreva um algoritmo para calcular recursivamente os números de Fibonacci  $F_n$ .
- Seja  $Q_n = F_{n+1}/F_n$  o quociente entre sucessivos números de Fibonacci. Mostre que os quocientes satisfazem a equação recursiva

$$Q_{n+1} = 1 + \frac{1}{Q_n}$$

- Assuma que, para grande valores de  $n$ , os quocientes são praticamente constantes, ou seja,  $Q_n \rightarrow \phi$  se  $n \rightarrow \infty$ . Utilize a equação recursiva para mostrar que

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.61803398874989\dots$$

- Mostre que o resultado anterior implica a lei assintótica  $F_{n+1} \simeq \phi F_n$ . Reconhece-a?
7. (crescimento com recolha ou adição) A uma população que cresce segundo o modelo exponencial, é adicionada ou retirada uma certa quantidade  $\beta$  em cada unidade de tempo. O modelo é portanto

$$P_{n+1} = \lambda P_n + \beta$$

onde  $\beta$  é um parâmetro positivo ou negativo.

- Determine soluções estacionárias, ou seja, que não dependem do tempo  $n$ .
- Determine a solução com condição inicial  $P_0$  arbitrária (considere a substituição  $x_n = P_n - \bar{P}$ , onde  $\bar{P}$  é a solução estacionária).

<sup>1</sup>J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

<sup>2</sup>Leonardo Pisano, *Liber Abaci*, 1202.

- Para quais valores dos parâmetros  $\lambda$  e  $\beta$  as soluções  $P_n$  convergem para a solução estacionária quando o tempo  $n \rightarrow \infty$ ?

8. (**exponencial**) A função *exponencial*  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida pela série de potências

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

- Mostre que a série converge para todos os  $t \in \mathbb{R}$ .
- Mostre que  $e^{t+s} = e^t e^s$  e que  $e^0 = 1$ , e portanto o exponencial define um homomorfismo do grupo aditivo  $\mathbb{R}$  no grupo multiplicativo  $\mathbb{R}^+$ .
- Mostre que  $x(t) = e^t$  é solução da EDO

$$\dot{x} = x$$

- Verifique que  $x(t) = x_0 e^t$  é uma solução de  $\dot{x} = x$  com condição inicial  $x(0) = x_0$ .
- Mostre que, se  $y(t)$  é uma solução de  $\dot{x} = x$  com condição inicial  $y(0) = x_0$ , então o quociente  $y(t)/e^t$  é constante e igual a  $x_0$ . Deduza a unicidade das soluções do problema de Cauchy.

9. (**decaimento radioactivo**) A taxa de decaimento de matéria radioactiva é proporcional à quantidade de matéria existente. Quer isto dizer que a quantidade  $N(t)$  de matéria radioactiva existente no instante  $t$  satisfaz a EDO de primeira ordem

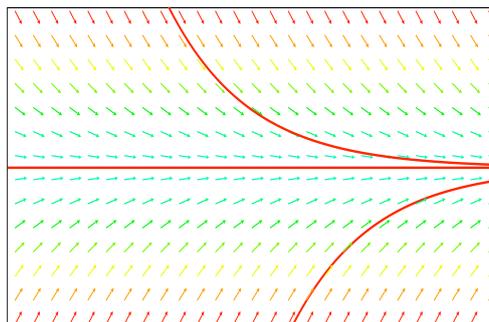
$$\dot{N} = -\beta N$$

onde  $\beta > 0$  é uma *constante de decaimento*.

- Determine a solução da equação diferencial com condição inicial  $N(0) = N_0$ .
- O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioactiva é o tempo necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial, isto é, é o tempo  $T$  tal que  $N(T)/N(0) = 1/2$ . Encontre a relação entre o tempo de meia-vida  $T$  e a constante de decaimento  $\beta$ , e mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial  $N(0)$ .
- O tempo  $1/\beta$  é dito *vida média*, sendo a esperança do tempo de vida de cada núcleo. Determine o tempo de meia-vida do  $^{14}\text{C}$  sabendo que a vida média é  $1/\beta \simeq 8033$  anos.
- A radiação cósmica produz  $^{14}\text{C}$  na atmosfera terrestre a uma certa taxa  $\alpha$ . Portanto, o número de núcleos de  $^{14}\text{C}$  na atmosfera segue a EDO

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha$$

Mostre que  $N(t)$  converge para o valor estacionário  $\bar{N} = \alpha/\beta$  quando  $t \rightarrow \infty$ , independentemente da condição inicial  $N(0)$ .



Campo de direcções e soluções da equação  $\dot{x} = -2x + 1$ .

10. (crescimento exponencial) O crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado pela EDO de primeira ordem

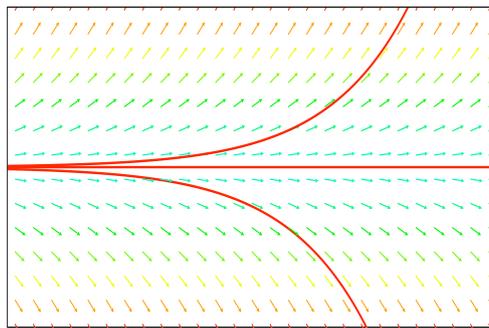
$$\dot{N} = \lambda N$$

onde  $N(t)$  é a população no tempo  $t$ , e  $\lambda > 0$ .

- Determine a solução com condição inicial  $N(0) = N_0 > 0$ .
- O que acontece à solução para grandes intervalos de tempo?
- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante  $\alpha > 0$ , então

$$\dot{N} = \lambda N - \alpha$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assintótico das outras soluções.



Campo de direcções e soluções da equação  $\dot{x} = 2x - 1$ .

## 2 Iteração e modelos discretos

1. (iteração) Um sistema dinâmico com tempo discreto é definido por uma equação/lei recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

onde  $x_n$  denota o *estado* (posição, população, concentração, temperatura, ...) do sistema no tempo  $n$  (segundos, horas, meses, anos, ...). As *trajectórias* são as sucessões  $(x_n)$ ,

$$x_0 \mapsto x_1 = f(x_0) \mapsto x_2 = f(x_1) \mapsto \dots \mapsto x_{n+1} = f(x_n) \mapsto \dots,$$

definidas a partir de uma *condição inicial*  $x_0$ .

Os *estados estacionários*, ou *de equilíbrio*, são as trajectórias constantes  $x_n = \bar{x}$ , onde  $\bar{x}$  é um “ponto fixo” da transformação  $f$ , ou seja, um ponto tal que

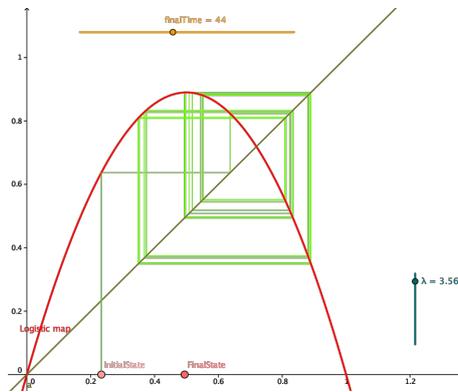
$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

As *soluções periódicas* são as trajectórias  $(x_n)$  tais que  $x_{n+p} = x_n$  para todos os  $n$  e algum tempo  $p \geq 1$ , dito *período*.

Se o espaço dos estados é um intervalo da recta real, as trajectórias podem ser observadas no plano  $x$ - $y$  esboçando o caminho poligonal (*cobweb plot*)<sup>3</sup>

$$(x_0, x_0) \mapsto (x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_1) \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2) \mapsto (x_2, x_3) \mapsto \dots$$

entre o gráfico da transformação,  $y = f(x)$ , e a diagonal,  $y = x$ .



- Estude as trajectórias (ou seja, determine os estados de equilíbrio, as trajectórias periódicas, e o comportamento assintótico de algumas das outras trajectórias) dos sistemas dinâmicos definidos pelas seguintes transformações

$$f(x) = \frac{1}{3}x \quad f(x) = 7x \quad f(x) = -x$$

$$f(x) = 3x + 1 \quad f(x) = 2x - 7 \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 5$$

$$f(x) = |1 - x| \quad f(x) = x^2 - \frac{1}{4} \quad f(x) = x^2 - 2$$

$$f(x) = x^3 \quad f(x) = -x^3 \quad f(x) = x^{1/3}$$

$$f(x) = x - x^3 \quad f(x) = x + x^3$$

- Mostre que, se uma trajectória  $(x_n)$  do sistema dinâmico  $x_{n+1} = f(x_n)$  é convergente e se a transformação  $f$  é contínua, então o limite  $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  é um estado estacionário, ou seja,  $f(x_\infty) = x_\infty$ .

<sup>3</sup>see the tutorial by [Elisha Peterson](#) for an implementation with [GeoGebra](#)

2. (transformação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é

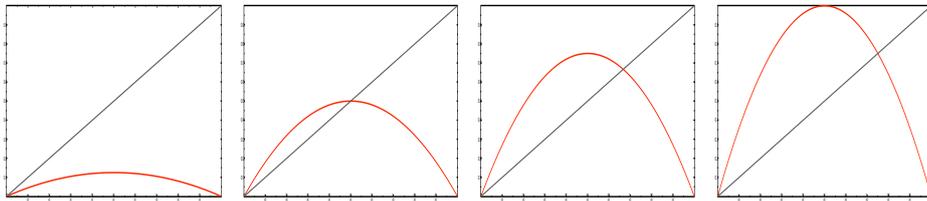
$$P_{n+1} = \lambda P_n (1 - P_n/M)$$

onde a contante  $M > 0$  é a maior população suportada pelo meio ambiente (observe que  $P_{n+1} < 0$  quando  $P_n > M$ , o que pode ser interpretado como “extinção” no tempo  $n + 1$ ). A substituição  $x_n = P_n/M$  transforma a lei acima na forma adimensional

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n),$$

chamada *transformação logística*<sup>4</sup>.

- Esboce o gráfico da transformação logística para diferentes valores do parâmetro  $\lambda$ .



Gráficos da transformação logística quando  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 3$  e  $\lambda = 4$ .

- Mostre que os pontos estacionários são o estado trivial 0 e

$$\bar{x} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

- Implemente um programa para fazer simulações do sistema.
  - Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro  $0 < \lambda \leq 1$ .
  - Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro  $1 < \lambda \leq 3$ .
  - Observe os fenômenos que acontecem ao variar o parâmetro  $\lambda$  entre 3 e 4.
  - O que acontece quando  $\lambda > 4$  ?
3. (equilíbrio de Hardy-Weinberg) Considere a transmissão hereditária de um gene com dois alelos,  $A$  e  $a$ . Sejam  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$  as frequências dos genótipos  $AA$ ,  $Aa$  e  $aa$ , respectivamente, numa dada população inicial. Então as probabilidades de ter o alelo  $A$  ou  $a$  na formação de um gameta são

$$p_0 = x_0 + \frac{1}{2}y_0 \quad \text{e} \quad q_0 = 1 - p_0 = z_0 + \frac{1}{2}y_0,$$

respectivamente. Na fecundação, teremos os genótipos  $AA$ ,  $Aa$  e  $aa$  com probabilidades  $p_0^2$ ,  $2p_0q_0$  e  $q_0^2$ , respectivamente. Portanto, na primeira geração, as frequências dos três genótipos serão

$$x_1 = p_0^2, \quad y_1 = 2p_0q_0 \quad \text{e} \quad z_1 = q_0^2.$$

- Calcule as probabilidades

$$p_1 = x_1 + \frac{1}{2}y_1 \quad \text{e} \quad q_1 = z_1 + \frac{1}{2}y_1$$

de ter os alelos  $A$  ou  $a$  na formação de um gameta na primeira geração, e mostre que as frequências dos três genótipos na segunda geração serão

$$x_2 = p_0^2, \quad y_2 = 2p_0q_0 \quad \text{e} \quad z_2 = q_0^2.$$

Ou seja, a distribuição dos três genótipos atinge um valor estacionário a partir da primeira geração (*Hardy-Weinberg equilibrium/principle/law*<sup>5</sup>)

<sup>4</sup>Robert M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459-467.

<sup>5</sup>G.H. Hardy, Mendelian proportions in a mixed population, *Science* **28** (1908), 49-50. W. Weinberg, Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen, *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg* **64** (1908), 368-382.

4. (selecção natural, modelo de Fisher, Wright e Haldane) Um modelo simples de selecção natural, proposto por Ronald Fisher, Sewall Wright e J.B.S. Haldane em 1930<sup>6</sup>, considera apenas um gene com dois alelos,  $A$  e  $a$ . A vantagem ou desvantagem competitiva dos diferentes genótipos,  $AA$ ,  $Aa$  e  $aa$ , é modelada por coeficientes de “sucesso biológico” (*fitness*),  $\phi_{AA}$ ,  $\phi_{Aa}$  e  $\phi_{aa}$ , que determinam as diferentes taxas de sobrevivência, e portanto de reprodução. Sejam  $0 \leq p_n \leq 1$  e  $q_n = 1 - p_n$  as frequências dos alelos  $A$  e  $a$ , respectivamente, na  $n$ -ésima geração. Então a frequência do alelo  $A$  na  $(n + 1)$ -ésima geração é dada por

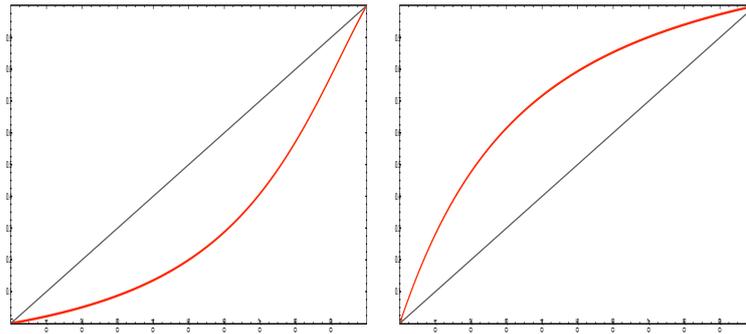
$$p_{n+1} = \frac{(1 + \alpha)p_n^2 + p_n q_n}{(1 + \alpha)p_n^2 + 2p_n q_n + (1 + \beta)q_n^2}$$

onde  $(1 + \alpha) = \phi_{AA}/\phi_{Aa}$  e  $(1 + \beta) = \phi_{aa}/\phi_{Aa}$  (e portanto  $-1 < \alpha$  e  $-1 < \beta$ ).

