

Nome N°

1. (2 valores) Resolva (ou seja, determine os intervalos de
- x
- definidos pelas seguintes desigualdades)

$$|3x + 3| \leq 6 \quad \text{e} \quad (x - 1)(x + 1) > 0.$$

$$[-3, 1] \quad \text{e} \quad (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

2. (2 valores) Sejam
- $A = (3, 2)$
- e
- $B = (1, -1)$
- . Determine coeficientes
- x
- e
- y
- tais que

$$x A + y B = (1, 2)$$

$$x = 3/5 \quad \text{e} \quad y = -4/5.$$

3. (2 valores) Sejam
- $A = (3, 2, 1)$
- e
- $B = (7, 1, -4)$
- . Calcule

$$A \cdot B \quad \text{e} \quad A \times B$$

$$A \cdot B = 19 \quad \text{e} \quad A \times B = (-9, 19, -11).$$

4. (2 valores) Determine uma equação cartesiana do plano passando por
- $(1, 1, 1)$
- e ortogonal ao vetor
- $(3, 2, 1)$
- .

$$3x + 2y + z = 6$$

5. (2 valores) Calcule os produtos
- AB
- e
- B^2
- das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 25 \end{pmatrix}$$

6. (2 valores) Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$$

A solução é a reta $(3, 1, 0) + t(0, 1, 1)$, com $t \in \mathbb{R}$.

7. (2 valores) Calcule a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

8. (2 valores) Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 24$$

9. (2 valores) Determine os valores próprios da matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios são 2 e 3.

10. (2 valores) Determine os vetores próprios da matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

Nome N.º

1. (2 valores) Resolva (ou seja, determine os intervalos de
- x
- definidos pelas seguintes desigualdades)

$$|x - 5| \leq 2 \quad \text{e} \quad (x + 1)^2 < 4.$$

$$[3, 7] \quad \text{e} \quad (-3, 1).$$

2. (2 valores) Sejam
- $A = (2, 3)$
- e
- $B = (1, -1)$
- . Determine coeficientes
- x
- e
- y
- tais que

$$x A + y B = (4, -1).$$

$$x = 3/5 \quad \text{e} \quad y = 14/5.$$

3. (2 valores) Sejam
- $A = (1, 2, 1)$
- e
- $B = (2, 1, 2)$
- . Calcule

$$A \cdot B \quad \text{e} \quad A \times B$$

$$A \cdot B = 6 \quad \text{e} \quad A \times B = (3, 0, -3).$$

4. (2 valores) Determine uma equação cartesiana da reta passando por
- $(1, 1)$
- e ortogonal ao vetor
- $(3, 2)$
- .

$$3x + 2y = 5$$

5. (2 valores) Calcule os produtos
- AB
- e
- BA
- das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. (2 valores) Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 5x - 3y - 7z = 2 \\ -x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$$

$$\text{A solução é } x = 3, y = 2 \text{ e } z = 1.$$

7. (2 valores) Calcule a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

8. (2 valores) Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 18$$

9. (2 valores) Calcule os valores próprios da matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios são 2 e 3.

10. (2 valores) Calcule os vetores próprios da matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

Nome N.º

1. (2 valores) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = 3.$$

2. (2 valores) Calcule a primeira e a segunda derivada da função

$$f(x) = e^{\cos(x)}.$$

$$f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)} \quad \text{e} \quad f''(x) = (\sin^2(x) - \cos(x)) e^{\cos(x)}.$$

3. (2 valores) Determine máximos e mínimos relativos da função

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7.$$

A função tem um máximo relativo em $x = 0$, onde $f(0) = 7$, e um mínimo relativo em $x = 3$, onde $f(3) = -20$.

4. (2 valores) Calcule uma das seguintes primitivas

$$\int \frac{1}{x-2} dx \quad \text{ou} \quad \int \cos(x) e^{\sin(x)} dx$$

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \log|x-2| \quad \text{ou} \quad \int \cos(x) e^{\sin(x)} dx = e^{\sin(x)}.$$

5. (2 valores) Calcule um dos seguintes integrais

$$\int_{-3}^3 |x-2| dx \quad \text{ou} \quad \int_0^5 e^{-2x} dx$$

$$\int_{-3}^3 |x-2| dx = 13 \quad \text{ou} \quad \int_0^5 e^{-2x} dx = \frac{1}{2} (1 - e^{-10}).$$

6. (2 valores) Calcule a área da região do plano limitada entre os gráficos das funções
- $f(x) = x^{1/3}$
- e
- $f(x) = x$
- , com
- $0 \leq x \leq 1$
- .

