

MAT - 2011/12
1405R1 - Tópicos de Sistemas Dinâmicos
Folhas práticas

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086 (atendimento: 4^a-feira 14h-16h)

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

2 de Novembro de 2011

Conteúdo

1	Crescimento e decaimento	2
2	Iteração e modelos discretos	6
3	Fluxos e modelos contínuos	11
4	Simulações e sistemas de EDOs	16
5	Sistemas dinâmicos topológicos	22
6	Números e dinâmica	25
7	Frações contínuas	28
8	Órbitas regulares e perturbações	30
9	Linearização/análise local	33
10	Linearização de fluxos	35
11	Persistência e bifurcações	38
12	Recorrências	40
13	Transitividade e órbitas densas	42
14	Perda de memória e independência assintótica	44

1 Crescimento e decaimento

1. (**progressão e série geométrica**) Uma *progressão geométrica* de “razão” λ é uma sequência

$$a \quad a\lambda \quad a\lambda^2 \quad a\lambda^3 \quad \dots \quad a\lambda^n \quad a\lambda^{n+1} \quad \dots$$

obtida do termo inicial $x_0 = a$ usando a recursão $x_{n+1} = \lambda x_n$. A identidade

$$(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n)(\lambda - 1) = \lambda^{n+1} - 1$$

mostra que, se $\lambda \neq 1$, a soma dos primeiros $n + 1$ termos da progressão geométrica (com $a = 1$) é

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$$

Em particular, quando $|\lambda| < 1$, a *série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ é convergente, e a sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n + \dots = \frac{1}{1 - \lambda}$$

- Diga se as seguintes séries são convergentes, e, se for o caso, calcule a soma.

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots \quad 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots \quad 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4/5)^n \quad 9/10 + 9/100 + 9/1000 + \dots \quad 0.3333\dots$$

2. (**duplicação de células**) As experiências mostram que a população de uma colónia de bactérias, num período de tempo em que podemos considerar ilimitado o nutrimento e desprezáveis as toxinas produzidas, duplica-se em cada hora.

- Se a população inicial é de 1000 células, determine a população passadas 2, 3, 10 horas.
- Quantas horas devo esperar para ver 1024 bactérias a partir de uma única célula inicial?
- Escreva uma fórmula para P_n , a população no tempo n horas, dada uma população inicial P_0 .

3. (**invenção do xadrez**). Dizem que Sissa inventou o jogo do xadrez e o ofereceu ao rei de Pérsia. Ao rei, que o convidou a escolher uma recompensa, pediu um grão de arroz para o primeiro quadrado do tabuleiro, o dobro, ou seja, dois grãos, para o segundo quadrado, o dobro, ou seja, quatro grãos, pelo terceiro quadrado, e assim a seguir até o último dos quadrados do tabuleiro.

- Quanto grãos de arroz o rei teve que pagar?
- Se 1 Kg de arroz contém à volta de 30000 grãos, quantas toneladas de arroz foram necessárias ao rei para pagar o seu jogo?

4. (**tempo de meia-vida**) O decaimento de uma substância radioactiva pode ser caracterizado pelo “tempo de meia-vida” τ , passado o qual aproximadamente metade dos núcleos inicialmente presentes terá decaído. Portanto, se Q_n denota a quantidade de substância radioactiva presente no instante $n\tau$, com n inteiro, então

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2} Q_n.$$

- Determine Q_n em função da quantidade inicial Q_0 .
- Determine P_n , a quantidade de producto do decaimento no instante $n\tau$.
- Passado quanto tempo a substância radioactiva fica reduzida a $\frac{1}{32}$ -ésimo da quantidade inicial?

- O tempo de meia-vida do radiocarbono ^{14}C é $\tau \simeq 5730$ anos. Mostre como “datar” um fóssil, sabendo que a proporção de ^{14}C num ser vivente é fixa e conhecida.¹
5. (crescimento exponencial) O crescimento exponencial de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado com a equação recursiva

$$P_{n+1} = \lambda P_n$$

onde P_n representa a população no tempo n , dada uma certa população inicial P_0 .

- Interprete o parâmetro λ imaginando que em cada unidade de tempo o incremento $P_{n+1} - P_n$ da população é a soma de uma parcela αP_n , onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de fertilidade, e uma parcela $-\beta P_n$, onde $\beta > 0$ é um coeficiente de mortalidade.
 - Discuta o comportamento das soluções da equação recursiva ao variar o parâmetro λ .
6. (sequência de Fibonacci) Considere o seguinte problema, posto por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci, ou seja, “filius Bonacci”)²:

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

A resposta de Leonardo Pisano consiste no seguinte modelo. Se F_n o número de pares de coelhos no n -ésimo mês, então

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Esta é uma ”lei” que prescreve recursivamente os valores dos F_n dados uns valores iniciais F_0 e F_1 .

- Responda ao problema de Fibonacci, ou seja, determine F_{12} , sabendo que $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$.
- Escreva um algoritmo para calcular recursivamente os números de Fibonacci F_n .
- Seja $Q_n = F_{n+1}/F_n$ o quociente entre sucessivos números de Fibonacci. Mostre que os quocientes satisfazem a equação recursiva

$$Q_{n+1} = 1 + \frac{1}{Q_n}$$

- Assuma que, para grande valores de n , os quocientes são praticamente constantes, ou seja, $Q_n \rightarrow \phi$ se $n \rightarrow \infty$. Utilize a equação recursiva para mostrar que

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.61803398874989\dots$$

- Mostre que o resultado anterior implica a lei assintótica $F_{n+1} \simeq \phi F_n$. Reconhece-a?
7. (crescimento com recolha ou adição) A uma população que cresce segundo o modelo exponencial, é adicionada ou retirada uma certa quantidade β em cada unidade de tempo. O modelo é portanto

$$P_{n+1} = \lambda P_n + \beta$$

onde β é um parâmetro positivo ou negativo.

- Determine soluções estacionárias, ou seja, que não dependem do tempo n .
- Determine a solução com condição inicial P_0 arbitrária (considere a substituição $x_n = P_n - \bar{P}$, onde \bar{P} é a solução estacionária).

¹J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

²Leonardo Pisano, *Liber Abaci*, 1202.

- Para quais valores dos parâmetros λ e β as soluções P_n convergem para a solução estacionária quando o tempo $n \rightarrow \infty$?

8. (exponencial) A função *exponencial* $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida pela série de potências

$$e^t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + x + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots$$

- Mostre que a série converge para todos os $t \in \mathbb{R}$.
- Mostre que $e^{t+s} = e^t e^s$ e que $e^0 = 1$, e portanto o exponencial define um homomorfismo do grupo aditivo \mathbb{R} no grupo multiplicativo \mathbb{R}^\times .
- Mostre que $x(t) = e^t$ é solução da EDO

$$\dot{x} = x.$$

- Verifique que $x(t) = x_0 e^t$ é uma solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = x_0$.
- Mostre que, se $y(t)$ é uma solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $y(t)/e^t$ é constante e igual a x_0 . Deduza a unicidade das soluções do problema de Cauchy.

9. (decaimento radioactivo) A taxa de decaimento de matéria radioactiva é proporcional à quantidade de matéria existente. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioactiva existente no instante t satisfaz a EDO de primeira ordem

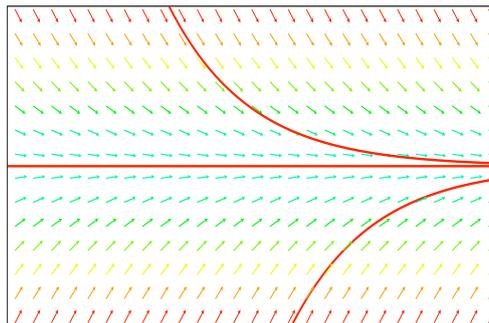
$$\dot{N} = -\beta N$$

onde $\beta > 0$ é uma *constante de decaimento*.

- Determine a solução da equação diferencial com condição inicial $N(0) = N_0$.
- O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioactiva é o tempo necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial, isto é, é o tempo T tal que $N(T)/N(0) = 1/2$. Encontre a relação entre o tempo de meia-vida T e a constante de decaimento β , e mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$.
- O tempo $1/\beta$ é dito *vida média*, sendo a esperança do tempo de vida de cada núcleo. Determine o tempo de meia-vida do ^{14}C sabendo que a vida média é $1/\beta \simeq 8033$ anos.
- A radiação cósmica produz ^{14}C na atmosfera terrestre a uma certa taxa α . Portanto, o número de núcleos de ^{14}C na atmosfera segue a EDO

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha$$

Mostre que $N(t)$ converge para o valor estacionário $\bar{N} = \alpha/\beta$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (considere a substituição $x(t) = N(t) - \bar{N}$, onde \bar{N} é a solução estacionária).



Campo de direcções e soluções da equação $\dot{x} = -2x + 1$.

10. (crescimento exponencial) O crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado pela EDO de primeira ordem

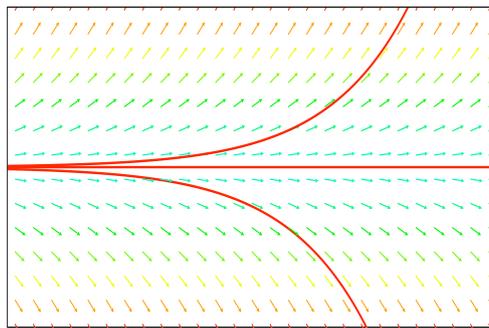
$$\dot{N} = \lambda N$$

onde $N(t)$ é a população no tempo t , e $\lambda > 0$.

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$.
- O que acontece à solução para grandes intervalos de tempo?
- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\alpha > 0$, então

$$\dot{N} = \lambda N - \alpha$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assintótico das outras soluções.



Campo de direções e soluções da equação $\dot{x} = 2x - 1$.

2 Iteração e modelos discretos

- (**iteração**) Um sistema dinâmico com tempo discreto é definido por uma equação/lei recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

onde x_n denota o *estado* (posição, população, concentração, temperatura, ...) do sistema no tempo n (segundos, horas, meses, anos, ...). As *trajectórias* são as sucessões (x_n) ,

$$x_0 \mapsto x_1 = f(x_0) \mapsto x_2 = f(x_1) \mapsto \dots \mapsto x_{n+1} = f(x_n) \mapsto \dots,$$

definidas a partir de uma *condição inicial* x_0 .

Os *estados estacionários*, ou *de equilíbrio*, são as trajectórias constantes $x_n = \bar{x}$, onde \bar{x} é um “ponto fixo” da transformação f , ou seja, um ponto tal que

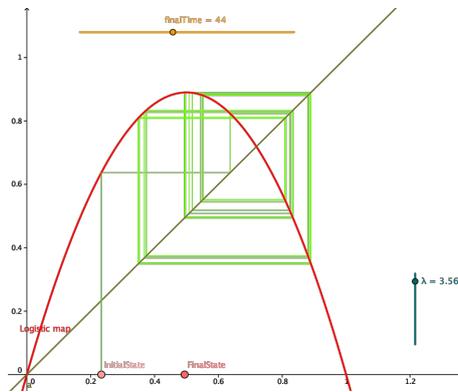
$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

As *soluções periódicas* são as trajectórias (x_n) tais que $x_{n+p} = x_n$ para todos os n e algum tempo minimal $p \geq 1$, dito *período*.

Se o espaço dos estados é um intervalo da recta real, as trajectórias podem ser observadas no plano x - y esboçando o caminho poligonal (*cobweb plot*)³

$$(x_0, x_0) \mapsto (x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_1) \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2) \mapsto (x_2, x_3) \mapsto \dots$$

entre o gráfico da transformação, $y = f(x)$, e a diagonal, $y = x$.



- Estude as trajectórias (ou seja, determine os estados de equilíbrio, as trajectórias periódicas, e o comportamento assintótico de algumas das outras trajectórias) dos sistemas dinâmicos definidos pelas seguintes transformações

$$f(x) = \frac{1}{3}x \quad f(x) = 7x \quad f(x) = -x$$

$$f(x) = 3x + 1 \quad f(x) = 2x - 7 \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 5$$

$$f(x) = |1 - x| \quad f(x) = x^2 - \frac{1}{4} \quad f(x) = x^2 - 2$$

$$f(x) = x^3 \quad f(x) = -x^3 \quad f(x) = x^{1/3}$$

$$f(x) = x - x^3 \quad f(x) = x + x^3$$

- Mostre que, se uma trajectória (x_n) do sistema dinâmico $x_{n+1} = f(x_n)$ é convergente e se a transformação f é contínua, então o limite $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ é um estado estacionário, ou seja, $f(x_\infty) = x_\infty$.

³see the tutorial by [Elisha Peterson](#) for an implementation with [GeoGebra](#)

2. (transformação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é

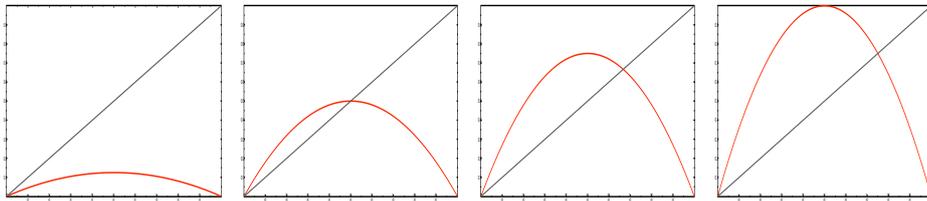
$$P_{n+1} = \lambda P_n (1 - P_n/M)$$

onde a contante $M > 0$ é a maior população suportada pelo meio ambiente (observe que $P_{n+1} < 0$ quando $P_n > M$, o que pode ser interpretado como “extinção” no tempo $n + 1$). A substituição $x_n = P_n/M$ transforma a lei acima na forma adimensional

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n),$$

chamada *transformação logística*⁴.

- Esboce o gráfico da transformação logística para diferentes valores do parâmetro λ .



