BA^{2701P8} $CIEAMB^{G801N5}$ $GEOLOG^{E601O5}$

2013/14
Tópicos de Matemática EC

Salvatore Cosentino
Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho
Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL
gab B.4023, tel 253 604086
e-mail scosentino@math.uminho.pt
url http://w3.math.uminho.pt/~scosentino

6 de Janeiro de 2014

Conteúdo

1 Números

1. (naturais) $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots, 10, \dots 6 \times 10^{23}, \dots, 10^{80}, \dots\}$ denota o conjunto dos *números naturais*. Pode ser definido pelos *axiomas de Peano*:

   P1 cada número natural $n \in \mathbb{N}$ tem um *sucessor* $n^+ \in \mathbb{N}$ (ou seja, "$n+1$"), distinto de n, e números distintos têm sucessores distintos;

   P2 existe um número natural $1 \in \mathbb{N}$ que não é sucessor de nenhum número natural;

   P3 (*princípio de indução*) um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ que contém 1 e tal que $n \in A$ implica $n^+ \in A$ é igual ao próprio $\mathbb{N}$.

   O terceiro axioma é a chave que permite provar que uma afirmação é verdadeiras para todos os números naturais n (basta provar que o conjunto dos n's pelos quais é verdadeira satisfaz as hipóteses do axioma). É também a propriedade que permite dar "definições recursivas", como as definições de soma $a + b$ e produto $a \cdot b$ de dois números naturais.

   - Verifique que a soma dos primeiros n números naturais é
   $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \, .$$
   - Mostre que a soma dos primeiros n número ímpares é
   $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n \cdot n \, ,$$
   e determine uma fórmula para a soma dos primeiros n números pares
   $$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = ?$$

2. (inteiros) $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ denota o anel dos *números inteiros* (do alemão *zahlen* = números). As operações $a + b$ e $a \cdot b$ em $\mathbb{Z}$ satisfazem os *axiomas de anel*:

   A1 (associatividade de $+$ e $\times$) $\quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

   A2 (comutatividade de $+$ e $\times$) $\quad x + y = y + x \quad x \cdot y = y \cdot x$

   A3 (existência dos elementos neutros 0 e 1) $\quad x + 0 = x \quad x \cdot 1 = x$

   A4 (existência do inverso para $+$) $\quad \forall x$ existe $-x$ tal que $x + (-x) = 0$

   A5 (lei distributiva) $\quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

   Em particular,
   $$\boxed{a + x = a + y \quad \Rightarrow \quad x = y \, .}$$
   A associatividade permite definir somas e produtos "iterados":
   $$\sum_{n=1}^{N} x_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_N \qquad \text{e} \qquad \prod_{n=1}^{N} x_n := x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_N$$
   - [Ba79] 1.5.4., 1.5.5. e 1.5.6.
   - O produto dos primeiros n números naturais é chamado n *fatorial*, e denotado por
   $$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \; \dots \; \cdot n \, .$$
   Calcule $3!$ e $5!$.

3. (cálculo combinatório) Sejam $K \approx \{1, 2, \dots, k\}$ e $N \approx \{1, 2, \dots, n\}$ conjuntos finitos de cardinalidade k e n, respetivamente. A cardinalidade do produto cartesiano $K \times N$ é $k \cdot n$. A cardinalidade de $N^K := \{\text{funções } K \to N\} \approx N^k := \underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{k \text{ vezes}}$ é não lecionado
$$\left| N^K \right| = n^k$$

A cardinalidade de $D^n_k := \{\text{funções injetivas } K \to N\}$ é

$$|D^n_k| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

desde que $k \leq n$, tendo decidido que $0! = 1$. Em particular, a cardinalidade de D^n_n, o espaço das *permutações* de N, é

$$|D^n_n| = n!$$

A cardinalidade de $C^n_k := \{\text{subconjuntos } K \subset N \text{ com } |K| = k\}$, com $k \leq n$, é

$$|C^n_k| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

pois $C^n_k \approx D^n_k$ módulo D^k_k (i.e. duas funções injetivas $K \to N$ definem o mesmo subconjunto de N, a imagem, sse diferem por uma permutação de K).

4. (racionais e reais) As frações p/q, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, são somadas e multiplicadas segundo as regras

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}}$$

No corpo $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}\,,\ q \neq 0\}$ dos *números racionais* e no corpo $\mathbb{R}$ dos *números reais* as operações soma $a+b$ e multiplicação $a \cdot b$ satisfazem os *axiomas de corpo*, ou seja, os axiomas de anel A1,A2, ..., A5 e o axioma

C6 (existência do inverso para $\times$) $\qquad \forall x \neq 0$ existe x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$

Em particular,

$$\boxed{\lambda x = \lambda y \quad \text{e} \quad \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = y\,.}$$

- [Ba79] 1.5.1., 1.5.2.

5. (equações de primeiro grau) A única solução da *equação de primeiro grau* $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, é $x = -b/a$.

6. (percentagem) Uma razão pode ser expressa em percentagem (do latim PER CENTUM), ou seja, como uma fração $p\% := p/100$.

- [Ba79] 1.3.2, 1.3.3., 1.3.5.

7. (potências inteiras) O *quadrado* de x é $x^2 := x \cdot x$ (a área de um quadrado de lado x, se $x > 0$), o *cubo* de x é $x^3 := x \cdot x \cdot x$ (o volume de um cubo de lado x, se $x > 0$). As *potências inteiras* de um número x são definidas indutivamente por $x^0 := 1$. e $x^{n+1} := x^n \cdot x$ se $n = 1, 2, 3, \ldots$. Se $x \neq 0$, também podemos definir $x^{-n} := 1/x^n$, quando $n = 1, 2, 3, \ldots$. Então

$$\boxed{x^n \cdot x^m = x^{n+m} \qquad (x^n)^m = x^{nm} \qquad x^n \cdot y^n = (xy)^n}$$

- Verifique as identidades

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad \text{e} \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2\,.$$

- [Ba79] 1.6.7., 1.6.8.

8. (coeficiente binomial) O número $|C^n_k| = \binom{n}{k}$, é dito *coeficiente binomial*, por via da *fórmula do binómio de Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Em particular, se $a + b = 1$, vale a identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} = 1$$

9. (ordem, valor absoluto, intervalos e desigualdades) O conjunto $\mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{Q}^+$) dos números reais (ou racionais) positivos define uma *ordem* no corpo $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Q}$), ou seja, satisfaz os *axiomas de ordem*:

   O1 $0 \notin \mathbb{R}^+$,

   O2 se $a, b \in \mathbb{R}^+$, então $a + b \in \mathbb{R}^+$ e $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$,

   O3 $\forall\, x \neq 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

   Dizemos que $a < b$ se $b - a \in \mathbb{R}^+$, e que $a > b$ se $b < a$. Também, dizemos que $a \leq b$ se $a < b$ ou $a = b$, e que $a \geq b$ se $b \leq a$. Em particular, todos os $a \in \mathbb{R}^+$, como por exemplo 1, são $a > 0$, e todos os $b \in \mathbb{R}^-$ são $b < 0$. Então

   $$\boxed{a < b \qquad \Rightarrow \qquad a + c < b + c}$$

   $$\boxed{a < b \quad \text{e} \quad c < d \qquad \Rightarrow \qquad a + c < b + d}$$

   Também,

   $$\boxed{a < b \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} ad < bd & \text{se } d > 0 \\ ad > bd & \text{se } d < 0 \end{cases}}$$

   Em particular,

   $$\boxed{a < b \qquad \Rightarrow \qquad -b < -a}$$

   Se $ab > 0$, então a e b são os dois positivos ou os dois negativos. Finalmente,

   $$\boxed{a \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad a^2 > 0}$$

   ou seja, os quadrados de números distintos de zero são positivos.

   O *valor absoluto/módulo* do número x é

   $$|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

   A *distância* entre os números (pontos da reta) x e y é $|x - y|$. Em particular, a distância entre x e y é diferente de zero sse $x \neq y$.

   O conjunto dos números $a < x < b$ é chamado *intervalo* (a, b), o conjunto dos números $a < x \leq b$ é chamado intervalo $(a, b]$, ... É também útil usar os símbolos $\pm\infty$ para denotar intervalos do género (a, ∞), o conjunto dos números $x > a$, ...

   - [Ba79] 1.6.1., 1.6.2., 1.6.3., 1.6.4.
   - Verifique a *desigualdade do triângulo*

     $$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

   - Resolva (ou seja, determine o/s valor/es ou o/s interval/os de x)

     $$3x - 1 > x + 5 \qquad |x| = 9 \qquad |x - 1| = 2$$

     $$x^2 \leq 4 \qquad (x-1)^2 > 1 \qquad |x| < 100$$

     $$|x - 3| \leq 2 \qquad |7x - 2| = 3 \qquad (x-1)(x-2)(x-3) > 0$$

10. (sistema decimal) Os números racionais são representados por dízimas (finitas ou) periódicas.

    - Calcule a dízima de

      $$1/20 \qquad 3/4 \qquad 5/100 \qquad 1/3 \qquad 1/7 \qquad 1/9 \qquad 1/111$$

11. (potências fracionárias) A *raiz quadrada* de $x \geq 0$, denotada $\sqrt{x}$ ou $x^{1/2}$, é o único número $q \geq 0$ tal que $q^2 = x$ (o lado de um quadrado de área x). A *raiz cúbica* de $x \geq 0$, denotada $\sqrt[3]{x}$ ou $x^{1/3}$, é o único número $q \geq 0$ tal que $q^3 = x$ (o lado de um cubo de volume x). Em geral, se $n \in \mathbb{N}$, a *raiz n-ésima* de $x \geq 0$, denotada $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{1/n}$, é o único número $q \geq 0$ tal que $q^n = x$. Se n é ímpar, é também possível definir a raiz n-ésima de um número negativo.

   Dada uma fração n/m (com $n, m \in \mathbb{N}$), a *potência* (n/m)*-ésima* do número $x \geq 0$, denotada $x^{n/m}$, é o único $q \geq 0$ tal que $q^m = x^n$ (assim que $(x^{n/m})^m = x^n$).

   - Calcule
   $$\sqrt{4 \cdot 9} \qquad \sqrt{10^{80}} \qquad \sqrt[3]{8} \qquad \sqrt[8]{(-3)^8}$$
   - Verdadeiro ou falso?
   $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad\qquad \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a+b}$$

12. (médias) A *média aritmética* dos números a e b é $\frac{a+b}{2}$. A *média geométrica* dos números positivos a e b é $\sqrt{ab}$.

   - [Ba79] 1.8.2 e 1.8.2.

13. (média, desvio padrão, notação científica) Se um observável chamado x é observado/medido n vezes, e se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são os valores obtidos nas n observações, é natural estimar o "valor verdadeiro" de x com a *média aritmética*
   $$\boxed{\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}$$
   Umas medidas da dispersão dos dados são o *desvio quadrático médio*
   $$\boxed{S^2 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2}$$
   e o *desvio padrão* (*standard deviation*, ou *standard uncertainty*) $S := \sqrt{S^2}$. Se n é grande, é razoável esperar que o valor verdadeiro esteja no intervalo
   $$\boxed{\overline{x} \pm (S/\sqrt{n})}$$
   com grande probabilidade. O "erro relativo" $(S/\sqrt{n})/\overline{x}$ indica a quantidade dos dígitos significativos, ou seja confiáveis, na estimação de x. Por exemplo, uma tabela das constantes da física tem este valor da constante de gravitação de Newton:
   $$G = 6.673(10) \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2} \text{ with relative standard uncertainty } 1.5 \times 10^{-3}$$
   Isto quer dizer que, embora a média observada seja $6.67310 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$, só podemos confiar nos primeiros três dígitos decimais deste valor, e portanto escrever $G \simeq 6.673 \times 10^{-11}$. Os *algarismos significativos* são apenas os primeiros 4, ou seja, 6.673, e o expoente -3 é a *ordem de grandeza* de G (no sistema mks).

   - A média aritmética $\overline{x}$ é o valor de a que minimiza a soma
   $$(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2$$
   dos quadrados dos "desvios" nas distintas observações.
   - Transforme em notação científica os seguintes dados (de Wikipedia):
   a massa de um eletrão $\simeq$ 0.00000000000000000000000000000091093822 kg,
   a massa da Terra $\simeq$ 5973600000000000000000000 kg.
   a circunferência da Terra $\simeq$ 40000000 m.
   - [Ba79] 1.10.8, 1.10.9., 1.10.10., 1.10.12., 1.10.12., 1.10.14, 1.10.15, 1.10.16. 1.10.21., 1.10.22. e 1.10.23.

14. (equações de segundo grau) Os lados de um retângulo de perímetro $P = 2a$ e área $A = b$ são soluções do problema $x^2+A = (P/2)x$. As soluções da equação de segundo grau $ax^2+bx+c = 0$, com $a \neq 0$, podem ser determinada "completando o quadrado", ou seja, observando que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

e portanto o polinómio é igual a zero quando

$$\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \text{ou seja,} \qquad x - \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Assim, as raizes de $ax^2 + bx + c$ são dadas pela *fórmula resolvente*

$$\boxed{x_\pm = \tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Em particular, a equação possui duas raizes reais quando o *discriminante* $\Delta := b^2 - 4ac$ é $\Delta > 0$, uma raiz (dupla) quando $\Delta = 0$, ou nenhuma raiz real (mas duas raizes $z_\pm = (-b \pm i\sqrt{|\Delta|})/(2a)$ complexas conjugadas!) quando $\Delta < 0$.
Observe que se $x = a$ ou $x = b$ então $(x - a)(x - b) = 0$, e portanto $x^2 - (a + b)x + ab = 0$.

- Resolva

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad x^2 + 3x = 0 \qquad 3x^2 - 6x + 2 = 0 \qquad x^2 + 6x + 9 = 0$$

- Determine uma equação de segundo grau cujas soluções sejam 2 e -7.
- Determine a soma e o produto das soluções de $x^2 - 5x + 6 = 0$.
- Determine o intervalo definido por $x^2 < x + 1$.

15. (comprimento/superfície/volume) O volume e a área da superfície de um organismo esférico dependem da dimensão linear (por exemplo, o raio ℓ) como $V \propto \ell^3$ e $SA =\propto \ell^2$ Portanto, a *razão superfície/volume* é

$$SA : V \propto \ell^{2-3}\,.$$

- A razão entre os volumes de dois esferas do mesmo material igual a 27. Calcule a razão entre as áreas da superfície e entre os raios.

2 Vetores

1. (a linguagem da filosofia) "... Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto." [1]

2. (o plano cartesiano) O *plano cartesiano*[2] $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto dos *pontos* $\mathbf{r} = (x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$. A *origem* é o ponto $\mathbf{0} := (0, 0)$. O ponto $\mathbf{r} = (x, y)$ pode ser pensado como o *vetor* (i.e. o segmento orientado, a seta) entre a origem $(0, 0)$ e o ponto (x, y). A *soma* dos vetores $\mathbf{r} = (x, y)$ e $\mathbf{r}' = (x', y')$ é o vetor

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' := (x + x', y + y')\,,$$

que representa uma diagonal do paralelogramo de lados $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$. O *produto* do número/escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ pelo vetor $\mathbf{r} = (x, y)$ é o vetor

$$\lambda\mathbf{r} := (\lambda x, \lambda y)$$

que representa uma dilatação/contração (e uma inversão se $\lambda < 0$) de razão λ do vetor $\mathbf{r}$. Cada vetor pode ser representado de maneira única como soma

$$\mathbf{r} = (x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\,,$$

onde $\mathbf{i} := (1, 0)$ e $\mathbf{j} := (0, 1)$ denotam os vetores da base canónica.

Lugares geométricos (pontos, retas, circunferências, parábolas, ...) podem ser descritos/definidos por equações algébricas, ditas "equações cartesianas".

- Descreva as coordenadas cartesianas dos pontos da reta que passa por $(1, 2)$ e $(-1, 3)$.
- Descreva as coordenadas cartesianas do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$.
- Esboce os lugares geométricos definidos pelas equações

$$xy = 1 \qquad y = 2x - 7 \qquad (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9 \qquad x - 2y^2 = 3$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ -2x - 2y = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

- Esboce os lugares geométricos definidos pelas seguintes desigualdades

$$x - y \leq 1 \qquad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y \leq 1 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

3. (o espaço, o espaço-tempo e o espaço de fases da física newtoniana) O espaço onde acontece a física newtoniana é o *espaço 3-dimensional* $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. A posição de uma partícula num referencial inercial é um vetor

$$\mathbf{r} = (x, y, z) := x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$$

onde $\mathbf{i} := (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} := (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} := (0, 0, 1)$ denotam os vetores da base canónica.