- Esboce a transformação para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Observe que soluções estacionárias são as soluções triviais 0 e 1, e, quando  $\alpha$  e  $\beta$  têm o mesmo sinal,

$$\bar{p} = \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}.$$

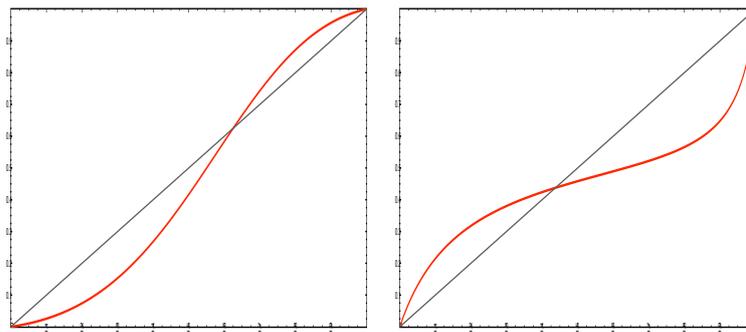
- Discuta o comportamento assintótico da frequência  $p_n$  quando  $\alpha$  e  $\beta$  têm sinais opostos. Mostre que na população assintótica apenas sobrevive o alelo favorecido.



$\alpha < 0 < \beta$

$\beta < 0 < \alpha$

- Mostre que, quando  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  (ou seja, os genótipos  $AA$  e  $aa$  têm uma vantagem competitiva em relação ao genótipo  $Aa$ ), o estado estacionário  $\bar{p}$  é instável, e pequenas perturbações  $x_0 = \bar{p} \pm \varepsilon$  do equilíbrio produzem comportamentos assintóticos diferentes, a extinção de  $A$  ou a extinção de  $a$ , dependendo do sinal (*disruptive selection*).
- Mostre que, quando  $\alpha < 0$  e  $\beta < 0$  (ou seja, o genótipo  $Aa$  é o favorecido), o estado estacionário  $\bar{p}$  é estável, e portanto os dois alelos convivem na população assintótica (*heterosis*).



*Disruptive selection:*  $0 < \alpha < \beta$ .

*Heterosis:*  $\alpha < \beta < 0$ .

<sup>6</sup>R.A. Fisher, *Genetical Theory of Natural Selection*, Clarendon 1930. S. Wright, Evolution in Mendelian populations, *Genetics* **16** (1931), 97-159. J.B.S. Haldane, A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection (1924-1934).

5. (equações às diferenças finitas) Considere a equação às diferenças finitas (EDF)

$$a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

onde os  $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_p \neq 0$  são parâmetros. A conjectura  $x_n = z^n$  é solução se  $\lambda$  é uma raiz do *polinómio característico*

$$P(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Se o polinómio característico tem  $p$  raízes distintas (em  $\mathbb{C}$ ),  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , então a solução geral da equação é uma combinação linear

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_p z_p^n$$

onde  $c_1, c_2, \dots, c_p$  são constantes que dependem das condições iniciais  $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$ .

- Determine a solução geral das seguintes EDF

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n \qquad x_{n+2} = (x_{n+1} + x_n)/2$$

- Determine uma fórmula para os números de Fibonacci.
- Mostre que uma série de potências

$$\sum_{n \geq 0} x_n z^n$$

representa uma função racional  $f(z)$  se e só se os coeficientes  $x_n$  satisfazem uma equação recursiva.

6. (modelos discreto presas-predadores) Um modelo discreto de um sistema presas-predadores é

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha x_n - \beta x_n y_n \\ y_{n+1} &= -\gamma y_n + \delta x_n y_n \end{aligned}$$

e outro modelo é

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n (1 - x_n) - \beta x_n y_n \\ y_{n+1} &= \delta x_n y_n \end{aligned}$$

Nos dois casos,  $x_n$  e  $y_n$  são as populações relativas das presas e dos predadores, respectivamente, no tempo  $n$ , e as letras gregas são parâmetros positivos.

- Discuta o significado dos parâmetros dos modelos, e as diferenças entre os dois modelos.
- Determine os pontos estacionários.
- Simule as soluções dos sistemas ao variar os parâmetros.

### 3 Fluxos e modelos contínuos

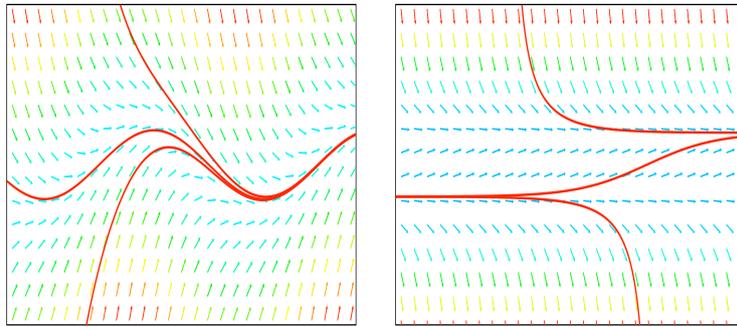
não leccionado

- (equações diferenciais ordinárias)** Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de primeira ordem é uma “lei”

$$\dot{x} = v(t, x)$$

para a trajectória  $t \mapsto x(t) \in X \subset \mathbb{R}$  de um sistema dinâmico, onde  $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$  denota a derivada do observável  $x \in \mathbb{R}^n$  em ordem ao tempo  $t$ , e  $v(t, x)$  é um “campo de direcções” (uma recta com declive  $v(t, x)$  para cada ponto  $(t, x)$ ). Uma *solução* da EDO é uma função  $t \mapsto x(t)$  tal que  $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$  para cada tempo  $t$  num certo intervalo, ou seja, uma função cujo gráfico é tangente ao campo de direcções em cada ponto  $(t, x(t))$  do gráfico.

Se o campo  $v(t, x)$  é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável), para cada ponto  $(t_0, x_0)$  passa uma única solução com condição inicial  $x(t_0) = x_0$ .



Campos de direcções e algumas soluções de  $\dot{x} = \sin(t) - x$  e de  $\dot{x} = x(1 - x)$ .

- Esboce os campos de direcções das EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} = t \quad \dot{x} = -x \quad \dot{x} = x - 1 \quad \dot{x} = x + t \\ \dot{x} = x(1 - x) \quad \dot{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

e conjecture sobre o comportamento das soluções.

- A função  $x(t) = t^3$  é solução da equação diferencial  $t\dot{x} - 3x = 0$ ? E a função  $x(t) = 0$ ?

- (Integração de EDOs simples)** O teorema fundamental do cálculo implica que a solução de uma EDO simples

$$\dot{x} = v(t)$$

com condição inicial  $x(t_0) = x_0$  é determinada por meio de uma integração, ou seja,

$$\dot{x} = v(t), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

- Integre (ou seja, determine soluções com  $x(t_0) = x_0$ ) as seguintes EDOs.

$$\dot{x} = 2 \sin(t) \quad \dot{x} = e^{-t} \quad \dot{x} = \cos(3t) \quad \dot{x} = t - t^2$$

- (EDOs autónomas/fluxos)** A solução de uma EDO *autónoma*

$$\dot{x} = v(x)$$

depende da condição inicial  $x(t_0) = x_0$ . Se  $x_0$  é um *ponto singular* de  $v(x)$ , i.e. se  $v(x_0) = 0$ , então  $x(t) = x_0$  é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio*) da equação. Se  $x_0$  não é um ponto singular, i.e. se  $v(x_0) \neq 0$ , então a receita para resolver  $\frac{dx}{dt} = v(x)$  consiste em “separar

as variáveis”,  $\frac{dx}{v(x)} = dt$ , integrar os dois membros,  $\int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = \int_{t_0}^t ds$ , e resolver para  $x$ . Ou seja,

$$\dot{x} = v(x), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Se o campo  $v(t, x)$  é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável), para cada ponto  $(t_0, x_0)$  passa uma única solução com condição inicial  $x(t_0) = x_0$ . Se estas soluções existem para todo o tempo  $t \in \mathbb{R}$ , então a família de aplicações  $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ , que a cada  $x \in X$  associa o valor  $\Phi_t(x) = x(t)$  da solução com condição inicial  $x(0) = x$ , define um *fluxo* sobre o espaço de fases  $X$ . O fluxo é uma ação do grupo aditivo  $\mathbb{R}$  sobre  $X$ , ou seja, uma família de aplicações  $\Phi_t : X \rightarrow X$  definidas para cada  $t \in \mathbb{R}$ , tais que

$$\Phi_0 = \text{id}_X \quad \text{e} \quad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

- Considere as seguintes EDOs de primeira ordem

$$\dot{x} = -3x \quad \dot{x} = 2x \quad \dot{x} = x - 1 \quad \dot{x} = e^x \quad \dot{x} = (x - 1)(x - 2)$$

Determine as soluções estacionárias. Esboce os campos de direcções e conjecture sobre o comportamento das soluções. Determine, se possível, fórmulas para a solução com condição inicial  $x(0) = x_0$ , e esboce o gráfico de algumas das soluções encontradas.

4. (EDOs separáveis) A solução de uma EDO *separável*

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{g(t)}$$

com condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , se  $f(x_0) \neq 0$  e  $g(t_0) \neq 0$ , é dada em forma implícita por

$$\dot{x} = f(x)/g(t), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^t \frac{ds}{g(s)}$$

- Resolva as seguintes EDOs separáveis

$$\begin{aligned} \dot{x} &= tx^3 & t\dot{x} + t &= t^2 & \dot{x} &= t^3/x^2 & \dot{x} &= e^{x+3t^2}t \\ \dot{x} &= \frac{t-1}{x^2} & \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} &= 0 & \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ (t^2+1)\dot{x} &= 2tx & \dot{x} &= t(x^2-x) & \dot{x} &= e^{t-x}, \end{aligned}$$

definidas em oportunos domínios.

5. (EDOs lineares) A solução de uma EDO *linear*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t),$$

com condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , pode ser determinada pelos seguintes dois passos: determinar (apenas) uma solução não trivial  $y(t)$  da “equação homogénea associada”,  $\dot{y} + p(t)y = 0$ , substituir a conjectura  $x(t) = \lambda(t)y(t)$  na equação não-homogénea e resolver para  $\lambda(t)$ . O resultado é

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u)du} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u)du} q(s)ds \right).$$

- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \quad \dot{x} + 2x = t \quad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \quad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

- Resolva os seguintes problemas nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t^3 \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan \theta = \cos \theta \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

6. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{r} = -mg$$

onde  $r$  é a altura,  $m$  é a massa da partícula,  $g \simeq 980 \text{ cm/s}^2$  é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e  $\ddot{r}$  denota a segunda derivada de  $r$  em ordem ao tempo  $t$ .

- Resolva a equação  $m\dot{v} = -mg$  para a velocidade  $v = \dot{r}$ , com condição inicial  $v(0) = v_0$ , e deduza a solução  $r(t)$  com condição inicial  $r(0) = r_0$ .

7. (equação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é a equação logística<sup>7</sup>

$$\dot{N} = \lambda N(1 - N/M)$$

onde  $\lambda > 0$  e a constante  $M > 0$  é a população máxima suportada pelo meio ambiente. Observe que  $\dot{N} \simeq \lambda N$  se  $N \ll M$ , e que  $\dot{N} \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow M$ .

- Seja  $x(t) = N(t)/M$  a população relativa. Mostre que a função  $x(t)$  satisfaz a equação logística “adimensional”

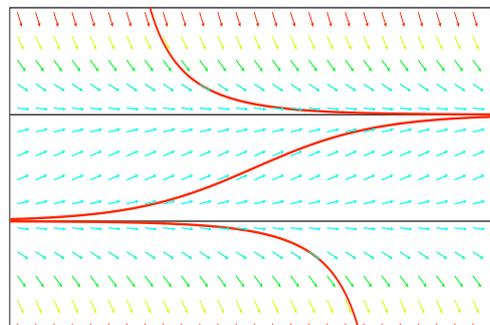
$$\dot{x} = \lambda x(1 - x).$$

- Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
- Verifique que

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}},$$

é a solução da equação logística com condição inicial  $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ .

- Discuta o comportamento assintótico das soluções da equação logística.



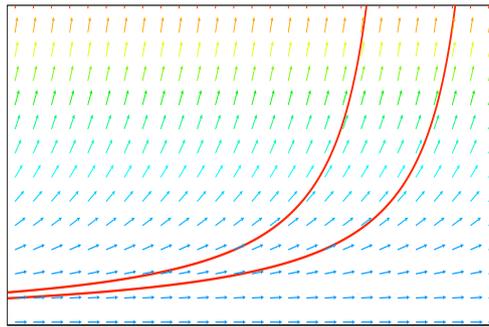
Campo de direções e soluções da equação logística.

<sup>7</sup>Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

8. (**crescimento super-exponencial**) Um outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \alpha N^2.$$

- Determine a solução com condição inicial  $N(0) = N_0 > 0$ .
- Observe que as soluções que determinou não estão definidas para todos os tempos: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!



Campo de direções e soluções da equação  $\dot{x} = x^2$ .

9. (**fazer modelos**) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?
- A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá no instante  $t$  é proporcional à diferença entre a temperatura do ar e a temperatura do chá no instante  $t$ .
  - A taxa de variação de uma população de cogumelos no instante  $t$  é proporcional à raiz quadrada da população no instante  $t$ .
  - A velocidade de um foguetão no instante  $t$  é inversamente proporcional à altura atingida no instante  $t$ .
  - A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.
10. (**queda livre com atrito**) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força  $-k\dot{r}$  proporcional e contrária à velocidade, assim a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{r} = -k\dot{r} - mg$$

onde  $k > 0$  é um coeficiente de atrito. Chamando  $v = \dot{r}$  a velocidade da partícula, somos levados a

$$m\dot{v} = -kv - mg$$

- Determine a solução  $v(t)$  com condição inicial  $v(0) = 0$ .
  - Mostre que a velocidade  $v(t)$  tende para um valor assintótico  $v_\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
  - Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória  $r(t)$  com condição inicial  $r(0) = r_0$ .
11. (**circuito RL**) A corrente  $I(t)$  num circuito RL, de resistência  $R$  e indutância  $L$ , é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V$$

onde  $V(t)$  é a tensão que alimenta o circuito.