Gráficos da transformação logística quando $\lambda = 0.5$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$.

- Mostre que os pontos estacionários são o estado trivial 0 e

$$\bar{x} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

- Implemente um programa para fazer simulações do sistema.
 - Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $0 < \lambda \leq 1$.
 - Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $1 < \lambda \leq 3$.
 - Observe os fenômenos que acontecem ao variar o parâmetro λ entre 3 e 4.
 - O que acontece quando $\lambda > 4$?
3. (equilíbrio de Hardy-Weinberg) Considere a transmissão hereditária de um gene com dois alelos, A e a . Sejam x_0 , y_0 e z_0 as frequências dos genótipos AA , Aa e aa , respectivamente, numa dada população inicial. Então as probabilidades de ter o alelo A ou a na formação de um gameta são

$$p_0 = x_0 + \frac{1}{2}y_0 \quad \text{e} \quad q_0 = 1 - p_0 = z_0 + \frac{1}{2}y_0,$$

respectivamente. Na fecundação, teremos os genótipos AA , Aa e aa com probabilidades p_0^2 , $2p_0q_0$ e q_0^2 , respectivamente. Portanto, na primeira geração, as frequências dos três genótipos serão

$$x_1 = p_0^2, \quad y_1 = 2p_0q_0 \quad \text{e} \quad z_1 = q_0^2.$$

- Calcule as probabilidades

$$p_1 = x_1 + \frac{1}{2}y_1 \quad \text{e} \quad q_1 = z_1 + \frac{1}{2}y_1$$

de ter os alelos A ou a na formação de um gameta na primeira geração, e mostre que as frequências dos três genótipos na segunda geração serão

$$x_2 = p_0^2, \quad y_2 = 2p_0q_0 \quad \text{e} \quad z_2 = q_0^2.$$

Ou seja, a distribuição dos três genótipos atinge um valor estacionário a partir da primeira geração (*Hardy-Weinberg equilibrium/principle/law*⁵)

⁴Robert M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459-467.

⁵G.H. Hardy, Mendelian proportions in a mixed population, *Science* **28** (1908), 49-50. W. Weinberg, Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen, *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg* **64** (1908), 368-382.

4. (selecção natural, modelo de Fisher, Wright e Haldane) Um modelo simples de selecção natural, proposto por Ronald Fisher, Sewall Wright e J.B.S. Haldane em 1930⁶, considera apenas um gene com dois alelos, A e a . A vantagem ou desvantagem competitiva dos diferentes genótipos, AA , Aa e aa , é modelada por coeficientes de “sucesso biológico” (*fitness*), ϕ_{AA} , ϕ_{Aa} e ϕ_{aa} , que determinam as diferentes taxas de sobrevivência, e portanto de reprodução. Sejam $0 \leq p_n \leq 1$ e $q_n = 1 - p_n$ as frequências dos alelos A e a , respectivamente, na n -ésima geração. Então a frequência do alelo A na $(n + 1)$ -ésima geração é dada por

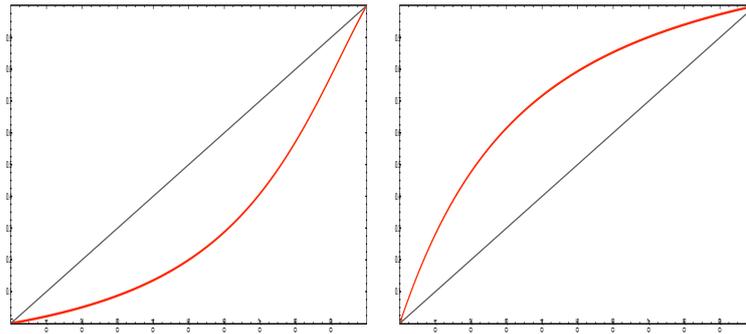
$$p_{n+1} = \frac{(1 + \alpha)p_n^2 + p_n q_n}{(1 + \alpha)p_n^2 + 2p_n q_n + (1 + \beta)q_n^2}$$

onde $(1 + \alpha) = \phi_{AA}/\phi_{Aa}$ e $(1 + \beta) = \phi_{aa}/\phi_{Aa}$ (e portanto $-1 < \alpha$ e $-1 < \beta$).

- Esboce a transformação para diferentes valores de α e β . Observe que soluções estacionárias são as soluções triviais 0 e 1, e, quando α e β têm o mesmo sinal,

$$\bar{p} = \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}.$$

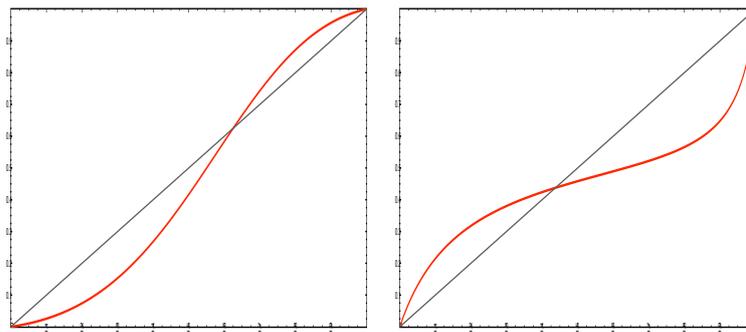
- Discuta o comportamento assintótico da frequência p_n quando α e β têm sinais opostos. Mostre que na população assintótica apenas sobrevive o alelo favorecido.



$\alpha < 0 < \beta$

$\beta < 0 < \alpha$

- Mostre que, quando $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ (ou seja, os genótipos AA e aa têm uma vantagem competitiva em relação ao genótipo Aa), o estado estacionário \bar{p} é instável, e pequenas perturbações $x_0 = \bar{p} \pm \varepsilon$ do equilíbrio produzem comportamentos assintóticos diferentes, a extinção de A ou a extinção de a , dependendo do sinal (*disruptive selection*).
- Mostre que, quando $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ (ou seja, o genótipo Aa é o favorecido), o estado estacionário \bar{p} é estável, e portanto os dois alelos convivem na população assintótica (*heterosis*).



Disruptive selection: $0 < \alpha < \beta$.

Heterosis: $\alpha < \beta < 0$.

⁶R.A. Fisher, *Genetical Theory of Natural Selection*, Clarendon 1930. S. Wright, Evolution in Mendelian populations, *Genetics* **16** (1931), 97-159. J.B.S. Haldane, A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection (1924-1934).

5. (equações quadráticas) O problema de determinar as raízes da equação quadrática

$$x^2 + a = px$$

é equivalente (pelo menos se $a > 0$ e $p > 0$) ao problema de determinar os lados, x e y , de um retângulo dados a área a e o perímetro $2p$, ou seja, determinar a interseção da recta $x + y = p$ com a hipérbole $xy = a$,

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = a \end{cases}$$

- Mostre que as soluções do sistema satisfazem

$$x = p - \frac{a}{x} \quad \text{e} \quad x = \frac{a}{p - x}.$$

- Verifique que as iterações

$$x_{n+1} = p - \frac{a}{x_n} \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{a}{p - x_n},$$

dadas condições iniciais x_0 razoáveis, convergem para as raízes de $x^2 + a = px$.

- Esboce o cobweb plot das iterações quando $a > 0$ e $a < 0$.

6. (equações às diferenças finitas) Considere a equação às diferenças finitas (EDF) linear homogénea

$$a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

onde os $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_p \neq 0$ são parâmetros. A sucessão geométrica $x_n = z^n$ é solução se $z = 0$ ou se z é uma raiz do *polinómio característico*

$$P(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Se o polinómio característico tem p raízes distintas (em \mathbb{C}), z_1, z_2, \dots, z_p , então a solução geral da equação é uma combinação linear

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_p z_p^n$$

onde c_1, c_2, \dots, c_p são constantes que dependem das condições iniciais x_0, x_1, \dots, x_{p-1} .

- Determine a solução geral das seguintes EDF

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n \quad x_{n+2} = (x_{n+1} + x_n)/2$$

- Determine uma fórmula para os números de Fibonacci.
- Mostre que uma série de potências

$$\sum_{n \geq 0} x_n z^n$$

representa uma função racional $f(z)$ se e só se os coeficientes x_n satisfazem uma equação recursiva $a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$.

7. (aproximações racionais de $\sqrt{2}$) Considere a EDF

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n.$$

- Determine a solução geral.
- Determine a solução com condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, e calcule explicitamente os primeiros termos da sucessão.
- Mostre que os quocientes $q_n := x_{n+1}/x_n$ convergem para $1 + \sqrt{2}$ quando $n \rightarrow \infty$, e portanto

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \rightarrow \sqrt{2}$$

- Deduza aproximações racionais de $\sqrt{2}$.

8. (sistemas lineares) Um sistema recursivo linear homogêneo é uma lei

$$x_{n+1} = Ax_n$$

para uma sucessão (x_n) com valores $x_n \in \mathbb{R}^k$, definida por uma matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R})$. A solução é

$$x_n = A^n x_0,$$

se $x_0 \in \mathbb{R}^k$ é a condição inicial. O cálculo das potências A^n de uma matriz quadrada é simples se A é diagonalizável. Por exemplo, se A possui k valores próprios reais e distintos, então, na base formada pelos vectores próprios, $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e portanto $A^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n)$.

Uma equação às diferenças finitas linear homogênea de ordem p , como

$$a_p y_{n+p} + a_{p-1} y_{n+p-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0,$$

é equivalente ao sistema $x_{n+1} = Ax_n$ para a sucessão $x_n := (y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+p-1})$.

- Determine e resolva o sistema que corresponde ao modelo de Fibonacci.

9. (modelos discreto presas-predadores) Um modelo discreto de um sistema presas-predadores é

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha x_n - \beta x_n y_n \\ y_{n+1} &= -\gamma y_n + \delta x_n y_n \end{aligned}$$

e outro modelo é

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n (1 - x_n) - \beta x_n y_n \\ y_{n+1} &= \delta x_n y_n \end{aligned}$$

Nos dois casos, x_n e y_n são as populações relativas das presas e dos predadores, respectivamente, no tempo n , e as letras gregas são parâmetros positivos.

- Discuta o significado dos parâmetros dos modelos, e as diferenças entre os dois modelos.
- Determine os pontos estacionários.
- Simule as soluções dos sistemas ao variar os parâmetros.

3 Fluxos e modelos contínuos

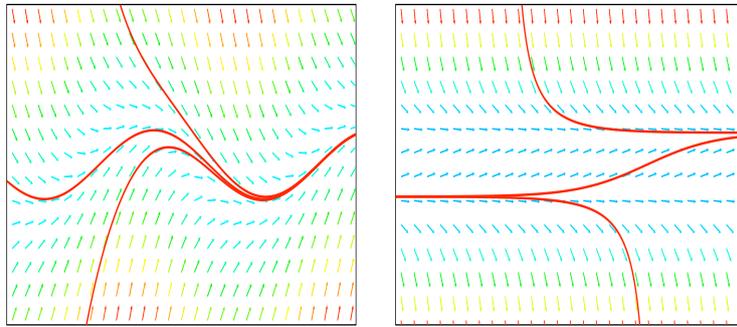
não leccionado

- (equações diferenciais ordinárias)** Uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem é uma “lei”

$$\dot{x} = v(t, x)$$

para a trajectória $t \mapsto x(t) \in X \subset \mathbb{R}$ de um sistema dinâmico, onde $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$ denota a derivada do observável $x \in \mathbb{R}^n$ em ordem ao tempo t , e $v(t, x)$ é um “campo de direcções” (uma recta com declive $v(t, x)$ para cada ponto (t, x)). Uma *solução* da EDO é uma função $t \mapsto x(t)$ tal que $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ para cada tempo t num certo intervalo, ou seja, uma função cujo gráfico é tangente ao campo de direcções em cada ponto $(t, x(t))$ do gráfico.

Se o campo $v(t, x)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável), para cada ponto (t_0, x_0) passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$.



Campos de direcções e algumas soluções de $\dot{x} = \sin(t) - x$ e de $\dot{x} = x(1 - x)$.

- Esboce os campos de direcções das EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} = t \quad \dot{x} = -x \quad \dot{x} = x - 1 \quad \dot{x} = x + t \\ \dot{x} = x(1 - x) \quad \dot{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

e conjecture sobre o comportamento das soluções.

- A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $t\dot{x} - 3x = 0$? E a função $x(t) = 0$?

- (Integração de EDOs simples)** O teorema fundamental do cálculo implica que a solução de uma EDO simples

$$\dot{x} = v(t)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,

$$\dot{x} = v(t), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

- Integre (ou seja, determine soluções com $x(t_0) = x_0$) as seguintes EDOs.

$$\dot{x} = 2 \sin(t) \quad \dot{x} = e^{-t} \quad \dot{x} = \cos(3t) \quad \dot{x} = t - t^2$$

- (EDOs autónomas/fluxos)** A solução de uma EDO *autónoma*

$$\dot{x} = v(x)$$

depende da condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. se $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0$ é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio*) da equação. Se x_0 não é um ponto singular, i.e. se $v(x_0) \neq 0$, então a receita para resolver $\frac{dx}{dt} = v(x)$ consiste em “separar

as variáveis”, $\frac{dx}{v(x)} = dt$, integrar os dois membros, $\int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = \int_{t_0}^t ds$, e resolver para x . Ou seja,

$$\dot{x} = v(x), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Se o campo $v(t, x)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável), para cada ponto (t_0, x_0) passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se estas soluções existem para todo o tempo $t \in \mathbb{R}$, então a família de aplicações $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, que a cada $x \in X$ associa o valor $\Phi_t(x) = x(t)$ da solução com condição inicial $x(0) = x$, define um *fluxo* sobre o espaço de fases X . O fluxo é uma ação do grupo aditivo \mathbb{R} sobre X , ou seja, uma família de aplicações $\Phi_t : X \rightarrow X$ definidas para cada $t \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Phi_0 = \text{id}_X \quad \text{e} \quad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

- Considere as seguintes EDOs de primeira ordem

$$\dot{x} = -3x \quad \dot{x} = 2x \quad \dot{x} = x - 1 \quad \dot{x} = e^x \quad \dot{x} = (x - 1)(x - 2)$$

Determine as soluções estacionárias. Esboce os campos de direcções e conjecture sobre o comportamento das soluções. Determine, se possível, fórmulas para a solução com condição inicial $x(0) = x_0$, e esboce o gráfico de algumas das soluções encontradas.