A *lei horária/trajetória*, de uma partícula é uma função $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ que associa a cada tempo $t \in I \subset \mathbb{R}$ a posição $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ da partícula no instante t. A *velocidade* da partícula no instante t é o vetor $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$. A *aceleração* da partícula no instante t é o vetor $\mathbf{a}(t) := \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$, determinado pela equação de Newton[3]

$$m\,\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

[1] Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, 1623.
[2] René Descartes, *La Géométrie* [em *Discourse de la Méthode*, 1637].
[3] Isaac Newton, *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica*, 1687.

onde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo de forças e $m > 0$ a massa da partícula.

O *espaço-tempo*[4] da física newtoniana é o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^4$, o espaço dos *eventos* $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, onde $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ representa uma posição num referencial inercial, e $t \in \mathbb{R}$ é o *tempo absoluto*.

O *estado* de uma partícula, a informação necessária e suficiente para resolver a equação de Newton e portanto determinar a trajetória futura (e passada), é um ponto $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ do *espaço dos estados/de fases* , onde $\mathbf{r}$ é a posição e $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ é o *momento (linear)*.

- Determine a "dimensão" do espaço de fases de um sistema composto por 8 planetas (como, por exemplo, Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno) e de um sistema composto por 6×10^{23} moléculas.

4. (reações químicas) O estado de uma reação química

$$aA + bB + cC + \ldots \quad \to \quad xX + yY + zZ + \ldots$$

entre os n reagentes A, B, C, ... e os m produtos X, Y, Z, ... é descrito usando as concentrações $[A]$, $[B]$, $[C]$, ..., $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, ..., e portanto $n + m$ números.

5. (o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$) O *espaço vetorial real* de *dimensão* n é o espaço

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$$

das n-uplas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais, ditas *vetores* ou *pontos*, munido das operações *adição* : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$\boxed{\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)}$$

e *multiplicação por um escalar* : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$\boxed{\lambda, \mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)}$$

O *vetor nulo/origem* é o vetor $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0)$, tal que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. O *simétrico* do vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o vetor $-\mathbf{x} := (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Isto justifica a notação $\mathbf{x} - \mathbf{y} := \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

A "combinação linear" dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ com "coeficientes" λ_1, λ_2, ..., $\lambda_k \in \mathbb{R}$ é o vetor

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i := \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k \,.$$

A *base canónica* de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto ordenado dos vetores

$$\boxed{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \qquad \ldots \qquad \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)}$$

assim que cada vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear única

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$$

dos vetores da base canónica. O número x_k é chamado k-ésima *coordenada*, ou *componente*, do vetor $\mathbf{x}$.

Um *subespaço vetorial* de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{0} =\in \mathbf{V}$ e tal que se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ então $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

No *plano* $\mathbb{R}^2$ os pontos costumam ser denotados por $\mathbf{r} = (x, y)$, e no *espaço (3-dimensional)* $\mathbb{R}^3$ por $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

[4] "Cette maniére de considérer les quantités de trois dimensions est aussi exacte que l'autre, car les lettres peuvent toujours être regardées comme représentant des nombres rationnels ou non. J'ai dit plus haut qu'il n'était pas possible de concevoir plus de trois dimensions. Un homme d'esprit de ma connaaisance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée comme une quatriéme dimension, et que le produit temps par la solidité serait en qualque maniére un produit de quatre dimensions; cette idée peut être contestée, mais elle a, ce me semble, quelque mérite, quand ce ne serait que celui de la nouveauté." [Jean-le-Rond D'Alembert, *Encyclopédie*, Vol. 4, 1754.]

- Calcule

$$(1,2,3)+(2,3,4) \qquad 6\cdot(-1,-6,0) \qquad (1,-1)-(3,2)$$

- Calcule e esboce os pontos $A+B$, $A-B$, $2A-3B$ e $-A+\frac{1}{2}B$ quando

$$A=(1,2) \text{ e } B=(-1,1) \qquad \text{ou} \qquad A=(0,1,7) \text{ e } B=(-2,3,0)$$

6. (vetores aplicados) Um *vetor aplicado/geométrico* (uma força, uma velocidade, ...) é um segmento orientado $\vec{AB}$ entre um ponto de aplicação $A\in\mathbb{R}^n$ e um ponto final $B\in\mathbb{R}^n$. Dois vetores aplicados $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ são *paralelos* se $B-A=\lambda(D-C)$ com $\lambda\in\mathbb{R}$, e são *equivalentes* (e portanto definem o mesmo "vetor" $\mathbf{x}=B-A$) se $B-A=D-C$.

   - Mostre que cada vetor aplicado é equivalente a um vetor $\vec{OC}$ aplicado na origem $O=(0,0,\dots,0)$.
   - Diga se são paralelos ou equivalentes $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ quando

$$A=(1,2) \qquad B=(-1,1) \qquad C=(2,3) \qquad D=(4,,4)$$
$$A=(0,1,\pi) \qquad B=(-2,3,0) \qquad C=(1,0,-\pi) \qquad D=(2,3,0)$$

   - Determine $D\in\mathbb{R}^n$ de maneira tal que $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sejam equivalentes quando

$$A=(1,2) \qquad B=(-1,1) \qquad C=(2,3)$$
$$A=(0,1,\pi) \qquad B=(-2,3,0) \qquad C=(0,0,0)$$

7. (composição de forças) Se duas força $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ atuam sobre uma partícula colocada num certo ponto do espaço, então a "resultante" é uma força $\mathbf{F}+\mathbf{G}$.

8. (translações e homotetias) Uma *translação* do espaço $\mathbb{R}^n$ é uma transformação $T_{\mathbf{a}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ definida por

$$\mathbf{x}\mapsto T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}):=\mathbf{x}+\mathbf{a}\,, \qquad \text{com } \mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\,.$$

   A composição de duas translações é $T_{\mathbf{a}}\circ T_{\mathbf{b}}=T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$. Em particular, $T_{\mathbf{a}}\circ T_{-\mathbf{a}}=T_{-\mathbf{a}}\circ T_{\mathbf{a}}=\mathbf{1}$. O espaço $\mathbb{R}^n$ é "homogéneo", ou seja, $\forall\,\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ existe uma translação $T_{\mathbf{a}}$ tal que $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})=\mathbf{y}$.
   Uma *homotetia* do espaço $\mathbb{R}^n$ é uma transformação $H_\lambda:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ definida por

$$\mathbf{x}\mapsto H_\lambda(\mathbf{x}):=\lambda\mathbf{x}\,, \qquad \text{com } \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

   - Calcule $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$ quando

$$\mathbf{a}=(\pi,e) \text{ e } \mathbf{v}=(11,13) \qquad \mathbf{a}=(2,1,1) \text{ e } \mathbf{v}=(0,1,3)$$

   - Calcule $H_\lambda(\mathbf{v})$ quando

$$\lambda=\frac{1}{3} \text{ e } \mathbf{v}=(2,-1) \qquad \lambda=5 \text{ e } \mathbf{v}=(6,7,8)$$

   - Determine as transformações compostas $T_{\mathbf{a}}\circ H_\lambda$ e $H_\lambda\circ T_{\mathbf{a}}$. São iguais?

9. (o plano euclidiano segundo Descartes) A geometria euclidiana do plano (distâncias, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, ...) pode ser deduzida a partir da noção algébrica de *produto escalar/interno*

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}':=xx'+yy'\,.$$

   Os vetores $\mathbf{r}=(x,y)$ e $\mathbf{r}'=(x',y')$ são *perpendiculares/ortogonais* quando $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'=0$, i.e. quando $xx'=-yy'$. O *comprimento*, ou *norma*, do vetor $\mathbf{r}=(x,y)$ é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{r}\|:=\sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

   A *distância* entre os pontos $\mathbf{r}=(x,y)$ e $\mathbf{r}'=(x',y')$ é

$$\mathrm{d}(\mathbf{r},\mathbf{r}'):=\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\,.$$

10. (produto escalar euclidiano) O *produto escalar/interno (euclidiano)* em $\mathbb{R}^n$ é definido por

$$\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}$$

O produto escalar é "comutativo/simétrico", i.e.

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}\,,$$

"bilinear" (ou seja, linear em cada uma das duas variáveis), i.e.

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{z}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}\,, \quad \mathbf{z}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{z}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{z}\cdot\mathbf{y} \quad \text{e} \quad (\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(\lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\,,$$

e "positivo", i.e.

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0\,, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{x}=\mathbf{0}\,.$$

Os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditos *ortogonais/perpendiculares* quando $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$.

- Verifique que os vetores da base canónica são ortogonais dois a dois, i.e. $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = 0$ se $i\neq j$.
- Se $\mathbf{v}$ é ortogonal a todos os vetores $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, então $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.
- Calcule o produto escalar entre $\mathbf{x}=(1,2)$ e $\mathbf{y}=(-1,1)$, e entre $\mathbf{x}=(0,1,\pi)$ e $\mathbf{y}=(-2,3,0)$.
- Determine se são ortogonais $\mathbf{x}=(1,2)$ e , $\mathbf{y}=(-1,1)$, ou $\mathbf{x}=(0,1,\pi)$ e $\mathbf{y}=(-2,3,0)$.
- Se $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$ então $\mathbf{y}=\mathbf{z}$?

11. (norma euclidiana) A *norma (euclidiana)* do vetor $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ é o número não-negativo

$$\boxed{\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}$$

A norma é "(positivamente) homogénea", i.e.

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|\,,$$

e "positiva", i.e.

$$\|\mathbf{x}\|\geq 0\,, \qquad \text{e} \qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{x}=\mathbf{0}\,.$$

Um vetor $\mathbf{x}$ é dito *unitário* se $\|\mathbf{x}\|=1$.

- Verifique que os vetores da base canónica são unitários, i.e. $\|\mathbf{e}_i\|=1$.
- Verifique que se $\mathbf{v}\neq 0$, então $\mathbf{u}=\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ é unitário.
- Mostre que
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 4\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$$
e deduza que $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ sse $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$.
- Prove o *teorema de Pitágoras*: se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais então
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2$$
- Verifique (e interprete) a *identidade do paralelogramo*
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{y}\|^2\,.$$
- Verifique que o produto interno euclidiano pode ser deduzido da norma usando a *identidade de polarização*
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right)$$
ou
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2\right)\,.$$

- Calcule a norma dos vetores $\mathbf{x} = (1-1,1)$, $\mathbf{y} = (-1,1)$ e $\mathbf{z} = (1,2,3,4)$.

12. (projeção e componente) Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ um vetor $\neq \mathbf{0}$. Cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser representado de maneira única como soma
$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{w}$$
onde $\mathbf{w}$ é um vetor ortogonal a $\mathbf{v}$. Basta escolher $\lambda = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})/\|v\|^2$. O vetor $\lambda\mathbf{v}$ é dito *projeção* do vetor $\mathbf{x}$ sobre (a reta definida pel)o vetor $\mathbf{v}$, e o coeficiente λ é dito *componente* de $\mathbf{x}$ ao longo de $\mathbf{v}$. Em particular, a componente de $\mathbf{x}$ ao longo de um vetor unitário $\mathbf{u}$ é $\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}$.

   - Verifique que a projeção de $\mathbf{x}$ sobre o vetor $\mathbf{e}_k$ da base canónica é $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_k = x_k$ (a k-ésima coordenada de $\mathbf{x}$).
   - Calcule a componente de $\mathbf{x} = (1,2)$ ao longo de $\mathbf{v} = (-1,1)$, e a projeção de $\mathbf{x} = (0,1,\pi)$ sobre $\mathbf{v} = (-2,3,0)$.

13. (desigualdade de Schwarz, ângulos e desigualdade do triângulo) A *desigualdade de Schwarz* afirma que se $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ então
$$\boxed{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$
e a igualdade verifica-se sse os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são paralelos. Uma consequência é que a norma satisfaz a *desigualdade do triângulo* (ou *subaditividade*)
$$\boxed{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|}$$
O *ângulo* entre os vetores não nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o único $\theta \in [0,\pi]$ tal que
$$\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta}$$

   - Prove a desigualdade de Schwarz.
     (primeira sugestão: se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, considere os vetores unitários $\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ e $\mathbf{v} = \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$, calcule $\|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}\|^2$ ... deduza que $-1 \leq \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \leq 1$ ...)
     (segunda sugestão: se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, considere a projeção $\lambda\mathbf{x}$ de $\mathbf{y}$ sobre $\mathbf{x}$, e aplique o teorema de Pitágoras aos vetores ortogonais $\lambda\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} - \lambda\mathbf{x}$ ...)
   - Prove a desigualdade do triângulo (calcule $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$ e use a desigualdade de Schwarz).
   - Mostre que se θ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ então
   $$\|\mathbf{x}\pm\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \pm 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta$$
   - Calcule o coseno do ângulo entre $\mathbf{x} = (1,2)$ e $\mathbf{y} = (-1,1)$. Calcule o coseno do ângulo entre $\mathbf{x} = (0,1,\pi)$ e $\mathbf{y} = (-2,3,0)$.
   - Calcule o coseno dos ângulos do triângulo de vértices $A = (1,1)$, $B = (-1,3)$ e $C = (0,2)$. Calcule o coseno dos ângulos do triângulo de vértices $A = (1,2,5)$, $B = (2,1,2)$ e $C = (0,3,0)$.
   - Determine um vetor ortogonal ao vetor $(1,-1)$, e um vetor ortogonal ao vetor $(1,3)$.
   - Determine a família dos vetores de $\mathbb{R}^2$ ortogonais ao vetor (a,b), e a família dos vetores de $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor (a,b,c).

14. (distância euclidiana) A *distância (euclidiana)* entre os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o número não-negativo
$$\boxed{\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}}$$
A distância satisfaz a *desigualdade do triângulo* (a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é superior ao comprimento do terceiro lado)
$$\boxed{\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mathrm{d}(\mathbf{z},\mathbf{y})}$$

- Prove a desigualdade do triângulo (use a desigualdade homónima da norma).
- Prove que $\mathrm{d}(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\,\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.
- Calcule a distância entre $\mathbf{x} = (1,2)$ e $\mathbf{y} = (-1,1)$, e a distância entre $\mathbf{x} = (0,1,\pi)$ e $\mathbf{y} = (-2,3,0)$.

15. (trabalho) O *trabalho* que realiza um campo de forças constante $\mathbf{F}$ ao deslocar uma partícula (ao longo do segmento) do ponto $\mathbf{r}$ ao ponto $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ é $dT := \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

16. (centro de massas) O *centro de massas* do sistema de partículas de massas $m_1, m_2, \ldots, m_N$ colocadas nos pontos $\mathbf{r}_!, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N \in \mathbb{R}^3$ é

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k\mathbf{r}_k = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_N\mathbf{r}_N}{M}$$

onde $M := m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ é a massa total do sistema.

17. (retas) Um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ define/gera uma reta $\mathbb{R}\mathbf{v} := \{t\mathbf{v} \text{ com } t \in \mathbb{R}\}$, subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. A *reta (afim)* paralela a $\mathbf{v}$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{v} := \{\mathbf{a} + t\mathbf{v} \text{ com } t \in \mathbb{R}\}}$$

($\mathbf{v}$ é dito *vetor direccional* da reta). Em particular, a reta passando pelo pontos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$ é

$$\{\mathbf{a} + t\,(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \text{ com } t \in \mathbb{R}\}$$

No plano $\mathbb{R}^2$, é possível eliminar o parâmetro t e deduzir uma equação cartesiana da reta: por exemplo, se $\mathbf{a} = (a,b)$ e $\mathbf{v} = (v,w)$, então

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{v} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } w(x-a) - v(y-b) = 0\}}$$

Um vetor não nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ define uma reta normal/perpendicular $\mathbf{n}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = 0\}$, subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. A reta perpendicular/normal ao vetor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ é

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{n}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0\}}$$

($\mathbf{n}$ é dito vetor *normal* à reta). Por exemplo, uma equação cartesiana da reta perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = (m,n) \in \mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ é

$$m(x-a) + n(y-b) = 0\,.$$

- Determine uma equação paramétrica da reta

que passa pelo ponto $(2,3)$ e é paralela ao vetor $(-1,2)$

que passa pelo ponto $(5,1,-2)$ e é paralela ao vetor $(3,-7,2)$

que passa pelos pontos $(3,3)$ e $(-1,-1)$

que passa pelos pontos $(0,3,4)$ e $(8,3,2)$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2x - 3y = 5\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } -x + 7y = 0\}$$

- Determine uma equação cartesiana da reta

que passa pelo ponto $(5,-1)$ e é paralela ao vetor $(-6,2)$

que passa pelos pontos $(0,1)$ e $(-3,4)$

que passa pelo ponto $(0,0)$ e é perpendicular ao vetor $(-2,-3)$

que passa pelo ponto $(2,1)$ e é perpendicular ao vetor $(9,3)$

$$(-2,3) + t(5,1)$$

- Calcule o (coseno do) ângulo entre as retas

$$x-y=0 \quad \text{e} \quad -x+y=-7$$

$$x+y=1 \quad \text{e} \quad x-2y=-4$$

- Determine um vetor normal à reta

$$\text{que passa pelos pontos } (3,0) \text{ e } (2,1)$$

$$5x-3y=2$$

- Determine $P \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \; x+2y=-1\} = \{P + t\mathbf{v} \; \text{ com } \; t \in \mathbb{R}\}$$

- As retas

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \; 2x-3y=5\} \quad \text{e} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \; 3x-2y=5\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \; x+7y=3\} \quad \text{e} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \; -2x-14y=0\}$$

  são paralelas? São perpendiculares?