- Escreva a solução geral como função da corrente inicial  $I(0) = I_0$ .
- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante  $V(t) = E$ . Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada  $V(t) = E \sin(\omega t)$ . Se não conseguir, mostre que a solução com  $I(0) = 0$  tem a forma

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \alpha) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde  $\alpha$  é uma constante que depende de  $\omega$ ,  $L$  e  $R$ .

12. (lei do arrefecimento de Newton) Numa primeira aproximação, a temperatura  $T(t)$  no instante  $t$  de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante  $t$  é  $M(t)$  segue a lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} = -k(T - M(t))$$

onde  $k$  é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

- Escreva a solução  $T(t)$  como função da temperatura inicial  $T(0) = T_0$  e de  $M(s)$  com  $0 \leq s \leq t$ .
- Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante  $M(t) = M$ . Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Uma chávena de café, com temperatura inicial de  $100^\circ\text{C}$ , é colocada numa sala cuja temperatura é de  $20^\circ\text{C}$ . Sabendo que o café atinge uma temperatura de  $60^\circ\text{C}$  em 10 minutos, determine a constante  $k$  do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de  $40^\circ\text{C}$ .

## 4 Simulações e sistemas de EDOS

não leccionado

1. (método de Euler) O método de Euler para simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x).$$

consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) - x(t) \simeq v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo”  $dt$  suficientemente pequeno. A solução  $x(t_0 + n \cdot dt)$ , com condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , é estimada pela sucessão  $x_n$  definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt$$

onde  $t_n = t_0 + n \cdot dt$ . Numa linguagem como **c++** ou **Java**, o ciclo para obter uma aproximação de  $x(t)$ , dado  $x(t_0) = x$ , é

```
while (time < t)
{
  x += v(time, x) * dt ;
  time += dt ;
}
```

- Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial  $x(0) = 1$ . Mostre que, se o passo é  $dt = \varepsilon$ , então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq (1 + \varepsilon)^n$$

onde  $n \simeq t/\varepsilon$  é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , as aproximações convergem para a solução verdadeira, pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

Compare a resposta do método de Euler com a solução exacta  $x(1) = e$ , usando passos diferentes, por exemplo  $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 \dots$

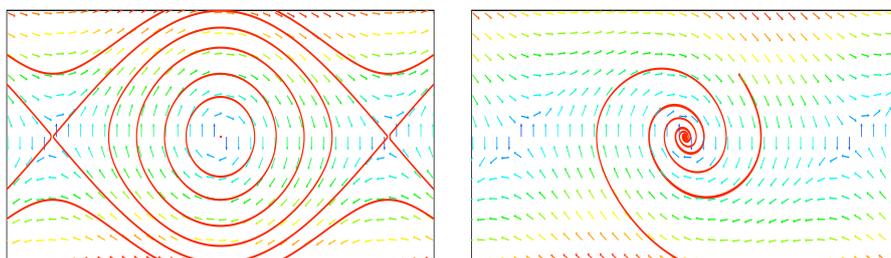
2. (pêndulo matemático) Considere a equação de Newton que modela as oscilações de um pêndulo,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha \dot{\theta}.$$

onde  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ ,  $g$  é a aceleração gravitacional,  $\ell$  o comprimento do pêndulo, e  $\alpha \geq 0$  um coeficiente de atrito. No espaço de fase, de coordenadas  $q$  e  $p = \dot{q}$ , a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha p \end{aligned}$$

- Simule o sistema, e esboce as trajectórias e as curvas de fase.



Retrato de fase do pêndulo (sem e com atrito).

3. (**oscilador harmónico**) As pequenas oscilações de um pêndulo em torno da posição de equilíbrio estável  $\theta = 0$  são descritas pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

onde  $\omega$  é a frequência característica. No espaço de fase, de coordenadas  $q$  e  $p = \dot{q}$ , a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 q \end{aligned}$$

- Simule o sistema, e esboce as trajectórias e as curvas de fase.
- Mostre que as trajectórias são

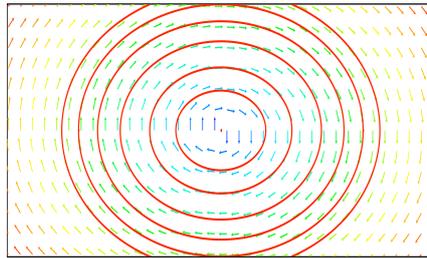
$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega t + \phi),$$

onde a amplitude  $A$  e as fases  $\varphi$  e  $\phi$  dependem dos dados iniciais  $q(0) = q_0$  e  $\dot{q}(0) = v_0$ .

- Mostre que a energia

$$E(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento, ou seja que se  $(q(t), p(t))$  é uma solução do oscilador harmónico então  $\frac{d}{dt}E(q(t), p(t)) = 0$  para todo o tempo  $t$ .



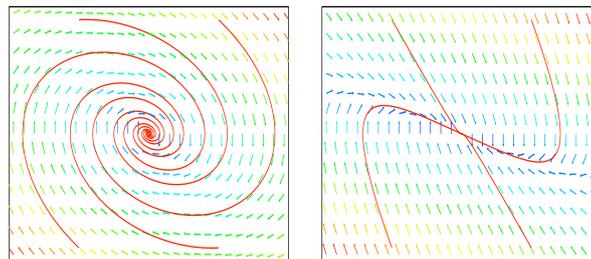
Retrato de fase do oscilador harmónico.

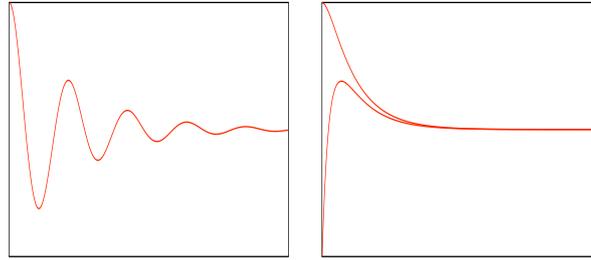
4. (**oscilações amortecidas**) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q,$$

onde  $\alpha > 0$  é um coeficiente de atrito.

- Simule o sistema quando  $\alpha^2 < \omega^2$  (amortecimento sub-crítico),  $\alpha^2 = \omega^2$  (amortecimento crítico), e  $\alpha^2 > \omega^2$  (amortecimento super-crítico).





Retrato de fase e trajetórias do oscilador amortecido (sub-crítico e super-crítico).

5. (oscilações forçadas) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2q + F(t),$$

onde  $\alpha \geq 0$  é um coeficiente de atrito e  $F(t)$  uma força.

- Simule o sistema quando a força é  $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$ , ao variar os parâmetros.

6. (circuito LRC) A corrente  $I(t)$  num circuito RLC, de resistência  $R$ , indutância  $L$  e capacidade  $C$ , é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

onde  $V(t)$  é a tensão que alimenta o circuito.

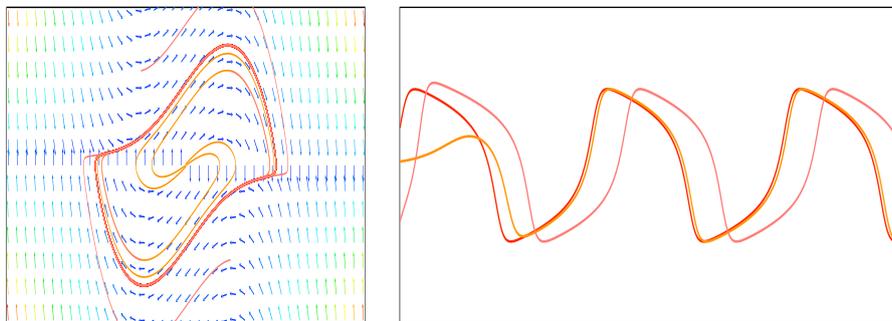
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão constante  $V(t) = V_0$ .
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão alternada  $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$  (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).

7. (oscilador de van der Pol)<sup>8</sup> Considere o *oscilador de van der Pol*

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = 0$$

que modela a corrente num circuito com um elemento não-linear.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar o parâmetro  $\mu$ .



Retrato de fase e trajetórias do oscilador de van der Pol.

- Simule o oscilador forçado

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = F_0 \sin(\omega t)$$

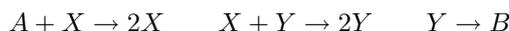
ao variar o parâmetro  $\mu$  e a frequência  $\omega$ .

<sup>8</sup>B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* **1** (1920), 701-710 and 754-762. B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency demultiplication, *Nature* **120** (1927), 363-364.

8. (sistema de Lotka-Volterra) Considere o sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy\end{aligned}$$

Foi proposto por Vito Volterra<sup>9</sup> para modelar a competição entre  $x$  presas e  $y$  predadores, e por Alfred J. Lotka<sup>10</sup> para modelar o comportamento cíclico de certas reacções químicas, como o esquema abstracto

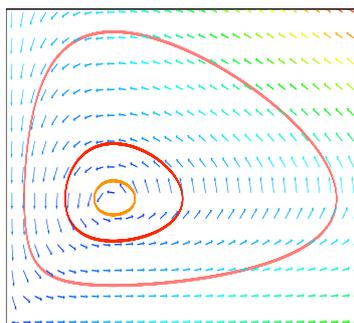


- Determine as soluções estacionárias.
- Mostre que a função

$$H(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

é uma constante do movimento, ou seja,  $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$ . Deduza que as órbitas do sistema estão contidas nas curvas de nível de  $H(x, y)$ .

- Simule o sistema.



Retrato de fase do sistema de Lotka-Volterra.

9. (Brusselator) O Brusselator é um modelo autocatalítico proposto por Ilya Prigogine e colaboradores<sup>11</sup> que consiste na reacção abstracta



- Simule o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (\beta + 1)x + x^2y \\ \dot{y} &= \beta x - x^2y\end{aligned}$$

para as concentrações das espécies catalíticas  $X$  e  $Y$ , obtido quando as concentrações  $[A] \sim \alpha$  e  $[B] \sim \beta$  são mantidas constantes.

- Simule o sistema

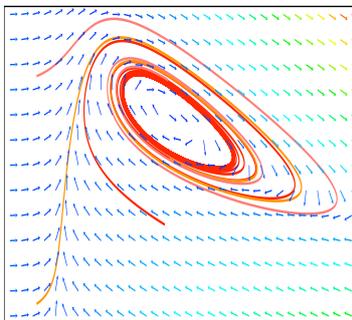
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (b + 1)x + x^2y \\ \dot{y} &= bx - x^2y \\ \dot{b} &= -bx + \delta\end{aligned}$$

para as concentrações de  $X$ ,  $Y$  e  $B$ , obtido quando a concentração  $[A] \sim \alpha$  é mantida constante e  $B$  é injectado a uma velocidade constante  $v \sim \delta$ .

<sup>9</sup>Vito Volterra, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie di animali conviventi*, *Mem. Acad. Lincei* **2** (1926), 31-113. Vito Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

<sup>10</sup>Alfred J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc.* **27** (1920), 1595. Alfred J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.

<sup>11</sup>I. Prigogine and R. Lefever, *Symmetry breaking instabilities in dissipative systems*, *J. Chem. Phys.* **48** (1968), 1655-1700. P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Wiley, New York 1971. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in non-equilibrium chemical systems*, Wiley, New York 1977.



Retrato de fase do Brusselator.

10. (bifurcação de Hopf) Considere o sistema<sup>12</sup>

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= x + y(\lambda - (x^2 + y^2))\end{aligned}$$

- Simule o sistema ao variar o parâmetro  $\lambda$ .
- Mostre que a origem é um equilíbrio assintoticamente estável quando  $\lambda < 0$ .
- Mostre que a origem é um equilíbrio instável quando  $\lambda > 0$ . Observe que a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  é um “ciclo limite” do sistema quando  $\lambda = 1$ .
- Simule o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= -x + y - y(\lambda - (x^2 + y^2))\end{aligned}$$

11. (reação de Schnakenberg) Considere a reação de Schnakenberg<sup>13</sup>

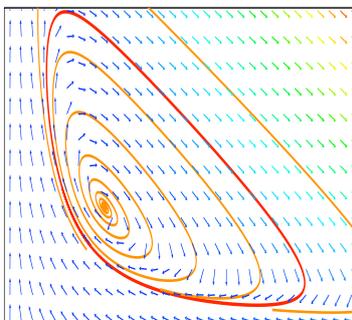


modelada pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2y - x + \beta \\ \dot{y} &= -x^2y + \alpha\end{aligned}$$

para as concentrações  $x \sim [X]$  e  $y \sim [Y]$ .

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar os parâmetros.



Retrato de fase do sistema de Schnakenberg.

<sup>12</sup>E. Hopf, Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines differentialsystem, *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Phys.* **95** (1943), 3-22.

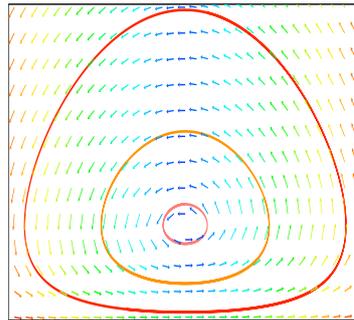
<sup>13</sup>J. Schnakenberg, Simple chemical reaction with limit cycle behavior, *J. Theor. Biol.* **81** (1979), 389-400.

12. (oscilador bioquímico de Goodwin) Um modelo de interações proteínas-mRNA proposto por Goodwin<sup>14</sup> é

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \frac{1}{1+P} - \alpha \\ \dot{P} &= M - \beta\end{aligned}$$

onde  $M$  e  $P$  denotam as concentrações relativas de mRNA e proteína, respectivamente.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar os parâmetros.