4. (EDOs separáveis) A solução de uma EDO *separável*

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{g(t)}$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, se $f(x_0) \neq 0$ e $g(t_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\dot{x} = f(x)/g(t), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^t \frac{ds}{g(s)}$$

- Resolva as seguintes EDOs separáveis

$$\begin{aligned} \dot{x} &= tx^3 & t\dot{x} + t &= t^2 & \dot{x} &= t^3/x^2 & \dot{x} &= e^{x+3t^2}t \\ \dot{x} &= \frac{t-1}{x^2} & \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} &= 0 & \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ (t^2+1)\dot{x} &= 2tx & \dot{x} &= t(x^2-x) & \dot{x} &= e^{t-x}, \end{aligned}$$

definidas em oportunos domínios.

5. (EDOs lineares) A solução de uma EDO *linear*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t),$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada pelos seguintes dois passos: determinar (apenas) uma solução não trivial $y(t)$ da “equação homogénea associada”, $\dot{y} + p(t)y = 0$, substituir a conjectura $x(t) = \lambda(t)y(t)$ na equação não-homogénea e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u)du} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u)du} q(s)ds \right).$$

- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \quad \dot{x} + 2x = t \quad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \quad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

- Resolva os seguintes problemas nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t^3 \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan \theta = \cos \theta \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

6. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{r} = -mg$$

onde r é a altura, m é a massa da partícula, $g \simeq 980 \text{ cm/s}^2$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e \ddot{r} denota a segunda derivada de r em ordem ao tempo t .

- Resolva a equação $m\dot{v} = -mg$ para a velocidade $v = \dot{r}$, com condição inicial $v(0) = v_0$, e deduza a solução $r(t)$ com condição inicial $r(0) = r_0$.

7. (equação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é a equação logística⁷

$$\dot{N} = \lambda N(1 - N/M)$$

onde $\lambda > 0$ e a constante $M > 0$ é a população máxima suportada pelo meio ambiente. Observe que $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll M$, e que $\dot{N} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow M$.

- Seja $x(t) = N(t)/M$ a população relativa. Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a equação logística “adimensional”

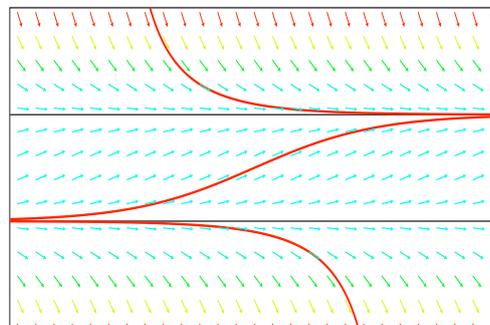
$$\dot{x} = \lambda x(1 - x).$$

- Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
- Verifique que

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}},$$

é a solução da equação logística com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$.

- Discuta o comportamento assintótico das soluções da equação logística.



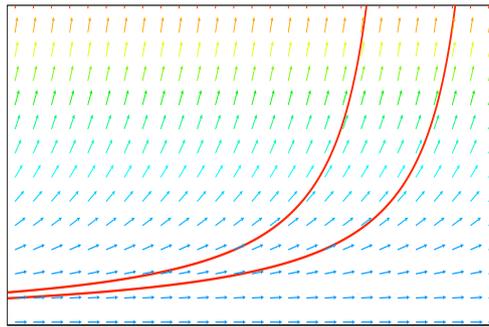
Campo de direções e soluções da equação logística.

⁷Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

8. (**crescimento super-exponencial**) Um outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \alpha N^2.$$

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$.
- Observe que as soluções que determinou não estão definidas para todos os tempos: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!



Campo de direções e soluções da equação $\dot{x} = x^2$.

9. (**fazer modelos**) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?
- A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá no instante t é proporcional à diferença entre a temperatura do ar e a temperatura do chá no instante t .
 - A taxa de variação de uma população de cogumelos no instante t é proporcional à raiz quadrada da população no instante t .
 - A velocidade de um foguetão no instante t é inversamente proporcional à altura atingida no instante t .
 - A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.
10. (**queda livre com atrito**) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força $-k\dot{r}$ proporcional e contrária à velocidade, assim a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{r} = -k\dot{r} - mg$$

onde $k > 0$ é um coeficiente de atrito. Chamando $v = \dot{r}$ a velocidade da partícula, somos levados a

$$m\dot{v} = -kv - mg$$

- Determine a solução $v(t)$ com condição inicial $v(0) = 0$.
 - Mostre que a velocidade $v(t)$ tende para um valor assintótico v_∞ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
 - Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $r(t)$ com condição inicial $r(0) = r_0$.
11. (**circuito RL**) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Escreva a solução geral como função da corrente inicial $I(0) = I_0$.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E \sin(\omega t)$. Se não conseguir, mostre que a solução com $I(0) = 0$ tem a forma

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \alpha) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde α é uma constante que depende de ω , L e R .

12. (lei do arrefecimento de Newton) Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ segue a lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} = -k(T - M(t))$$

onde k é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

- Escreva a solução $T(t)$ como função da temperatura inicial $T(0) = T_0$ e de $M(s)$ com $0 \leq s \leq t$.
- Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100°C , é colocada numa sala cuja temperatura é de 20°C . Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60°C em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40°C .

4 Simulações e sistemas de EDOS

não leccionado

1. (método de Euler) O método de Euler para simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x).$$

consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) - x(t) \simeq v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo” dt suficientemente pequeno. A solução $x(t_0 + n \cdot dt)$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, é estimada pela sucessão x_n definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$. Numa linguagem como **c++** ou **Java**, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) = x$, é

```
while (time < t)
{
  x += v(time, x) * dt ;
  time += dt ;
}
```

- Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq (1 + \varepsilon)^n$$

onde $n \simeq t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \rightarrow 0$, as aproximações convergem para a solução verdadeira, pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

Compare a resposta do método de Euler com a solução exacta $x(1) = e$, usando passos diferentes, por exemplo $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 \dots$

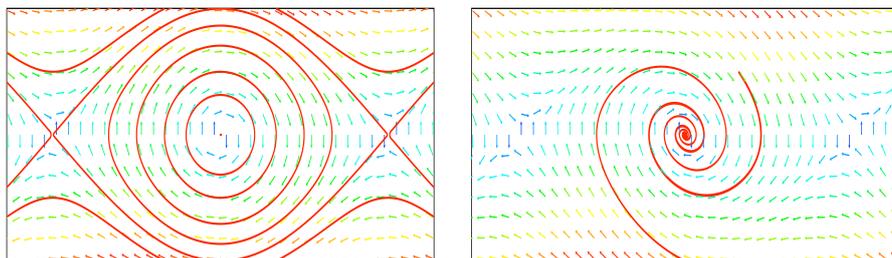
2. (pêndulo matemático) Considere a equação de Newton que modela as oscilações de um pêndulo,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha \dot{\theta}.$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, g é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo, e $\alpha \geq 0$ um coeficiente de atrito. No espaço de fase, de coordenadas q e $p = \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha p \end{aligned}$$

- Simule o sistema, e esboce as trajectórias e as curvas de fase.



Retrato de fase do pêndulo (sem e com atrito).

3. (**oscilador harmónico**) As pequenas oscilações de um pêndulo em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descritas pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

onde ω é a frequência característica. No espaço de fase, de coordenadas q e $p = \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 q \end{aligned}$$

- Simule o sistema, e esboce as trajectórias e as curvas de fase.
- Mostre que as trajectórias são

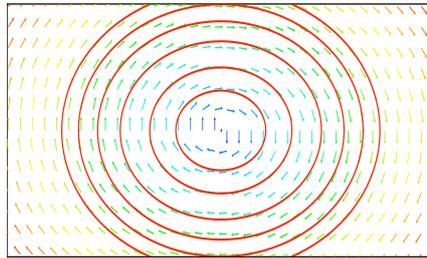
$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega t + \phi),$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$.

- Mostre que a energia

$$E(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento, ou seja que se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt}E(q(t), p(t)) = 0$ para todo o tempo t .



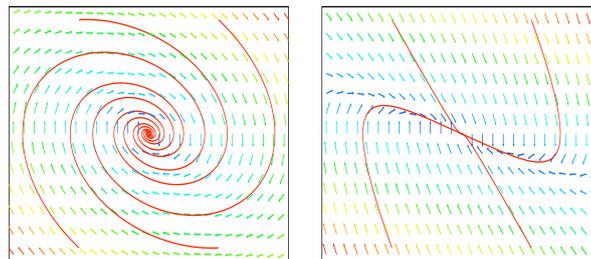
Retrato de fase do oscilador harmónico.

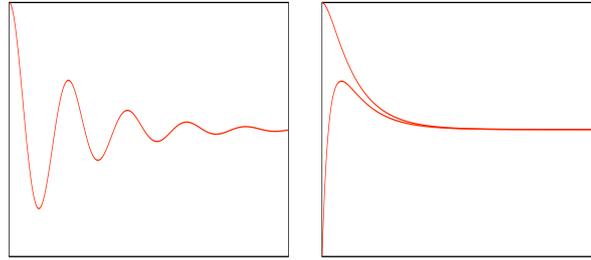
4. (**oscilações amortecidas**) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q,$$

onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito.

- Simule o sistema quando $\alpha^2 < \omega^2$ (amortecimento sub-crítico), $\alpha^2 = \omega^2$ (amortecimento crítico), e $\alpha^2 > \omega^2$ (amortecimento super-crítico).





Retrato de fase e trajetórias do oscilador amortecido (sub-crítico e super-crítico).

5. (**oscilações forçadas**) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2q + F(t),$$

onde $\alpha \geq 0$ é um coeficiente de atrito e $F(t)$ uma força.

- Simule o sistema quando a força é $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$, ao variar os parâmetros.

6. (**circuito LRC**) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R , indutância L e capacidade C , é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

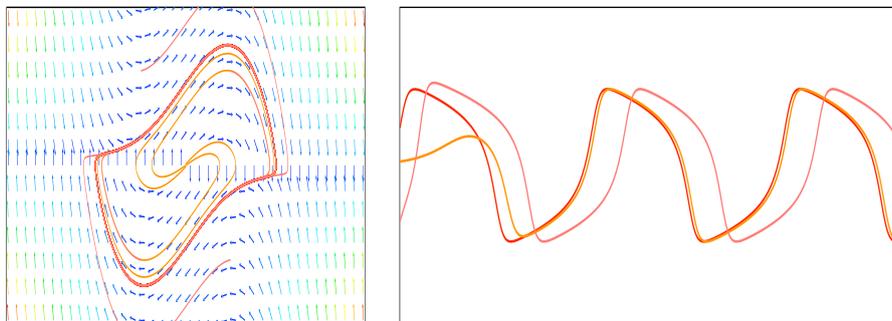
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$.
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).

7. (**oscilador de van der Pol**) Considere o *oscilador de van der Pol*⁸

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = 0$$

que modela a corrente num circuito com um elemento não-linear.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar o parâmetro μ .



Retrato de fase e trajetórias do oscilador de van der Pol.

- Simule o oscilador forçado

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = F_0 \sin(\omega t)$$

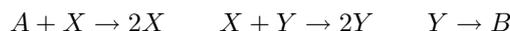
ao variar o parâmetro μ e a frequência ω .

⁸B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* **1** (1920), 701-710 and 754-762. B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency demultiplication, *Nature* **120** (1927), 363-364.

8. (sistema de Lotka-Volterra) Considere o sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy\end{aligned}$$

Foi proposto por Vito Volterra⁹ para modelar a competição entre x presas e y predadores, e por Alfred J. Lotka¹⁰ para modelar o comportamento cíclico de certas reacções químicas, como o esquema abstracto

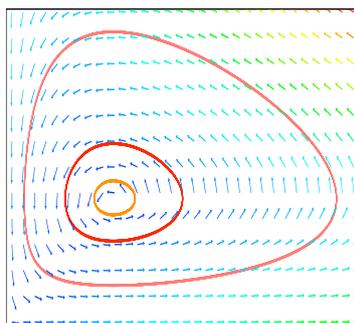


- Determine as soluções estacionárias.
- Mostre que a função

$$H(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$. Deduza que as órbitas do sistema estão contidas nas curvas de nível de $H(x, y)$.

- Simule o sistema.



Retrato de fase do sistema de Lotka-Volterra.

9. (Brusselator) O Brusselator é um modelo autocatalítico proposto por Ilya Prigogine e colaboradores¹¹ que consiste na reacção abstracta



- Simule o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (\beta + 1)x + x^2y \\ \dot{y} &= \beta x - x^2y\end{aligned}$$

para as concentrações das espécies catalíticas X e Y , obtido quando as concentrações $[A] \sim \alpha$ e $[B] \sim \beta$ são mantidas constantes.

- Simule o sistema

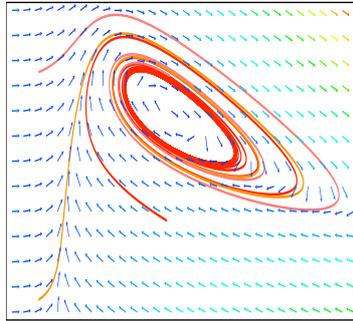
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (b + 1)x + x^2y \\ \dot{y} &= bx - x^2y \\ \dot{b} &= -bx + \delta\end{aligned}$$

para as concentrações de X , Y e B , obtido quando a concentração $[A] \sim \alpha$ é mantida constante e B é injectado a uma velocidade constante $v \sim \delta$.