- Determine as interseções entre as retas

$$x-2y=1 \quad \text{e} \quad -2x+4y=3$$

$$3x+5y=0 \quad \text{e} \quad x-y=-1$$

$$(3,1)+t(1,3) \quad \text{e} \quad (0,1)+t(-1,-2)$$

18. (planos) Dois vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ "linearmente independentes" (i.e. não paralelos) geram um *plano* $\mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w} := \{t\mathbf{v} + s\mathbf{w} \; \text{ com } \; (t,s) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^n$, subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. O *plano (afim)* gerado pelos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é

$$\boxed{\mathbf{a} + (\mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w}) := \{\mathbf{a} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w} \; \text{ com } \; (t,s) \in \mathbb{R}^2\}}$$

No espaço $\mathbb{R}^3$, é possível eliminar os parâmetros t e s e deduzir uma equação cartesiana do plano. Um vetor não nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ define um plano normal $\mathbf{n}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \; \text{ t.q. } \; \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0\}$, subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. O plano ortogonal/perpendicular/normal ao vetor não nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ é

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{n}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \; \text{ t.q. } \; (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0\}}$$

($\mathbf{n}$ é dito *vetor normal* ao plano). Por exemplo, uma equação cartesiana do plano perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = (m,n,p) \in \mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ é

$$m(x-a) + n(y-b) + p(z-c) = 0$$

O ângulo entre dois planos de $\mathbb{R}^3$ é o ângulo entre dois vetores normais aos planos.

- Mostre que o plano que passa pelo pontos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ de $\mathbb{R}^n$, com $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ e $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ linearmente independentes, é

$$\{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + s(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \; \text{ com } \; (t,s) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Determine uma equação paramétrica do plano

$$\text{que passa pelo ponto } (5,1,-2) \text{ e é gerado pelos vetores } (3,-7,2) \text{ e } (-1.0,-1)$$

$$\text{que passa pelos pontos } (0,3,4)\,,\; (0,5,0) \text{ e } (8,3,2)$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \; x+y+z=1\}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \; z=0\}$$

- Determine uma equação cartesiana do plano

que passa pelo ponto $(-1,1,11)$ e é gerado pelos vetores $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$

que passa pelo ponto $(0,0,0)$ e é gerado pelos vetores $(3,-7,2)$ e $(-1.0,-1)$

que passa pelos pontos $(3,3,3)$ e é paralelo ao plano $x+y+z=0$

que passa pelos pontos $(0,3,4)$, $(0,5,0)$ e $(8,3,2)$

que passa pelo ponto $(0,0,0)$ e é perpendicular ao vetor $(-2,-3,-4)$

que passa pelo ponto $(2,1,0)$ e é perpendicular ao vetor $(9,3,0)$

- Calcule o (coseno do) ângulo entre os planos

$$x-y+z=0 \quad \text{e} \quad -x+3y+5z=-7$$

$$x-z=2 \quad \text{e} \quad x-y=-3$$

- Determine um vetor normal ao plano

que passa pelos pontos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$

$$y+z=1$$

- Determine as interseções entre os planos

$$x+2y+3z=-1 \qquad \text{e} \qquad -2x+4y-z=3$$

$$3x-5y=0 \qquad \text{e} \qquad x+y+z=1$$

3 Matrizes e transformações lineares

1. (espaço linear das matrizes) Uma *matriz* real $m \times n$ é uma tabela

$$\boxed{A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

de $m \cdot n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas. Quando $n = m$ a matriz é dita "quadrada". O número a_{ij} é dito *elemento/componente/entrada* ij da matriz A. Os vetores

$$\boxed{A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m}$$

são ditos *i-ésima linha* e *j-ésima coluna* da matriz A, respetivamente. O espaço $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{m \cdot n}$ das matrizes reais $m \times n$ é um espaço linear real se adição e multiplicação por um escalar são definidas por

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \text{e} \qquad \lambda A := (\lambda a_{ij}) \, ,$$

onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. O elemento neutro é a "matriz nula" $0 = (0) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, cujas entradas são todas nulas, tal que $A + 0 = A$. A oposta da matriz $A = (a_{ij})$ é a matriz $-A := (-a_{ij})$, que verifica $A + (-A) = 0$.

   - Calcule $A + B$, $A - B$ e $2A - 3B$ quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. (álgebra das matrizes) Se $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times s}(\mathbb{R})$, o *produto (linhas por colunas)* de A e B (nesta ordem!) é a matriz $AB = C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times s}(\mathbb{R})$ definida por

$$\boxed{c_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}}$$

(ou seja, o elemento i, j de AB é o produto escalar $A_i \cdot B^j$ da linha i de A com a coluna j de B). A "matriz identidade" $\mathbf{1}_n \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é

$$\mathbf{1}_n = (\delta_{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e satisfaz $\mathbf{1}_n A = A$ e $B \mathbf{1}_n = B$ para todas as matrizes $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. O produto é "associativo", i.e.

$$A(BC) = (AB)C$$

e satisfaz as "propriedades distributivas" à esquerda e à direita

$$A(B + C) = AB + AC \qquad \text{e} \qquad (A + B)C = AC + BC$$

- Calcule AB quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \mathbf{1}_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Existem matrizes $A \neq 0$ e $B \neq 0$ tais que $AB = 0$?

3. (comutador) O produto de matrizes não é comutativo! Ou seja, em geral, $AB \neq BA$. As matrizes quadradas A e $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *comutam/são permutáveis* se $AB = BA$. O *comutador* entre as matrizes quadradas A e B é a matriz

$$\boxed{[A, B] := AB - BA}$$

O comutador satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$\boxed{[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0}$$

- Mostre que cada matriz quadrada A comuta com si própria, i.e. $[A, A] = 0$.
- Considere as matrizes 2×2

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule $[E, E_+]$, $[E, E_-]$ e $[E_+, E_-]$.

4. (transformações lineares e matrizes) Uma *transformação/aplicação/operador linear* entre os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é uma função $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aditiva e homogénea, ou seja, tal que

$$L(\lambda \mathbf{v} + \lambda' \mathbf{v}') = \lambda L(\mathbf{v}) + \lambda' L(\mathbf{v}')$$

$\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. O espaço $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é um espaço linear real se a adição e a multiplicação por um escalar são definidas por

$$(L + L')(\mathbf{v}) := L(\mathbf{v}) + L'(\mathbf{v}) \qquad (\lambda L)(\mathbf{v}) := \lambda L(\mathbf{v})$$

Uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é determinada pelos seus valores nos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, pois $L(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1L(\mathbf{e}_1) + x_2L(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nL(\mathbf{e}_n)$. Portanto, se $L(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{e}_m$, com $j = 1, 2, \ldots, , n$, as coordenadas de $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ são

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Se X e Y denotam os "vetores coluna" (pensados como matrizes com uma única coluna!)

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

e $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ denota a matriz

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \, ,$$

então a transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é representada/definida pela equação matricial

$$Y = AX \, ,$$

ou seja, explicitamente,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se uma segunda matriz $B \in \mathrm{Mat}_{p\times m}(\mathbb{R})$ define a transformação linear $M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, então a composição $M \circ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, que é também uma transformação linear, é definida pela matriz produto $BA \in \mathrm{Mat}_{p\times n}(\mathbb{R})$. De fato, se as coordenadas de $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ são $y_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j$ e as coordenadas de $\mathbf{z} = M(\mathbf{y})$ são $z_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} y_k$, então

$$z_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj} \right) x_j \qquad i = 1, 2, \dots, m \, ,$$

ou seja, usando os vetores coluna X, Y e Z, se $Y = AX$ e $Z = BY$, então

$$Z = BAX \, .$$

- Determine a matriz que define/representa a transformação linear

$$L(x,y) = (x - y, 2x - 3y) \qquad L(x,y,z) = (3x + y - z, -x + 2y + z)$$

$$L(x,y,z) = (3x, 3y, 3z) \qquad L(x,y) = (x + y, x - y, 2x - 7y)$$

$$L(x,y,z) = (x,y) \qquad L(x,y,z) = (x,z)$$

- Determine a transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida/representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determine a matriz 2×2 que define a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que

transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $x = 0$

transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $y = -x$

transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares$(r/2, \theta)$

transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares $(r, \theta - \pi/2)$

- Calcule a composição $M \circ L$ quando

$$L(x,y) = (x, x+y, 3x-2y) \qquad \text{e} \qquad M(x,y,z) = (y,z,x)$$

$$L(x,y,z) = (x-y, x+y-z) \qquad \text{e} \qquad M(x,y) = (y,x,2x-3y)$$

5. (endomorfismos e matrizes quadradas) O espaço $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ das transformações lineares $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamado espaço dos *endomorfismos* de $\mathbb{R}^n$. Os endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ são representados por matrizes "quadradas" $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, as *potências* inteiras de A são definidas recursivamente por

$$A^0 = \mathbf{1}_n \qquad \text{e} \qquad A^n = AA^{n-1} \qquad \text{se } n \geq 1\,.$$

e representam as iteradas da transformação linear $X \mapsto AX$. A *diagonal* da matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto ordenado $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$, e o *traço* de A é

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}}$$

Uma matriz quadrada é "diagonal" se os elementos que não pertencem à diagonal são nulos, ou seja, se é da forma

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Determine a matriz da transformação "identidade" $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ e da transformação "nula" $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}$.
- Determine a matriz da homotetia $\mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e calcule o seu traço.
- Mostre que duas matrizes diagonais comutam.
- Mostre que
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$$
- Calcule A^0, A^1, A^2, A^3, ... , A^n , ... quando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Determine as matrizes $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = 0$.
- Determine as matrizes $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = \mathbf{1}_2$.

6. (matrizes transpostas) Para cada matriz $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, existe uma única matriz $A^t = (a^t_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, dita *transposta* de A, tal que

$$Y \cdot (AX) = (A^t Y) \cdot X$$

para todos os vetores (coluna) $X \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in \mathbb{R}^m$. As entradas da matriz transposta são $a^t_{ij} = a_{ji}$ (ou seja, as linhas de A^t são as colunas de A e vice-versa). É imediato verificar que $(A^t)^t = A$ e que $(AB)^t = B^t A^t$. Uma matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é dita *simétrica* se $A = A^t$, e *anti-simétrica* se $A^t = -A$.

- Mostre que, se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então $A + A^t$ é simétrica e $A - A^t$ é anti-simétrica. Deduza que cada matriz quadrada pode ser decomposta como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.
- Mostre que se A é uma matriz quadrada, então $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^t)$.
- Mostre que o traço de uma matriz anti-simétrica é nulo.

7. (inversão de matrizes 2×2) A matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

representa a transformação linear genérica do plano $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. A transformação L é invertível se para cada vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ é possível encontrar um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $L(x, y) = (\alpha, \beta)$, ou seja, resolver o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \alpha \\ cx + dy & = & \beta \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (ad - bc)\, x & = & d\alpha - c\beta \\ (ad - bc)\, y & = & -c\alpha + a\beta \end{array} \right.$$

(o segundo sistema é obtido ao retirar b vezes a segunda equação de d vezes a primeira equação, e depois ao retirar c vezes a primeira equação de a vezes a segunda equação). Portanto, a transformação L é invertível sse $\det A := ad - bc \neq 0$, e a sua inversa é a transformação linear

$$L^{-1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{ad - bc} (d\alpha - c\beta, -c\alpha + a\beta) \,,$$

representada pela matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

8. (transformações lineares e matrizes invertíveis) O espaço $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ das transformações lineares invertíveis (injetivas e sobrejetivas!) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamado espaço dos *automorfismos* de $\mathbb{R}^n$. Uma matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é *não-singular/regular*, e portanto define um automorfismo $X \mapsto Y = AX$ de $\mathbb{R}^n$, se existe uma matriz quadrada $A^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, dita *inversa* de A, tal que

$$\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbf{1}_n}$$

Se A é regular, o inverso do automorfismo $X \mapsto Y = AX$ é o automorfismo $Y \mapsto X = A^{-1}Y$. Se $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, então as entradas da matriz inversa $A^{-1} = (b_{ij})$ satisfazem as n^2 equações lineares

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$$

Se A e B são regulares, então também AB é regular e a sua inversa é

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Se A é regular então também A^t é regular e

$$\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$$

- Diga se a transformação linear L é invertível e, caso afirmativo, determine a inversa,

$$L(x, y) = (x, x) \qquad L(x, y) = (y, x) \qquad L(x, y) = (x - y, x + y) \qquad L(x, y) = (0, y)$$

$$L(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x) \qquad L(x, y, z) = (3x, 2y, z)$$

- Diga se as seguintes matrizes são regulares e, caso afirmativo, calcule a inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. (rotações no plano e funções trigonométricas) Seja R_θ a matriz 2×2 que representa uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de um ângulo θ no sentido anti-horário, relatvamente à base canónica do plano. Pela definição das funções trigonométricas,

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

e portanto, usando a linearidade,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ou seja, a rotação de um ângulo θ é o automorfismo do plano cartesiano definido por $R_\theta(x,y) = ((\cos\theta)x - (\sin(\theta)y, (\sin\theta)x + (\cos\theta)y)$.

- Observe que $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ e deduza as fórmulas de adição para as funções trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(\theta \pm \phi) &= \dots \\ \sin(\theta \pm \phi) &= \dots \end{aligned}$$

- Observe que $R_\theta R_{-\theta}$ é a transformação "identidade", e calcule a matriz inversa de R_θ.

4 Sistemas lineares

1. (Peppermint Patty's problems)

   - "In driving from town A to town D you pass first through town B and then through town C. It is 10 miles farther from A to B than from B to C and 10 miles farther from B to C than from C to D. If it is 390 miles from A do D, how far is it from A to B?"[5]
   - "A man has a daughter and a son.. The son is three years older than the daughter ... In one year the man will be six times as old as the daughter is now, and in ten years he will be fourteen years older than the combined ages of his children ... What is the man's present age?"
   - "A man has twenty coins consisting of dimes and quarters[6] ... If the dime were quarters and the quarters were dimes, he would have ninety cents more than he has now ... How many dimes and quarters does he have?"

[5] Peppermint Patty, in *Peanuts*, by Charles M. Schulz, December 6th, 1968.
[6] A *dime* is a 10 cents coin, and a *quarter* is a 25 cents coin.

2. (equações lineares na reta) Uma equação linear

$$ax = b$$

na reta real $\mathbb{R}$ (ou na reta complexa $\mathbb{C}$, ou, em geral, num corpo), com $a \neq 0$, admite uma única solução $x = b/a$.

3. (equações lineares no plano) Uma equação linear

$$ax + by = c$$

no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, com $\mathbf{n} = (a, b) \neq (0, 0)$, define uma reta afim $R = \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c\} \subset \mathbb{R}^2$. A equação homogénea associada

$$ax + by = 0$$

define uma reta que passa pela origem, ou seja, um subespaço vetorial $\mathbf{n}^\perp = \mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbb{R}^2$ de dimensão 1 (por exemplo, com $\mathbf{v} = (b, -a)$). Se $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto de R, ou seja, (apenas) uma solução de $ax + by = c$, então o espaço de todas as soluções é $R = \mathbf{r}_0 + \mathbb{R}\mathbf{v}$. Ou seja, as soluções de $ax + by = c$ são dadas por

$$(x, y) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} = (x_0, y_0) + t\,(b, -a)$$

ao variar o parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Um sistema de duas equações lineares

$$\begin{cases} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{cases}$$

descreve a interseção entre duas retas afins $(R_1 \cap R_2) \subset \mathbb{R}^2$. Esta interseção pode ser vazia (retas paralelas e distintas), pode ser uma reta $ax + by = c$ (equações proporcionais/equivalentes), ou pode ser um único ponto. A última possibilidade é o caso genérico, e o sistema é equivalente (eliminando x na segunda equação, se $a \neq 0$) ao sistema "em escada de linhas"

$$\begin{cases} ax + & by & = & c \\ & b''y & = & c'' \end{cases}$$

com $a \neq 0$, $b'' = ab' - a'b \neq 0$ e $c'' = ac' - a'c$, e portanto ao sistema "diagonal"

$$\begin{cases} x & & = & \alpha \\ & y & = & \beta \end{cases}$$

com $\beta = c''/b''$ e $\alpha = (c - b\beta)/a$.