Retrato de fase do sistema de Goodwin.

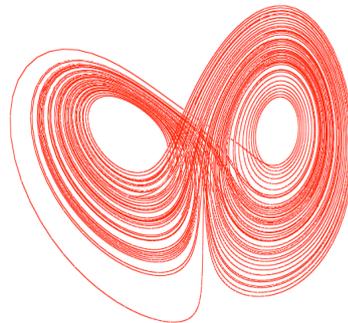
- Simule o sistema<sup>15</sup>

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \frac{1}{1+P^n} - \alpha M \\ \dot{P} &= M^m - \beta P\end{aligned}$$

13. (atractor de Lorenz) Considere o sistema de Lorenz<sup>16</sup>

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

- Analize o comportamento assintótico das trajetórias ao variar os parâmetros  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\beta$ .
- Observe o comportamento das trajetórias quando  $\sigma \simeq 10$ ,  $\rho \simeq 28$  e  $\beta \simeq 8/3$ .



Atrator de Lorenz.

<sup>14</sup>B.C. Goodwin, *Temporal organization in cells*, Academic Press, London/New York 1963. B.C. Goodwin, Oscillatory behaviour in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* **3** (1965), 425-438.

<sup>15</sup>T. Scheper, D. Klinckenberg, C. Pennartz and J. van Pelt, A Mathematical Model for the Intracellular Cicardian Rhythm Generator, *J. Neuroscience* **19** (1999), 40-47.

<sup>16</sup>E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmospheric Science* **20** (1963), 130-141.

## 5 Sistemas dinâmicos topológicos

1. **(sistemas dinâmicos topológicos, trajetórias e órbitas)** Um *sistema dinâmico topológico* é uma ação de  $\mathbb{N}_0$  ou de  $\mathbb{Z}$  num espaço topológico  $(X, \tau)$ , gerada por uma transformação contínua  $f : X \rightarrow X$ .

As “iteradas” da transformação  $f$  são as transformações  $f^n : X \rightarrow X$ , definidas indutivamente por

$$f^0 = \text{id} \quad \text{e} \quad f^n = f \circ f^{n-1} \text{ se } n \in \mathbb{N}$$

Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $A \subset X$ , então  $f^{-n}(A)$  denota o conjunto  $\{x \in X \text{ t.q. } f^n(x) \in A\}$ . Se  $f$  é um homeomorfismo, é possível definir as iteradas  $f^n : X \rightarrow X$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

A ação  $\phi : \mathbb{N}_0 \times X \rightarrow X$ , ou  $\phi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$  se  $f$  for um homeomorfismo, é definida por

$$\phi_n(x) = f^n(x)$$

A seguir,  $(X, d)$  será um espaço métrico completo munido da topologia induzida  $\tau$ , localmente compacto (todo ponto admite uma vizinhança compacta) e separável (admite um subconjunto enumerável denso, e portanto, sendo um espaço métrico, uma base enumerável da topologia). Por exemplo, domínios de  $\mathbb{R}^n$ , intervalos da reta, o círculo  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , o toro  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ , o plano complexo  $\mathbb{C}$ , a esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$ , conjuntos de Cantor... e produtos cartesianos de espaços finitos. Para evitar trivialidades e detalhes inúteis, assumiremos também que a cardinalidade de  $X$  seja infinita.

A *trajetória* de  $x \in X$  é a sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , definida recursivamente por

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

a partir da “condição inicial”  $x_0 = x$ . A *órbita* de  $x \in X$  é a imagem da sua trajetória, ou seja o conjunto

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

A *grande órbita* do ponto  $x$  é o conjunto

$$\mathcal{GO}_f(x) = \{x' \in X \text{ t.q. } \exists n, m \geq 0 \text{ t.q. } f^n(x') = f^m(x)\}$$

ou seja o conjunto dos pontos que têm eventualmente a mesma história futura de  $x$ .

Se  $f$  é invertível, é útil definir a *órbita completa* de  $x$ , o conjunto

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

- Mostre que a relação “estar na mesma grande órbita” é uma relação de equivalência.
  - Mostre que a relação “estar na mesma órbita completa” é uma relação de equivalência, e portanto  $X$  é uma reunião disjunta de órbitas completas.
  - Estude a dinâmica, ou seja a estrutura das órbitas, de uma transformação arbitrária definida num conjunto finito  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Observe que o estudo da dinâmica das transformações bijetivas consiste essencialmente no estudo dos grupos simétricos  $S_n$ .
2. **(órbitas periódicas)** Seja  $f : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico topológico. Os *pontos fixos* de  $f$  são os pontos  $p \in X$  tais que  $f(p) = p$ . O ponto  $p \in X$  é *periódico* de *período*  $n \geq 1$  se  $f^n(p) = p$  e se  $n$  é o menor dos tempos  $k \geq 1$  tais que  $f^k(p) = p$ . Assim, a órbita do ponto periódico  $p$  é um conjunto finito

$$\{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$$

de pontos que são permutados pela transformação  $f$ .

$\text{Fix}(f^n)$  denota o conjunto dos pontos fixos da transformação  $f^n$ , e

$$\text{Per}_f = \bigcup_{n \geq 1} \text{Fix}(f^n)$$

denota o conjunto dos pontos periódicos da transformação  $f$ .

- Mostre que um ponto  $x$  pode ter órbita finita sem ser periódico: pode acontecer que existe  $k \geq 1$  tal que  $f^k(x)$  é um ponto periódico (tais pontos, que “caem” numa órbita periódica passado um tempo positivo, são ditos *pré-periódicos*).
  - Mostre que cada um dos conjuntos  $\text{Fix}(f^n)$  é fechado, pois  $f^n$  é contínua, mas a reunião  $\text{Per}_f$  pode não ser.
  - Determine pontos periódicos de ...
3. (**observáveis**) Seja  $f : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico topológico. Os *observáveis* são funções  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . O observável  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é *invariante* se

$$\varphi \circ f = \varphi$$

ou seja se é constante em cada órbita. O observável  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *funções de Lyapunov* se

$$\varphi \circ f \leq \varphi$$

ou seja, se é decrescente no tempo.

- Mostre que, se  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é invariante,  $I \subset \mathbb{R}$  e  $A = \varphi^{-1}(I)$ , então  $f^{-1}(A) = A$ .
  - Seja  $\varphi$  uma constante do movimento. Se  $\varphi(x) = a$ , então o futuro e o passado de  $x$  pertencem ao conjunto de nível  $\Sigma_a = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) = a\}$ , i.e.  $\mathcal{GO}_f(x) \subset \Sigma_a$ .
  - Mostre que a função característica do subconjunto  $A \subset X$  é invariante sse  $f^{-1}(A) = A$ .
  - Se sabemos que  $\varphi \circ f \leq \varphi$ , e que  $\varphi(x) = a$ , então o futuro de  $x$  “não sai” do conjunto de sub-nível  $\Sigma_{\leq a} = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) \leq a\}$ , e o passado de  $x$  “vem” de  $\Sigma_{\geq a} = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) \geq a\}$ .
4. (**médias de Birkhoff**) Seja  $f : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico topológico. A *média temporal* (ou *média de Birkhoff*) do observável  $\varphi$  até ao tempo  $n \geq 0$  é o observável  $\bar{\varphi}_n$  definido por

$$\bar{\varphi}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(f^k(x))$$

i.e. o valor de  $\bar{\varphi}_n$  no ponto  $x$  é a média aritmética dos valores de  $\varphi$  na “ $n$ -órbita de  $x$ ”  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\}$ .

Se o limite

$$\bar{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n(x)$$

existe, tem o significado de “valor médio assintótico” de  $\varphi$  ao longo da órbita de  $x$ .

Seja  $1_A$  a função característica de um subconjunto  $A \subset X$ . Então o limite

$$\bar{1}_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \text{card} \{0 \leq k \leq n \text{ t.q. } f^k(x) \in A\}$$

se existir, representa “a fração de tempo assintótica” que a trajetória de  $x$  passa em  $A$ , ou seja a “frequência com que a trajetória de  $x$  visita o conjunto  $A$ ”.

- Mostre que  $\bar{\varphi}(x) = (\bar{\varphi} \circ f)(x)$  nos pontos onde o limite existe.
5. (**conjuntos invariantes**) Seja  $f : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico topológico. Um subconjunto  $A \subset X$  é dito *invariante* se

$$f^{-1}(A) = A$$

Um subconjunto  $A \subset X$  é dito *+invariante* se  $f(A) \subset A$ , e é dito *-invariante* se  $f^{-1}(A) \subset A$ . Em particular, se  $A$  é *+invariante* é possível definir o sistema dinâmico  $f|_A : A \rightarrow A$ .

- Mostre que a função característica do subconjunto  $A \subset X$  é invariante sse  $f^{-1}(A) = A$ .
- Se  $A$  é invariante então  $f(A) \subset A$  (e portanto um ponto de um conjunto invariante tem toda a sua história, futura e passada, contida no conjunto).

- Mostre que  $\mathcal{GO}_f(x)$  é o menor conjunto invariante que contém  $x$ , e portanto um conjunto invariante é uma reunião de grandes órbitas, é composto pelas histórias possíveis passadas e futuras dos seus pontos.
- Mostre que se  $f$  é invertível,  $\mathcal{O}_f(x)$  é o menor conjunto invariante que contém  $x$ . Isto implica que, se  $f : X \rightarrow X$  é invertível, um subconjunto  $A \subset X$  é invariante sse é uma reunião de órbitas completas, i.e. se  $A = \cup_{x \in A} \mathcal{O}_f(x)$ .
- Descubra as implicações entre as condições

$$f^{-1}(A) = A \quad , \quad f(A) \subset A \quad , \quad f^{-1}(A) \subset A \quad , \quad f(A) = A \quad , \quad f^{-1}(A) = A = f(A)$$

para uma transformação qualquer, uma transformação sobrejetiva e uma transformação bijetiva.

- Considere o conjunto  $C$  igual a  $\mathcal{GO}_f(x)$ ,  $\mathcal{O}_f(x)$  ou  $\mathcal{O}_f^+(x)$  para algum ponto  $x \in X$ , e determine as propriedades de invariância dos conjuntos  $C$ ,  $\overline{C}$ ,  $\partial C$  e  $C'$ .
  - Seja  $A \subset X$ . Mostre que  $\cup_{n \geq 0} f^n(A)$  é um conjunto +invariante, de fato o menor conjunto +invariante que contém os pontos de  $A$ .
  - Seja  $A \subset X$ . Mostre que, se  $f : X \rightarrow X$  é invertível, então  $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(A)$  é um conjunto invariante, de fato o menor conjunto invariante que contém os pontos de  $A$ .
  - Seja  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  um observável, e seja  $A \subset X$  o conjunto dos pontos  $x \in X$  tais que o limite  $\overline{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\varphi}_n(x)$  existe. Mostre que  $A$  é invariante, e que o observável  $\overline{\varphi} : A \rightarrow \mathbb{R}$  é invariante com respeito à transformação  $f|_A : A \rightarrow A$ .
6. (**conjugação**) Os sistemas dinâmicos topológicos  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  são (*topologicamente*) *conjugados* se existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$ , dito *conjugação*, tal que

$$h \circ f = g \circ h$$

Uma função contínua e sobrejetiva  $h : X \rightarrow Y$  é dita *semiconjugação* entre os sistemas dinâmicos  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  se  $h \circ f = g \circ h$ . Neste caso,  $g$  é dito um *fator* de  $f$ .

- Observe que a condição pode também ser escrita como  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ , e que é uma relação de equivalência. Por indução, vê-se que  $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$  para todo tempo  $n \geq 0$ . Em particular, uma conjugação  $h$  envia órbitas de  $f$  em órbitas de  $g$ .
- A  $h$ -imagem de toda órbita de  $f$  é uma órbita de  $g$ .

## 6 Números e dinâmica

1. (**rotações do círculo**) O círculo é o espaço quociente  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  do grupo comutativo  $\mathbb{R}$  pelo subgrupo  $\mathbb{Z}$ , munido da topologia quociente herdada da topologia euclidiana da reta. As *rotações* do círculo são as translações  $+\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  definidas por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

A métrica euclidiana da reta “induz” uma métrica invariante  $d$  no círculo, definida por

$$\begin{aligned} d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) &= \min_{y \in \pi^{-1}\{x + \mathbb{Z}\}, y' \in \pi^{-1}\{x' + \mathbb{Z}\}} |y - y'| \\ &= \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - x' + n| \end{aligned}$$

onde  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  denota a projeção  $x \mapsto x + \mathbb{Z}$ . As rotações do círculo são as isometrias de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, d)$  que preservam a orientação.

Em notação multiplicativa, se o círculo é identificado com o conjunto  $\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$  dos números complexos de módulo 1, as rotações do círculo são as transformações  $z \mapsto e^{i2\pi\alpha}z$ .

- Verifique que

$$d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - x' + n|$$

é uma métrica no círculo  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

- Identifique o círculo  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  com o intervalo  $[0, 1[$  (toda classe  $x + \mathbb{Z}$  tem um e só um representante  $x$  neste intervalo), e dê uma expressão analítica para a distância  $d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z})$  em função de  $x$  e  $x'$ .  
(Observe que se  $|x - x'| \leq 1/2$  então  $d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) = |x - x'|$ )
  - Verifique que as rotações  $+\alpha : x + \mathbb{Z} \rightarrow x + \alpha + \mathbb{Z}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , são isometrias, e portanto homeomorfismos, de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, d)$ .
  - Mostre que uma rotação  $+\alpha : x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$  do círculo  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  tem pontos periódicos sse  $\alpha$  é racional (se  $\alpha = p/q$  com  $(p, q) = 1$  e  $q > 0$ , então todo ponto do círculo é periódico de período  $q$ . Por outro lado, se  $\alpha$  é irracional, não existe nenhum natural  $n \geq 1$  tal que  $x + \mathbb{Z} = x + n\alpha + \mathbb{Z}$ , seja o que for  $x$ ).
2. (**multiplicação  $\times d$** ) Seja  $d \geq 2$  um inteiro (por exemplo 10). A *multiplicação por  $d$*  é a transformação do círculo  $\times d : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto dx + \mathbb{Z}$$

Se  $x = 0.x_1x_2x_3\dots$  é uma representação na base  $d$  de um ponto  $x \in \mathbb{S}^1 \simeq [0, 1)$ , então a transformação  $\times d$  envia

$$0.x_1x_2x_3\dots \mapsto 0.x_2x_3x_4\dots$$

- Verifique que  $\times d$  é contínua.
  - Determine a cardinalidade da imagem inversa de um ponto arbitrário de  $\mathbb{S}^1$ .
  - Determine os pontos periódicos e pré-periódicos de  $\times d$ .
3. (**deslocamentos de Bernoulli**) Seja  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, z\}$  um “alfabeto” de  $z \geq 2$  letras, um conjunto finito munido da topologia discreta, e seja  $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  o produto topológico de infinitas cópias de  $\mathcal{A}$ . Os pontos de  $\Sigma^+$  são denotados por  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , com  $x_n \in \mathcal{A}$ , e são “palavras” infinitas nas letras do alfabeto  $\mathcal{A}$ .

