

Nome ..... N<sup>o</sup> .....

1. (2 valores) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{n} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^2 - 3^2}{x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^2 - 3^2}{x} = 6.$$

2. (2 valores) Calcule a primeira e a segunda derivada da função

$$f(x) = e^{x^2}.$$

$$f'(x) = 2xe^{x^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$$

3. (2 valores) Calcule uma das seguintes primitivas

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad \text{ou} \quad \int e^{-3x} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

4. (2 valores) Calcule um dos seguintes integrais

$$\int_{-3}^3 (x^3 - x) dx \quad \text{ou} \quad \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_{-3}^3 (x^3 - x) dx = 0 \quad \text{ou} \quad \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{9} - \sqrt{4}) = 2.$$

5. (2 valores) Considere uma população
- $x(t)$
- que cresce segundo a lei
- $\frac{dx}{dt} = 2x$
- . Determine a solução
- $x(t)$
- com condição inicial
- $x(0) = 100$
- .

A solução com condição inicial  $x(0) = 100$  é  $x(t) = 100e^{2t}$ .

6. (2 valores) Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 2 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

A única solução é  $x = 2$ ,  $y = 2$  e  $z = 2$ .

7. (2 valores) Calcule o determinante
- $\det A$
- e a matriz inversa
- $A^{-1}$
- da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 1 \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. (2 valores) Calcule valores e vetores próprios da matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios são 1 e 3. Dois vetores próprios são  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ , respetivamente.

9. (2 valores) Calcule as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  do campo escalar

$$f(x, y) = \cos(y) \sin(x).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y) \cos(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(y) \sin(x)$$

10. (2 valores) Considere o campo escalar  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3$ . Determine os pontos críticos, e diga se são máximos, mínimos ou pontos de sela.

O único ponto crítico é  $(0, 0)$ . A matriz Hessiana de  $f$  neste ponto é

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios de  $\mathcal{H}f$  são positivos, portanto  $(0, 0)$  é um mínimo.