- Resolva, se possível, os seguintes sistemas lineares

$$\begin{cases} x + y & = & 0 \\ x - y & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y & = & 1 \\ x - y & = & 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y & = 0 \\ -x + 2y & = 3 \end{cases}$$

4. (equações lineares no espaço) Uma equação linear

$$ax + by + cz = d$$

no espaço $\mathbb{R}^3$, com $\mathbf{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, define um plano afim $P = \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = d\} \subset \mathbb{R}^3$. A equação homogénea associada

$$ax + by + cz = 0$$

define o supespaço vetorial $\mathbf{n}^\perp \subset \mathbb{R}^3$. Um sistema de duas equações lineares

$$\begin{cases} ax + by + cz & = & d \\ a'x + b'y + c'z & = & d' \end{cases}$$

descreve a interseção entre dois planos afins $(P_1 \cap P_2) \subset \mathbb{R}^3$. Esta interseção pode ser vazia (dois planos paralelos e distintos), pode ser um plano $ax + by + cz = d$ (duas equações proporcionais/equivalentes), ou pode ser uma reta. A última possibilidade é o caso genérico, e o sistema é equivalente (eliminando x na segunda equação, se $a \neq 0$) ao sistema "em escada de linhas"

$$\left\{ \begin{array}{llll} ax+ & by+ & cz & = & d \\ & b''y+ & c''z & = & d'' \end{array} \right.$$

A última variável pode ser pensada como um parâmetro $z = t$ da reta:

$$t \mapsto (\alpha t + \gamma, \beta t + \delta, t)\,.$$

Um sistema de três equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{lll} ax + by + cz & = & d \\ a'x + b'y + c'z & = & d' \\ a''x + b''y + c''z & = & d'' \end{array} \right.$$

descreve a interseção entre três planos afins $(P_1 \cap P_2 \cup P_3) \subset \mathbb{R}^3$. Esta interseção pode ser vazia (dois planos paralelos e distintos, ou um plano paralelo à reta de interseção entre os outros dois), pode ser um plano $ax+by+cz = d$ (equações proporcionais/equivalentes), pode ser uma reta (sistema equivalente a um sistema de duas equações), ou pode ser um único ponto. A última possibilidade é o caso genérico, e o sistema é equivalente (eliminando x na segunda e na terceira equação, se $a \neq 0$, e depois y na terceira, se $b''' \neq 0$) ao sistema "em escada de linhas"

$$\left\{ \begin{array}{lllll} ax+ & by+ & cz & = & d \\ & b'''y+ & c'''z & = & d''' \\ & & c''''z & = & d'''' \end{array} \right.$$

com $a \neq 0$, $b''' \neq 0$ e $c'''' \neq 0$, e portanto ao sistema "diagonal"

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x & & & = & \alpha \\ & y & & = & \beta \\ & & z & = & \gamma \end{array} \right.$$

com $\gamma = d''''/c''''$, $\beta = (d''' - c'''\gamma)/b'''$ e $\alpha = (d - c\gamma - b\beta)/a$.

- Resolva, se possível, os seguintes sistemas lineares

$$\left\{ \begin{array}{rl} 3x - y & = 0 \\ x + y + z & = 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lll} x + y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lll} x & = & 1 \\ x + y & = & 2 \\ x + y + z & = & 3 \end{array} \right.$$

5. (sistemas lineares) Um *sistema* de m equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é um conjunto de equações

$$\boxed{\begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}}$$

com $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$. Uma *solução* do sistema é um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas satisfazem as m equações. A matriz $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é dita *matriz dos coeficientes* do sistema. Um sistema linear pode ter uma solução única, uma família (uma reta afim, um plano afim, ...) de soluções, ou não ter nenhuma solução ("sistema impossível"). O *sistema homogéneo correspondente* é

$$\boxed{\begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}}$$

que admite pelo menos a *solução trivial* $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

6. (soluções de um sistema linear) O sistema linear

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

é equivalente a

$$AX = B\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad L_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\,,$$

onde $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matrz dos coeficientes, $B \approx \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ e $X \approx \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ são vetores coluna, e $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a transformação linear $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = L_A(\mathbf{x})$ definida por $y_i = \sum_j a_{ij}x_j$.

O vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots .x_n) \in \mathbb{R}^n$ é solução do sistema $AX = B$ se

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

onde $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$ é a j-ésima coluna da matriz A. Portanto, o sistema admite (pelo menos) uma solução (i.e. é *possível*) sse $\mathbf{b} \in \mathrm{im}(L_A)$. A dimensão de $\mathrm{im}(L_A)$, ou seja, o número de colunas linearmente independentes de A, é dita *característica* da matriz A.

O vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é solução do sistema homogéneo $AX = 0$ se

$$\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{x} = 0\,, \quad \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{x} = 0\,, \quad \dots \quad \mathbf{a}^m \cdot \mathbf{x} = 0$$

onde $\mathbf{a}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ é a i-ésima linha da matriz A, ou seja, se é ortogonal ao espaço vetorial $\mathrm{Span}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m)$ gerado pelas linhas de A. Portanto, o espaço das soluções do sistema homogéneo é

$$\ker(L_A) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m)^\perp \subset \mathbb{R}^n$$

e a sua dimensão é igual a $n - k$, se k é o número de linhas linearmente independentes de A. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ são duas soluções do sistema $AX = B$, então a diferença $\mathbf{x}'' = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ é solução do sistema homogéneo $AX = 0$. Portanto, se $\mathbf{z}$ é uma das soluções do sistema linear possível $AX = B$, então o espaço d(e todas)as soluções é o subespaço afim

$$\mathbf{z} + \ker(L_A) \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Em particular, a caraterística da matriz A é também igual ao número de linhas linearmente independentes de A.

Se $AX = B$ é um sistema de n equações com n incógnitas, e se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível (que representa um automorfismo de $\mathbb{R}^n$), então o sistema admite uma solução única dada por $X = A^{-1}B$ para cada $B \in \mathbb{R}^n$. De fato, ao multiplicar à direita por A^{-1}, temos que

$$AX = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A^{-1}A\,X = A^{-1}B \qquad \Leftrightarrow \qquad X = A^{-1}B.$$

- Estude os seguintes sistemas (ou seja, diga se são possíveis e, caso afirmativo, determine o espaço das soluções)

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x + y & = -1 \\ x - y & = 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x + y & = 11 \\ x - y & = 33 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x - 3y & = -1 \\ -6x + 9y & = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x + y - z & = 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x - 5y + 4z & = -3 \\ x - 2y + z & = 5 \\ x - 4y + 6z & = 10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} 3x + y - 10z & = 1 \\ -2x - 5y + 7z & = 2 \\ x + 3y - z & = 0 \end{array}\right.$$

- [Ap69] **16.20**.

7. (eliminação de Gauß-Jordan) Considere o sistema linear $AX = B$, com matriz dos coeficientes $A = (A_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, e $B \approx \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ e $X \approx \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vetores coluna, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

O *método de eliminação de Gauss-Jordan* consiste em efectuar as operações elementares (sobre as linhas da matriz ampliada $(A|B) \in \mathrm{Mat}_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$)

i) trocar a ordem das equações,

ii) multiplicar (todos os termos de) uma equação por um escalar não nulo $\lambda \neq 0$,

iii) somar a uma equação um múltiplo de outra equação,

até obter um sistema equivalente $A'X = B'$ com A' "matriz em escada", ou seja, da forma

$$\boxed{\begin{pmatrix} \star & * & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & \star & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & \star & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

onde os "pivots" $\star$ são números diferentes de zero. A caraterística da matriz A é então igual ao número de linhas não nulas da matriz escada equivalente.

- Usando operações elementares sobre as linhas, transforme a matriz A dada numa matriz em escada e calcule a caraterística de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Resolva os seguintes sistemas lineares usando o método de eliminação de Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x + 2y + z & = 1 \\ 5x + 3y + 3z & = 2 \\ -x + y + z & = -1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} 3x + 2y + z & = 1 \\ 2x - 6y + 4z & = 3 \\ x + y + z & = -2 \\ 2x - 5y + 5z & = -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x + y + 4z & = 2 \\ 6x + y & = -10 \\ -x + 2y - 10z & = -4 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} y + z & = 1 \\ x + 2y - z & = 3 \\ x + y + z & = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + 3z + 4w & = 3 \\ 5z + 6w & = 0 \\ z + 3w & = 1 \\ x - y + 8w & = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} -x + y - z & = 1 \\ x + 3z & = -3 \\ y - z & = 0 \end{array} \right.$$

- [Ap69] **16.20**.

8. (exemplos) Dê exemplos de

- um sistema de 2 equações lineares com 2 incógnitas com solução única,
- um sistema de 2 equações lineares com 2 incógnitas sem nenhuma solução,
- um sistema de 3 equações lineares com 3 incógnitas tal que o espaço das soluções seja uma reta afim.
- um sistema de 3 equações lineares com 3 incógnitas com solução única,
- um sistema de 2 equações lineares com 3 incógnitas tal que o espaço das soluções seja um plano afim.
- um sistema de 2 equações lineares com 3 incógnitas tal que o espaço das soluções seja um subespaço vetorial de dimensão 1.

5 Determinantes e volumes

1. (determinante e área) O *determinante* da matriz 2×2 cujas colunas são as componentes dos vetores $\mathbf{r} = (a, b)$ e $\mathbf{r}' = (c, d)$ de $\mathbb{R}^2$ é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} := ad - bc}$$

O *paralelogramo* de lados $\mathbf{r} = (a, b)$ e $\mathbf{r}' = (c, d)$ de $\mathbb{R}^2$ é o conjunto

$$P = \{t\mathbf{x} + s\mathbf{y} \quad \text{com } 0 \leq t, s \leq 1\} .$$

A sua área é igual ao módulo do determinante da matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$, i.e.

$$\boxed{\text{Área}\,(P) = \left|\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|}$$

Os vetores (a, b) e (c, d) são independentes sse $\left|\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right| \neq 0$

- Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $(0, 1)$ e $(1, 1)$, e do paralelogramo definido pelos vetores $(5, -2)$ e $(-3, 1)$.
- Calcule a área do triângulo de vértices $(3, 2)$, $(6, -4)$ e $(8, 8)$.
- Diga se os vetores $(-1, 4)$ e $(3, -12)$ são independentes.
- Diga se os vetores $(5, 7)$ e $(2, 9)$ são independentes.

2. (produto vetorial/externo) O *produto vetorial/externo* no espaço $\mathbb{R}^3$ (munido da orientação definida pela base canónica $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) é a operação $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\boxed{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \mapsto \mathbf{r} \times \mathbf{r}' := (yz' - zy' \,,\, -xz' + zx' \,,\, xy' - yx')}$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. Uma representação formal do produto vetorial é

$$\boxed{\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \text{“}\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}\text{”} := \mathbf{i} \det \begin{pmatrix} y & z \\ y' & z' \end{pmatrix} - \mathbf{j} \det \begin{pmatrix} x & z \\ x' & z' \end{pmatrix} + \mathbf{k} \det \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}}$$

O produto vetorial é distributivo sobre a adição e compatível com a multiplicação escalar, ou seja, é bilinear, i.e.

$$(\lambda\mathbf{r} + \mu\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'' = \lambda(\mathbf{r} \times \mathbf{r}'') + \mu(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')$$
$$\mathbf{r} \times (\lambda\mathbf{r}' + \mu\mathbf{r}'') = \lambda(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') + \mu(\mathbf{r} \times \mathbf{r}'')$$

e “anti-comutativo”, i.e.

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = -\mathbf{r}' \times \mathbf{r}$$

O produto vetorial satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$\boxed{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}}$$

e a *identidade de Lagrange*

$$\boxed{\|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 \|\mathbf{r}'\|^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}$$

O produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \mathbf{0}$ sse $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ são dependentes (basta usar a identidade de Lagrange e a desigualdade de Schwarz). O vetor $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ é ortogonal ao subespaço vetorial $\mathbb{R}\mathbf{r} + \mathbb{R}\mathbf{r}'$ gerado por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ (basta verificar que $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')$ e $\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')$ ...). A norma do produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ é

$$\boxed{\|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'\| = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{r}'\| \, |\sin\theta|}$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ (basta usar a identidade de Lagrange e a definição de θ). Portanto, o comprimento do produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ é a área do paralelogramo $\{t\mathbf{r} + s\mathbf{r}' \quad \text{com } 0 \leq t, s \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ definido pelos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$.

- Calcule os produtos vetoriais entre os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ e $\mathbf{k} = (0,0,1)$, e verifique que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

- O produto vetorial não é associativo! Por exemplo, $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$.
- Calcule $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ quando

$$\mathbf{r} = (1,-1,1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}' = (2,-2,2)$$

$$\mathbf{r} = (-2,-1,3) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}' = (\pi,-\pi,0)$$
$$\mathbf{r} = (3,-2,8) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}' = (1,1,1)$$
$$\mathbf{r} = (-\pi,e,10) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}' = (7,5,3)$$

- $\|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'\| = \|\mathbf{r}\|\|\mathbf{r}'\|$ sse $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ são ortogonais.
- Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $(2,4,-1)$ e $(1,-3,1)$.
- Calcule a área do triângulo de vértices $(1,2,0)$, $(2,3,4)$ e $(-1,0,0)$.
- [Ap69] **13.11**.

3. (produto vetorial e vetor normal) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$, então $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é um vetor não nulo ortogonal ao plano $\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v}$. Em particular, o plano gerado pelos vetores linearmente independentes $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ no espaço $\mathbb{R}^3$ é

$$\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^{\perp} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0\}$$

- Determine um vetor normal aos vetores $(2,3,-1)$ e $(5,2,4)$.
- Determine um vetor normal ao plano que passa pelos pontos $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ e $(0,2,3)$
- Determine uma equação cartesiana do plano

$$\text{gerado pelos vetores } (-3,1,2) \text{ e } (1,5,-2)$$

$$\text{que passa pelos pontos } (0,0,0)\,,\ (1,0,0) \text{ e } (0,1,0)$$
$$\{(1+t+s, t-s, 5t) \quad \text{com} \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2\}$$

- [Ap69] **13.11**.

4. (momento angular e torque) O *momento angular* (relativo à origem do referencial) de uma partícula de massa $m > 0$ colocada na posição $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ com momento linear $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, é o produto vetorial

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

- Verifique que a derivada do momento angular de uma partícula sujeita à lei de Newton $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ é igual ao *binário* (ou *torque*) $\mathbf{T} := \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, ou seja,

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}\,.$$

- O momento linear do sistema de n partículas de massas m_i, colocadas nas posições $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ com momentos lineares $\mathbf{p}_i := m_i\dot{\mathbf{r}}_i$, com $i = 1,2,\dots,n$, é

$$\mathbf{L} := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

Sejam $\mathbf{R} := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i$, com $M := \sum_{i=1}^{n} m_i$, o centro de massa do sistema, e $\mathbf{P} := M\dot{\mathbf{R}} = M\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{r}}_i$ o momento linear do centro de massa. Mostre que

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \, + \mathbf{L}'$$

onde $\mathbf{L}' := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$, com $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$, é o momento angular relativo ao centro de massa.

5. (força magnética) A *força de Lorentz* que experimenta uma partícula com carga eléctrica q e velocidade $\mathbf{v}$ num campo elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ é (nas unidades do S.I.)

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

   - Mostre que num referencial inercial em que o campo elétrico é nulo, i.e. $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, e portanto a única força é força magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, a energia cinética é conservada, calculando

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2\right) = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}$$

     e utilizando a equação de Newton $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$.

6. (produto misto, determinante e volume) O *produto misto* dos vetores $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}''$ de $\mathbb{R}^3$ é o escalar $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')$, igual ao *determinante* da matriz 3×3 cujas linhas são as coordenadas dos três vetores, i.e.

$$\boxed{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} := x \det \begin{pmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{pmatrix} - y \det \begin{pmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{pmatrix} + z \det \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}}$$

O produto misto dos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ é igual a

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\| \sin(\theta)\cos(\phi)$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, e ϕ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
O *paralelepípedo* de lados $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ de $\mathbb{R}^3$ é o conjunto $P = \{t\mathbf{a} + s\mathbf{b} + u\mathbf{c} \text{ com } 0 \leq t, s, u \leq 1\}$. O seu volume é igual ao módulo do produto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, i.e.

$$\boxed{\text{Volume}\left(\{t\mathbf{a} + s\mathbf{b} + u\mathbf{c} \text{ com } 0 \leq t, s, u \leq 1\}\right) = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = \left|\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right|}$$

   - Calcule o produto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ quando

$$\mathbf{a} = (1,1,0) \qquad \mathbf{b} = (1,3,1) \qquad \mathbf{c} = (0,1,1)$$

$$\mathbf{a} = (-2,5,1) \qquad \mathbf{b} = (0,3,0) \qquad \mathbf{c} = (6,7,-3)$$

   - [Ap69] **13.14**.
   - Calcule o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{k} + \mathbf{i}$.
   - Calcule o volume do paralelepípedo de lados

$$(3,3,1) \qquad (2,1,2) \qquad (5,1,1)$$

$$(0,0,1) \qquad (5,7,-3) \qquad (-9,0,0)$$

7. (n-formas e volumes de paralelepípedos) Existe uma única n-forma $D : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n \mapsto F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n)$$

multilinear (ou seja, homogénea e aditiva em cada variável), alternada (ou seja, tal que $D(\ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v} \ldots) = 0$, e portanto $D(\ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w} \ldots) = -D(\ldots, \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v} \ldots)$) e tal que $D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$. O *paralelepípedo* de lados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_n$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$P = \{t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n \text{ com } t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$$

O *volume (n-dimensional)* do paralelepípedo de lados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_n$ é

$$\text{vol}(P) = |D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n)|$$

- Mostre que se $F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ é bilinear e $F(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ para todo o $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, então F é anti-simétrica, ou seja, $F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = -F(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$.
- Calcule o volume do paralelogramo de lados $(2, -1)$ e $(3, 5)$ em $\mathbb{R}^2$.
- Calcule o volume do paralelepípedo de lados $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ e $(0, 0, 5)$ em $\mathbb{R}^3$.