Uma base da topologia produto  $\tau$  em  $\Sigma^+$  é a família  $\mathcal{C}$  dos “cilindros centrados”, os subconjuntos do género

$$C_\alpha = \{x \in \Sigma^+ \text{ t.q. } x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_k = \alpha_k\}$$

palavras infinitas que “começam” pela palavra  $\alpha$ , ao variar  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  entre todas as palavras finitas nas letras de  $\mathcal{A}$ . Um aberto do produto topológico  $\Sigma^+$  é, por definição, uma reunião de cilindros centrados.

A topologia produto é metrizável, uma possibilidade é a métrica

$$d(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cdot |x_n - x'_n|$$

onde  $\lambda > 1$ . O espaço  $\Sigma^+$  é um espaço métrico compacto, perfeito e totalmente desconexo, logo homeomorfo a um conjunto de Cantor.

O *deslocamento de Bernoulli* (em inglês, *Bernoulli shift*) é a transformação  $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$  que “esquece a primeira letra”, definida por

$$\sigma : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

- Mostre que a família dos cilindros centrados é uma base de uma topologia (é uma cobertura, pois  $\Sigma^+ = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_z$ , e a interseção de dois cilindros centrados é um cilindro centrado ou o conjunto vazio).
  - Mostre que, se  $\lambda$  é suficientemente grande, então os cilindros centrados são as bolas abertas, e também fechadas, de  $(\Sigma^+, d)$ , e que  $d$  é uma ultra-métrica (ou seja, a desigualdade do triângulo é substituída pela mais forte  $d(a, b) \leq \max\{d(a, c), d(c, b)\}$ ).
  - Mostre que  $\sigma$  é uma transformação contínua (a imagem inversa de um cilindro centrado é uma reunião finita de  $z$  cilindros centrados, e portanto a imagem inversa de um aberto é uma reunião de cilindros centrados, logo um aberto).
  - Mostre que  $\sigma$  não é invertível, todo ponto de  $\Sigma^+$  tem  $z$  pré-imagens.
  - Determine os pontos periódicos de  $\sigma$ , e a cardinalidade de  $\text{Fix}(\sigma^n)$ .
4. (**dyadic adding machine**) A norma diádica nos inteiros  $\mathbb{Z}$  é definida por  $\|n\|_2 = 2^{-k}$  se  $2^k$  é a maior potência de 2 que divide  $n$  (ou seja, se  $n = 2^k q$  com  $q$  ímpar). O grupo aditivo (de fato, o anel) dos *inteiros diádicos*  $\mathbb{Z}_2$  é o completamento de  $\mathbb{Z}$  com respeito à distância diádica  $d_2(n, m) = \|n - m\|_2$ . É um grupo topológico compacto. Pode ser pensado como o conjunto das séries formais

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^n = \dots x_n \dots x_3 x_2 x_1 x_0$$

com  $x_n \in \{0, 1\}$ , munido da “adição” definida da forma usual da direita à esquerda. Em quanto espaço topológico,  $\mathbb{Z}_2$  é isomorfo ao produto topológico  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ , o conjunto das palavras infinitas  $(\dots x_n \dots x_3 x_2 x_1 x_0)$  nas letras 0 e 1, munido da topologia produto. A “*dyadic adding machine*” (ou “*Kakutani-von Neumann odometer*”) é a translação  $\eta : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , definida por

$$x \mapsto x + 1$$

ou seja,

$$(\eta x)_n = \begin{cases} 1 - x_n & \text{se } x_k = 1 \quad \forall k < n \\ x_n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Verifique que  $\eta$  é um homeomorfismo, com inversa  $\eta^{-1} : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definida por

$$(\eta^{-1} x)_n = \begin{cases} 1 - x_n & \text{se } x_k = 0 \quad \forall k < n \\ x_n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- A adding machine  $\eta$  tem pontos periódicos?

5. (frações contínuas) As frações contínuas (simples e com denominadores naturais) são expressões formais

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

onde  $a_0 \in \mathbb{Z}$  e os “denominadores”  $a_n \in \mathbb{N}$  se  $n \geq 1$ . Os convergents de  $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$  são as frações contínuas finitas

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Os convergentes  $p_n/q_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$  (com  $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ ,  $q_n \neq 0$  e  $(p_n, q_n) = 1$ ) são determinados pela equação recursiva

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

com condições iniciais  $p_0 = a_0$  e  $q_0 = 1$ , e  $p_{-1} = 1$  e  $q_{-1} = 0$ .

- Verifique que

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$$

Deduz que os convergentes  $p_n/q_n$  são frações reduzidas.

- Verifique que

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n}$$

Deduz que os convergentes com  $n$  par crescem, e os convergentes com  $n$  ímpar decrescem.

- Use a equação recursiva para mostrar que os denominadores de uma fração contínua infinita satisfazem

$$q_{n+2} \geq q_{n+1} + q_n \geq 2q_n,$$

e portanto crescem exponencialmente, ou seja,  $q_n \geq 2^{(n-1)/2}$ .

- Deduz que a sucessão dos convergentes  $p_n/q_n$  de uma fração contínua infinita é convergente, ou seja, existe o  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n = x$ , chamado *valor* da fração contínua e denotado por

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n],$$

A cada número real  $x \in \mathbb{R}$  corresponde uma única fração contínua, finita (com o último denominador  $a_n > 1$ ) se  $x$  é racional e infinita se  $x$  é irracional.

A receita para determinar a fração contínua de  $x \in \mathbb{R}$  é a seguinte. Definimos  $a_0 = [x]$ , donde

$$x = a_0 + x_0$$

com  $0 \leq x_0 < 1$ . Se  $x_0 \neq 0$ , ou seja, se  $x$  não é inteiro, definimos  $r_1 = 1/x_0$ ,  $a_1 = [1/x_0]$ , donde

$$x = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{a_1 + x_1}$$

com  $0 \leq x_1 < 1$ . Se  $x_1 \neq 0$ , caso contrário  $x$  seria racional, definimos  $r_2 = 1/x_1$ ,  $a_2 = [1/x_1]$ , donde

$$x = [a_0; a_1, r_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + x_2}}$$

com  $0 \leq x_2 < 1$ . Indutivamente, definimos

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, r_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + x_n}}}}$$

onde  $r_n = 1/x_{n-1}$ ,  $a_n = [1/x_{n-1}]$  e  $x_n = 1/x_{n-1} - a_n$ .

- Verifique que se  $r_n$  é um inteiro (para algum  $n$  minimal!), e portanto  $x_{n+1} = 0$ , então

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

é racional.

- Mostre que, se  $x$  é racional, então o algoritmo termina em tempo finito e portanto  $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$  com  $a_n > 1$  (observe que os  $r_n$  números racionais positivos com denominadores estritamente decrescentes).
- Deduza que, se  $x$  é irracional, então o algoritmo produz uma (única) representação de  $x$  como fração contínua infinita, i.e.

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

e todos os  $a_n$  com  $n \geq 1$  são inteiros positivos.

6. (mapa de Gauß) A *mapa de Gauß* é a transformação  $g : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$  definida por

$$x \mapsto 1/x - [1/x]$$

- Verifique que se  $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ , então

$$g : [0; a_1, a_2, a_3, \dots] \mapsto [0; a_2, a_3, \dots]$$

- Deduza que, se  $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ , então

$$a_n = [1/G^{n-1}(x)].$$

## 7 Órbitas regulares e perturbações

1. (teoremas de ponto fixo em dimensão 1) Seja  $f : I \rightarrow I$  uma transformação contínua do intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

i) Se  $J \subset I$  é um intervalo compacto tal que  $f(J) \subset J$ , então  $f$  tem um ponto fixo em  $J$ .

ii) Se  $J \subset I$  é um intervalo compacto tal que  $J \subset f(J)$  então  $f$  tem um ponto fixo em  $J$

- Prove os dois teoremas aplicando o teorema de Bolzano à função  $x \mapsto f(x) - x$ .
- Observe que, se  $f$  não tivesse pontos fixos em  $J$ , então

$$x \mapsto \frac{f(x) - x}{|f(x) - x|}$$

seria uma aplicação contínua de um intervalo ( $J$  no caso i) ou um subintervalo de  $J$  no caso ii) sobre o espaço desconexo  $\{-1, 1\}$  ...

2. (bacia de atração) Seja  $p$  um ponto fixo de  $f : X \rightarrow X$ . A *bacia de atração*, ou *conjunto estável*, de  $p$  é o conjunto dos pontos cuja trajetória é assintótica a  $p$ , i.e.

$$W^s(p) = \left\{ x \in X \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p \right\}$$

- Mostre que se a trajetória de  $x$  é uma sucessão convergente, o seu limite é um ponto fixo.
- Mostre que conjuntos estáveis de dois pontos fixos diferentes são disjuntos.
- Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a transformação linear da reta definida por  $x \mapsto \lambda x$ . Estude a bacia de atração do ponto fixo 0 ao variar o parâmetro  $\lambda$ .
- Determine conjuntos estáveis dos pontos fixos de

$$f(x) = x/3 \quad f(x) = x^2 \quad f(x) = x^3$$

- Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear do plano definida por

$$x \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x$$

Estude a bacia de atração do ponto fixo 0 ao variar os parâmetros  $a, b, c, d$ .

3. (contrações) Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma transformação  $f : X \rightarrow X$  é uma *contração* (ou  $\lambda$ -*contração* se é importante lembrar o valor de  $\lambda$ ) se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz  $\lambda < 1$ , ou seja, se existe  $0 \leq \lambda < 1$  tal que para todos  $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot d(x, x')$$

O *princípio das contrações* afirma que “todas as trajetórias de uma contração  $f : X \rightarrow X$  são sucessões de Cauchy, e a distância entre cada duas trajetórias diminui exponencialmente no tempo. Em particular, se  $X$  é completo, então  $f$  admite um único ponto fixo  $p$ , e a trajetória de todo ponto  $x \in X$  converge exponencialmente para o ponto fixo, i.e.  $f^n(x) \rightarrow p$  para  $n \rightarrow \infty$ ”.

- (*demonstração*) Seja  $f : X \rightarrow X$  uma  $\lambda$ -contração. Seja  $x_0 \in X$  um ponto arbitrário, e seja  $(x_n)$  a sua trajetória, i.e.  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Mostre que  $d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^k$ , e portanto que

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Deduza que  $(x_n)$  é uma sucessão de Cauchy, e que o limite  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , que existe se  $X$  é completo, é um ponto fixo de  $f$ . Prove a unicidade do ponto fixo. Mostre que  $d(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot d(x_0, p)$ , ou seja que a convergência  $x_n \rightarrow p$  é exponencial.

- Utilize o teorema do valor médio para mostrar que uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  é uma contração sse existe  $\lambda < 1$  tal que  $|f'(x)| \leq \lambda$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- Prove que uma contração de um espaço métrico compacto  $X$  não pode ser invertível, desde que o espaço contenha mais de um ponto. (Compare os diâmetros de  $X$  e de  $f(X)$ )
- Dê exemplos de contrações de

$$[0, 1] \quad [0, 1] \times [0, 1]$$

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } d(x, y) < r\} \quad \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$$

- Mostre que uma transformação  $f : X \rightarrow X$  tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

para todos  $x, x' \in X$  distintos pode não ter pontos fixos, mesmo se o espaço métrico  $X$  for completo.

- Mostre que as contrações lineares da reta  $x \mapsto \alpha x$  e  $x \mapsto \beta x$  não podem ser conjugadas se  $\alpha \cdot \beta < 0$ , i.e. se uma é crescente e a outra é decrescente. (Uma conjugação é um homeomorfismo da reta, em particular é monótono...)

4. (algoritmo de Heron) Considere o problema de determinar o lado  $\ell$  de um quadrado dada a sua área  $a$ , ou seja, o número  $\ell = \sqrt{a}$ .

Um método, utilizado provavelmente pelos babilônios e descrito por Heron<sup>17</sup>, consiste em construir recursivamente rectângulos de área  $a$  com lados cada vez mais próximos. Se  $x_1$  e  $y_1$  são a base e a altura do primeiro rectângulo, e portanto  $x_1 y_1 = a$ , então o segundo rectângulo tem como base a média aritmética de base e altura do primeiro, o terceiro rectângulo tem como base a média aritmética da base e a altura do segundo, e assim sucessivamente. A equação recursiva que determina as bases dos rectângulos é portanto

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

- Mostre que bases e alturas dos rectângulos verificam as equações recursivas

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad y_{n+1} = \frac{1/x_n + 1/y_n}{2}$$

- Calcule a diferença  $x_{n+1} - y_{n+1}$  e mostre que

$$y_2 < y_3 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_3 < x_2$$

e que

$$x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

- Estime  $\sqrt{2}$  com um erro  $< 0.01$  e  $0.001$ .
  - Estime quantas iterações é preciso fazer para obter os primeiros  $n$  dígitos decimais de  $\sqrt{2}$  usando o método dos babilônios.
5. (pesquisa binária/método das biseções) Um método para determinar um zero de uma função contínua  $f(x)$  consiste em determinar um intervalo inicial  $[a_0, b_0]$  tal que os valores da função nos dois extremos tenham sinais opostos, e dividir repetidamente o intervalo em duas partes iguais seleccionando cada vez o sub-intervalo  $[a_n, b_n]$  em cujos extremos a função continue a assumir sinais diferentes. Pelo teorema de Bolzano, no  $n$ -ésimo intervalo seleccionado,  $[a_n, b_n]$ , está um zero da função.