⁹Vito Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie di animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei* **2** (1926), 31-113. Vito Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

¹⁰Alfred J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc.* **27** (1920), 1595. Alfred J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.

¹¹I. Prigogine and R. Lefever, Symmetry breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* **48** (1968), 1655-1700. P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Wiley, New York 1971. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in non-equilibrium chemical systems*, Wiley, New York 1977.



Retrato de fase do Brusselator.

10. (bifurcação de Hopf) Considere o sistema¹²

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= x + y(\lambda - (x^2 + y^2))\end{aligned}$$

- Simule o sistema ao variar o parâmetro λ .
- Mostre que a origem é um equilíbrio assintoticamente estável quando $\lambda < 0$.
- Mostre que a origem é um equilíbrio instável quando $\lambda > 0$. Observe que a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é um “ciclo limite” do sistema quando $\lambda = 1$.
- Simule o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= -x + y - y(\lambda - (x^2 + y^2))\end{aligned}$$

11. (reação de Schnakenberg) Considere a reação de Schnakenberg¹³

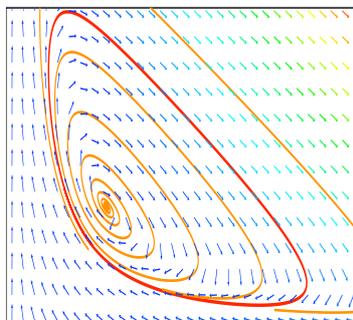


modelada pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2y - x + \beta \\ \dot{y} &= -x^2y + \alpha\end{aligned}$$

para as concentrações $x \sim [X]$ e $y \sim [Y]$.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar os parâmetros.



Retrato de fase do sistema de Schnakenberg.

¹²E. Hopf, Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines differentialsystem, *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Phys.* **95** (1943), 3-22.

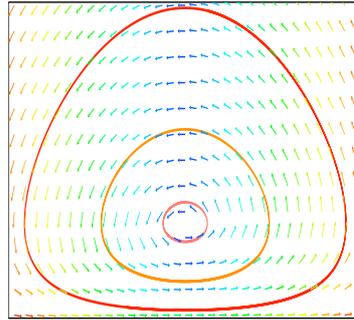
¹³J. Schnakenberg, Simple chemical reaction with limit cycle behavior, *J. Theor. Biol.* **81** (1979), 389-400.

12. (oscilador bioquímico de Goodwin) Um modelo de interações proteínas-mRNA proposto por Goodwin¹⁴ é

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \frac{1}{1+P} - \alpha \\ \dot{P} &= M - \beta\end{aligned}$$

onde M e P denotam as concentrações relativas de mRNA e proteína, respectivamente.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar os parâmetros.



Retrato de fase do sistema de Goodwin.

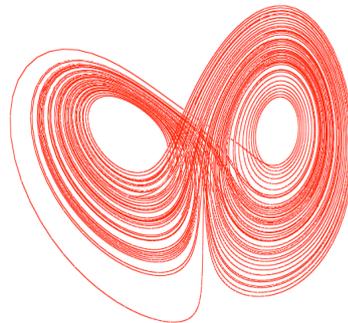
- Simule o sistema¹⁵

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \frac{1}{1+P^n} - \alpha M \\ \dot{P} &= M^m - \beta P\end{aligned}$$

13. (atractor de Lorenz) Considere o sistema de Lorenz¹⁶

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

- Analize o comportamento assintótico das trajetórias ao variar os parâmetros σ , ρ e β .
- Observe o comportamento das trajetórias quando $\sigma \simeq 10$, $\rho \simeq 28$ e $\beta \simeq 8/3$.



Atrator de Lorenz.

¹⁴B.C. Goodwin, *Temporal organization in cells*, Academic Press, London/New York 1963. B.C. Goodwin, Oscillatory behaviour in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* **3** (1965), 425-438.

¹⁵T. Scheper, D. Klinkenberg, C. Pennartz and J. van Pelt, A Mathematical Model for the Intracellular Cicardian Rhythm Generator, *J. Neuroscience* **19** (1999), 40-47.

¹⁶E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmospheric Science* **20** (1963), 130-141.

5 Sistemas dinâmicos topológicos

1. (**sistemas dinâmicos topológicos, trajetórias e órbitas**) Um *sistema dinâmico topológico* é uma ação de \mathbb{N}_0 ou de \mathbb{Z} num espaço topológico (X, τ) , gerada por uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$.

As “iteradas” da transformação f são as transformações $f^n : X \rightarrow X$, definidas indutivamente por

$$f^0 = \text{id} \quad \text{e} \quad f^n = f \circ f^{n-1} \text{ se } n \in \mathbb{N}$$

Se $n \in \mathbb{N}$ e $A \subset X$, então $f^{-n}(A)$ denota o conjunto $\{x \in X \text{ t.q. } f^n(x) \in A\}$. Se f é um homeomorfismo, é possível definir as iteradas $f^n : X \rightarrow X$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A ação $\phi : \mathbb{N}_0 \times X \rightarrow X$, ou $\phi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ se f for um homeomorfismo, é definida por

$$\phi_n(x) = f^n(x)$$

A seguir, (X, d) será um espaço métrico completo munido da topologia induzida τ , localmente compacto (todo ponto admite uma vizinhança compacta) e separável (admite um subconjunto enumerável denso, e portanto, sendo um espaço métrico, uma base enumerável da topologia). Por exemplo, domínios de \mathbb{R}^n , intervalos da reta, o círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} , o toro $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, o plano complexo \mathbb{C} , a esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, conjuntos de Cantor... e produtos cartesianos de espaços finitos. Para evitar trivialidades e detalhes inúteis, assumiremos também que a cardinalidade de X seja infinita.

A *trajetória* de $x \in X$ é a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, definida recursivamente por

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

a partir da “condição inicial” $x_0 = x$. A *órbita* de $x \in X$ é a imagem da sua trajetória, ou seja o conjunto

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

A *grande órbita* do ponto x é o conjunto

$$\mathcal{GO}_f(x) = \{x' \in X \text{ t.q. } \exists n, m \geq 0 \text{ t.q. } f^n(x') = f^m(x)\}$$

ou seja o conjunto dos pontos que têm eventualmente a mesma história futura de x .

Se f é invertível, é útil definir a *órbita completa* de x , o conjunto

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

- Mostre que a relação “estar na mesma grande órbita” é uma relação de equivalência.
 - Mostre que a relação “estar na mesma órbita completa” é uma relação de equivalência, e portanto X é uma reunião disjunta de órbitas completas.
 - Estude a dinâmica, ou seja a estrutura das órbitas, de uma transformação arbitrária definida num conjunto finito $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Observe que o estudo da dinâmica das transformações bijetivas consiste essencialmente no estudo dos grupos simétricos S_n .
2. (**órbitas periódicas**) Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico topológico. Os *pontos fixos* de f são os pontos $p \in X$ tais que $f(p) = p$. O ponto $p \in X$ é *periódico* de *período* $n \geq 1$ se $f^n(p) = p$ e se n é o menor dos tempos $k \geq 1$ tais que $f^k(p) = p$. Assim, a órbita do ponto periódico p é um conjunto finito

$$\{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$$

de pontos que são permutados pela transformação f .

$\text{Fix}(f^n)$ denota o conjunto dos pontos fixos da transformação f^n , e

$$\text{Per}_f = \bigcup_{n \geq 1} \text{Fix}(f^n)$$

denota o conjunto dos pontos periódicos da transformação f .

- Mostre que um ponto x pode ter órbita finita sem ser periódico: pode acontecer que existe $k \geq 1$ tal que $f^k(x)$ é um ponto periódico (tais pontos, que “caem” numa órbita periódica passado um tempo positivo, são ditos *pré-periódicos*).
 - Mostre que cada um dos conjuntos $\text{Fix}(f^n)$ é fechado, pois f^n é contínua, mas a reunião Per_f pode não ser.
3. (**observáveis**) Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico topológico. Os *observáveis* são funções $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . O observável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *invariante* se

$$\varphi \circ f = \varphi$$

ou seja se é constante em cada órbita. O observável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *funções de Lyapunov* se

$$\varphi \circ f \leq \varphi$$

ou seja, se é decrescente no tempo.

- Mostre que, se $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante, $I \subset \mathbb{R}$ e $A = \varphi^{-1}(I)$, então $f^{-1}(A) = A$.
 - Seja φ uma constante do movimento. Se $\varphi(x) = a$, então o futuro e o passado de x pertencem ao conjunto de nível $\Sigma_a = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) = a\}$, i.e. $\mathcal{GO}_f(x) \subset \Sigma_a$.
 - Mostre que a função característica do subconjunto $A \subset X$ é invariante sse $f^{-1}(A) = A$.
 - Se sabemos que $\varphi \circ f \leq \varphi$, e que $\varphi(x) = a$, então o futuro de x “não sai” do conjunto de sub-nível $\Sigma_{\leq a} = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) \leq a\}$, e o passado de x “vem” de $\Sigma_{\geq a} = \{x \in X \text{ t.q. } \varphi(x) \geq a\}$.
4. (**médias de Birkhoff**) Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico topológico. A *média temporal* (ou *média de Birkhoff*) do observável φ até ao tempo $n \geq 0$ é o observável $\bar{\varphi}_n$ definido por

$$\bar{\varphi}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(f^k(x))$$

i.e. o valor de $\bar{\varphi}_n$ no ponto x é a média aritmética dos valores de φ na “ n -órbita de x ” $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\}$.

Se o limite

$$\bar{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n(x)$$

existe, tem o significado de “valor médio assintótico” de φ ao longo da órbita de x .

Seja 1_A a função característica de um subconjunto $A \subset X$. Então o limite

$$\bar{1}_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \text{card} \{0 \leq k \leq n \text{ t.q. } f^k(x) \in A\}$$

se existir, representa “a fração de tempo assintótica” que a trajetória de x passa em A , ou seja a “frequência com que a trajetória de x visita o conjunto A ”.

- Mostre que $\bar{\varphi}(x) = (\bar{\varphi} \circ f)(x)$ nos pontos onde o limite existe.
5. (**conjuntos invariantes**) Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico topológico. Um subconjunto $A \subset X$ é dito *invariante* se

$$f^{-1}(A) = A$$

Um subconjunto $A \subset X$ é dito *+invariante* se $f(A) \subset A$, e é dito *-invariante* se $f^{-1}(A) \subset A$. Em particular, se A é *+invariante* é possível definir o sistema dinâmico $f|_A : A \rightarrow A$.

- Mostre que a função característica do subconjunto $A \subset X$ é invariante sse $f^{-1}(A) = A$.
- Se A é invariante então $f(A) \subset A$ (e portanto um ponto de um conjunto invariante tem toda a sua história, futura e passada, contida no conjunto).

- Mostre que $\mathcal{GO}_f(x)$ é o menor conjunto invariante que contém x , e portanto um conjunto invariante é uma reunião de grandes órbitas, é composto pelas histórias possíveis passadas e futuras dos seus pontos.
- Mostre que se f é invertível, $\mathcal{O}_f(x)$ é o menor conjunto invariante que contém x . Isto implica que, se $f : X \rightarrow X$ é invertível, um subconjunto $A \subset X$ é invariante sse é uma reunião de órbitas completas, i.e. se $A = \cup_{x \in A} \mathcal{O}_f(x)$.
- Descubra as implicações entre as condições

$$f^{-1}(A) = A \quad , \quad f(A) \subset A \quad , \quad f^{-1}(A) \subset A \quad , \quad f(A) = A \quad , \quad f^{-1}(A) = A = f(A)$$

para uma transformação qualquer, uma transformação sobrejetiva e uma transformação bijetiva.

- Considere o conjunto C igual a $\mathcal{GO}_f(x)$, $\mathcal{O}_f(x)$ ou $\mathcal{O}_f^+(x)$ para algum ponto $x \in X$, e determine as propriedades de invariância dos conjuntos C , \overline{C} , ∂C e C' .
 - Seja $A \subset X$. Mostre que $\cup_{n \geq 0} f^n(A)$ é um conjunto +invariante, de fato o menor conjunto +invariante que contém os pontos de A .
 - Seja $A \subset X$. Mostre que, se $f : X \rightarrow X$ é invertível, então $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(A)$ é um conjunto invariante, de fato o menor conjunto invariante que contém os pontos de A .
 - Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um observável, e seja $A \subset X$ o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que o limite $\overline{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\varphi}_n(x)$ existe. Mostre que A é invariante, e que o observável $\overline{\varphi} : A \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante com respeito à transformação $f|_A : A \rightarrow A$.
6. (**conjugação**) Os sistemas dinâmicos topológicos $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ são (*topologicamente*) *conjugados* se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, dito *conjugação*, tal que

$$h \circ f = g \circ h$$

Uma função contínua e sobrejetiva $h : X \rightarrow Y$ é dita *semiconjugação* entre os sistemas dinâmicos $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ se $h \circ f = g \circ h$. Neste caso, g é dito um *fator* de f .

- Observe que a condição pode também ser escrita como $f = h^{-1} \circ g \circ h$, e que é uma relação de equivalência. Por indução, vê-se que $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$ para todo tempo $n \geq 0$. Em particular, uma conjugação h envia órbitas de f em órbitas de g .
- A h -imagem de toda órbita de f é uma órbita de g .

6 Números e dinâmica

1. (**progressão aritmética**) Uma *progressão aritmética* de “passo” α é uma sequência

$$a \quad a + \alpha \quad a + 2\alpha \quad a + 3\alpha \quad \dots \quad a + n\alpha \quad \dots$$

obtida do termo inicial $x_0 = a$ usando a recursão $x_{n+1} = x_n + \alpha$. Os recíprocos de uma progressão aritmética formam uma *progressão harmônica*.

- Verifique que a soma dos primeiro n termos de uma progressão aritmética $x_k = a + k\alpha$ é

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{n}{2}(x_0 + x_{n-1})$$

- Mostre que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Calcule as somas exponenciais

$$\sum_{k=0}^n e^{2\pi i k \alpha}$$

quando α é racional.