8. (determinante) Existe uma única função *determinante* $\det : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$A \mapsto \det A$$

(outra notação é $\det A = |A|$) que é uma forma multilinear alternada nas colunas/linhas, e tal que $\det \mathbf{1}_n = |\mathbf{1}_n| = 1$. Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são as colunas de $A = (a_{ij})$ então $\det A := D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Uma fórmula para o determinante é

$$\boxed{\det A = \textstyle\sum_{\sigma \in \mathrm{Per}_n} \pi(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$$

onde $\pi(\sigma)$ é a paridade da permutação σ.

O determinante de uma matriz 2×2 é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

O determinante de uma matriz 3×3 é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}$$

O determinante de uma matriz diagonal é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}$$

Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

- Calcule o determinante das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Mostre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

- Calcule o determinante de $2A$ e $-A$ sabendo que A é uma matriz 5×5 com determinante $\det A = -3$.
- Verifique que uma equação cartesiana da reta que passa pelos pontos (a, b) e (c, d) de $\mathbb{R}^2$ é

$$\det \begin{pmatrix} x-a & y-b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{pmatrix} = 0$$

- [Ap69] **3.6**.

9. (determinante, produtos e transposta) Se $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então

$$\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B) \qquad \text{e} \qquad \det A^t = \det A}$$

Em particular, se A é regular então $\det A \neq 0$ e

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}}$$

Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$, então o determinante da matriz "diagonal por blocos" $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{(n+m)\times(n+m)}(\mathbb{R})$ é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = (\det A)(\det B)}$$

- Verdadeiro ou falso? Dê uma demonstração ou um contra-exemplo.

$$\det(A+B) = \det A + \det B \quad ?$$

$$\det\left((A+B)^2\right) = \left(\det(A+B)\right)^2 \quad ?$$

$$\det\left(A^n\right) = \left(\det A\right)^n \quad ?$$

- Uma matriz quadrada A é dita *ortogonal* se $A^tA = AA^t = \mathbf{1}$ (ou seja, se é invertível e a sua inversa é A^t). Mostre que o determinate de uma matriz ortogonal é ± 1.
- [Ap69] **3.11**.

10. (cálculo do determinante pelo método de Gauss-Jordan) O determinante de uma matriz diagonal superior é

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}$$

Portanto, é possível calcular um determinante transformando uma matriz genérica numa matriz diagonal superior e observando que as operações têm efeitos simples no determinante (trocar a ordem das linhas ou somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha não muda o determinante, em quanto multiplicar uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$ transforma $\det A$ em $\lambda \det A$). .

- Use o método de eliminação de Gauss-Jordan para calcular o determinante das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

11. (menores, complemento algébrico e fórmula de Laplace) Seja $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$. O *menor-ij* de A é a matriz $A_{ij} \in \mathrm{Mat}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ obtida da matriz A suprimindo a linha i e a coluna j. O *complemento algébrico* do elemento a_{ij} de A é o número não lecionado

$$\boxed{\mathrm{Cal}\, a_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}}$$

A *matriz dos complementos algébricos* (ou *dos cofactores*) de A é a matriz $\mathrm{Cal}\, A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cujo elemento ij é $\mathrm{Cal}\, a_{ij}$, ou seja

$$\boxed{\mathrm{Cal}\, A = (\mathrm{Cal}\, a_{ij})}$$

O desenvolvimento do determinante $\det A$ em função dos elementos da linha i é

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathrm{Cal}\, a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}}$$

- Calcule a matriz dos complementos algébricos das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcule o determinante das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

12. (determinante e matrizes invertíveis) Se $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com $n \geq 2$, então não lecionado

$$\boxed{A\,(\mathrm{Cal}A)^t = (\det A)\,\mathbf{1}}$$

Se $\det A \neq 0$ então a matriz A é invertível/regular e a sua inversa é dada por

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(\mathrm{Cal}A)^t}$$

Em particular, uma matriz quadrada A é regular/invertível sse $\det A \neq 0$.

- Calcule a inversa das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

- Determine os valores de λ para os quais $\lambda\mathbf{1} - A$ é singular, quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 8 \\ 19 & -3 & 14 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- [Ap69] **3.17**.

13. (regra de Cramer) Resolver o sistema de três equações lineares não lecionado

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{cases} \qquad \text{ou seja} \qquad x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

nas três incógnitas x, y e z, significa representar o vetor $D = (d_1, d_2, d_3)$ como combinação linear

$$xA + yB + zC = D$$

dos vetores $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$ com coeficientes x, y e z. Ao multiplicar esta representação por $B \times C$, ou por $C \times A$, ou por $A \times B$, resulta que

$$x\,A\cdot(B\times C) = D\cdot(B\times C)\,,$$
$$y\,B\cdot(C\times A) = D\cdot(C\times A)\,,$$
$$z\,C\cdot(A\times B) = D\cdot(A\times B)\,.$$

Portanto, se o produto misto $A\cdot(B\times D)\neq 0$ (i.e. se o determinante da matriz 3×3 cujas colunas são os vetores A, B e C é diferente de zero, ou seja, se os três vetores são independentes), então o sistema admite una única solução (x, y, z), dada pela *regra de Cramer*:

$$\boxed{x=\frac{D\cdot(B\times C)}{A\cdot(B\times C)}\,, \qquad y=\frac{C\cdot(D\times A)}{A\cdot(B\times C)}\,, \qquad z=\frac{A\cdot(B\times D)}{A\cdot(B\times C)}}$$

Observe que o denominador é o determinante da matriz 3×3 cujas colunas são os vetores A, B e C, e o numerador da i-ésima coordenada é obtido ao substituir, nesta matriz, a i-ésima coluna com o vetor D.

Seja $AX = B$ um sistema linear de n equações com n incógnitas. Se a matriz dos coeficientes $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível, então o sistema admite uma única solução $X = A^{-1}B$, ou seja,

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}(\mathrm{Cal}A)^t\, B$$

que pode escrever-se na forma

$$\boxed{x_i = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} b_j\, \mathrm{Cal}\, a_{ji}}$$

Se C_i é a matriz obtida de A pela substituição da coluna i pelo vetor coluna B, então as coordenadas da solução do sistema $AX = B$ são

$$\boxed{x_i = \frac{\det C_i}{\det A}}$$

- Resolva os sistemas

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 6\\ 2x+y+3z & = & 9\\ 3x-y-5z & = & -17\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x+2y-3z & = & 4\\ 2x-3y+z & = & 1\\ 3x-y-2z & = & 5\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x+2y+z & =1\\ 5x+3y+3z & =2\\ -x+y+z & =-1\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} 3x+2y+z & =1\\ 2x-6y+4z & =3\\ x+y+z & =-2\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+y & =-6\\ -x+2y+4z & =1\\ -x+z & =3\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} 3x+y+z & =0\\ 2x-y+3z & =1\\ x+y+z & =1\end{array}\right.$$

6 Valores e vetores próprios

1. (valores e vetores próprios) Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear definida por $X \mapsto AX$, onde X denota o vetor coluna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

e A é uma matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \, ,$$

Um *valor próprio* (ou *autovalor*) de L é um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, dito *vetor próprio* (ou *autovetor*) (associado ao valor próprio λ), tal que $L(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, ou seja,

$$\boxed{AV = \lambda V \, .}$$

se V denota o vetor coluna

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

O conjunto $\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } L(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, dito *subespaço próprio* associado ao valor próprio λ. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são vetores próprios e se os correspondentes valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são dois a dois distintos, entaõ os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são linearmente independentes. Se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear invertível, e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor próprio de L com valor próprio λ (necessariamente $\neq 0$, pois $\ker(L)$ é vazio), então $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de L^{-1} com valor próprio λ^{-1}.

- Determine valores e vetores próprios da homotetia $H_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, defínda por $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à reta $y = x$.
- Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua projeção sobre a reta $y = -x$.
- Determine os valores do ângulo θ para os quais a rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

  $$(x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \, ,$$

  admite vetores próprios.
- Determine os valores e os vetores próprios das transformações

  $$L(x, y) = (x/2, 3y) \qquad L(x, y) = (-y, x) \qquad L(x, y) = (x, x + y)$$

  $$L(x, y, z) = (0, y, -z) \qquad L(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$$

- [Ap69] **4.4.**

2. (polinómio caraterístico) O *polinómio caraterístico* da matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é

$$\boxed{P_A(t) := \det(t\mathbf{1}_n - A)}$$

O escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio da matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (ou da transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $X \mapsto AX$, onde X denota o vetor coluna $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) sse a matriz $\lambda \mathbf{1}_n - A$ é singular, ou seja, sse λ é uma raiz do polinómio característico $P_A(t)$, ou seja, sse

$$\det(\lambda \mathbf{1}_n - A) = 0$$

O espaço próprio associado ao valor próprio λ é $\mathbf{V}_\lambda = \ker(\lambda \mathbf{1}_n - A)$. Se o polinómio caraterístico da matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ admite n raizes (complexas) distintas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, então

$$P_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n) .$$

Em particular, $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ e $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, assim que

$$P_A(t) = t^n - (\mathrm{tr}A)\, t^{n-1} + \cdots + (-1)^n (\det A)$$

- Verifique que $P_A(0) = \det A$.
- Determine valores e vetores próprios das transformações lineares definidas pela seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- [Ap69] **4.10**.

3. (mudança de bases/coordenadas) Sejam $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ e $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$ duas bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Então existe uma matriz invertível $U = (u_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com inversa $U^{-1} = (v_{ij})$, tal que não lecionado

$$\mathbf{c}_j = \sum_i u_{ij}\, \mathbf{b}_i \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b}_j = \sum_i v_{ij}\, \mathbf{c}_i \, .$$

Se x_i são as coordenadas do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ relativamente à base $\mathcal{B}$, então as coordenadas do vetor $\mathbf{x}$ relativamente à base $\mathcal{C}$ são

$$\boxed{x'_i = \textstyle\sum_k v_{ij}\, x_j \qquad \text{ou seja} \qquad x_i = \sum_j u_{ij}\, x'_j}$$

pois $\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{b}_j = \sum_{j,i} v_{ij} x_j \mathbf{c}_i$.

A matriz U é a matriz que realiza a mudança de coordenadas. Por exemplo, se $\mathcal{B}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$, então as colunas da matriz U são os vetores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ da base $\mathcal{C}$.

Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz da transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ relativamente à base $\mathcal{B}$, então a matriz da transformação L relativamente à base $\mathcal{C}$ e é

$$\boxed{A' = U^{-1} A U}$$

De fato, se $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ tem coordenadas $y_i = \sum_j a_{ij}\, x_j$, então $y'_i = \sum_k v_{ik}\, y_k = \sum_{k,\ell} v_{ik}\, a_{k\ell}\, x_\ell = \sum_{k,\ell,j} v_{ik}\, a_{k\ell}\, u_{\ell j}\, x'_j$.

- Mostre que $\sum_i v_{ji} u_{ik} = \delta_{jk}$ e $\sum_j u_{ij} v_{jk} = \delta_{ik}$.
- Verifique que se $A' = U^{-1} A U$ então $A = U A' U^{-1}$.

- Determine a matriz de $L(x, y) = (3x, 2y)$ relativamente à base $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.
- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão em relação à reta $y = x$. Determine a matriz de T relativamente à base canónica e relativamente à base $(1, 1)$ e $(1, -1)$.
- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão em relação à reta $y = 3x$. Determine a matriz de T relativamente à base canónica.
- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projecção sobre a reta $x + y = 0$. Determine a matriz de T relativamente à base canónica.

4. (matrizes semelhantes e diagonalização) As matrizes quadradas $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são ditas *semelhantes* se existe uma matriz invertível $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que não lecionado

$$B = U^{-1} A U\,.$$

Se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$. Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico, e portanto os mesmos valores próprios.

A matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é *diagonalizável* se é semelhante a uma matriz diagonal. Se a matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ admite n vetores próprios linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respetivamente (não necessariamente distintos), e se $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é matriz (invertível) cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$, então $U^{-1}AU$ é a matriz diagonal $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- As matrizes
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
são semelhantes?
- Diagonalize as seguintes matrizes, ou mostre que não é possível.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7 Sucessões e limites

1. (sucessões) Uma *sucessão/sequência* com valores reais é uma coleção $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de números reais $x_n \in \mathbb{R}$, indexada (portanto ordenada)

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \qquad \dots \qquad x_n \qquad \dots$$

por um número inteiro não negativo $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Podemos pensar que n é o "tempo", e que o n-ésimo termo x_n é o valor de um "observável" (algo que pode ser observado, i.e. medido) x no instante n. É também possível definir sucessões com valores num conjunto arbitrário X, por exemplo o espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$.

Uma sucessão com valores em X é uma funão $x : \mathbb{N}_0 \to X$. Pode ser definida usando uma lei recursiva

$$x_{n+1} = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

que determina o valor x_{n+1} dados os valores (passados) x_0, x_1, $\dots$, x_n.

- Conjeture os termos seguintes, e, se possível, uma lei que os define, das sucessões

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots \qquad 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots \qquad 1, 4, 9, 16, 25, \dots \qquad 1, 5, 12, 22, 35, 51, \dots$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \qquad 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$$

2. (sucessão aritmética) A *sucessão aritmética*

$$x_n = a + nb$$

pode ser definida usando a lei recursiva $x_{n+1} = x_n + b$, com termo inicial $x_0 = a$.

- Mostre que o n-ésimo termo x_n de uma sucessão aritmética é a média aritmética $(x_{n+1} + x_{n-1})/2$ dos termos vizinhos.

3. (limites) A sucessão real (x_n) *converge* para o *limite* $a \in \mathbb{R}$, notação $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ou simplesmente $x_n \to a$ (quando $n \to \infty$), se para cada "precisão" $\varepsilon > 0$ existe um "tempo" $\overline{n}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ para todos os tempos $n \geq \overline{n}$. Isto significa que os valores x_n estão numa vizinhança arbitrariamente pequena de a desde que o tempo n seja suficientemente grande. O fato fundamental sobre os limites na reta real $\mathbb{R}$ é que sucessões monótonas (crescentes ou decrescentes, i.e. tais que $x_{n+1} \geq x_n$ ou tais que $x_{n+1} \leq x_n$, para todos os n, respetivamente) e limitadas (i.e. tais que $|x_n| \leq M$ para algum $M > 0$ e todos os n) admitem limite. É útil usar a notação $x_n \to \pm\infty$ para dizer que dado $K > 0$ arbitrário (grande) é possível encontrar um tempo $\overline{n}$ tal que $\pm x_n > K$ para todos os tempos $n \geq \overline{n}$. O limite de uma sucessão, se existe, é único. Naturalmente, há sucessões que não admitem limite, como por exemplo sucessões que oscilam entre dois valores distintos.