<sup>17</sup>Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1968. O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Dover, 1969.

- Determine a velocidade de convergência do método, ou seja, estime o comprimento

$$|b_n - a_n|$$

dos intervalos sucessivos.

- Aproxime um zero de  $x^3 - 2$  com 4 dígitos decimais correctos.
  - Use a sua máquina de calcular para estimar o ponto  $x$  tal que  $\cos(x) = x$  (ou seja, um zero da função  $f(x) = \cos(x) - x$ ).
6. (ordem da reta real e trajetórias) Seja  $f : I \rightarrow I$  uma transformação contínua e crescente do intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Então toda trajetória  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  é monótona, crescente ou decrescente. Em particular, se o intervalo  $I$  é compacto, toda trajetória é convergente. Isto implica que, se  $I$  é compacto, existe um compacto não vazio  $F \subset I$  de pontos fixos, e que os pontos em cada componente conexa de  $I \setminus F$  têm trajetórias contidas na componente conexa, e convergentes para um ponto de  $\partial F$ .

- Prove que um homeomorfismo  $f : I \rightarrow I$  de um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  não tem pontos periódicos com período superior a 2. Quando tem pontos periódicos de período 2? (Se o homeomorfismo é crescente então nenhum ponto pode ter período superior a 1. De fato, as trajetórias são monótonas, portanto ou  $f(x) = x$ , ou  $f^{n+1}(x) > f^n(x) > \dots > x$  para todo  $n \geq 1$ , ou  $f^{n+1}(x) < f^n(x) < \dots < x$  para todo  $n \geq 1$ . Seja agora  $f$  um homeomorfismo decrescente. Não é difícil ver que  $f$  tem um, e um único, ponto fixo  $p$ , e que  $p$  divide  $I$  em dois subintervalos  $I_-$  e  $I_+$  que são permutados pela transformação  $f$ . Observe também que, se  $f$  é decrescente, então  $f^2$  é crescente. Seja  $x \neq p$  tal que  $f^2(x) \neq x$ . Então as sucessões  $(f^{2n}(x))$  e  $(f^{2n+1}(x))$  são estritamente monótonas e estão em "lados" distintos de  $p$ , i.e. uma em  $I_\pm$  e a outra em  $I_\mp$  ...)
- Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo compacto e  $f : I \rightarrow I$  uma função contínua e crescente. Prove que a trajetória de cada ponto de  $I$  converge para um ponto fixo de  $f$ . Discuta a dinâmica de  $f$ .
- Estude a dinâmica de uma transformação contínua e decrescente  $f : I \rightarrow I$  definida num intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}$ . (Observe que, se  $f$  é decrescente, então  $f^2$  é crescente...)

## 8 Linearização/análise local

1. (Análise local/linearização/estabilidade dos estados estacionários em dimensão 1) Sejam  $f : I \rightarrow I$  uma transformação de classe  $C^1$  definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , e  $p \in I$  um ponto fixo de  $f$ .

Se  $|f'(p)| < 1$ , então o ponto fixo é *atractivo*: as trajectórias de todo o ponto  $x_0$  suficientemente próximo de  $p$  convergem para  $p$ .

Se  $|f'(p)| > 1$ , então o ponto fixo é *repulsivo*: as trajectórias de todo o ponto  $x_0 \neq p$  numa vizinhança suficientemente pequena de  $p$  saem da vizinhança em tempo finito.

Se  $f'(p) = 0$ , o ponto fixo  $p$  é dito *super-attractivo*.

- Dê exemplos que mostram que o conjunto estável de um ponto fixo repulsivo  $p$  pode conter estritamente  $\{p\}$ .
- Procure uma boa definição de *órbita periódica atractiva*.  
(Observe que, se  $\{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$  é uma órbita, a derivada de  $f^n$  é a mesma em todos os seus pontos pela regra da cadeia. Se  $|(f^n)'(p)| < 1$ , então  $p$  é um ponto fixo atractivo da transformação  $f^n$ , e portanto existe uma vizinhança  $B$  de  $p$  tal que  $f^{kn}(x) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} p$  para todo  $x \in B$ . Então  $B \cup f^{-1}(B) \cup \dots \cup f^{-(n-1)}(B)$  é uma vizinhança da órbita periódica, e as trajectórias dos seus pontos são assintóticas à órbita de  $p$  ...)
- Se  $p$  é um ponto fixo de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f'(p) = 1$ , então tudo ou quase tudo pode acontecer! O conjunto estável de  $p$  pode ser uma vizinhança de  $p$ , pode ser só  $\{x\}$ , ou pode conter uma "meia vizinhança" de  $p$ , um intervalo do género  $[p, p \pm \varepsilon[ \dots$
- Sejam  $f : V \rightarrow V$  uma transformação de classe  $C^1$  definida num aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$ , e  $p \in V$  um ponto fixo de  $f$ . Mostre que se  $|f'(p)| < 1$ , então  $p$  é atractivo, ou seja admite uma vizinhança  $B$  tal que  $f^n(x) \rightarrow p$  para todo  $x \in B$ .
- Seja  $p$  um ponto fixo super-attractivo da transformação  $f : I \rightarrow I$ . Use o polinómio de Taylor de grau 1 com resto para provar que, se  $x_0$  está numa vizinhança suficientemente pequena de  $\bar{x}$ , então a trajectória de  $x_0$  converge para o ponto fixo  $\bar{x}$  e a velocidade de convergência é "quadrática", ou seja,

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \beta \cdot |x_n - \bar{x}|^2$$

onde  $\beta$  é uma constante.

- Estude a natureza dos pontos fixos das seguintes transformações

$$f(x) = \alpha x \quad f(x) = \alpha x^3 \quad f(x) = \alpha x + \beta x^2$$

ao variar os parâmetros.

- Estude a dinâmica de

$$x \mapsto x \pm x^3 \quad \text{e} \quad x \mapsto x \pm x^2$$

- Digite 0.1 na sua máquina de calcular, e pressione repetidamente a tecla "cos". O que acontece? Porque?

2. (família quadrática). Considere a família quadrática ou logística (do francês "logement"), a família de transformações  $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definidas por

$$x \mapsto \lambda x(1 - x)$$

onde o parâmetro  $\lambda$  tem valores no intervalo  $[0, 4]$ .

- Os pontos fixos de  $f_\lambda$  são 0, que é atractivo quando  $0 \leq \lambda < 1$ , e  $p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ , que é atractivo quando  $1 < \lambda < 3$ .
- Se  $\lambda \in [0, 1]$  então toda trajectória ( $f_\lambda^n(x)$ ) converge para 0. De fato, toda trajectória é uma sucessão decrescente e limitada, logo convergente, e o limite é o único ponto fixo 0.

- Se  $\lambda \in ]1, 3]$  então toda trajetória  $(f_\lambda^n(x))$  converge para  $p_\lambda$ . De fato, se  $1 < \lambda < 3$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p_\lambda$  tal que  $f_\lambda|_V$  é uma contração e tal que para todo  $x \in [0, 1]$  existe um tempo  $n \geq 0$  tal que  $f_\lambda^n(x) \in V$ .

3. (método de Newton) O método de Newton para aproximar as raízes de um polinómio  $P(z)$ , ou seja, resolver a equação

$$P(z) = 0,$$

consiste em escolher uma primeira aproximação  $z_0$ , e iterar

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}.$$

Ou seja, se  $z_0$  é uma primeira conjectura, uma conjectura melhor é o zero da aproximação linear  $P(z) \simeq P(z_0) + P'(z_0) \cdot (z - z_0)$ .

- Mostre que se a sucessão  $(z_n)$  converge, i.e.  $z_n \rightarrow z_\infty$ , e se  $P'(z_\infty) \neq 0$ , então o limite  $z_\infty$  é um zero do polinómio. Mostre que, se a conjectura inicial  $z_0$  está suficientemente próxima de uma raiz  $\bar{z}$  e  $P'(\bar{z}) \neq 0$ , então a sucessão dos  $z_n$  converge para esta raiz.
- Mostre que se  $|P'(z)| > \delta$  e  $|P''(z)| < M$  numa vizinhança de uma raiz  $r$ , então  $r$  é um ponto fixo super-atractivo de  $f(z) = z - P(z)/P'(z)$ .
- Verifique que o método de Newton aplicado ao polinómio quadrático  $z^2 - a$ , com  $a > 0$ , corresponde ao algoritmo de Heron!
- Estime  $\sqrt{17}$  ...
- Escreva a receita do método de Newton para resolver  $z^n - a = 0$ , com  $a > 0$  e  $n \geq 2$ .
- Estime raízes de  $x^3 - 2x - 5 = 0$  (Newton 1969).
- Use o método de Newton para aproximar a “razão”, a raiz positiva de  $x^2 - x - 1$ .
- Utilize o método de Newton para estimar raízes de

$$z^2 + 1 + z \quad z^3 - z - 1 \quad z^5 + z + 1 \quad z^3 - 2z - 5$$

## 9 Linearização de fluxos

não leccionado

1. (sistemas lineares) As trajectórias de um sistema linear

$$\dot{x} = Ax$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ , são dadas por  $x(t) = e^{tA}x(0)$ , onde o “operador exponencial”  $e^{tA}$  é definido pela série de potências

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

O campo linear  $v(x) = Ax$  é dito *hiperbólico* se o espectro de  $A$ , o conjunto

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda_k = \rho_k + i\omega_k \in \mathbb{C} \quad \text{t.q.} \quad \det(A - \lambda_k I) = 0\}$$

dos valores próprios de  $A$ , é disjunto do eixo imaginário (ou seja,  $\rho_k \neq 0 \forall k$ ).

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\rho_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 t} \end{pmatrix}$$

A origem é dita *nodo estável* se  $\rho_1, \rho_2 < 0$ , *nodo instável* se  $\rho_1, \rho_2 > 0$ , *ponto de sela* se  $\rho_1 < 0 < \rho_2$ .

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho & \omega \\ -\omega & \rho \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

A origem é dita *foco estável* se  $\rho < 0$ , *foco instável* se  $\rho > 0$ .

- Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + y \end{aligned}$$

Determine a solução com condições iniciais  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 0$ .

2. (estabilidade local) Seja  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores  $v(\bar{x}) = 0$ . O equilíbrio é (*localmente*) *estável* se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

O equilíbrio é (*localmente*) *assimptoticamente estável* se é estável e se  $\exists \delta > 0$  tal que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad x(t) \rightarrow \bar{x}, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

- Verifique que a solução de equilíbrio  $x(t) = 0$  do campo linear  $v(x) = Ax$  é estável se todos os valores próprios de  $A$  têm parte real  $\rho_k = \Re(\lambda_k) \leq 0$ .
- Verifique que a solução de equilíbrio  $x(t) = 0$  do campo linear  $v(x) = Ax$  é *assimptoticamente estável* se todos os valores próprios de  $A$  têm parte real  $\rho_k = \Re(\lambda_k) < 0$ .

3. (funções de Lyapunov) Seja  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores  $v(\bar{x}) = 0$ . Uma *função de Lyapunov* é uma função diferenciável  $H(x)$  que assume um mínimo local em  $\bar{x}$  (i.e.  $H(\bar{x}) < H(x)$  para todo  $x \neq \bar{x}$  numa vizinhança de  $\bar{x}$ ) e que não cresce ao longo das trajectórias do sistema, ou seja,

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) \leq 0$$

Se o sistema  $\dot{x} = v(x)$  admite uma função de Lyapunov  $H(x)$  numa vizinhança do equilíbrio  $\bar{x}$ , então

$$\boxed{\frac{d}{dt}H(x(t)) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ é localmente estável}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}H(x(t)) < 0 \quad \forall x(t) \neq \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ é localmente assintoticamente estável}}$$

- Considere o sistema conservativo  $m\ddot{q} = -\nabla V(\vec{q})$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= \frac{1}{m}\vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= -\nabla V(\vec{q}) \end{aligned}$$

com  $\vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{R}^n$ . Verifique que a energia

$$E(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}\|\vec{p}\|^2 + V(\vec{q})$$

é uma constante do movimento. Deduza que os pontos de equilíbrio  $(\vec{q}, 0)$ , onde  $\vec{q}$  é um mínimo local do potencial  $V(q)$ , são localmente estáveis.

4. (oscilações) Considere a equação das oscilações amortecidas  $\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega^2q = 0$ , ou seja, o sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -2\alpha p - \omega^2q \end{aligned}$$

- Esboce as curvas de fase do sistema para diferentes valores dos parâmetros  $\alpha \geq 0$  e  $\omega$ .
- Mostre que a energia

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2q^2$$

é conservada quando  $\alpha = 0$ . Deduza que  $(0, 0)$  é um equilíbrio estável.

- Mostre que  $(0, 0)$  é um equilíbrio assintoticamente estável se  $\alpha > 0$ .

5. (linearização de campos de vectores) Seja  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores  $v(\bar{x}) = 0$ . A *linearização* do sistema em torno de  $\bar{x}$  é o sistema linear

$$\dot{y} = Ay$$

para a diferença  $y(t) = x(t) - \bar{x}$ , onde  $A = Dv(\bar{x})$  é a matriz Jacobiana do campo  $v$  no ponto  $\bar{x}$ .

O *teorema de Hartman-Grobman* afirma que, se o campo linearizado  $A$  é hiperbólico, então o campo  $v(x)$  é “localmente equivalente” à sua parte linear  $A$ .

Em particular, se os valores próprios  $\{\lambda_i\}$  de  $A$  têm parte real  $\Re(\lambda_i) < 0$  então

$$\boxed{\Re(\lambda_i) < 0, \forall i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ é localmente assintoticamente estável}}$$

- Linearize o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^2 + x + \sin(y) \\ \dot{y} &= \cos(y) - x^3 - 5y\end{aligned}$$

em torno do seu ponto de equilíbrio  $(1, 0)$  e discuta a estabilidade.

- Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + y \\ \dot{y} &= -x - y\end{aligned}$$

Determine os pontos de equilíbrio e discuta a estabilidade. Simule o sistema e esboce as curvas de fase.

- Discuta a estabilidade dos equilíbrios do pêndulo  $\ddot{q} = -\omega^2 \sin(q) - \alpha \dot{q}$ .

6. (pêndulo matemático) Considere o *pêndulo matemático*,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

- Simule o sistema.
- Mostre que a energia

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega^2 (1 - \cos(\theta))$$

é uma constante do movimento.

- Discute a estabilidade das órbitas periódicas.
- Discuta as oscilações do pêndulo com atrito e com momento de rotação constante,

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) + \alpha \dot{\theta} = M$$

7. (ciclos limite) Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(1 - x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 + y^2)\end{aligned}$$

- Simule o sistema.
- Mostre que, em coordenadas polares, o sistema é

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

Deduza que a circunferência unitária é uma órbita periódica.

- Estude a estabilidade da órbita periódica.

## 10 Persistência e bifurcações

não leccionado

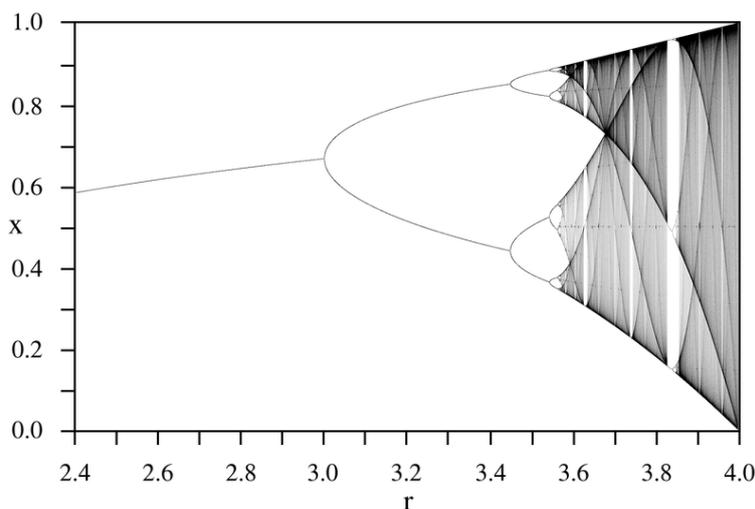
1. **(transversalidade e persistência dos pontos fixos)** Sejam  $f : I \rightarrow I$  uma transformação de classe  $\mathcal{C}^1$  definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , e  $p$  um ponto fixo de  $f$ . Se  $f'(p) \neq 1$ , então o ponto fixo  $p$  é “isolado”, ou seja, admite uma vizinhança  $B$  tal que  $p$  é o único ponto fixo de  $f$  em  $B$ . Os pontos fixos que satisfazem a condição  $f'(p) \neq 1$  são ditos *transversais* (porque a tangente ao gráfico  $\text{graph}(f) = \{(x, y) \text{ t.q. } y = f(x)\}$  de  $f$  em  $p$  é transversal ao gráfico da função identidade, a reta  $\{(x, y) \text{ t.q. } y = x\}$ ).

Se  $p$  é um ponto fixo transversal de  $f : I \rightarrow I$ , então toda transformação  $g : I \rightarrow I$  suficientemente  $\mathcal{C}^1$ -próxima<sup>18</sup> de  $f$  tem um, e um único, ponto fixo, também transversal, numa vizinhança de  $p$ .

- Prove que um ponto fixo transversal é isolado (um ponto fixo é uma solução da equação  $F(x) = f(x) - x = 0$ . Se  $f'(p) \neq 1$  então  $F'(p) \neq 0$ . O teorema da função inversa diz então que  $F$  é invertível numa vizinhança  $B$  de  $p$ , e isso implica que  $p$  é o único zero de  $F$  em  $B$ ).
  - Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma transformação de classe  $\mathcal{C}^1$ , e seja  $p$  um ponto periódico de período  $n$  tal que  $(f^n)'(p) \neq 1$ . Toda transformação  $g$  suficientemente  $\mathcal{C}^1$ -próxima de  $f$  tem um ponto periódico de período  $n$  próximo de  $p$ . (Repita a demonstração anterior com  $f^n$  em vez de  $f$ )
  - Sejam  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação de classe  $\mathcal{C}^1$  definida num aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$ , e  $p$  um ponto fixo de  $f$ . A transversalidade de  $p$  se traduz na condição de que o operador  $f'(p)$  não tenha 1 como valor próprio. Prove que se o operador  $f'(p)$  não tem 1 como valor próprio, então o ponto fixo  $p$  é isolado (existe uma vizinhança  $B$  de  $x$  tal que  $x$  é o único ponto fixo de  $f$  em  $B$ ). Enuncie e prove um resultado de “persistência” análogo ao caso da reta.
2. **(duplicação do período)**
  3. **(bifurcação sela-nó)** bifurcação sela-nó
  4. **(mapa quadrático na reta real)**

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

5. **(Feigenbaum)**



Bifurcation diagram of the logistic map

<sup>18</sup>A “distância”  $\mathcal{C}^1$  entre  $f$  e  $g$  é

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}^1} = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x) - g'(x)|.$$

6. (bifurcação de Hopf) Considere o sistema<sup>19</sup>

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= x + y(\lambda - (x^2 + y^2))\end{aligned}$$

- Simule o sistema ao variar o parâmetro  $\lambda$ .
- Mostre que a origem é um equilíbrio assintoticamente estável quando  $\lambda < 0$ .
- Mostre que a origem é um equilíbrio instável quando  $\lambda > 0$ . Observe que a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  é um “ciclo limite” do sistema quando  $\lambda = 1$ .
- Simule o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= -x + y - y(\lambda - (x^2 + y^2))\end{aligned}$$

---

<sup>19</sup>E. Hopf, Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Phys.* **95** (1943), 3-22.

## 11 Recorrências

1. (**conjuntos  $\omega$  e  $\alpha$  limite**) Seja  $f : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico topológico. O conjunto  $\omega$ -limite do ponto  $x \in X$  é o conjunto dos pontos limites da trajetória de  $x$ , ou seja

$$\omega_f(x) = \overline{\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\}} \cap_{n=0}^{\infty}$$

o conjunto dos pontos  $x' \in X$  tais que existe uma subsucessão  $n_i \rightarrow \infty$  de tempos tal que  $f^{n_i}(x) \rightarrow x'$  quando  $i \rightarrow \infty$ .  $\text{Lim}_f = \bigcup_{x \in X} \omega_f(x)$  denota o conjunto dos pontos  $\omega$ -limites.

Se  $f$  é invertível, o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$  é definido por  $\alpha_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x)$ , ou seja é o conjunto dos pontos  $x' \in X$  tais que existe uma subsucessão  $n_i \rightarrow \infty$  de tempos tal que  $f^{-n_i}(x) \rightarrow x'$  quando  $i \rightarrow \infty$ .  $\text{Lim}_{f^{-1}} = \bigcup_{x \in X} \alpha_f(x)$  denota o conjunto dos pontos  $\alpha$ -limites.

- Prove que  $\omega_f(x)$  é fechado e +invariante. Prove que, se  $f$  é um homeomorfismo, então  $\omega_f(x)$  e  $\alpha_f(x)$  são fechados e invariantes.
  - Mostre que, se  $X$  é compacto, então a trajetória  $(f^n(x))_{n \in \mathbf{N}_0}$  de todo ponto  $x \in X$  admite subsucessões convergentes, e portanto  $\omega_f(x) \neq \emptyset$ . Analogamente, se  $f$  é um homeomorfismo,  $\alpha_f(x) \neq \emptyset$  para todo ponto  $x \in X$ . Em particular, os conjuntos  $\text{Lim}_{f^{\pm 1}}$  não são vazios.
  - Dê exemplos que mostram que  $\omega_f(x)$  e  $\alpha_f(x)$  podem ser vazios.
  - Mostre que  $\text{Per}_f \subset \text{Lim}_f$ .
2. (**pontos recorrentes**) Seja  $f : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico topológico. O ponto  $x \in X$  é *recorrente* se  $x \in \omega_f(x)$ , ou seja, se dada uma vizinhança arbitrária  $B$  de  $x$ , existe um tempo  $n \geq 1$  tal que  $f^n(x) \in B$ .  $\text{Rec}_f$  denota o conjunto dos pontos recorrentes de  $f$ .

Se  $f$  é um homeomorfismo,  $\text{Rec}_{f^{-1}}$  é o conjunto dos pontos  $x$  tais que  $x \in \alpha_f(x)$ .

- Mostre que  $\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f$ .
  - Defina uma ordem parcial em  $X$  da seguinte maneira:  $x \prec x'$  se para todas vizinhanças  $U$  de  $x$  e  $V$  de  $x'$  existe um tempo  $n \geq 1$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Prove que  $x$  é recorrente sse  $x \prec x$ .
  - Dê exemplos que mostram que  $\text{Rec}_f$  e  $\text{Rec}_{f^{-1}}$  podem ser vazios.
3. (**conjunto não-errante**) Seja  $f : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico topológico. O ponto  $x \in X$  é *errante* se admite uma vizinhança disjunta de todas as suas iteradas, i.e. se existe um aberto  $U$  que contém  $x$  tal que  $U \cap f^n(U) = \emptyset$  para todo tempo  $n \geq 1$ . O ponto  $x$  não é errante se para toda vizinhança  $U$  de  $x$  existe um tempo  $n \geq 1$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ .

O *conjunto não-errante*  $\text{NW}_f$  (do inglês “non-wandering set”) é o conjunto dos pontos  $x$  que não são errantes.

O conjunto não-errante  $\text{NW}_f$  é fechado (o conjunto dos pontos errantes é aberto quase por definição, pois, se  $x$  é errante, todo ponto numa sua vizinhança é errante) e +invariante. Contém os  $\omega$ -limites de todos os pontos de  $X$ , assim como os pontos recorrentes. As inclusões são

$$\text{Per}_f \subset \text{Lim}_f \subset \text{NW}_f \quad \text{e} \quad \text{Per}_f \subset \text{Rec}_f \subset \text{NW}_f$$

Se  $f$  é um homeomorfismo,  $\text{NW}_f$ , que é igual a  $\text{NW}_{f^{-1}}$ , é também invariante, e contém os  $\omega$ - e  $\alpha$ -limites de todos os pontos de  $X$ .

( $X$  compacto  $\Rightarrow \text{NW}_f \neq \emptyset$ ) Se  $X$  é compacto, então  $\text{NW}_f \neq \emptyset$ , porque todo ponto  $x \in X$  tem  $\omega_f(x) \neq \emptyset$  e porque  $\text{Lim}_f \subset \text{NW}_f$ .

- Prove que o conjunto não-errante de um homeomorfismo é fechado, invariante e contém os  $\omega$ - e  $\alpha$ -limites de todos os pontos.
- Mostre que, se  $f$  é um homeomorfismo, então  $\text{NW}_f = \text{NW}_{f^{-1}}$ .
- Dê exemplos que mostram que  $\text{NW}_f$  pode ser vazio.

- Mostre que  $\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f \subset \text{NW}_f \subset \text{Rec}_f^\varepsilon$ . Dê exemplos que mostram que as inclusões podem ser estritas.
- Mostre que  $\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f \subset \text{NW}_f$  e portanto  $\overline{\text{Per}_f} \subset \overline{\text{Rec}_f} \subset \text{NW}_f$ . Mais difícil é arranjar exemplos que mostram que as inclusões podem ser estritas.
- Determine os conjuntos não errantes das transformações lineares do plano.

## 12 Transitividade e órbitas densas

1. **(transformações transitivas)** Seja  $X$  um espaço métrico completo e separável. Uma transformação contínua  $f : X \rightarrow X$  é (topologicamente) *+transitiva* se verifica uma das condições equivalentes:

- i) para cada dois abertos não vazios  $U, V \subset X$  existe um tempo  $n \geq 0$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ,*
- ii) existe um ponto  $x \in X$  tal que  $\omega_f(x) = X$ ,*
- iii) existe um conjunto residual de pontos  $x \in X$  tais que  $\omega_f(x) = X$ .*

Um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  é (topologicamente) *transitivo* se verifica uma das condições equivalentes:

- i) para cada dois abertos não vazios  $U, V \subset X$  existe um tempo  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ,*
- ii) existe um ponto  $x \in X$  tal que  $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$ ,*
- iii) existe um conjunto residual de pontos  $x \in X$  tais que  $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$ .*

- Prove as implicações  $\text{iii) } \Rightarrow \text{ii) } \Rightarrow \text{i)}$  na definição de "transformação +transitiva".
- Prove que, se  $f : X \rightarrow X$  é +transitiva, então  $\text{NW}_f = X$ .
- Prove que se  $f : X \rightarrow X$  é +transitiva, então o conjunto  $\text{Rec}_f$  dos pontos recorrentes é residual.
- Prove as implicações  $\text{iii) } \Rightarrow \text{ii) } \Rightarrow \text{i)}$  na definição de "homeomorfismo transitivo".
- Prove que um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  é transitivo sse  $X$  não contém uma reunião disjunta de dois subconjuntos abertos invariantes e não vazios.
- Prove que, se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo transitivo, então toda função contínua  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  invariante é constante.
- Mostre que uma rotação racional do círculo não é um homeomorfismo transitivo (observe que a função contínua  $x \mapsto \sin(2\pi qx)$  é invariante pela rotação  $x + \mathbb{Z} \mapsto x + p/q + \mathbb{Z} \dots$ ).

2. **(conjuntos e transformações minimais)** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação contínua. Um subconjunto fechado e não vazio  $K \subset X$  é dito *minimal* se é +invariante e se não contém subconjuntos próprio fechados e +invariantes. Se  $\text{Min}_f$  denota a reunião dos subconjuntos minimais de  $X$ , então  $\text{Per}_f \subset \text{Min}_f \subset \text{Rec}_f$ .