2. (**representação decimal**) Cada número real x pode ser representado como soma da uma série convergente

$$\begin{aligned} \pm x &= \text{“}X_m \dots X_2 X_1 X_0, x_1 x_2 x_3 \dots\text{”} \\ &:= \sum_{n=0}^m X_n \cdot 10^n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n}, \end{aligned}$$

onde $X_n, x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e $m \geq 0$. A representação é única se o 9 recorrente não está admitido, e portanto a sequência $\dots x_{k-2} x_{k-1} \bar{9}$, com $x_{k-1} \neq 9$, é substituída por $\dots x_{k-2} (x_{k-1} + 1) \bar{0}$. Neste caso, a soma finita $[x] := \sum_{n=0}^m X_n \cdot 10^n \in \mathbb{Z}$ é a *parte inteira* de x , o maior inteiro n tal que $n \leq x$. A soma $\{x\} := 0.x_1 x_2 x_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 10^{-n} \in [0, 1)$ é a *parte fracionária* de x , assim que $[x] + \{x\} = x$.

- Mostre que a representação decimal de um número racional p/q termina se e só se o denominador é da forma $2^a 5^b$.
- Determine as representações de $1/3$ na base 2, e de $2/3$ nas bases 3 e 7.
- Mostre que a representação decimal (ou numa base $d \geq 2$) de um número racional é periódica (observe que as possibilidades para os restos r_n são finitas).
- Mostre que uma dízima periódica representa um número racional (calcule a soma da série).
- Dê exemplos de representações decimais que não sejam periódicas (veja [HW59], section 9.4).
- Prove que o *número de Euler*

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

é irracional (idea de Fourier: se $e = p/q$, com p e q inteiros, então $x = q!(e - \sum_{n=0}^q 1/n!)$ é um inteiro. Mas x é também igual a $x = \sum_{n=q+1}^{\infty} q!/n!$, e $0 < x < 1$).

3. (**rotações do círculo**) O círculo é o espaço quociente $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ do grupo comutativo \mathbb{R} pelo subgrupo \mathbb{Z} , munido da topologia quociente herdada da topologia euclidiana da reta. As *rotações* do círculo são as translações $+\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definidas por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

A métrica euclidiana da reta “induz” uma métrica invariante d no círculo, definida por

$$\begin{aligned} d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) &= \min_{y \in \pi^{-1}\{x + \mathbb{Z}\}, y' \in \pi^{-1}\{x' + \mathbb{Z}\}} |y - y'| \\ &= \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - x' + n| \end{aligned}$$

onde $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ denota a projeção $x \mapsto x + \mathbb{Z}$. As rotações do círculo são as isometrias de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, d)$ que preservam a orientação.

Em notação multiplicativa, se o círculo é identificado com o conjunto $\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$ dos números complexos de módulo 1, as rotações do círculo são as transformações $z \mapsto e^{i2\pi\alpha}z$.

- Verifique que

$$d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - x' + n|$$

é uma métrica no círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

- Identifique o círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} com o intervalo $[0, 1[$ (toda classe $x + \mathbb{Z}$ tem um e só um representante x neste intervalo), e dê uma expressão analítica para a distância $d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z})$ em função de x e x' .
(Observe que se $|x - x'| \leq 1/2$ então $d(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) = |x - x'|$)
- Verifique que as rotações $+\alpha : x + \mathbb{Z} \rightarrow x + \alpha + \mathbb{Z}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, são isometrias, e portanto homeomorfismos, de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, d)$.
- Mostre que uma rotação $+\alpha : x + \mathbb{Z} \mapsto x + \alpha + \mathbb{Z}$ do círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} tem pontos periódicos sse α é racional (se $\alpha = p/q$ com $(p, q) = 1$ e $q > 0$, então todo ponto do círculo é periódico de período q . Por outro lado, se α é irracional, não existe nenhum natural $n \geq 1$ tal que $x + \mathbb{Z} = x + n\alpha + \mathbb{Z}$, seja o que for x).

4. (**multiplicação $\times d$**) Seja $d \geq 2$ um inteiro (por exemplo 10). A *multiplicação por d* é a transformação do círculo $\times d : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto dx + \mathbb{Z}$$

Se $x = 0.x_1x_2x_3\dots$ é uma representação na base d de um ponto $x \in \mathbb{S}^1 \simeq [0, 1)$, então a transformação $\times d$ envia

$$0.x_1x_2x_3\dots \mapsto 0.x_2x_3x_4\dots$$

- Verifique que $\times d$ é contínua.
- Determine a cardinalidade da imagem inversa de um ponto arbitrário de \mathbb{S}^1 .
- Determine os pontos periódicos e pré-periódicos de $\times d$.

FIM da matéria para o 1º teste

5. (**deslocamentos de Bernoulli**) Seja $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, z\}$ um “alfabeto” de $z \geq 2$ letras, um conjunto finito munido da topologia discreta, e seja $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ o produto topológico de infinitas cópias de \mathcal{A} . Os pontos de Σ^+ são denotados por $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, com $x_n \in \mathcal{A}$, e são “palavras” infinitas nas letras do alfabeto \mathcal{A} .

Uma base da topologia produto τ em Σ^+ é a família \mathcal{C} dos “cilindros centrados”, os subconjuntos do género

$$C_\alpha = \{x \in \Sigma^+ \text{ t.q. } x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_k = \alpha_k\}$$

palavras infinitas que “começam” pela palavra α , ao variar $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ entre todas as palavras finitas nas letras de \mathcal{A} . Um aberto do produto topológico Σ^+ é, por definição, uma reunião de cilindros centrados.

A topologia produto é metrizável, uma possibilidade é a métrica

$$d(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cdot |x_n - x'_n|$$

onde $\lambda > 1$. O espaço Σ^+ é um espaço métrico compacto, perfeito e totalmente desconexo, logo homeomorfo a um conjunto de Cantor.

O deslocamento de Bernoulli (em inglês, *Bernoulli shift*) é a transformação $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ que “esquece a primeira letra”, definida por

$$\sigma : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

- Mostre que a família dos cilindros centrados é uma base de uma topologia (é uma cobertura, pois $\Sigma^+ = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_z$, e a interseção de dois cilindros centrados é um cilindro centrado ou o conjunto vazio).
 - Mostre que, se λ é suficientemente grande, então os cilindros centrados são as bolas abertas, e também fechadas, de (Σ^+, d) , e que d é uma ultra-métrica (ou seja, a desigualdade do triângulo é substituída pela mais forte $d(a, b) \leq \max\{d(a, c), d(c, b)\}$).
 - Mostre que σ é uma transformação contínua (a imagem inversa de um cilindro centrado é uma reunião finita de z cilindros centrados, e portanto a imagem inversa de um aberto é uma reunião de cilindros centrados, logo um aberto).
 - Mostre que σ não é invertível, todo ponto de Σ^+ tem z pré-imagens.
 - Determine os pontos periódicos de σ , e a cardinalidade de $\text{Fix}(\sigma^n)$.
6. (**dyadic adding machine**) A norma diádica nos inteiros \mathbb{Z} é definida por $\|n\|_2 = 2^{-k}$ se 2^k é a maior potência de 2 que divide n (ou seja, se $n = 2^k q$ com q ímpar). O grupo aditivo (de fato, o anel) dos *inteiros diádicos* \mathbb{Z}_2 é o completamento de \mathbb{Z} com respeito à distância diádica $d_2(n, m) = \|n - m\|_2$. É um grupo topológico compacto. Pode ser pensado como o conjunto das séries formais

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^n = \dots x_n \dots x_3 x_2 x_1 x_0$$

com $x_n \in \{0, 1\}$, munido da “adição” definida da forma usual da direita à esquerda. Em quanto espaço topológico, \mathbb{Z}_2 é isomorfo ao produto topológico $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$, o conjunto das palavras infinitas $(\dots x_n \dots x_3 x_2 x_1 x_0)$ nas letras 0 e 1, munido da topologia produto. A “*dyadic adding machine*” (ou “*Kakutani-von Neumann odometer*”) é a translação $\eta : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, definida por

$$x \mapsto x + 1$$

ou seja,

$$(\eta x)_n = \begin{cases} 1 - x_n & \text{se } x_k = 1 \quad \forall k < n \\ x_n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Verifique que η é um homeomorfismo, com inversa $\eta^{-1} : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definida por

$$(\eta^{-1} x)_n = \begin{cases} 1 - x_n & \text{se } x_k = 0 \quad \forall k < n \\ x_n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- A adding machine η tem pontos periódicos?

7 Frações contínuas

1. (**frações contínuas**) As *frações contínuas (simples e com denominadores naturais)* são expressões formais

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e os “denominadores” $a_n \in \mathbb{N}$ se $n \geq 1$. Os *convergentes* de $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ são as frações contínuas finitas

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Os convergentes $p_n/q_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ (com $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \neq 0$ e $(p_n, q_n) = 1$) são determinados pela equação recursiva

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

com condições iniciais $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$, e $p_{-1} = 1$ e $q_{-1} = 0$.

- Verifique que

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$$

Deduz que os convergentes p_n/q_n são frações reduzidas.

- Verifique que

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n}$$

Deduz que os convergentes com n par crescem, e os convergentes com n ímpar decrescem.

- Use a equação recursiva para mostrar que os denominadores de uma fração contínua infinita satisfazem

$$q_{n+2} \geq q_{n+1} + q_n \geq 2q_n,$$

e portanto crescem exponencialmente, ou seja, $q_n \geq 2^{(n-1)/2}$.

- Deduz que a sucessão dos convergentes p_n/q_n de uma fração contínua infinita é convergente, ou seja, existe o $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n = x$, chamado *valor* da fração contínua e denotado por

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n],$$

A cada número real $x \in \mathbb{R}$ corresponde uma única fração contínua, finita (com o último denominador $a_n > 1$) se x é racional e infinita se x é irracional.

A receita para determinar a fração contínua de $x \in \mathbb{R}$ é a seguinte. Definimos $a_0 = [x]$, donde

$$x = a_0 + x_0$$

com $0 \leq x_0 < 1$. Se $x_0 \neq 0$, ou seja, se x não é inteiro, definimos $r_1 = 1/x_0$, $a_1 = [1/x_0]$, donde

$$x = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{a_1 + x_1}$$

com $0 \leq x_1 < 1$. Se $x_1 \neq 0$, caso contrário x seria racional, definimos $r_2 = 1/x_1$, $a_2 = [1/x_1]$, donde

$$x = [a_0; a_1, r_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + x_2}}$$

com $0 \leq x_2 < 1$. Indutivamente, definimos

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, r_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + x_n}}}}$$

onde $r_n = 1/x_{n-1}$, $a_n = [1/x_{n-1}]$ e $x_n = 1/x_{n-1} - a_n$.

- Verifique que se r_n é um inteiro (para algum n minimal!), e portanto $x_{n+1} = 0$, então

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

é racional.

- Mostre que, se x é racional, então o algoritmo termina em tempo finito e portanto $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ com $a_n > 1$ (observe que os r_n números racionais positivos com denominadores estritamente decrescentes).
- Deduza que, se x é irracional, então o algoritmo produz uma (única) representação de x como fração contínua infinita, i.e.

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

e todos os a_n com $n \geq 1$ são inteiros positivos.

2. (mapa de Gauß) A *mapa de Gauß* é a transformação $g : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ definida por

$$x \mapsto 1/x - [1/x]$$

- Verifique que se $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, então

$$g : [0; a_1, a_2, a_3, \dots] \mapsto [0; a_2, a_3, \dots]$$

- Deduza que, se $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, então

$$a_n = [1/G^{n-1}(x)].$$

8 Órbitas regulares e perturbações

1. (teoremas de ponto fixo em dimensão 1) Seja $f : I \rightarrow I$ uma transformação contínua do intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

i) Se $J \subset I$ é um intervalo compacto tal que $f(J) \subset J$, então f tem um ponto fixo em J .

ii) Se $J \subset I$ é um intervalo compacto tal que $J \subset f(J)$ então f tem um ponto fixo em J

- Prove os dois teoremas aplicando o teorema de Bolzano à função $x \mapsto f(x) - x$.
- Observe que, se f não tivesse pontos fixos em J , então

$$x \mapsto \frac{f(x) - x}{|f(x) - x|}$$

seria uma aplicação contínua de um intervalo (J no caso i) ou um subintervalo de J no caso ii)) sobre o espaço desconexo $\{-1, 1\}$...

2. (bacia de atração) Seja p um ponto fixo da transformação contínua $f : X \rightarrow X$. A *bacia de atração*, ou *conjunto estável*, de p é o conjunto dos pontos cuja trajetória é assintótica a p , i.e.

$$W^s(p) = \left\{ x \in X \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p \right\}$$

- Mostre que se a trajetória de x é uma sucessão convergente, o seu limite é um ponto fixo.
- Mostre que conjuntos estáveis de dois pontos fixos diferentes são disjuntos.
- Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a transformação linear da reta definida por $x \mapsto \lambda x$. Estude a bacia de atração do ponto fixo 0 ao variar o parâmetro λ .
- Determine conjuntos estáveis dos pontos fixos de

$$f(x) = x/3 \quad f(x) = x^2 \quad f(x) = x^3$$

- Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear do plano definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Estude a bacia de atração do ponto fixo 0 ao variar os parâmetros a, b, c, d .

3. (contrações) Seja (X, d) um espaço métrico. Uma transformação $f : X \rightarrow X$ é uma *contração* (ou λ -*contração* se é importante lembrar o valor de λ) se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz $\lambda < 1$, ou seja, se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todos $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot d(x, x')$$

O *princípio das contrações* afirma que “todas as trajetórias de uma contração $f : X \rightarrow X$ são sucessões de Cauchy, e a distância entre cada duas trajetórias diminui exponencialmente no tempo. Em particular, se X é completo, então f admite um único ponto fixo p , e a trajetória de todo ponto $x \in X$ converge exponencialmente para o ponto fixo, i.e. $f^n(x) \rightarrow p$ para $n \rightarrow \infty$ ”.

