

Escolha um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda.

1. (4 valores) Considere uma população $P_n \geq 0$ que cresce segundo o modelo

$$P_{n+1} = \lambda P_n + \beta,$$

onde $\lambda > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

- Determine as soluções estacionárias, ou seja, que não dependem do tempo n .
- Determine a solução com condição inicial $P_0 > 0$ arbitrária, e o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

2. (4 valores) Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação de um conjunto X . Mostre que a função característica do subconjunto $A \subset X$ (ou seja, a função $\varphi : X \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\varphi(x) = 1$ se e só se $x \in A$) é invariante (ou seja, satisfaz $\varphi \circ f = \varphi$) se e só se $f^{-1}(A) = A$.

3. (4 valores) Estude a dinâmica (ou seja, determine os pontos fixos e a sua natureza, os pontos periódicos, e, se possível, o limite de todas as trajectórias quando o tempo $n \rightarrow \infty$) da transformação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3.$$

4. (4 valores) O algoritmo dos babilónios/ Héron para estimar a raiz quadrada de $a > 0$ consiste em iterar a transformação $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

Mostre que o algoritmo converge, ou seja, que a trajectória de toda a aproximação inicial $x_0 > 0$ converge para $\sqrt{a}$.

5. (4 valores) Considere uma rotação do círculo $R_\alpha : x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$.

- Determine o conjunto ω -limite do ponto $0 + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ quando α é racional.
- Determine o conjunto errante de R_α quando α é irracional.

6. (4 valores) Estude a natureza dos pontos fixos da transformação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \lambda x(1 - x)$$

ao variar o parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. (4 valores) Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação contínua de um espaço métrico completo.

- Prove que $\omega_f(x)$ é fechado e $+$ -invariante, para todo o $x \in X$.
- Diga, justificando, se $\omega_f(x)$ pode ser vazio.

8. (4 valores) Considere o método de Newton para aproximar as raízes do polinómio

$$P(z) = z^2 - z - 1.$$

- Considere uma aproximação inicial $z_0 = 1$ e calcule z_3 .
- Determine o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ quando $z_0 = 1$.

9. (4 valores) Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a transformação do círculo definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}.$$

Mostre que f é topologicamente mixing.

10. (4 valores) Sejam $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, z\}$ um conjunto finito de cardinalidade $z \geq 2$, e $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ o espaço das palavra infinitas $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ com $x_n \in \mathcal{A}$, munido da topologia produto. Seja $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ a transformação definida por

$$\sigma : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Diga se existe um ponto $x \in \Sigma^+$ cuja órbita $\mathcal{O}_\sigma^+(x)$ é densa, e justifique a sua resposta.