Se uma transformação  $f : X \rightarrow X$  admite um compacto  $C \subset X$  tal que  $f(C) \subset C$ , então admite pelo menos um conjunto minimal  $K \subset C$ .

Uma transformação contínua  $f : X \rightarrow X$  é *minimal* se verifica uma das condições equivalentes:

- i) toda órbita  $\mathcal{O}_f^+(x)$  é densa em  $X$ ,*
- ii)  $X$  não contém um subconjunto próprio fechado e +invariante, e portanto é um conjunto minimal.*

O homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  é um *homeomorfismo minimal* se toda órbita completa  $\mathcal{O}_f(x)$  é densa em  $X$ , ou seja se  $X$  não contém um subconjunto próprio fechado e invariante.

- Use o lema de Zorn para mostrar que uma transformação contínua  $f : X \rightarrow X$  de um espaço compacto  $X$  admite pelo menos um conjunto minimal (considere a família  $\mathcal{C}$  dos subconjunto  $C \subset X$  que são fechados, não vazios e +invariantes, munida da ordem parcial " $\subset$ ").
- Mostre que uma transformação  $f : X \rightarrow X$  definida num compacto admite pelo menos um ponto recorrente (que pode ser único!), pois  $\text{Min}_f \subset \text{Rec}_f$ .
- Mostre que uma transformação minimal é +transitiva.

- Mostre que um homeomorfismo minimal é transitivo.
  - Mostre que um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  definido num espaço compacto admite pelo menos um subconjunto minimal  $K$ , ou seja neste caso um subconjunto fechado, não vazio e invariante que não contém subconjuntos próprios fechados e invariantes.
3. (rotações irracionais do círculo) Uma rotação irracional do círculo é um homeomorfismo minimal.
- Deduza que os subgrupos próprios e fechados do círculo  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  são os subgrupos finitos.

### 13 Perda de memória e independência assintótica

- (dependência sensível das condições iniciais e mixing) A transformação  $f : X \rightarrow X$  tem dependência sensível das condições iniciais se existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in X$  e toda vizinhança  $B$  de  $x$ , existem  $y \in B$  e um tempo  $n \geq 0$  tais que

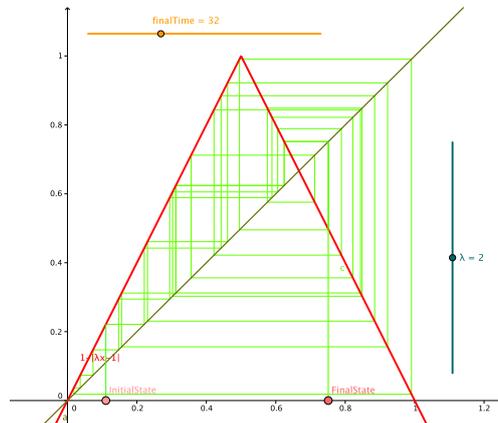
$$d(f^n(y), f^n(x)) > \delta$$

A transformação  $f : X \rightarrow X$  é topologicamente mixing (ou seja, “misturadora”) se para cada dois abertos não vazios  $U, V \subset X$  existe um tempo  $n \geq 0$  tal que para todo tempo  $k \geq n$

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

- (mixing  $\Rightarrow$  +transitivo) Mostre que uma transformação topologicamente mixing é topologicamente +transitiva. Em particular,  $NW_f = X$ , e  $\omega_f(x) = X$  é uma propriedade genérica.
  - Mostre que mixing  $\Rightarrow$  dependência sensível.
  - Deduza que uma isometria não pode ser topologicamente mixing.
- (transformação tenda) A transformação tenda é a transformação  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$



Cobweb diagram of the tent map.

- Verifique que em cada um dos intervalos  $I_{k,n} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$  com  $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$  a transformação  $T^n$  tem a forma

$$x \mapsto T^n(x) = \begin{cases} 2^n x + k & \text{se } k \text{ é par} \\ -2^n x + k + 1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

- Deduza que  $T^n$  tem um e um único ponto fixo repulsivo em cada um dos intervalos  $I_{k,n}$ , e portanto que  $|\text{Fix}(T^n)| = 2^n$  e os pontos periódicos de  $T$  são densos no intervalo  $[0, 1]$ .
- Mostre que a transformação  $T$  é topologicamente mixing.

- Verifique que  $h : x \mapsto \sin^2(\pi x/2)$  realiza uma conjugação topológica entre a transformação tenda  $T$  e a transformação  $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  da família quadrática, definida por  $f_4(x) = 4x(1-x)$ . Deduza que  $f_4$  é mixing
- Discuta a dinâmica da transformação  $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$

Cuidado,  $S$  não é contínua!, mas não é muito diferente da transformação tenda...

3. (**deslocamentos de Bernoulli**) Sejam  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, z\}$  um conjunto finito, e  $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  o espaço das palavra infinitas  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  nas letras do alfabeto  $\mathcal{A}$ , munido da topologia produto. Uma base da topologia produto é a família dos “cilindros centrados”, a família dos subconjuntos  $C_\alpha = \{x = (\alpha, *)\}$  = “palavras infinitas que começam pela palavra  $\alpha$ ”, ao variar  $\alpha$  entre todas as palavras finitas nas letras do alfabeto  $\mathcal{A}$ . O *deslocamento de Bernoulli* é a transformação  $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$  definida por

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

- Prove que  $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$  é uma transformação expansora se a métrica em  $\Sigma^+$  é definida por

$$d_\lambda(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cdot |x_n - x'_n| \quad \text{onde } \lambda > 1$$

ou por

$$d_\infty(x, x') = z^{-\inf\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n \neq x'_n\}}$$

- Mostre que  $|\text{Fix}(\sigma^n)| = z^n$ .
  - Mostre que todo cilindro centrado de  $\Sigma^+$  contém um ponto periódico de  $\sigma$ , e que portanto o conjunto dos pontos periódicos  $\text{Per}_\sigma$  é denso em  $\Sigma^+$ .
  - Prove que  $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$  é topologicamente mixing.
  - Dê exemplos de pontos  $x \in \Sigma^+$  tais que  $\omega_\sigma(x) = X$ .
  - De exemplos de pontos não pré-periódicos  $x \in \Sigma^+$  tais que tais que a aderência da órbita  $\mathcal{O}_\sigma^+(x)$  seja um subconjunto próprio de  $\Sigma^+$ .
  - Seja  $\Sigma = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , o espaço das palavras infinitas  $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  nas letras do alfabeto finito  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, z\}$ , munido da topologia produto. Verifique que o shift  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , definido por  $(\sigma(x))_k = x_{k+1}$ , é um homeomorfismo. Determine a cardinalidade de  $\text{Fix}(\sigma^n)$ , e prove que os pontos periódicos são densos em  $\Sigma$ . Prove que  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  é topologicamente mixing.
4. (**conjuntos de Cantor**) O *conjunto de Cantor standard* (“middle-third Cantor set”) é

$$K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1],$$

o conjunto dos números entre 0 e 1 cuja representação em base 3 utiliza só as letras 0 e 2.

Outra definição é

$$K = [0, 1] \setminus \cup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

onde os intervalos abertos  $I_k$  são definidos iterativamente da seguinte maneira:  $I_1$  é o terço central  $]1/3, 2/3[$  de  $[0, 1]$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os terços centrais dos intervalos de  $[0, 1] \setminus I_1$ , a saber  $]1/9, 2/9[$  e  $]7/9, 8/9[$ , ...etc.

Outra definição é  $K = \cap_{k \geq 0} K_k$ , onde

$$K_k = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_1, x_2, \dots, x_k \in \{0, 2\} \text{ e } x_i \in \{0, 1, 2\} \text{ se } i > k \right\}$$

- Observe que  $\dots \subset K_{n+1} \subset K_n \subset \dots \subset K_0 = [0, 1]$ , e que cada  $K_n$  é uma reunião disjunta de  $2^n$  intervalos fechados de comprimento  $3^{-n}$ . Deduza que  $K$  é compacto.
- Observe que  $K$  é homeomorfo ao produto topológico  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ , i.e. ao espaço do deslocamentos de Bernoulli num alfabeto de duas letras. Um homeomorfismo é

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n/3^n \in K$$

- Mostre que  $K$  não tem pontos isolados, e portanto  $K' = K$ , i.e. é perfeito.
- Mostre que a componente conexa de todo ponto  $x \in K$  é  $\{x\}$ , i.e.  $K$  é totalmente desconexo.
- Verifique que função  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  definida por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto ((x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}, \dots), (x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots))$$

define um homeomorfismo de  $K$  sobre  $K \times K$ . Mostre, por indução, que  $K$  é homeomorfo a  $K^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

- Observe que  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  é homeomorfo a  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , e que a representação binária dos reais entre 0 e 1 é uma aplicação contínua de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sobre o intervalo  $[0, 1]$ . Portanto, existe uma função contínua de  $K$  sobre o intervalo  $[0, 1]$ , e, pelo teorema de Schröder-Bernstein,  $K$  tem a cardinalidade do intervalo.
- Mostre que a aplicação  $x \mapsto 3x$  define um homeomorfismo de  $K \cap [0, 1/3]$  sobre  $K$ . Mostre que todo aberto não vazio do conjunto de Cantor contém uma “cópia” do próprio conjunto (i.e., uma das componentes conexas de  $K_n$ , homeomorfa a  $K$ ).
- Verifique que o “comprimento” (i.e. a medida de Lebesgue) de  $K$  é

$$|K| = \lim_{n \rightarrow \infty} |K_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot 3^{-n} = 0.$$

5. **(transformação de padeiro)** A *transformação do padeiro* é  $P : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  definida por

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (2x, y/2) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ (2x - 1, (y + 1)/2) & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

- Discuta a sua dinâmica.
- Considere o deslocamento de Bernoulli  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  no produto cartesiano  $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Mostre que a aplicação  $h : \Sigma \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  definida por

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{-n}}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \right)$$

é uma semiconjugação entre  $\sigma$  e  $P$ . Deduza ...

6. **(transformações expansoras)** Uma transformação contínua  $f : X \rightarrow X$  é *expansiva* se existe  $\delta > 0$  tal que para todos  $x, x' \in X$  distintos existe um tempo  $n \geq 0$  tal que

$$d(f^n(x), f^n(x')) > \delta$$

Uma transformação contínua  $f : X \rightarrow X$  é *expansora* se existem  $\mu > 1$  e  $\varepsilon > 0$  tais que para todos  $x, x' \in X$  distintos com  $d(x, x') < \varepsilon$

$$d(f(x), f(x')) > \mu \cdot d(x, x')$$

- Dê exemplos de transformações expansoras de  $\mathbb{R}$ , de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  e de  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .
- Prove que não existe nenhuma transformação expansiva  $f : I \rightarrow I$  definida num intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}$  (observe que uma tal transformação seria localmente injetiva, logo estritamente crescente ou decrescente).

7. (expansão decimal) Seja  $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  a transformação do círculo definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Mostre que  $f$  é expansora, se o círculo é munido da métrica euclidiana
- Seja  $x = 0, x_1x_2x_3\dots$ , com  $x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , uma representação decimal de  $x \in [0, 1[$ , pensado como um ponto de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Mostre que  $f(0, x_1x_2x_3\dots + \mathbb{Z}) = 0, x_2x_3x_4\dots + \mathbb{Z}$ .
- Determine os pontos fixos, periódicos, e pré-periódicos de  $f$ .
- Calcule a cardinalidade de  $\text{Fix}(f^n)$ . Mostre que os pontos periódicos de  $f$  são densos no círculo.
- Um número  $x$  é dito “periódico” se a sua representação decimal é da forma

$$x = b_nb_{n-1}\dots b_0.x_1x_2\dots x_n(a_1a_2\dots a_k)$$

Existem número não periódicos? Quantos? Sabe fazer exemplos?

- Mostre que, para todo  $\varepsilon > 0$  e todo  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , existem  $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  e um tempo  $n \geq 0$  tais que

$$d(x, y) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(f^n(x), f^n(y)) > 1/4$$

ou seja, que a transformação  $f$  tem a propriedade de dependência sensível das condições iniciais (observe que, se  $d(x, y) < 1/2 \cdot 10^{-n}$ , então  $d(f^n(x), f^n(y)) = 10^n \cdot d(x, y)$ ).

- Mostre que, para todo intervalo não vazio  $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , existe um tempo  $n \geq 0$  tal que  $f^k(I) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  para todo tempo  $k \geq n$ . Deduza que  $f$  é topologicamente mixing.
- Seja  $b = (b_1b_2\dots b_n)$  uma palavra finita no alfabeto  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Prove que existe um conjunto residual de pontos  $x \in [0, 1[$  tais que a representação em base 10 de  $x$  contém a palavra  $b$  uma infinidade de vezes (no sentido em que, se  $x = 0.x_1x_2x_3\dots x_k\dots$ , existem uma infinidade de  $k \geq 0$  tais que  $(x_{k+1}x_{k+2}\dots x_{k+n}) = (b_1b_2\dots b_n)$ ). Prove que existe um conjunto residual de pontos  $x \in [0, 1[$  tais que a representação em base 10 de  $x$  contém todas as palavras finitas no alfabeto  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$  uma infinidade de vezes. Dê exemplos.

8. (transformações expansoras lineares do círculo) Seja  $\lambda$  um inteiro tal que  $|\lambda| > 1$ . A transformação expansora standard de grau  $\lambda$  é a transformação  $\times\lambda : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto \lambda \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Mostre que a transformação  $\times\lambda$  é topologicamente mixing.
- Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de  $\times\lambda$  é denso.
- Mostre que a transformação  $\times\lambda$  é um fator do deslocamento de Bernoulli sobre um alfabeto de  $|\lambda|$  letras (e o conjunto onde a semicojugação falha de ser injetiva é pequeno!).
- Mostre que a transformação  $\times 3$  preserva o conjunto de Cantor standard  $K$  (pensado como um subconjunto do círculo), i.e.  $\times 3(K) \subset K$ , e que a restrição  $\times 3|_K : K \rightarrow K$  é um fator do deslocamento de Bernoulli  $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$  sobre o alfabeto  $\{0, 2\}$ .