- (*demonstração*) Seja $f : X \rightarrow X$ uma λ -contração. Seja $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, e seja (x_n) a sua trajetória, i.e. $x_{n+1} = f(x_n)$. Mostre que $d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^k$, e portanto que

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Deduza que (x_n) é uma sucessão de Cauchy, e que o limite $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, que existe se X é completo, é um ponto fixo de f . Prove a unicidade do ponto fixo. Mostre que $d(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot d(x_0, p)$, ou seja que a convergência $x_n \rightarrow p$ é exponencial.

- Utilize o teorema do valor médio para mostrar que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 é uma contração sse existe $\lambda < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Prove que uma contração de um espaço métrico compacto X não pode ser invertível, desde que o espaço contenha mais de um ponto. (Compare os diâmetros de X e de $f(X)$)
- Dê exemplos de contrações de

$$[0, 1] \quad [0, 1] \times [0, 1]$$

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } d(x, y) < r\} \quad \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$$

- Mostre que uma transformação $f : X \rightarrow X$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$ distintos pode não ter pontos fixos, mesmo se o espaço métrico X for completo.

- Mostre que as contrações lineares da reta $x \mapsto \alpha x$ e $x \mapsto \beta x$ não podem ser conjugadas se $\alpha \cdot \beta < 0$, i.e. se uma é crescente e a outra é decrescente. (Uma conjugação é um homeomorfismo da reta, em particular é monótono...)

4. (algoritmo de Heron) Considere o problema de determinar o lado ℓ de um quadrado dada a sua área a , ou seja, o número $\ell = \sqrt{a}$.

Um método, utilizado provavelmente pelos babilônios e descrito por Heron¹⁷, consiste em construir recursivamente rectângulos de área a com lados cada vez mais próximos. Se x_1 e y_1 são a base e a altura do primeiro rectângulo, e portanto $x_1 y_1 = a$, então o segundo rectângulo tem como base a média aritmética de base e altura do primeiro, o terceiro rectângulo tem como base a média aritmética da base e a altura do segundo, e assim sucessivamente. A equação recursiva que determina as bases dos rectângulos é portanto

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

- Mostre que bases e alturas dos rectângulos verificam as equações recursivas

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad y_{n+1} = \frac{1/x_n + 1/y_n}{2}$$

- Calcule a diferença $x_{n+1} - y_{n+1}$ e mostre que

$$y_2 < y_3 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_3 < x_2$$

e que

$$x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

- Estime $\sqrt{2}$ com um erro < 0.01 e 0.001 .
 - Estime quantas iterações é preciso fazer para obter os primeiros n dígitos decimais de $\sqrt{2}$ usando o método dos babilônios.
5. (pesquisa binária/método das biseções) Um método para determinar um zero de uma função contínua $f(x)$ consiste em determinar um intervalo inicial $[a_0, b_0]$ tal que os valores da função nos dois extremos tenham sinais opostos, e dividir repetidamente o intervalo em duas partes iguais seleccionando cada vez o sub-intervalo $[a_n, b_n]$ em cujos extremos a função continue a assumir sinais diferentes. Pelo teorema de Bolzano, no n -ésimo intervalo seleccionado, $[a_n, b_n]$, está um zero da função.

¹⁷Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1968. O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Dover, 1969.

- Determine a velocidade de convergência do método, ou seja, estime o comprimento

$$|b_n - a_n|$$

dos intervalos sucessivos.

- Aproxime um zero de $x^3 - 2$ com 4 dígitos decimais correctos.
 - Use a sua máquina de calcular para estimar o ponto x tal que $\cos(x) = x$ (ou seja, um zero da função $f(x) = \cos(x) - x$).
6. (ordem da reta real e trajetórias) Seja $f : I \rightarrow I$ uma transformação contínua e crescente do intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então toda trajetória $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é monótona, crescente ou decrescente. Em particular, se o intervalo I é compacto, toda trajetória é convergente. Isto implica que, se I é compacto, existe um compacto não vazio $F \subset I$ de pontos fixos, e que os pontos em cada componente conexa de $I \setminus F$ têm trajetórias contidas na componente conexa, e convergentes para um ponto de ∂F .
- Prove que um homeomorfismo $f : I \rightarrow I$ de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ não tem pontos periódicos com período superior a 2. Quando tem pontos periódicos de período 2? (Se o homeomorfismo é crescente então nenhum ponto pode ter período superior a 1. De fato, as trajetórias são monótonas, portanto ou $f(x) = x$, ou $f^{n+1}(x) > f^n(x) > \dots > x$ para todo $n \geq 1$, ou $f^{n+1}(x) < f^n(x) < \dots < x$ para todo $n \geq 1$. Seja agora f um homeomorfismo decrescente. Não é difícil ver que f tem um, e um único, ponto fixo p , e que p divide I em dois subintervalos I_- e I_+ que são permutados pela transformação f . Observe também que, se f é decrescente, então f^2 é crescente. Seja $x \neq p$ tal que $f^2(x) \neq x$. Então as sucessões $(f^{2n}(x))$ e $(f^{2n+1}(x))$ são estritamente monótonas e estão em "lados" distintos de p , i.e. uma em I_{\pm} e a outra em I_{\mp} ...)
 - Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $f : I \rightarrow I$ uma função contínua e crescente. Prove que a trajetória de cada ponto de I converge para um ponto fixo de f . Discuta a dinâmica de f .
 - Estude a dinâmica de uma transformação contínua e decrescente $f : I \rightarrow I$ definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. (Observe que, se f é decrescente, então f^2 é crescente...)

9 Linearização/análise local

1. (Análise local/linearização/estabilidade dos estados estacionários em dimensão 1) Sejam $f : I \rightarrow I$ uma transformação de classe C^1 definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e $p \in I$ um ponto fixo de f .

Se $|f'(p)| < 1$, então o ponto fixo é *atractivo*: as trajectórias de todo o ponto x_0 suficientemente próximo de p convergem para p .

Se $|f'(p)| > 1$, então o ponto fixo é *repulsivo*: as trajectórias de todo o ponto $x_0 \neq p$ numa vizinhança suficientemente pequena de p saem da vizinhança em tempo finito.

Se $f'(p) = 0$, o ponto fixo p é dito *super-attractivo*.

- Dê exemplos que mostram que o conjunto estável de um ponto fixo repulsivo p pode conter estritamente $\{p\}$.
- Procure uma boa definição de *órbita periódica atractiva*.
(Observe que, se $\{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$ é uma órbita, a derivada de f^n é a mesma em todos os seus pontos pela regra da cadeia. Se $|(f^n)'(p)| < 1$, então p é um ponto fixo atractivo da transformação f^n , e portanto existe uma vizinhança B de p tal que $f^{kn}(x) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} p$ para todo $x \in B$. Então $B \cup f^{-1}(B) \cup \dots \cup f^{-(n-1)}(B)$ é uma vizinhança da órbita periódica, e as trajectórias dos seus pontos são assintóticas à órbita de p ...)
- Se p é um ponto fixo de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(p) = 1$, então tudo ou quase tudo pode acontecer! O conjunto estável de p pode ser uma vizinhança de p , pode ser só $\{x\}$, ou pode conter uma "meia vizinhança" de p , um intervalo do género $[p, p \pm \varepsilon[\dots$
- Sejam $f : V \rightarrow V$ uma transformação de classe C^1 definida num aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e $p \in V$ um ponto fixo de f . Mostre que se $|f'(p)| < 1$, então p é atractivo, ou seja admite uma vizinhança B tal que $f^n(x) \rightarrow p$ para todo $x \in B$.
- Seja p um ponto fixo super-attractivo da transformação $f : I \rightarrow I$. Use o polinómio de Taylor de grau 1 com resto para provar que, se x_0 está numa vizinhança suficientemente pequena de \bar{x} , então a trajectória de x_0 converge para o ponto fixo \bar{x} e a velocidade de convergência é "quadrática", ou seja,

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \beta \cdot |x_n - \bar{x}|^2$$

onde β é uma constante.

- Estude a natureza dos pontos fixos das seguintes transformações

$$f(x) = \alpha x \quad f(x) = \alpha x^3 \quad f(x) = \alpha x + \beta x^2$$

ao variar os parâmetros.

- Estude a dinâmica de

$$x \mapsto x \pm x^3 \quad \text{e} \quad x \mapsto x \pm x^2$$

- Digite 0.1 na sua máquina de calcular, e pressione repetidamente a tecla "cos". O que acontece? Porque?

2. (família quadrática). Considere a família quadrática ou logística (do francês "logement"), a família de transformações $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definidas por

$$x \mapsto \lambda x(1 - x)$$

onde o parâmetro λ tem valores no intervalo $[0, 4]$.

- Os pontos fixos de f_λ são 0, que é atractivo quando $0 \leq \lambda < 1$, e $p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, que é atractivo quando $1 < \lambda < 3$.
- Se $\lambda \in [0, 1]$ então toda trajectória ($f_\lambda^n(x)$) converge para 0. De fato, toda trajectória é uma sucessão decrescente e limitada, logo convergente, e o limite é o único ponto fixo 0.

- Se $\lambda \in]1, 3]$ então toda trajetória $(f_\lambda^n(x))$ converge para p_λ . De fato, se $1 < \lambda < 3$, existe uma vizinhança V de p_λ tal que $f_\lambda|_V$ é uma contração e tal que para todo $x \in [0, 1]$ existe um tempo $n \geq 0$ tal que $f_\lambda^n(x) \in V$.

3. (método de Newton) O método de Newton para aproximar as raízes de um polinómio $P(z)$, ou seja, resolver a equação

$$P(z) = 0,$$

consiste em escolher uma primeira aproximação z_0 , e iterar

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}.$$

Ou seja, se z_0 é uma primeira conjectura, uma conjectura melhor é o zero da aproximação linear $P(z) \simeq P(z_0) + P'(z_0) \cdot (z - z_0)$.

- Mostre que se a sucessão (z_n) converge, i.e. $z_n \rightarrow z_\infty$, e se $P'(z_\infty) \neq 0$, então o limite z_∞ é um zero do polinómio. Mostre que, se a conjectura inicial z_0 está suficientemente próxima de uma raiz \bar{z} e $P'(\bar{z}) \neq 0$, então a sucessão dos z_n converge para esta raiz.
- Mostre que se $|P'(z)| > \delta$ e $|P''(z)| < M$ numa vizinhança de uma raiz r , então r é um ponto fixo super-atractivo de $f(z) = z - P(z)/P'(z)$.
- Verifique que o método de Newton aplicado ao polinómio quadrático $z^2 - a$, com $a > 0$, corresponde ao algoritmo de Heron!
- Estime $\sqrt{17}$...
- Escreva a receita do método de Newton para resolver $z^n - a = 0$, com $a > 0$ e $n \geq 2$.
- Estime raízes de $x^3 - 2x - 5 = 0$ (Newton 1969).
- Use o método de Newton para aproximar a “razão”, a raiz positiva de $x^2 - x - 1$.
- Utilize o método de Newton para estimar raízes de

$$z^2 + 1 + z \quad z^3 - z - 1 \quad z^5 + z + 1 \quad z^3 - 2z - 5$$

10 Linearização de fluxos

1. (sistemas lineares) As trajectórias de um sistema linear

$$\dot{x} = Ax$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, são dadas por $x(t) = e^{tA}x(0)$, onde o “operador exponencial” e^{tA} é definido pela série de potências

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

O campo linear $v(x) = Ax$ é dito *hiperbólico* se o espectro de A , o conjunto

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda_k = \rho_k + i\omega_k \in \mathbb{C} \quad \text{t.q.} \quad \det(A - \lambda_k I) = 0\}$$

dos valores próprios de A , é disjunto do eixo imaginário (ou seja, $\rho_k \neq 0 \forall k$).

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\rho_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 t} \end{pmatrix}$$

A origem é dita *nodo estável* se $\rho_1, \rho_2 < 0$, *nodo instável* se $\rho_1, \rho_2 > 0$, *ponto de sela* se $\rho_1 < 0 < \rho_2$.

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho & \omega \\ -\omega & \rho \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

A origem é dita *foco estável* se $\rho < 0$, *foco instável* se $\rho > 0$.

- Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + y \end{aligned}$$

Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$.

2. (estabilidade local) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\bar{x}) = 0$. O equilíbrio é (*localmente*) *estável* se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

O equilíbrio é (*localmente*) *assimptoticamente estável* se é estável e se $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad x(t) \rightarrow \bar{x}, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

- Verifique que a solução de equilíbrio $x(t) = 0$ do campo linear $v(x) = Ax$ é estável se todos os valores próprios de A têm parte real $\rho_k = \Re(\lambda_k) \leq 0$.
- Verifique que a solução de equilíbrio $x(t) = 0$ do campo linear $v(x) = Ax$ é *assimptoticamente estável* se todos os valores próprios de A têm parte real $\rho_k = \Re(\lambda_k) < 0$.

3. (funções de Lyapunov) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\bar{x}) = 0$. Uma *função de Lyapunov* é uma função diferenciável $H(x)$ que assume um mínimo local em \bar{x} (i.e. $H(\bar{x}) < H(x)$ para todo $x \neq \bar{x}$ numa vizinhança de \bar{x}) e que não cresce ao longo das trajectórias do sistema, ou seja,

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) \leq 0$$

Se o sistema $\dot{x} = v(x)$ admite uma função de Lyapunov $H(x)$ numa vizinhança do equilíbrio \bar{x} , então

$$\boxed{\frac{d}{dt}H(x(t)) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ é localmente estável}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}H(x(t)) < 0 \quad \forall x(t) \neq \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ é localmente assintoticamente estável}}$$

- Considere o sistema conservativo $m\ddot{q} = -\nabla V(\vec{q})$, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= \frac{1}{m}\vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= -\nabla V(\vec{q}) \end{aligned}$$

com $\vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{R}^n$. Verifique que a energia

$$E(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}\|\vec{p}\|^2 + V(\vec{q})$$

é uma constante do movimento. Deduza que os pontos de equilíbrio $(\vec{q}, 0)$, onde \vec{q} é um mínimo local do potencial $V(q)$, são localmente estáveis.