Os limites satisfazem as regras algébricas

$$\boxed{x_n \to a \text{ e } y_n \to b \quad \Rightarrow \quad \lambda x_n + y_n \to \lambda a + b \quad x_n \cdot y_n \to ab \quad x_n/y_n \to a/b \quad (\text{se } b \neq 0)}$$

Também

$$\boxed{y_n \leq x_n \leq z_n \quad \text{e} \quad y_n \to a\,, \quad z_n \to a \qquad \Rightarrow \qquad x_n \to a}$$

Em particular,

$$\boxed{x_n \to 0 \quad \text{e} \quad |y_n| \leq M \quad \Rightarrow \quad x_n \cdot y_n \to 0}$$

- Calcule o limite quando $n \to \infty$ das seguintes sucessões ou mostre que não existe

$$\frac{1}{n} \qquad \frac{(-1)^n}{n} \qquad (-1)^n \qquad 2^{-n} \qquad 3^n \qquad (-2)^n$$

$$\frac{10n^2+11}{n^3+n} \qquad \frac{n+1}{7n-3} \qquad \frac{9n^6-n^3}{7n^6+10^{23}n^5-3} \qquad \frac{3n+1}{n-2}\cdot\frac{2n+1}{6n-3}$$

$$\frac{\sin(n)}{n} \qquad \frac{\sin(1/n)}{n} \qquad \frac{\sin n}{\cos n} \qquad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

4. (progressão geométrica) Uma *progressão geométrica* de "razão" λ é uma sequência

$$a \qquad a\lambda \qquad a\lambda^2 \qquad a\lambda^3 \qquad \dots \qquad a\lambda^n \qquad a\lambda^{n+1} \qquad \dots$$

obtida do termo inicial $x_0 = a$ usando a recursão

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

O parâmetro λ (real ou complexo) é chamado *razão*, sendo o quociente x_{n+1}/x_n entre dois termos sucessivos. A sucessão geométrica converge para 0 se $|\lambda| < 1$, e é constante, logo convergente, se $\lambda = 1$. O seu módulo diverge, ou seja, $|\lambda^n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ se $|\lambda| > 1$.

- Mostre que o termo x_n da sucessão geométrica é igual a média geométrica $\sqrt{x_{n+1}x_{n-1}}$ dos seus vizinhos.

5. (séries) Uma *série* é uma soma formal infinita

$$\text{“}\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots\text{”}\,,$$

onde os $x_n \in \mathbb{R}$ são elementos de uma sucessão real (ou complexa). Se a sucessão (s_n) das *somas parciais*, definidas por $s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$, converge para algum limite $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, então dizemos que a série é *convergente*, e que a sua *soma* é

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n := s\,.$$

Uma série $\sum_n x_n$ é *absolutamente convergente* se a série $\sum_n |x_n|$ é convergente.

6. (série aritmética) As somas parciais da série aritmética $x_n = a + nb$ são

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = Na + \frac{N(N+1)}{2}b = \frac{N}{2}(x_N + x_1)\,.$$

Em particular, a série converge apenas no caso trivial em que $a = b = 0$.

7. (série geométrica/exponencial) A identidade

$$(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\dots+\lambda^n)(\lambda-1) = \lambda^{n+1}-1$$

mostra que, se $\lambda \neq 1$, a soma dos primeiros $n+1$ termos da progressão geométrica (com $a = 1$) é

$$1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\dots+\lambda^n = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}$$

Em particular, quando $|\lambda| < 1$, a *série geométrica/exponencial* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ é convergente, e a sua soma é

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}}$$

- Diga se a seguintes séries são convergentes, e, se for o caso, calcule a soma:

  $1+1/2+1/4+1/8+1/16+\ldots$ $\quad 1+10+100+1000+\ldots$ $\quad 1+1/10+1/100+1/1000+\ldots$

  $$\sum_{n=0}^{\infty}(4/5)^n \qquad 0.\overline{9} := 0.99999\cdots = 9/10+9/100+9/1000+\ldots \qquad 0.3333\ldots$$

8. (duplicação de células) As experiências mostram que a população de uma colónia de bactérias, num período de tempo em que podemos considerar ilimitado o nutrimento e desprezáveis as toxinas produzidas, duplica-se em cada hora.
   - Se a população inicial é de 1000 células, determine a população passadas 2, 3, 10 horas.
   - Quantas horas devo esperar para ver 1024 bactérias a partir de uma única célula inicial?
   - Escreva uma fórmula para P_n, a população no tempo n horas, dada uma população inicial P_0.

9. (invenção do xadrez). Dizem que Sissa inventou o jogo do xadrez e o ofreceu ao rei de Pérsia. Ao rei, que o convidou a escolher uma recompensa, pediu um grão de arroz para o primeiro quadrado do tabuleiro, o dobro, ou seja, dois grãos, para o segundo quadrado, o dobro, ou seja, quatro grãos, pelo terceiro quadrado, e assim a seguir até o último dos quadrados do tabuleiro.
   - Se 1 Kg de arroz contém à volta de 30000 grãos, quantas toneladas de arroz foram necessárias ao rei para pagar o seu jogo (a produção da República Popular da China no ano 2008 foi, segundo os dados da FAO, de 1.93×10^8 toneladas)?

10. (tempo de meia-vida) O decaimento de uma substância radioactiva pode ser caracterizado pelo "tempo de meia-vida" τ, passado o qual aproximadamente metade dos núcleos inicialmente presentes terá decaido. Portanto, se Q_n denota a quantidade de substância radioactiva presente no instante $n\tau$, , com n inteiro, então

    $$Q_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n \,.$$

    - Determine Q_n em função da quantidade inicial Q_0.
    - Determine P_n, a quantidade de producto do decaimento no instante $n\tau$.
    - Passado quanto tempo a substância radioactiva fica reduzida a $\frac{1}{32}$-ésimo da quantidade inicial?
    - Se a substância radioactiva é produzida a uma taxa constante de α núcleos cada tempo de meia-vida, então a lei recursiva para Q_n é

      $$Q_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n + \alpha$$

      Mostre que $\overline{Q} = 2\alpha$ é um equilíbrio (i.e. se $Q_0 = \overline{Q}$ então também $Q_n = \overline{Q}$ para todos os tempos n). Use a mudança de variável $X_n := Q_n - \overline{Q}$ para mostrar que $Q_n \to \overline{Q}$ quando $n \to \infty$ para toda as condições iniciais Q_0.
    - O tempo de meia-vida do radiocarbono ^{14}C é $\tau \simeq 5730$ anos. Mostre como "datar" um fóssil, sabendo que a proporção de ^{14}C num ser vivente é fixa e conhecida.[7]

11. (crescimento exponencial) O crescimento exponencial de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado com a equação recursiva

    $$P_{n+1} = \lambda P_n$$

    onde P_n representa a população no tempo n, dada uma certa população inicial P_0.

    - Interprete o parâmetro λ imaginando que em cada unidade de tempo o incremento $P_{n+1} - P_n$ da população é a soma de uma parcela αP_n, onde $\alpha > 0$ é um coeficiênte de fertilidade, e uma parcela $-\beta P_n$, onde $\beta > 0$ é um coeficiênte de mortalidade.
    - Discuta o comportamento das soluções da equação recursiva ao variar o parâmetro λ.

[7] J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

12. (sequência de Fibonacci) Considere o seguinte problema, posto por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci, ou seja, "filius Bonacci")[8]:

> *Quot paria cuniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.*
> *Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum nativitate germinant.*

Ou seja, quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês? Se F_n o número de pares de coelhos no n-ésimo mês, então

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \, .$$

Esta é uma "lei" que prescreve recursivamente os valores dos F_n dados uns valores iniciais F_0 e F_1.

- Responda ao problema de Fibonacci, ou seja, determine F_{12}, sabendo que $F_0 = 1$ e $F_1 = 2$.
- Escreva um programa para calcular recursivamente os "números de Fibonacci" F_n.
- Seja $Q_n = F_{n+1}/F_n$ o quociente entre sucessivos números de Fibonacci. Mostre que os quocientes satisfazem a equação recursiva

$$Q_{n+1} = 1 + \frac{1}{Q_n}$$

- Assuma que, para grande valores de n, os quocientes são praticamente constantes, ou seja, que $Q_n \to \Phi$ se $n \to \infty$. Utilize a a equação recursiva para mostrar que

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.61803398874989...$$

- Mostre que o resultado anterior implica a lei assimptótica $F_{n+1} \simeq \Phi F_n$. Reconhece-a?

13. (crescimento com recolha ou adição) A uma população que cresce segundo o modelo exponencial, é adicionada ou retirada uma certa quantidade β em cada unidade de tempo. O modelo é portanto

$$P_{n+1} = \lambda P_n + \beta$$

onde β é um parâmetro positivo ou negativo.

- Determine soluções estacionárias, ou seja, que não dependem do tempo n.
- Determine a solução com condição inicial P_0 arbitrária.
- Para quais valores dos parâmetros λ e β as soluções P_n convergem para a solução estacionária quando o tempo $n \to \infty$?

[8]Leonardo Pisano, *Liber Abaci*, 1202.

8 Funções e continuidade

1. (funções) Uma *função* é uma "lei" $f : X \to Y$, notação

$$x \mapsto y = f(x)\,,$$

que faz corresponder a cada elemento x do *domínio* X um (único) elemento $f(x)$ do *conjunto de chegada* Y. O elemento $y = f(x) \in Y$ é dito *imagem* de $x \in X$. A *imagem* do subconjunto $A \subset X$ é o conjunto $f(A) := \{f(a) \text{ com } a \in A\} \subset Y$. Em particular, a *imagem/contradomínio* da função $f : X \to Y$ é o conjunto $f(X) := \{f(x) \text{ com } x \in X\} \subset Y$ dos valores da função. O *gráfico* da função $f : X \to Y$ é o subconjunto

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.q. } y = f(x)\} \subset X \times Y$$

do produto cartesiano do domínio e o conjunto de chegada. A função *identidade* $\mathbf{1}_X : X \to X$ é definida por $\mathbf{1}_X(x) = x$, e o seu gráfico é a *diagonal* $\{(x, x) \text{ com } x \in X\} \subset X \times X$.

A *restrição* da função $f : X \to Y$ ao subconjunto $A \subset X$ é a função $f|_A : A \to Y$ definida por $f|_A(a) := f(a)$.

A *composição* das funções $f : X \to Y$ e $g : f(X) \subset Y \to Z$ é a função $g \circ f : X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, ou seja,

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$$

Uma função $f : X \to Y$ é *injetiva* se $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$, e portato a imagem $f(X)$ é uma "cópia" de X. Uma função $f : X \to Y$ é *sobrejetiva* se todo $y \in Y$ é imagem $y = f(x)$ de algum $x \in X$, ou seja, se $Y = f(X)$. Uma função $f : X \to Y$ é *bijetiva/invertível* se é injetiva e sobrejetiva, e portanto admite uma função *inversa* $f^{-1} : Y \to X$, que verifica $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todos os $x \in X$ e $y \in Y$.

   - Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $n \mapsto 2n$. Determine a sua imagem $P := f(\mathbb{N})$. Determine a restrição $g := f|_I : I \to \mathbb{Z}$ de f ao subconjunto $I := \{1, 3, 5, 7, \dots\} \subset \mathbb{N}$ dos números ímpares, e a sua imagem $g(I)$. A função $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ é invertível?
   - É verdade que $f \circ g$ é sempre igual a $g \circ f$? Nunca?

2. (plano cartesiano, funções reais de uma variável real, gráficos e curvas) O *plano cartesiano* $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y), com $x, y \in \mathbb{R}$. Se $x \mapsto y = f(x)$ é uma função real de uma variável real, definida num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, então o seu gráfico $\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \text{ t.q. } y = f(x)\}$ é uma "curva" no plano cartesiano x-y. A função é *crescente* se $x < x'$ implica $f(x) < f(x')$, e *decrescente* se $x < x'$ implica $f(x) > f(x')$. Nos dois casos, é dita *monótona*. Uma função monótona é invertível.

   - Esboce os gráficos de

$$3 \qquad -3x \qquad |x| \qquad x-2 \qquad |x-1| \qquad |3x+5| \qquad |x-1|-|x-2|$$

3. (relações lineares) A relação mais simples entre dois observáveis, x e y, é uma proporcionalidade $y \propto x$, ou seja, uma lei linear

$$y = \lambda x$$

Apenas mais geral, uma relação linear (ou melhor, "afim")

$$y = \lambda x + \alpha$$

O gráfico de $f(x) = \lambda x + \alpha$ é uma reta: o parâmetro λ é o *declive* da reta (o quociente $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, onde $x_1 \neq x_2$ e $y_i = \lambda x_i - \alpha$), e o parâmetro α é o valor de y quando $x = 0$, ou seja, a interseção da reta com o eixo dos y. Em forma implícita, uma relação linear é dada pela lei

$$ax + by = c\,,$$

que é a equação cartesiana de uma reta no plano x-y.

- Mostre que a mudança de variável (independente) $x' = ax+b$ transforma a lei $y = \lambda x+\alpha$ numa lei $y = \lambda' x' + \alpha'$, e calcule os novos parâmetros λ' e α'.
- Mostre que a mudança de variável (dependente) $y' = ax+b$ transforma a lei $y = \lambda x+\alpha$ numa lei $y' = \lambda' x + \alpha'$, e calcule os novos parâmetros λ' e α'.
- Determine a relação linear entre x e y sabendo que $y(3) = 2$ e $y(1) = 5$.

4. (lei de Hubble) As galaxias afastam-se com umas velocidades que depende das distâncias segundo a *lei de Hubble*[9]

$$v = H \cdot d$$

Uma estimação recente da *constante de Hubble* é $H = 73.8 \pm 2.4$ (km/s)/Mpc.

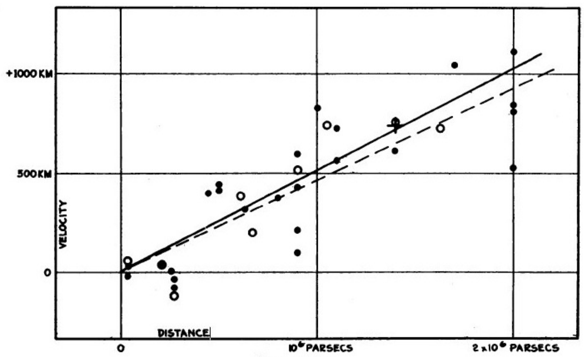


FIGURE 1
Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

Picture from the original paper by Hubble.

5. (graus Celsius, Fahrenheit e Kelvin) A temperatura pode ser medida em graus Celsius (C), Fahrenheit (F) e Kelvin (K), e

$$F = 1.8 \cdot C + 32 \qquad K = (F + 459.67)/1.8$$

- Determine a relação entre graus Kelvin e Celsius, e a relação entre um grau Kelvin e um grau Fahrenheit.
- Determine os graus Celsius da radiação cósmica, estimada ser de $3K$.

6. (potências e polinómios) Um polinómio de *grau* n é uma combinação linear

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de potências inteiras e não-negativas de x, com "coeficientes" $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, e $a_n \neq 0$. Um polinómio de grau $n \geq 1$ com raizes $z_1, z_2, \ldots z_n$ é proporcional ao polinómio "mónico"

$$(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n) = x^n - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)x^{n-1} + \cdots + (z_1 z_2 \ldots z_n)$$

Um polinómio de grau n admite n raizes complexas (que podem coincidir), mas, em geral, um número $k \leq n$ de raizes reais (que pode ser zero!).

- Esboce os gráficos de

$$x^2 \qquad (x+1)^2 \qquad x^2 - 1 \qquad x^3 \qquad \sqrt{x} \qquad x^{2/3} \qquad x^{3/2} \qquad x \pm x^3$$

- Dê exemplos de polinómios com raizes 1, 2 e 3.
- Dê exemplos de polinómios sem raizes reais.

[9] E. Hubble, A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae, *Proc. N.A.S.* **15** (1929), 168-173.

7. (ciclos e funções periódicas) Muitos fenómenos naturais são periódicos, ou “quase-periódicos”. Uma função $f(t)$ é *periódica* se
$$f(t+T) = f(t)$$
para todos os “tempos” t e para algum $T > 0$ minimal chamado *período* (da função f). O parâmetro $\omega := 1/T$ é a *frequência* do fenómeno modelado pela função f.

   - Sabendo que a função $f(t)$ tem período 3 e a função $g(t)$ tem período 5, determine o período das funções
$$2f(t+8)+2 \qquad f(7t) \qquad f(t)^2 \qquad g(t/9) \qquad f(t)+g(t) \qquad f(t)\cdot g(t)$$
   - Se todos os meses tivessem 30 dias, cada quantos meses teríamos uma sexta-feira dia 13?

