



Nome ..... N° .....

1. (2 valores) Resolva (ou seja, determine os intervalos de  $x$  definidos pelas seguintes desigualdades)

$$|2x - 3| \leq 4 \quad \text{e} \quad (x - 1)^2 > 1.$$

$$[-1/2, 7/2] \quad \text{e} \quad (-\infty, 0) \cup (2, \infty).$$

2. (2 valores) Calcule

$$\sqrt{10^{80}} \quad \text{e} \quad \log_3 0.(3)$$

$$\sqrt{10^{80}} = 10^{40} \quad \text{e} \quad \log_3 0.(3) = -1.$$

3. (2 valores) Calcule os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{1+x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{1+x} = 3.$$

4. (2 valores) Considere uma população  $N_n$  que cresce segundo a lei

$$N_{n+1} = 3N_n - 600.$$

Determine a solução estacionária (ou seja, constante).

A solução estacionária é  $\bar{N} = 300$ .

5. (2 valores) Determine mínimos e máximos da função  $f(x) = x(1-x)$  no intervalo  $[0, 1]$ .

A função  $f(x) = x(1-x)$  no intervalo  $[0, 1]$  assume um máximo quando  $x = 1/2$ , e uns mínimos quando  $x = 0$  ou  $1$ .

6. (2 valores) Calcule a primeira derivada das funções

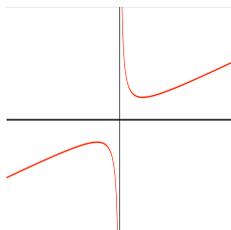
$$f(x) = x \cdot \sin(x) \quad \text{e} \quad g(x) = e^{x^3}.$$

$$f'(x) = \sin(x) + x \cos(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$

7. (2 valores) Esboce o gráfico da função definida, se  $x \neq 0$ , por

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

O gráfico é



8. (2 valores) Calcule uma das seguintes primitivas

$$\int \frac{1}{x-1} dx \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{1}{x-1} = \log |x-1| \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

9. (2 valores) Calcule um dos seguintes integrais

$$\int_{-3}^5 |x| dx \quad \text{ou} \quad \int_0^7 e^{-x} dx$$

$$\int_{-3}^5 |x| dx = 17 \quad \text{e} \quad \int_0^7 e^{-x} dx = 1 - e^{-7}.$$

10. (2 valores) Considere uma população  $x(t)$  que decai segundo a lei

$$\dot{x} = -x + 200.$$

Determine  $x(t)$  e o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  quando a condição inicial é  $x(0) = 100$ .

A solução estacionária é  $\bar{x} = 200$ . A variável  $y(t) := x(t) - \bar{x}$  satisfaz a equação diferencial  $\dot{y} = -y$  com condição inicial  $y(0) = x(0) - \bar{x} = -100$ , cuja solução é  $y(t) = y(0)e^{-t}$ . Portanto

$$x(t) = 200 - 100e^{-t}$$

e o limite é a solução estacionária  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 200$ .



Nome ..... N.º .....

1. (2 valores) Determine uma equação cartesiana da reta passando pelos pontos  $(2, -1)$  e  $(-2, 3)$ .

$$x + y = 1$$

2. (2 valores) Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 24$$

3. (2 valores) Calcule os produtos  $AB$  e  $BA$  das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (2 valores) Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

A única solução é  $x = 1$ ,  $y = 2$  e  $z = 3$ .

5. (2 valores) Dê um exemplo de um sistema impossível de 2 equações lineares com 3 incógnitas.

O sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + y + z = 10^{23} \end{cases}$$

6. (2 valores) Calcule a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

7. (2 valores) Calcule os valores próprios da matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios são 1 e  $-1$ .

8. (2 valores) Calcule os vetores próprios da matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo,  $(1, 1)$  e  $(1, -1)$ .

9. (2 valores) Calcule as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  do campo escalar

$$f(x, y) = x \sin(y) - y \cos(x).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y) + y \sin(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(y) - \cos(x)$$

10. (2 valores) Considere o campo escalar  $f(x, y) = (x + 1)(y - 1)$ . Determine os pontos críticos, e diga se são máximos, mínimos ou pontos de sela.

O único ponto crítico é  $(-1, 1)$ . A matriz Hessiana de  $f$  neste ponto é

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios de  $\mathcal{H}f$  são  $\pm 1$ , portanto  $(-1, 1)$  é um ponto de sela.