4. (oscilações) Considere a equação das oscilações amortecidas $\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega^2q = 0$, ou seja, o sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -2\alpha p - \omega^2q \end{aligned}$$

- Esboce as curvas de fase do sistema para diferentes valores dos parâmetros $\alpha \geq 0$ e ω .
- Mostre que a energia

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2q^2$$

é conservada quando $\alpha = 0$. Deduza que $(0, 0)$ é um equilíbrio estável.

- Mostre que $(0, 0)$ é um equilíbrio assintoticamente estável se $\alpha > 0$.

5. (linearização de campos de vectores) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\bar{x}) = 0$. A *linearização* do sistema em torno de \bar{x} é o sistema linear

$$\dot{y} = Ay$$

para a diferença $y(t) = x(t) - \bar{x}$, onde $A = Dv(\bar{x})$ é a matriz Jacobiana do campo v no ponto \bar{x} .

O *teorema de Hartman-Grobman* afirma que, se o campo linearizado A é hiperbólico, então o campo $v(x)$ é “localmente equivalente” à sua parte linear A .

Em particular, se os valores próprios $\{\lambda_i\}$ de A têm parte real $\Re(\lambda_i) < 0$ então

$$\boxed{\Re(\lambda_i) < 0, \forall i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ é localmente assintoticamente estável}}$$

- Linearize o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^2 + x + \sin(y) \\ \dot{y} &= \cos(y) - x^3 - 5y\end{aligned}$$

em torno do seu ponto de equilíbrio $(1, 0)$ e discuta a estabilidade.

- Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + y \\ \dot{y} &= -x - y\end{aligned}$$

Determine os pontos de equilíbrio e discuta a estabilidade. Simule o sistema e esboce as curvas de fase.

- Discuta a estabilidade dos equilíbrios do pêndulo $\ddot{q} = -\omega^2 \sin(q) - \alpha \dot{q}$.

6. (pêndulo matemático) Considere o *pêndulo matemático*,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

- Simule o sistema.
- Mostre que a energia

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega^2 (1 - \cos(\theta))$$

é uma constante do movimento.

- Discute a estabilidade das órbitas periódicas.
- Discuta as oscilações do pêndulo com atrito e com momento de rotação constante,

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) + \alpha \dot{\theta} = M$$

7. (ciclos limite) Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(1 - x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 + y^2)\end{aligned}$$

- Simule o sistema.
- Mostre que, em coordenadas polares, o sistema é

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

Deduza que a circunferência unitária é uma órbita periódica.

- Estude a estabilidade da órbita periódica.

11 Persistência e bifurcações

não leccionado

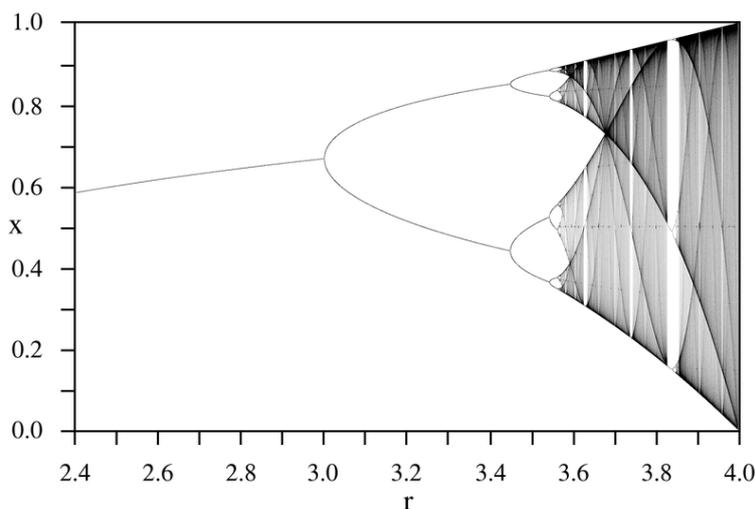
1. **(transversalidade e persistência dos pontos fixos)** Sejam $f : I \rightarrow I$ uma transformação de classe \mathcal{C}^1 definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e p um ponto fixo de f . Se $f'(p) \neq 1$, então o ponto fixo p é “isolado”, ou seja, admite uma vizinhança B tal que p é o único ponto fixo de f em B . Os pontos fixos que satisfazem a condição $f'(p) \neq 1$ são ditos *transversais* (porque a tangente ao gráfico $\text{graph}(f) = \{(x, y) \text{ t.q. } y = f(x)\}$ de f em p é transversal ao gráfico da função identidade, a reta $\{(x, y) \text{ t.q. } y = x\}$).

Se p é um ponto fixo transversal de $f : I \rightarrow I$, então toda transformação $g : I \rightarrow I$ suficientemente \mathcal{C}^1 -próxima¹⁸ de f tem um, e um único, ponto fixo, também transversal, numa vizinhança de p .

- Prove que um ponto fixo transversal é isolado (um ponto fixo é uma solução da equação $F(x) = f(x) - x = 0$. Se $f'(p) \neq 1$ então $F'(p) \neq 0$. O teorema da função inversa diz então que F é invertível numa vizinhança B de p , e isso implica que p é o único zero de F em B).
 - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação de classe \mathcal{C}^1 , e seja p um ponto periódico de período n tal que $(f^n)'(p) \neq 1$. Toda transformação g suficientemente \mathcal{C}^1 -próxima de f tem um ponto periódico de período n próximo de p . (Repita a demonstração anterior com f^n em vez de f)
 - Sejam $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação de classe \mathcal{C}^1 definida num aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e p um ponto fixo de f . A transversalidade de p se traduz na condição de que o operador $f'(p)$ não tenha 1 como valor próprio. Prove que se o operador $f'(p)$ não tem 1 como valor próprio, então o ponto fixo p é isolado (existe uma vizinhança B de x tal que x é o único ponto fixo de f em B). Enuncie e prove um resultado de “persistência” análogo ao caso da reta.
2. **(duplicação do período)**
 3. **(bifurcação sela-nó)** bifurcação sela-nó
 4. **(mapa quadrático na reta real)**

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

5. **(Feigenbaum)**



Bifurcation diagram of the logistic map

¹⁸A “distância” \mathcal{C}^1 entre f e g é

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}^1} = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x) - g'(x)|.$$

6. (bifurcação de Hopf) Considere o sistema¹⁹

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= x + y(\lambda - (x^2 + y^2))\end{aligned}$$

- Simule o sistema ao variar o parâmetro λ .
- Mostre que a origem é um equilíbrio assintoticamente estável quando $\lambda < 0$.
- Mostre que a origem é um equilíbrio instável quando $\lambda > 0$. Observe que a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é um “ciclo limite” do sistema quando $\lambda = 1$.
- Simule o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= -x + y - y(\lambda - (x^2 + y^2))\end{aligned}$$

¹⁹E. Hopf, Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystem, *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Phys.* **95** (1943), 3-22.

12 Recorrências

1. (**conjuntos ω e α limite**) Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico topológico. O conjunto ω -limite do ponto $x \in X$ é o conjunto dos pontos limites da trajetória de x , ou seja

$$\omega_f(x) = \overline{\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\}} \cap_{n=0}^{\infty}$$

o conjunto dos pontos $x' \in X$ tais que existe uma subsucessão $n_i \rightarrow \infty$ de tempos tal que $f^{n_i}(x) \rightarrow x'$ quando $i \rightarrow \infty$. $\text{Lim}_f = \bigcup_{x \in X} \omega_f(x)$ denota o conjunto dos pontos ω -limites.

Se f é invertível, o conjunto α -limite de x é definido por $\alpha_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x)$, ou seja é o conjunto dos pontos $x' \in X$ tais que existe uma subsucessão $n_i \rightarrow \infty$ de tempos tal que $f^{-n_i}(x) \rightarrow x'$ quando $i \rightarrow \infty$. $\text{Lim}_{f^{-1}} = \bigcup_{x \in X} \alpha_f(x)$ denota o conjunto dos pontos α -limites.

- Prove que $\omega_f(x)$ é fechado e +invariante. Prove que, se f é um homeomorfismo, então $\omega_f(x)$ e $\alpha_f(x)$ são fechados e invariantes.
 - Mostre que, se X é compacto, então a trajetória $(f^n(x))_{n \in \mathbf{N}_0}$ de todo ponto $x \in X$ admite subsucessões convergentes, e portanto $\omega_f(x) \neq \emptyset$. Analogamente, se f é um homeomorfismo, $\alpha_f(x) \neq \emptyset$ para todo ponto $x \in X$. Em particular, os conjuntos $\text{Lim}_{f^{\pm 1}}$ não são vazios.
 - Dê exemplos que mostram que $\omega_f(x)$ e $\alpha_f(x)$ podem ser vazios.
 - Mostre que $\text{Per}_f \subset \text{Lim}_f$.
2. (**pontos recorrentes**) Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico topológico. O ponto $x \in X$ é *recorrente* se $x \in \omega_f(x)$, ou seja, se dada uma vizinhança arbitrária B de x , existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \in B$. Rec_f denota o conjunto dos pontos recorrentes de f .

Se f é um homeomorfismo, $\text{Rec}_{f^{-1}}$ é o conjunto dos pontos x tais que $x \in \alpha_f(x)$.

- Mostre que $\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f$.
 - Defina uma ordem parcial em X da seguinte maneira: $x \prec x'$ se para todas vizinhanças U de x e V de x' existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Prove que x é recorrente sse $x \prec x$.
 - Dê exemplos que mostram que Rec_f e $\text{Rec}_{f^{-1}}$ podem ser vazios.
3. (**conjunto não-errante**) Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico topológico. O ponto $x \in X$ é *errante* se admite uma vizinhança disjunta de todas as suas iteradas, i.e. se existe um aberto U que contém x tal que $U \cap f^n(U) = \emptyset$ para todo tempo $n \geq 1$. O ponto x não é errante se para toda vizinhança U de x existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

O *conjunto não-errante* NW_f (do inglês “non-wandering set”) é o conjunto dos pontos x que não são errantes.

O conjunto não-errante NW_f é fechado (o conjunto dos pontos errantes é aberto quase por definição, pois, se x é errante, todo ponto numa sua vizinhança é errante) e +invariante. Contém os ω -limites de todos os pontos de X , assim como os pontos recorrentes. As inclusões são

$$\text{Per}_f \subset \text{Lim}_f \subset \text{NW}_f \quad \text{e} \quad \text{Per}_f \subset \text{Rec}_f \subset \text{NW}_f$$

Se f é um homeomorfismo, NW_f , que é igual a $\text{NW}_{f^{-1}}$, é também invariante, e contém os ω - e α -limites de todos os pontos de X .

(X compacto $\Rightarrow \text{NW}_f \neq \emptyset$) Se X é compacto, então $\text{NW}_f \neq \emptyset$, porque todo ponto $x \in X$ tem $\omega_f(x) \neq \emptyset$ e porque $\text{Lim}_f \subset \text{NW}_f$.

- Prove que o conjunto não-errante de um homeomorfismo é fechado, invariante e contém os ω - e α -limites de todos os pontos.
- Mostre que, se f é um homeomorfismo, então $\text{NW}_f = \text{NW}_{f^{-1}}$.
- Dê exemplos que mostram que NW_f pode ser vazio.

- Mostre que $\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f \subset \text{NW}_f \subset \text{Rec}_f^\varepsilon$. Dê exemplos que mostram que as inclusões podem ser estritas.
- Mostre que $\text{Per}_f \subset \text{Rec}_f \subset \text{NW}_f$ e portanto $\overline{\text{Per}_f} \subset \overline{\text{Rec}_f} \subset \text{NW}_f$. Mais difícil é arranjar exemplos que mostram que as inclusões podem ser estritas.
- Determine os conjuntos não errantes das transformações lineares do plano.

13 Transitividade e órbitas densas

1. **(transformações transitivas)** Seja X um espaço métrico completo e separável. Uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ é (topologicamente) *+transitiva* se verifica uma das condições equivalentes:

- i) para cada dois abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,*
- ii) existe um ponto $x \in X$ tal que $\omega_f(x) = X$,*
- iii) existe um conjunto residual de pontos $x \in X$ tais que $\omega_f(x) = X$.*

Um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é (topologicamente) *transitivo* se verifica uma das condições equivalentes:

- i) para cada dois abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,*
- ii) existe um ponto $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$,*
- iii) existe um conjunto residual de pontos $x \in X$ tais que $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$.*

- Prove as implicações $\text{iii) } \Rightarrow \text{ii) } \Rightarrow \text{i)}$ na definição de "transformação +transitiva".
- Prove que, se $f : X \rightarrow X$ é +transitiva, então $\text{NW}_f = X$.
- Prove que se $f : X \rightarrow X$ é +transitiva, então o conjunto Rec_f dos pontos recorrentes é residual.
- Prove as implicações $\text{iii) } \Rightarrow \text{ii) } \Rightarrow \text{i)}$ na definição de "homeomorfismo transitivo".
- Prove que um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é transitivo sse X não contém uma reunião disjunta de dois subconjuntos abertos invariantes e não vazios.
- Prove que, se $f : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo transitivo, então toda função contínua $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ invariante é constante.
- Mostre que uma rotação racional do círculo não é um homeomorfismo transitivo (observe que a função contínua $x \mapsto \sin(2\pi qx)$ é invariante pela rotação $x + \mathbb{Z} \mapsto x + p/q + \mathbb{Z} \dots$).

2. **(conjuntos e transformações minimais)** Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação contínua. Um subconjunto fechado e não vazio $K \subset X$ é dito *minimal* se é +invariante e se não contém subconjuntos próprio fechados e +invariantes. Se Min_f denota a reunião dos subconjuntos minimais de X , então $\text{Per}_f \subset \text{Min}_f \subset \text{Rec}_f$.

