08/11/2011
1^o teste

1405R1 - Tópicos de Sistemas Dinâmicos - MAT 2011/12

Escolha um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda.

1. *(4 valores)* Considere a equação recursiva

$$x_{n+1} = \lambda x_n + 3\,.$$

- Determine as soluções estacionárias.
- Determine a solução com condição inicial $x_0 = 6$.
- Para quais valores do parâmetro λ todas as trajetórias convergem para uma solução estacionária?

2. *(4 valores)* Considere a representação

$$x = x_0.x_1x_2x_3\cdots := x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}$$

de um número $x \geq 0$ na base b (com $b = 2, 3, 4, \dots$), onde $x_0 \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $x_n \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ se $n \geq 1$.

- Determine a representação de $6/13$ na base 10, e a representação de $1/9$ na base 3.
- Mostre que a representação decimal (ou seja, na base 10) de um número real $x \geq 0$ é periódica se e só se x é racional.
- Dê um exemplo de um número irracional, e justifique.

3. *(4 valores)* Considere a equação recursiva

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n\,.$$

- Determine a solução geral.
- Determine a solução com condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, e calcule explicitamente os primeiro 7 termos da sucessão.
- Calcule o limite dos quocientes $q_n := x_{n+1}/x_n$ quando $n \to \infty$, e mostre que

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \to \sqrt{2}$$

- Use x_5 e x_6 para determinar uma aproximação racional de $\sqrt{2}$.

4. *(4 valores)* Estude a dinâmica (ou seja, determine os pontos fixos, os pontos periódicos, e, se possível, o limite de todas as trajetórias quando o tempo $n \to \infty$) da transformação $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por

$$f(x) = 2x(1-x)\,.$$

5. *(4 valores)* Estude a dinâmica (ou seja, determine os pontos fixos, os pontos periódicos, e, se possível, o limite de todas as trajetórias quando o tempo $n \to \infty$) da transformação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x^2 - 1/4\,.$$

6. *(4 valores)* Seja $f : X \to X$ uma transformação do conjunto X. A função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é dita *invariante* se $\varphi \circ f = \varphi$.
   - Mostre que, se $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é invariante, $I \subset \mathbb{R}$ e $A = \varphi^{-1}(I)$, então $f^{-1}(A) = A$.
   - Mostre que a função característica do subconjunto $A \subset X$ é invariante se e só se $f^{-1}(A) = A$.

7. *(4 valores)* Considere uma rotação $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por
$$x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}\,,$$
   onde $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Mostre que R_α é contínua.
   - Mostre que se α é racional então todas as trajetórias são periódicas.
   - Mostre que se α é irracional então nenhuma trajetória é periódica.

8. *(4 valores)* Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por
$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}$$
   - Determine $f^{-1}(\{0.3 + \mathbb{Z}\})$.
   - Determine a cardinalidade do conjunto dos pontos fixos de $f^2 = f \circ f$.
   - A órbita de $x + \mathbb{Z}$ com x irracional é finita ou infinita? Justifique.

17/01/2012
2^o teste

1405R1 - Tópicos de Sistemas Dinâmicos - MAT 2011/12

Escolha um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda.

1. *(4 valores)* Enuncie e prove o princípio das contrações, ou seja, o teorema do ponto fixo de Banach.

2. *(4 valores)* Dê um exemplo de uma contração $f : [0,1] \to [0,1]$.
   - Mostre que é uma contração.
   - Determine o ponto fixo, e o conjunto dos pontos periódicos.

3. *(4 valores)* Considere a tranformação $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = x - x^2$$

   - Determine os pontos fixos e estude a sua natureza.
   - Determine o limite $\lim_{n\to\infty} f^n(0.2)$.

4. *(4 valores)* O método de Newton para aproximar as raizes de um polinómio $P(z)$ consiste em escolher uma primeira aproximação z_0, e iterar

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}\,.$$

   - Mostre que se z_0 está suficientemente próximo de uma raiz $\overline{z}$ e $P'(\overline{z}) \neq 0$ então a sucessão dos z_n converge para esta raiz.
   - Use o método de Newton para estimar $\sqrt{17}$ com $z_0 = 1$ e 5 iterações.

5. *(4 valores)* Considere uma rotação $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}\,.$$

   - Dê um exemplo de um ponto recorrente quando α é racional.
   - Dê um exemplo de um conjunto $F \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ fechado, invariante e não vazio, quando α é irracional.

6. *(4 valores)* Dê uma definição e um exemplo de homeomorfismo minimal.

7. *(4 valores)* Considere a transformação tenda $T : [0,1] \to [0,1]$, definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$

- Determine a cardinalidade dos pontos fixos de T^n.
- Calcule $T^2(0.2671)$.

8. *(4 valores)* Considere a transformação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Determine o conjunto dos pontos pré-periódicos.
- Mostre que f é topologicamente mixing.