8. (funções trigonométricas) As funções periódicas mais importante (e usando as quais é possível aproximar todas as outras funções periódicas com precisão arbitrariamente pequena) são as funções trigonométricas *seno* e *coseno*. Se θ denota o comprimento do arco entre o ponto $(1,0)$ e o ponto (x,y) da circunferência unitária $S^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2+y^2 = 1\}$ do plano cartesiano (no sentido anti-horário), então as coordenadas do ponto final são
$$\boxed{x = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = \sin\theta\,.}$$
Pelo teorema de Pitágoras,
$$\boxed{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1}$$
As funções seno e coseno são periódicas de período 2π, e limitadas no intervalo entre ± 1. Em particular, $\cos\theta = 0$ sse $\theta = \pi/2 + n\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$, e $\sin\theta = 0$ sse $\theta = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$. Seno e coseno satisfazem as fórmulas de adição
$$\boxed{\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) \mp \sin(\theta)\sin(\phi)}$$
$$\boxed{\sin(\theta \pm \phi) = \cos(\theta)\sin(\phi) \pm \sin(\theta)\cos(\phi)\,.}$$
Também útil é a função *tangente*, definida por $\tan\theta := (\sin\theta)/(\cos\theta)$, para valores de $\theta \neq \pi/2+n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$. A função $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ é crescente, e portanto admite uma função inversa, $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. A função $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ é decrescente, e portanto admite uma função inversa, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

   - Verifique que as funções $t \mapsto \sin(\omega t)$ e $t \mapsto \cos(\omega t)$ são periódicas de período $2\pi/\omega$, e portanto de frequência $\nu = \omega/(2\pi)$.
   - Esboce os gráficos de
$$\sin(\theta \pm \pi/2) \qquad \cos(\theta) + 0.1\cdot\cos(10\,\theta) \qquad \sin(\theta)\cdot\sin(10\,\theta) \qquad \theta\cdot\sin\theta$$
   - Verifique que
$$(\cos\theta)^2 = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad (\sin\theta)^2 = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$
   - Calcule
$$\sin(\arcsin(-1/2)) \qquad \arcsin(\sin(7\pi/6)) \qquad \cos(\arccos(\sqrt{3}/2)) \qquad \arccos(\cos(-\pi/3))$$

9. (exponenciais e logaritmos) Dada uma *base* $b > 0$, é possível extender as suas potencias fracionárias $b^{(p/q)}$ a valores não racionais do expoente, e definir a função *exponencial*
$$x \mapsto b^x$$
para todos os $x \in \mathbb{R}$ (uma definição verdadeira será dada a seguir). O exponencial satisfaz
$$\boxed{b^x b^y = b^{x+y} \qquad b^{-x} = 1/b^x \qquad b^0 = 1}$$

Em particular, o exponencial é sempre positivo, i.e. $b^x > 0$. Se $b > 1$,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} b^x = \infty}$$

Se $b \neq 1$, o exponencial $x \mapsto b^x$ é uma função monótona (crescente se $b > 1$, decrescente se $0 < b < 1$). A sua função inversa (definida no domínio dos números reais positivos!) é chamada *logaritmo* de base b, e denotada por $\log_b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Assim

$$\log_b y = x \qquad \text{sse} \qquad y = b^x$$

O logaritmo de base 10 é denotado $\log := \log_{10}$. O logaritmo satisfaz as propriedades

$$\boxed{\log_b 1 = 0 \qquad \log_b xy = \log_b x + \log_b y \qquad \log_b(1/x) = -\log_b x}$$

$$\boxed{\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y \qquad \log_b x^y = y \log_b x}$$

- Calcule

$$2^7 \qquad 3^4 \qquad 5^{-2} \qquad 10^{80} \times 10^{-27}$$

$$\log_2 16 \qquad \log_3 0.\overline{3} \qquad \log_{10} 10000 \qquad \log_{10} 0.00000001$$

10. (pH) A concentração di hidrônio (ou seja, H_3O^+) costuma ser medida em escala logarítmica, usando o

$$pH := -\log_{10}[H_3O^+]$$

- Determine o pH de uma solução com $[H_3O^+] = 7 \times 10^{-7}$ mol/l.

11. (limites e funções contínuas) Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real, e $a \in \mathbb{R}$ um *ponto de acumulação* do domínio X (i.e., um ponto tal que existe uma sucessão (x_n) de pontos de X diferentes de a tal que $x_n \to a$, ou seja, um ponto tal que cada intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ contém pontos de X distintos de a). Por exemplo, X pode conter uma reunião de intervalos $X = (b,a) \cup (a,c)$, ou um intervalo do género $X = (b,a)$ ou $X = (a,c)$. O número A é o *limite* de f quando $x \to a$, notação $\lim_{x\to a} f(x) = A$ (ou $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = A$ se $X = (b,a)$ ou $X = (a,c)$, respetivamente), se para cada "precisão" $\varepsilon > 0$ existe uma "tolerância" $\delta > 0$ tal que um erro $0 < |x-a| < \delta$, com $x \in X$, implica um erro $|f(x) - A| < \varepsilon$ (observe que o valor $f(a)$ é irrelevante!).

Os limites satisfazem as regras algébricas

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = F \ \text{ e } \ \lim_{x\to a} g(x) = G \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = F + G}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = F \ \text{ e } \ \lim_{x\to a} g(x) = G \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = F \ \text{ e } \ \lim_{x\to a} g(x) = G \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = F/G \quad (\text{ se } G \neq 0)}$$

Também,

$$\boxed{g(x) \le f(x) \le h(x) \ \text{ e } \ \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = A}$$

Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *contínua* no ponto $a \in X$ (o ponto a deve estar no seu domínio!) se para cada "precisão" $\varepsilon > 0$ existe uma "tolerância" $\delta > 0$ tal que um erro $|x-a| < \delta$, com $x \in X$, implica um erro $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (ou seja, a imagem de um intervalo de raio δ e centro a está contida num intervalo de raio ε e centro $f(a)$). Em particular, se a não é um ponto *isolado* de X (i.e. se não existe um intervalo $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ tal que $X \cap I = \{a\}$), uma função é contínua em $a \in X$ sse $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Uma função *contínua* é uma função contínua em cada ponto do seu domínio.

As potências, os polinómios, as funções trigonométricas $\sin x$ e $\cos x$, os exponenciais b^x e os logaritmos $\log_b x$, são funções contínuas nos respetivos domínios naturais. Somas $f(x) \pm g(x)$, produtos $f(x) \cdot g(x)$ e quocientes $f(x)/g(x)$ (nos pontos onde $g(x) \neq 0$) de funções contínuas são funções contínuas. A composição $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ de duas funções contínuas $f(x)$ e $g(y)$ é uma função contínua.

- Calcule

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x+1}{5x^3+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 8}\sqrt{1+x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} x\cdot\sin(1/x)$$

12. (teorema do valor intermédio) O *teorema de Bolzano* afirma que se uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ toma valores $f(a)$ e $f(b)$ de sinais contrários (i.e. $f(a)\cdot f(b) < 0$) então existe um ponto $c \in]a,b[$ onde $f(c) = 0$. Uma consequência é o *teorema do valor intermédio*: uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ assume todos os valores no intervalo entre $f(a)$ e $f(b)$, ou seja, se $f(a) < C < f(b)$ (ou $f(b) < C < f(a)$) então existe um ponto $c \in]a,b[$ onde $f(c) = C$.

    - Mostre que é possível resolver a equação $x^3 - x + 3 = 0$ no intervalo $[-2,-1]$.
    - Mostre que existe um número x no intervalo $[0,\pi/2]$ tal que $\cos x = x$.

13. (funções discontínuas) Típicas funções discontínuas são a função *parte inteira*, definida por

$$[t] := \max\{n \in \mathbb{Z} \quad \text{t.q.} \;\; n \le t\},$$

    e a função *salto unitário* em τ, definida por

$$u_\tau(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < \tau \\ 1 & \text{se } t \ge \tau \end{cases} .$$

    - Esboce os gráficos das seguintes funções

$$f(t) = t - [t] \qquad 1 - u_0(t)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1 & \text{se } [t] \text{ é impar} \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} t-[t] & \text{se } [t] \text{ é par} \\ 1+[t]-t & \text{se } [t] \text{ é impar} \end{cases}$$

14. (máximos e mínimos) Uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida num intervalo fechado e limitado possui (pelo menos) um mínimo e um máximo.

    - Determine mínimos e máximos de $x(1-x)$ no intervalo $[0,1]$.
    - Determine mínimos e máximos de $|x-1| - |x-2|$ no intervalo $[0,3]$.
    - Dê exemplos de funções contínuas definidas em $(0,\infty)$ ou em $(0,1)$ sem máximos nem mínimos.

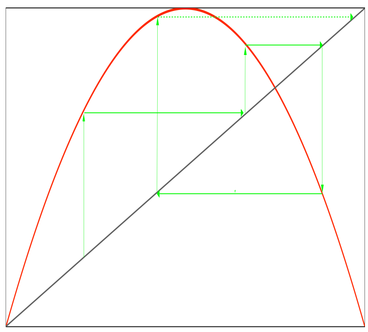
9 Modelos discretos e iteração*

não lecionado

1. (modelos discretos e análise gráfica) Um sistema dinâmico com tempo discreto é definido por uma equação/lei recursiva
$$x_{n+1} = f(x_n)\,,$$
onde x_n denota o *estado* (posição, população, concentração, temperatura, ...) do sistema no tempo $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (segundos, horas, meses, anos, ...). As *trajetórias* do sistema dinâmico são as sucessões (x_n),
$$x_0 \quad\mapsto\quad x_1 := f(x_0) \quad\mapsto\quad x_2 := f(x_1) \quad\mapsto\quad \dots \quad\mapsto\quad x_{n+1} := f(x_n) \quad\mapsto\quad \dots\,,$$
definidas a partir de uma *condição/estado inicial* $x_0 \in X$ usando a recursão $x_{n+1} = f(x_n)$. O imagem de uma trajetória, o conjunto $\mathcal{O}(x_0) := \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset X$, é dita *órbita* do estado inicial x_0.

As *soluções estacionárias*, ou *de equilíbrio*, são as trajetórias constantes $x_n = c$ para todos os tempos $n \in \mathbb{N}_0$, onde o *estado estacionário*, ou *de equilíbrio*, $c \in X$ é um "ponto fixo" da transformação $f : X \to X$, ou seja, um ponto tal que
$$f(c) = c\,.$$
As *soluções periódicas* são as trajetórias (x_n) tais que $x_{n+p} = x_n$ para todos os tempos n e algum tempo minimal $p \geq 1$, dito *período*. Portanto, uma órbita periódica é um conjunto finito $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\} \subset X$ de pontos que são permutados pela transformação f.

Se o espaço dos estados é um intervalo da recta real, as trajetórias podem ser observadas no plano x-y esboçando o caminho poligonal (*cobweb plot*)

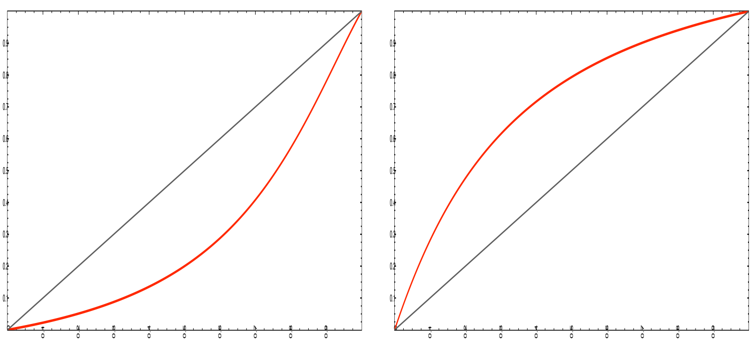


$$(x_0, x_0) \mapsto (x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_1) \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2) \mapsto (x_2, x_3) \mapsto \dots$$
entre o gráfico da transformação, $y = f(x)$, e a diagonal, $y = x$.

- Estude as trajetórias (ou seja, determine os estados de equilíbrio, as trajectórias periódicas, e o comportamento assimptótico de algumas das outras trajetórias) dos sistemas dinâmicos definidos pelas seguintes transformações
$$f(x) = \tfrac{1}{3}x \qquad f(x) = 7x \qquad f(x) = -x$$
$$f(x) = 3x + 1 \qquad f(x) = 2x - 7 \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}x + 5$$
$$f(x) = |1 - x| \qquad f(x) = x^2 - \frac{1}{4} \qquad f(x) = x^2 - 2$$
$$f(x) = x^3 \qquad f(x) = -x^3 \qquad f(x) = x^{1/3}$$
$$f(x) = x - x^3 \qquad f(x) = x + x^3$$
- Mostre que, se uma trajectória (x_n) do sistema dinâmico $x_{n+1} = f(x_n)$ é convergente e se a transformação f é contínua, então o limite $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ é um estado estacionário, ou seja, $f(x_\infty) = x_\infty$.

2. (equilíbrio de Hardy-Weinberg) Considere a transmissão hereditária de um gene com dois alelos, A e a. Sejam x_0, y_0 e z_0 as frequências dos genótipos AA, Aa e aa, respectivamente, numa dada população inicial. Então as probabilidade de ter o alelo A ou a na formação de um gameta são
$$p_0 = x_0 + \tfrac{1}{2}y_0 \qquad \text{e} \qquad q_0 = 1 - p_0 = z_0 + \tfrac{1}{2}y_0 \,,$$
respectivamente. Na fecundação, teremos os genótipos AA, Aa e aa com probabilidades p_0^2, $2p_0q_0$ e q_0^2, respectivamente. Portanto, na primeira geração, as frequências dos três genótipos serão
$$x_1 = p_0^2 \,, \qquad y_1 = 2p_0q_0 \qquad \text{e} \qquad z_1 = q_0^2 \,.$$
   - Calcule as probabilidades
   $$p_1 = x_1 + \tfrac{1}{2}y_1 \qquad \text{e} \qquad q_1 = z_1 + \tfrac{1}{2}y_1$$
   de ter os alelos A ou a na formação de um gameta na primeira geração, e mostre que as frequências dos três genótipos na segunda geração serão
   $$x_2 = p_0^2 \,, \qquad y_2 = 2p_0q_0 \qquad \text{e} \qquad z_2 = q_0^2 \,.$$
   Ou seja, a distribuição dos três genótipos atinge um valor estacionário a partir da primeira geração (*Hardy*[10]*-Weinberg*[11] *equilibrium/principle/law*)

3. (selecção natural, modelo de Fisher, Wright e Haldane) Um modelo simples de seleção natural, proposto por R. Fisher[12], S. Wright[13] e J.B.S. Haldane[14], considera apenas um gene com dois alelos, A e a. A vantagem ou desvantagem competitiva dos diferentes genótipos, AA, Aa e aa, é modelada por coeficientes de "sucesso biológico" (*fitness*), ϕ_{AA}, ϕ_{Aa} e ϕ_{aa}, que determinam as diferentes taxas de sobrevivência, e portanto de reprodução. Sejam $0 \leq p_n \leq 1$ e $q_n = 1 - p_n$ as frequências dos alelos A e a, respectivamente, na n-ésima geração. Então a frequência do alelo A na $(n+1)$-ésima geração é dada por
$$p_{n+1} = \frac{\alpha p_n^2 + p_nq_n}{\alpha p_n^2 + 2p_nq_n + \beta q_n^2}$$
onde $\alpha = \phi_{AA}/\phi_{Aa} > 0$ e $\beta = \phi_{aa}/\phi_{Aa} > 0$.
   - Esboce a transformação para diferentes valores de α e β. Observe que soluções estacionárias são as soluções triviais 0 e 1, e, quando α e β são os dois superiores ou os dois inferiores a 1,
   $$\overline{p} = \frac{|\beta - 1|}{|\alpha - 1| + |\beta - 1|} \,.$$
   - Discuta o comportamento assimptótico da frequência p_n quando $\alpha < 1 < \beta$ e quando $\beta < 1 < \alpha$. Mostre que na população assimptótica apenas sobrevive o alelo favorecido.



[10] G.H. Hardy, Mendelian proportions in a mixed population, *Science* **28** (1908), 49-50.

[11] W. Weinberg, Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen, *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Neturkunde in Württemberg* **64** (1908), 368-382.

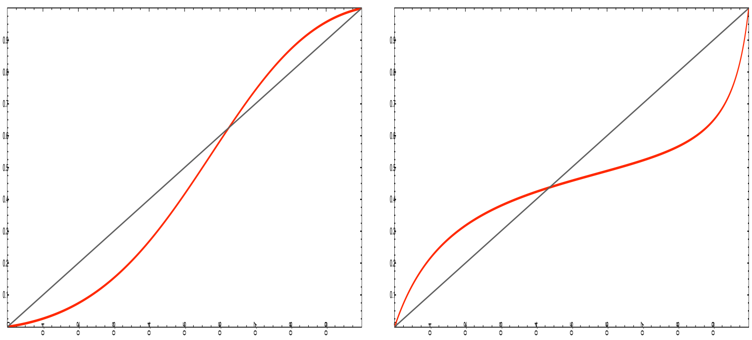
[12] R.A. Fisher, *Genetical Theory of Natural Selection*, Clarendon Press, 1930.

[13] S. Wright, Evolution in Mendelian populations, *Genetics* **16** (1931), 97-159.

[14] J.B.S. Haldane, A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection (1924-1934). J.B.S. Haldane, The effect of variation on fitness, *Am. Nat.* **71** (1937), 337-349.