Se uma transformação $f : X \rightarrow X$ admite um compacto $C \subset X$ tal que $f(C) \subset C$, então admite pelo menos um conjunto minimal $K \subset C$.

Uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ é *minimal* se verifica uma das condições equivalentes:

- i) toda órbita $\mathcal{O}_f^+(x)$ é densa em X ,*
- ii) X não contém um subconjunto próprio fechado e +invariante, e portanto é um conjunto minimal.*

O homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é um *homeomorfismo minimal* se toda órbita completa $\mathcal{O}_f(x)$ é densa em X , ou seja se X não contém um subconjunto próprio fechado e invariante.

- Use o lema de Zorn para mostrar que uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ de um espaço compacto X admite pelo menos um conjunto minimal (considere a família \mathcal{C} dos subconjunto $C \subset X$ que são fechados, não vazios e +invariantes, munida da ordem parcial " \subset ").
- Mostre que uma transformação $f : X \rightarrow X$ definida num compacto admite pelo menos um ponto recorrente (que pode ser único!), pois $\text{Min}_f \subset \text{Rec}_f$.
- Mostre que uma transformação minimal é +transitiva.

- Mostre que um homeomorfismo minimal é transitivo.
 - Mostre que um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ definido num espaço compacto admite pelo menos um subconjunto minimal K , ou seja neste caso um subconjunto fechado, não vazio e invariante que não contém subconjuntos próprios fechados e invariantes.
3. (rotações irracionais do círculo) Uma rotação irracional do círculo é um homeomorfismo minimal.
- Deduza que os subgrupos próprios e fechados do círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} são os subgrupos finitos.

14 Perda de memória e independência assintótica

- (dependência sensível das condições iniciais e mixing) A transformação $f : X \rightarrow X$ tem dependência sensível das condições iniciais se existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ e toda vizinhança B de x , existem $y \in B$ e um tempo $n \geq 0$ tais que

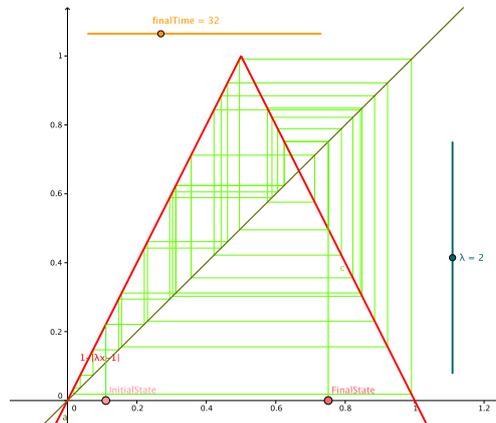
$$d(f^n(y), f^n(x)) > \delta$$

A transformação $f : X \rightarrow X$ é topologicamente mixing (ou seja, “misturadora”) se para cada dois abertos não vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $n \geq 0$ tal que para todo tempo $k \geq n$

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

- (mixing \Rightarrow +transitivo) Mostre que uma transformação topologicamente mixing é topologicamente +transitiva. Em particular, $NW_f = X$, e $\omega_f(x) = X$ é uma propriedade genérica.
 - Mostre que mixing \Rightarrow dependência sensível.
 - Deduza que uma isometria não pode ser topologicamente mixing.
- (transformação tenda) A transformação tenda é a transformação $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$



Cobweb diagram of the tent map.

- Verifique que em cada um dos intervalos $I_{k,n} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ com $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ a transformação T^n tem a forma

$$x \mapsto T^n(x) = \begin{cases} 2^n x + k & \text{se } k \text{ é par} \\ -2^n x + k + 1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

- Deduza que T^n tem um e um único ponto fixo repulsivo em cada um dos intervalos $I_{k,n}$, e portanto que $|\text{Fix}(T^n)| = 2^n$ e os pontos periódicos de T são densos no intervalo $[0, 1]$.
- Mostre que a transformação T é topologicamente mixing.

- Verifique que $h : x \mapsto \sin^2(\pi x/2)$ realiza uma conjugação topológica entre a transformação tenda T e a transformação $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ da família quadrática, definida por $f_4(x) = 4x(1-x)$. Deduza que f_4 é mixing
- Discuta a dinâmica da transformação $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$

Cuidado, S não é contínua!, mas não é muito diferente da transformação tenda...

3. (deslocamentos de Bernoulli) Sejam $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, z\}$ um conjunto finito, e $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ o espaço das palavra infinitas $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ nas letras do alfabeto \mathcal{A} , munido da topologia produto. Uma base da topologia produto é a família dos “cilindros centrados”, a família dos subconjuntos $C_\alpha = \{x = (\alpha, *)\}$ = “palavras infinitas que começam pela palavra α ”, ao variar α entre todas as palavras finitas nas letras do alfabeto \mathcal{A} . O *deslocamento de Bernoulli* é a transformação $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ definida por

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

- Prove que $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ é uma transformação expansora se a métrica em Σ^+ é definida por

$$d_\lambda(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cdot |x_n - x'_n| \quad \text{onde } \lambda > 1$$

ou por

$$d_\infty(x, x') = z^{-\inf\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n \neq x'_n\}}$$

- Mostre que $|\text{Fix}(\sigma^n)| = z^n$.
- Mostre que todo cilindro centrado de Σ^+ contém um ponto periódico de σ , e que portanto o conjunto dos pontos periódicos Per_σ é denso em Σ^+ .
- Prove que $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ é topologicamente mixing.
- Dê exemplos de pontos $x \in \Sigma^+$ tais que $\omega_\sigma(x) = \Sigma^+$.
- De exemplos de pontos não pré-periódicos $x \in \Sigma^+$ tais que tais que a aderência da órbita $\mathcal{O}_\sigma^+(x)$ seja um subconjunto próprio de Σ^+ .
- Seja $\Sigma = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, o espaço das palavras infinitas $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ nas letras do alfabeto finito $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, z\}$, munido da topologia produto. Verifique que o shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, definido por $(\sigma(x))_k = x_{k+1}$, é um homeomorfismo. Determine a cardinalidade de $\text{Fix}(\sigma^n)$, e prove que os pontos periódicos são densos em Σ . Prove que $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é topologicamente mixing.

4. (conjuntos de Cantor) O conjunto de Cantor standard (“middle-third Cantor set”) é

$$K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1],$$

o conjunto dos números entre 0 e 1 cuja representação em base 3 utiliza só as letras 0 e 2.

Outra definição é

$$K = [0, 1] \setminus \cup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

onde os intervalos abertos I_k são definidos iterativamente da seguinte maneira: I_1 é o terço central $]1/3, 2/3[$ de $[0, 1]$, I_2 e I_3 são os terços centrais dos intervalos de $[0, 1] \setminus I_1$, a saber $]1/9, 2/9[$ e $]7/9, 8/9[$, ...etc.

Outra definição é $K = \cap_{k \geq 0} K_k$, onde

$$K_k = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \text{ com } x_1, x_2, \dots, x_k \in \{0, 2\} \text{ e } x_i \in \{0, 1, 2\} \text{ se } i > k \right\}$$

- Observe que $\dots \subset K_{n+1} \subset K_n \subset \dots \subset K_0 = [0, 1]$, e que cada K_n é uma reunião disjunta de 2^n intervalos fechados de comprimento 3^{-n} . Deduza que K é compacto.
- Observe que K é homeomorfo ao produto topológico $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, i.e. ao espaço do deslocamentos de Bernoulli num alfabeto de duas letras. Um homeomorfismo é

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n/3^n \in K$$

- Mostre que K não tem pontos isolados, e portanto $K' = K$, i.e. é perfeito.
- Mostre que a componente conexa de todo ponto $x \in K$ é $\{x\}$, i.e. K é totalmente desconexo.
- Verifique que função $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto ((x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}, \dots), (x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots))$$

define um homeomorfismo de K sobre $K \times K$. Mostre, por indução, que K é homeomorfo a K^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Observe que $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ é homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, e que a representação binária dos reais entre 0 e 1 é uma aplicação contínua de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sobre o intervalo $[0, 1]$. Portanto, existe uma função contínua de K sobre o intervalo $[0, 1]$, e, pelo teorema de Schröder-Bernstein, K tem a cardinalidade do intervalo.
- Mostre que a aplicação $x \mapsto 3x$ define um homeomorfismo de $K \cap [0, 1/3]$ sobre K . Mostre que todo aberto não vazio do conjunto de Cantor contém uma “cópia” do próprio conjunto (i.e., uma das componentes conexas de K_n , homeomorfa a K).
- Verifique que o “comprimento” (i.e. a medida de Lebesgue) de K é

$$|K| = \lim_{n \rightarrow \infty} |K_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot 3^{-n} = 0.$$

5. **(transformação de padeiro)** A *transformação do padeiro* é $P : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ definida por

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (2x, y/2) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ (2x - 1, (y + 1)/2) & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

- Discuta a sua dinâmica.
- Considere o deslocamento de Bernoulli $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ no produto cartesiano $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Mostre que a aplicação $h : \Sigma \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ definida por

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{-n}}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \right)$$

é uma semiconjugação entre σ e P . Deduza ...

6. **(transformações expansoras)** Uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ é *expansiva* se existe $\delta > 0$ tal que para todos $x, x' \in X$ distintos existe um tempo $n \geq 0$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(x')) > \delta$$

Uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ é *expansora* se existem $\mu > 1$ e $\varepsilon > 0$ tais que para todos $x, x' \in X$ distintos com $d(x, x') < \varepsilon$

$$d(f(x), f(x')) > \mu \cdot d(x, x')$$

- Dê exemplos de transformações expansoras de \mathbb{R} , de \mathbb{R}/\mathbb{Z} e de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
- Prove que não existe nenhuma transformação expansiva $f : I \rightarrow I$ definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ (observe que uma tal transformação seria localmente injetiva, logo estritamente crescente ou decrescente).

7. (expansão decimal) Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a transformação do círculo definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto 10 \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Mostre que f é expansora, se o círculo é munido da métrica euclidiana
- Seja $x = 0, x_1x_2x_3\dots$, com $x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, uma representação decimal de $x \in [0, 1[$, pensado como um ponto de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Mostre que $f(0, x_1x_2x_3\dots + \mathbb{Z}) = 0, x_2x_3x_4\dots + \mathbb{Z}$.
- Determine os pontos fixos, periódicos, e pré-periódicos de f .
- Calcule a cardinalidade de $\text{Fix}(f^n)$. Mostre que os pontos periódicos de f são densos no círculo.
- Um número x é dito “periódico” se a sua representação decimal é da forma

$$x = b_nb_{n-1}\dots b_0.x_1x_2\dots x_n(a_1a_2\dots a_k)$$

Existem número não periódicos? Quantos? Sabe fazer exemplos?

- Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, existem $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e um tempo $n \geq 0$ tais que

$$d(x, y) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(f^n(x), f^n(y)) > 1/4$$

ou seja, que a transformação f tem a propriedade de dependência sensível das condições iniciais (observe que, se $d(x, y) < 1/2 \cdot 10^{-n}$, então $d(f^n(x), f^n(y)) = 10^n \cdot d(x, y)$).

- Mostre que, para todo intervalo não vazio $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, existe um tempo $n \geq 0$ tal que $f^k(I) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo tempo $k \geq n$. Deduza que f é topologicamente mixing.
- Seja $b = (b_1b_2\dots b_n)$ uma palavra finita no alfabeto $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Prove que existe um conjunto residual de pontos $x \in [0, 1[$ tais que a representação em base 10 de x contém a palavra b uma infinidade de vezes (no sentido em que, se $x = 0.x_1x_2x_3\dots x_k\dots$, existem uma infinidade de $k \geq 0$ tais que $(x_{k+1}x_{k+2}\dots x_{k+n}) = (b_1b_2\dots b_n)$). Prove que existe um conjunto residual de pontos $x \in [0, 1[$ tais que a representação em base 10 de x contém todas as palavras finitas no alfabeto $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ uma infinidade de vezes. Dê exemplos.

8. (transformações expansoras lineares do círculo) Seja λ um inteiro tal que $|\lambda| > 1$. A transformação expansora standard de grau λ é a transformação $\times\lambda : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definida por

$$x + \mathbb{Z} \mapsto \lambda \cdot x + \mathbb{Z}$$

- Mostre que a transformação $\times\lambda$ é topologicamente mixing.
- Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de $\times\lambda$ é denso.
- Mostre que a transformação $\times\lambda$ é um fator do deslocamento de Bernoulli sobre um alfabeto de $|\lambda|$ letras (e o conjunto onde a semicojugação falha de ser injetiva é pequeno!).
- Mostre que a transformação $\times 3$ preserva o conjunto de Cantor standard K (pensado como um subconjunto do círculo), i.e. $\times 3(K) \subset K$, e que a restrição $\times 3|_K : K \rightarrow K$ é um fator do deslocamento de Bernoulli $\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ sobre o alfabeto $\{0, 2\}$.

Referências

- [Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.
- [Ar78] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, Roma 1978.
- [Ar79] V.I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Edizioni MIR - Editori Riuniti, Roma 1978.
- [Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR 1985.
- [BN05] P. Buttà e P. Negrini, *Note del corso di Sistemi Dinamici*, Università di Roma “La Sapienza”, 2005.
- [De89] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1989.
- [De92] R.L. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1992.
- [HK03] B. Hasselblatt and A. Katok, *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press 2003.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press (Pure and Applied Mathematics. A series of Monographs and Textbooks), San Diego 1974.
- [HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford University Press 1959.
- [Kh35] A.Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, 1935 [translation by University of Chicago Press, 1954].
- [KH95] A. Katok and B. Hasselblat, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press 1995.
- [Ro99] J.C. Robinson, *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamic and Chaos*, CRC Press, Cambridge 1999.
- [Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.
- [St94] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, 1994.
- [Vi06] J. Villate, *Introdução aos sistemas dinâmicos. Uma abordagem prática com Maxima*, 2006.