A área é igual ao integral

$$\int_0^1 (x^{1/3} - x) dx = 1/4.$$

7. (2 valores) Determine as soluções estacionárias da equação diferencial autónoma

$$\dot{x} = -x - 1.$$

A única solução estacionária é $x(t) = -1$.

8. (2 valores) Considere a equação diferencial linear

$$\dot{x} + x = -1.$$

Determine a solução com condição inicial $x(0) = 2$.

A solução com condição inicial $x(0) = 2$ é

$$x(t) = 3e^{-t} - 1.$$

9. (2 valores) Esboce algumas curvas de nível e calcule o gradiente do campo escalar

$$f(x, y) = e^{x/y}.$$

A curva de nível $c > 0$ é a reunião das duas semi-retas $x/y = \log c$, e o gradiente é

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{y} e^{x/y}, -\frac{x}{y^2} e^{x/y} \right).$$

10. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = (x - 2)(y + 1)$. Determine os pontos críticos, e diga se são máximos, mínimos ou pontos de sela.

O único ponto crítico é $(2, -1)$. A matriz Hessiana de f neste ponto é

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios de $\mathcal{H}f$ são ± 1 , portanto $(2, -1)$ é um ponto de sela.

Nome N.º

1. (2 valores) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 1}{7x^3 - x^2 + 7}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 1}{7x^3 - x^2 + 7} = 0.$$

2. (2 valores) Calcule a primeira e a segunda derivada da função

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = (4x^2 - 2) e^{-x^2}.$$

3. (2 valores) Determine máximos e mínimos relativos da função

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1.$$

A função tem um máximo relativo em $x = -2$, onde $f(-2) = 33$, e um mínimo relativo em $x = 1$, onde $f(1) = -6$.

4. (2 valores) Calcule uma das seguintes primitivas

$$\int \frac{1}{x+2} dx \quad \text{ou} \quad \int x e^{x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{x+2} dx = \log |x+2| \quad \text{ou} \quad \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

5. (2 valores) Calcule um dos seguintes integrais

$$\int_{-3}^3 |x-1| dx \quad \text{ou} \quad \int_0^5 e^{-2x} dx$$

$$\int_{-3}^3 |x-1| dx = 10 \quad \text{ou} \quad \int_0^5 e^{-2x} dx = \frac{1}{2} (1 - e^{-10}).$$

6. (2 valores) Calcule a área da região do plano limitada entre os gráficos das funções
- $f(x) = \sqrt{x}$
- e
- $f(x) = x$
- , com
- $0 \leq x \leq 1$
- .

A área é igual ao integral

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = 1/6.$$

7. (2 valores) Determine as soluções estacionárias da equação diferencial autónoma

$$\dot{x} = -x + 1.$$

A única solução estacionária é $x(t) = 1$.

8. (2 valores) Considere a equação diferencial linear

$$\dot{x} + x = 1.$$

Determine a solução com condição inicial $x(0) = 3$.

A solução com condição inicial $x(0) = 3$ é

$$x(t) = 2e^{-t} + 1.$$

9. (2 valores) Esboce algumas curvas de nível e calcule o gradiente do campo escalar

$$f(x, y) = e^{xy}.$$

A curva de nível $c > 0$ é a hipérbole $xy = \log c$, e o gradiente é

$$\nabla f(x, y) = (y e^{xy}, x e^{xy}).$$

10. (2 valores) Considere o campo escalar $f(x, y) = (x - 2)(y + 1)$. Determine os pontos críticos, e diga se são máximos, mínimos ou pontos de sela.

O único ponto crítico é $(2, -1)$. A matriz Hessiana de f neste ponto é

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios de $\mathcal{H}f$ são ± 1 , portanto $(2, -1)$ é um ponto de sela.