$\alpha < 1 < \beta$ $\beta < 1 < \alpha$

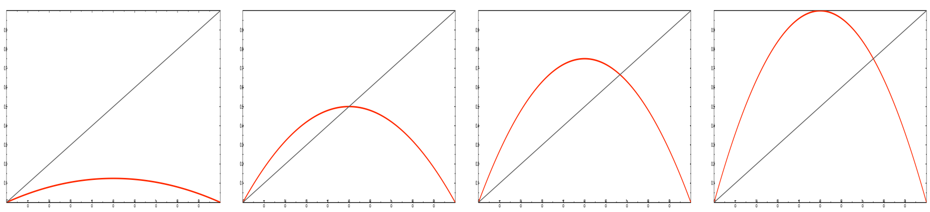
- Mostre que, quando $\alpha > 1$ e $\beta > 1$ (ou seja, os genótipos AA e aa têm uma vantagem competitiva em relação ao genótipo Aa), o estado estacionário $\overline{p}$ é instável, e pequenas perturbações $x_0 = \overline{p} \pm \varepsilon$ do equilíbrio produzem comportamentos assimptóticos diferentes, a extinção de A ou a extinção de a, dependendo do sinal (*disruptive selection*).
- Mostre que, quando $\alpha < 1$ e $\beta < 1$ (ou seja, o genótipo Aa é o favorecido), o estado estacionário $\overline{p}$ é estável, e portanto os dois alelos convivem na população assimptótica (*heterosis*).



Disruptive selection: $0 < \alpha < \beta$. *Heterosis*: $\alpha < \beta < 0$.

4. (transformação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é
$$P_{n+1} = \lambda P_n \left(1 - P_n/M\right)$$
onde $P_n \geq 0$ é a população no tempo n, e a contante $M > 0$ é a maior população suportada pelo meio ambiente (observe que $P_{n+1} < 0$ quando $P_n > M$, o que pode ser interpretado como "extinção" no tempo $n+1$). A população relativa $x_n := P_n/M$ satisfaz a lei
$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)\,,$$
chamada *transformação logística*[15].

- Esboce o gráfico da transformação logística para diferentes valores do parâmetro λ.



Gráficos da transformação logística quando $\lambda = 0.5$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$.

- Mostre que os ponto estacionários são o estado trivial 0 e
$$\overline{x} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$
- Implemente um programa para fazer simulações do sistema.
- Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $0 < \lambda \leq 1$.
- Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro $1 < \lambda \leq 3$.
- Observe os fenómenos que acontecem ao variar o parâmetro λ entre 3 e 4.
- O que acontece quando $\lambda > 4$?

[15] Robert M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459-467.

5. (Hénon map) A *mapa de Hénon*[16] é a transformação

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - \alpha x_n^2 \\ y_{n+1} = \beta x_n \end{cases}$$

Simule as órbitas (no plano) ao variar os parâmetros α e β. Em particular, veja o que acontece quando $\alpha \simeq 1.4$ e $\beta \simeq 0.3$.

[16] M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 69-77.

10 Derivadas e aplicações

1. (declive) O *declive* d(a reta tangente a)o gráfico da função $f(x)$ no ponto x_0 é o limite

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

do declive da reta entre os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ do gráfico de f quando $x \to x_0$.

   - Calcule o declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x + 1$ no ponto $x_0 = 1$.
   - Calcule o declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = |3x - 7|$ no ponto $x_0 = -1$.

2. (velocidade e aceleração) A *velocidade média* da trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ no intervalo de tempos entre os instantes t_0 e t_1 é o quociente

$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)}{t_1 - t_0}$$

entre o deslocamento $\delta \mathbf{r} := \mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)$ e o tempo $\delta t := t_1 - t_0$. O limite da velocidade média $\delta \mathbf{r}/\delta t$ quando $\delta t \to 0$ é a *velocidade (instantânea)* no instante t_0, denotada por

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) := \lim_{\delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{r}(t_0 + \delta t)}{\delta t}$$

O limite

$$\ddot{\mathbf{r}}(t_0) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t_0) := \lim_{\delta t \to 0} \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0) - \dot{\mathbf{r}}(t_0 + \delta t)}{\delta t}$$

da variação da velocidade quando o intervalo de tempos $\delta t \to 0$ é chamado *aceleração* no instante t_0.

3. (movimento retilíneo uniforme) A lei do movimento retilíneo uniforme num referencial inercial é

$$x(t) = x_0 + v_0 t\,,$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}$ denota a posição no tempo $t \in \mathbb{R}$, v_0 a velocidade e x_0 a posição inicial.

   - Determine a velocidade média no intervalo de tempos entre t e $t + \varepsilon$, e a velocidade instantânea $v(t) := \dot{x}$ no tempo t.
   - Determine a lei horária de uma partícula que viaja com velocidade $v = 3$ m/s e que no instante $t = 3$ s está na posição $x(3) = 7$ m. Quando estava na origem?

4. (Aquiles e a tartaruga) Aquiles começa a correr com velocidade constante $V = 10$ m/s em direção de uma tartaruga que a sua vez foge com velocidade constante $v = 0.1$ m/s. A distância inicial entre Aquiles e a tartaruga é de 100 m.

   - Determine quanto tempo demora Aquiles a percorrer $1/2$, $1/2+1/4$, $1/2+1/4+1/8$, ..., da distância inicial, e passado quanto tempo chega ao ponto onde estava inicialmente a tartaruga.
   - Determine a distância $d(t)$ entre Aquiles e a tartaruga no tempo t.
   - Aquiles alcança a tartaruga? Se sim, em quanto tempo?

5. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela lei horária

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2\,,$$

onde $z(t)$ é a altura no tempo t, z_0 é a altura inicial,v_0 é velocidade inicial, e $g \simeq 9.8$ m/s^2 é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre.

   - Determine a velocidade média no intervalo de tempos entre t e $t + \varepsilon$, e a velocidade instantânea no tempo t.

- Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem $\simeq 56$ metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo, o tempo necessário para a pedra atingir o chão e a sua velocidade no instante do impacto.
- Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?
- Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?

6. (derivada) A *derivada* da função $f(x)$ no ponto x é o limite

$$\boxed{f'(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \tfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}}$$

ou seja, o número $\lambda = f'(x)$ tal que $f(x+\varepsilon) - f(x) = \lambda \cdot \varepsilon + r(\varepsilon)$, onde o "resto" $r(\varepsilon)$ é tal que $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Em particular,

$$f(x+\varepsilon) \simeq f(x) + f'(x)\cdot\varepsilon$$

é a melhor aproximação linear de f numa vizinhança de x. Uma função derivável no ponto x é contínua no ponto x.

A notação de Leibniz para a derivada f' é $\frac{df}{dx}$, ou $\frac{d}{dx}f$, ou $\frac{dy}{dx}$ se $y = f(x)$.

A derivada segunda de f é a derivada da derivada, ou seja, $f'' = (f')'$, ...

- Calcule as derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ de cada uma das seguintes funções $f(x)$ nos pontos onde existem.

$$f(x) = 2x - 3 \qquad f(x) = x^2 \qquad f(x) = |x| \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

7. (derivadas elementares e regras) Derivadas elementares são

$$\boxed{\tfrac{d}{dx}\text{constante} = 0\,, \qquad \tfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\,, \qquad \tfrac{d}{dx}x^{1/n} = \tfrac{1}{n}x^{-1+1/n}\,, \qquad \sin' = \cos\,, \qquad \cos' = -\sin}$$

A derivada é linear, ou seja

$$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \qquad (f+g)' = f' + g'}$$

e satisfaz as regras (regra de Leibniz e derivação de um quociente)

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'\,, \qquad (f/g)' = \tfrac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{nos pontos onde } g \neq 0}$$

- Calcule a derivada $f'(x)$ de cada uma das seguintes funções $f(x)$ nos pontos onde podem ser definidas.

$$f(x) = 3x \qquad f(x) = x\sin(x) \qquad f(x) = 17$$
$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x) = x^{-1} - x^{5/3}$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \frac{x-1}{x^3+2} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \text{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

- Calcule as derivadas $P'(0)$, $P''(0)$, $P'''(0)$, ..., $P^{(n)}(0)$, $P^{(n+1)}(0)$, de um polinómio

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n\,.$$

8. (aproximação linear) Estime os seguintes valores, usando a aproximação linear

$$\boxed{f(x+\varepsilon) \simeq f(x) + f'(x)\cdot\varepsilon}$$

de uma função apropriada:

$$\sin(0.01) \qquad \sqrt{1.1} \qquad \cos(\pi - 0.03) \qquad \frac{1}{1+0.001}$$

9. (derivação de função composta: regra da cadeia) Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : f(X) \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis, então a derivada da função composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é
$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.}$$
Na notação de Leibniz, se $y = f(x)$ e $z = g(y)$, então
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\,.$$
   - Calcule as derivadas $f'(x)$ das seguintes funções $f(x)$ nos pontos onde podem ser definidas:
$$f(x) = \cos(x^2) \qquad f(x) = \sqrt{2x-1} \qquad f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$$
$$f(x) = (\sin(x))^2 \qquad f(x) = \sin(\cos(x^3)) \qquad f(x) = \frac{\cos(2x) - x}{\sqrt{x}}$$

10. (derivação de função inversa) Se $h : Y \subset \mathbb{R} \to X$ é a função inversa de $f : X \subset \mathbb{R} \to Y = f(X)$, ou seja, $h(f(x)) = x$ e $f(h(y)) = y$, então
$$\boxed{h'(y) = 1/f'(h(y))}$$
nos pontos $y = f(x)$ onde $f'(x) \neq 0$. Na notação de Leibniz, se $y = f(x)$ e $x = h(y)$, então
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}\,.$$
   - Calcule as derivadas das seguintes funções nos pontos onde podem ser definidas:
$$f(x) = \arcsin(x) \qquad f(x) = \arccos(x) \qquad f(x) = \arctan(x)$$
   - Calcule a derivada da função inversa de $f(x) = x + x^3$ no ponto $y = 0$.

11. (taxas de variação) Determine a taxa de variação
   - $\frac{dA}{dr}$, onde A é a área de uma circunferência e r o seu raio,
   - $\frac{dV}{dr}$, onde V é o volume de uma bola e r o seu raio,
   - $\frac{dV}{d\ell}$, onde V é o volume de um cubo e ℓ o seu lado.

12. (crescimento de uma célula) Uma célula esférica cresce absorvendo material através da sua superfície, a uma taxa αS gr/s, onde α é uma constante e S denota a área da superfície da célula
   - Determine a taxa de crescimento do raio r da célula, na hipótese em que a sua densidade $\rho \simeq 1$ gr/cm^3 é constante. Deduza a lei horária $t \mapsto r(t)$, dado $r(0)$.
   - Se o metabolismo da célula precisa de material absorvido a uma taxa não inferior a βV gr/s, onde β é uma constante e V denota o volume da célula, determine o raio máximo que a célula pode atingir.

13. (estudo de funções, máximos e mínimos) Uma função diferenciável $f(x)$ é crescente nos intervalos onde $f'(x) > 0$, decrescente nos intervalos onde $f'(x) < 0$, constante nos intervalos onde $f'(x) = 0$. Se a é um ponto de máximo o mínimo local da função diferenciável $f(x)$ definida numa sua vizinhança, então a é um *ponto crítico* de $f(x)$, ou seja, $f'(a) = 0$.
   - Esboce os gráficos das seguintes funções, definidas em oportunos domínios.
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \qquad f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$
$$f(x) = x - \sin(x) \qquad f(x) = \sin(x) + \sin(2x) \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

- Mostre que, entre todos os rectângulos de perímetro P fixado, o quadrado é o que tem área maior.
- Mostre que, dados n números $a_1, a_2, ..., a_n$, o valor de x que minimiza a soma dos "erros quadráticos"
$$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + ... + (x-a_n)^2$$
é a média aritmética
$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} .$$

14. (teorema e desigualdade do valor médio) O *teorema do valor médio* diz que se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$, e diferenciável no seu interior (a,b), então existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que
$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a) .}$$
Em particular, se $|f'(c)| \leq \lambda$ para todo o $c \in (a,b)$, então vale a desigualdade
$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leq \lambda \cdot |b-a| .}$$

- Mostre que, se $f(x)$ é um polinómio de segundo grau, então a recta entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é paralela à recta tangente ao gráfico de f no ponto médio $\frac{a+b}{2}$.
- Mostre que para todos os x e y
$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$$
- Mostre que para todos $0 < y \leq x$
$$ny^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y) .$$

11 Aproximação*

não lecionado

1. (aproximação polinomial) O *polinómio de Taylor* de grau n da função $f(x)$ numa vizinhança do ponto a é

$$\boxed{P_n(x-a) := f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

Se $f(x)$ possui $(n+1)$ derivádas numa vizinhança do ponto a, então o "resto" $r_n(\varepsilon) := f(a+\varepsilon) - P_n(\varepsilon)$ pode ser estimado como

$$\boxed{r_n(\varepsilon) = \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,\varepsilon^{n+1}}$$

onde $c \in [a,x]$ (ou $c \in [x,a]$), se $\varepsilon = x - a$ é suficientemente pequeno. Em particular, $r_n(\varepsilon)/\varepsilon^n \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

- Prove as seguintes aproximações, validas para x suficientemente pequeno,

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \qquad \log(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + \dots \qquad \cos(x) \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

- e determine estas outras

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + \dots \qquad \sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x + \dots$$

$$\log(1+x^2) \simeq \dots \qquad \sin(\pi e^{-x}) \simeq \dots$$

- Aproxime e, e estime o erro $r_n(x)$ na sua aproximação, usando os polinómios de Taylor

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

(observe que $1 \leq e^x \leq 3$ no intervalo $x \in [0,1]$). Deduza um valor aproximado de e com um erro < 0.001.

2. (algoritmo de Heron) Considere o problema de determinar o lado ℓ de um quadrado dada a sua área A, ou seja, o número $\ell = \sqrt{A}$.

Um método, utilizado provavelmente pelos babilónios[17] [18] e descrito por Heron[19], consiste em construir recursivamente rectângulos de área A com lados cada vez mais próximos. Se x_1 e y_1 são a base e a altura do primeiro rectângulo, e portanto $x_1 y_1 = A$, então o segundo rectângulo tem como base a média aritmética de base e altura do primeiro, o terceiro rectângulo tem como base a média aritmética da base e a altura do segundo, e assim sucessivamente. A equação recursiva que determina as bases dos rectângulos é portanto

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

- Mostre que bases e alturas dos rectângulos verificam as equações recursivas

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad y_{n+1} = \frac{2}{1/x_n + 1/y_n}$$

[17] Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1968.
[18] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Dover, 1969.
[19] Heron of Alexandria, *Metrica*, Book I.

- Calcule a diferença $x_{n+1} - y_{n+1}$ e mostre que

$$y_2 < y_3 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_3 < x_2$$

  e que

$$x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

- Estime $\sqrt{2}$ com um erro < 0.01 e 0.001.
- Estime quantas iterações é preciso fazer para obter os primeiros n dígitos decimais de $\sqrt{2}$ usando o método dos babilónios.

3. (princípio das contrações) Seja (X, d) um espaço métrico. Uma transformação $f : X \to X$ é uma *contração* (ou λ-*contração* se é importante lembrar o valor de λ) se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz $\lambda < 1$, ou seja, se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todos $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot d(x, x')$$

O *princípio das contrações* afirma que "todas as trajetórias de uma contração $f : X \to X$ são sucesssões de Cauchy, e a distância entre cada duas trajetórias diminue exponencialmente no tempo. Em particular, se X é completo, então f admite um único ponto fixo p, e a trajetória de todo ponto $x \in X$ converge exponencialmente para o ponto fixo, i.e. $f^n(x) \to x$ para $n \to \infty$".

- (*demonstração*) Seja $f : X \to X$ uma λ-contração. Seja $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, e seja (x_n) a sua trajetória, i.e. $x_{n+1} = f(x_n)$. Mostre que $d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^k$, e portanto que

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

  Deduza que (x_n) é uma sucessão de Cauchy, e que o limite $p = \lim_{n\to\infty} x_n$, que existe se X é completo, é um ponto fixo de f. Prove a unicidade do ponto fixo. Mostre que $d(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot d(x_0, p)$, ou seja que a convergência $x_n \to p$ é exponencial.
- Utilize o teorema do valor médio para mostrar que uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ é uma contração sse existe $\lambda < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Prove que uma contração de um espaço métrico compacto X não pode ser invertível, desde que o espaço contenha mais de um ponto. (Compare os diâmetros de X e de $f(X)$)
- Dê exemplos de contrações de

$$[0, 1] \qquad [0, 1] \times [0, 1]$$

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } d(x, y) < r\} \qquad \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$$

- Mostre que uma transformação $f : X \to X$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

  para todos $x, x' \in X$ distintos pode não ter pontos fixos, mesmo se o espaço métrico X for completo.
- Mostre que as contrações lineares da reta $x \mapsto \alpha x$ e $x \mapsto \beta x$ não podem ser conjugadas se $\alpha \cdot \beta < 0$, i.e. se uma é crescente e a outra é decrescente.

  (Uma conjugação é um homeomorfismo da reta, em particular é monótono...)

4. (estabilidade dos estados estacionários) Seja $\overline{x}$ um estado estacionário da equação recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n)\,,$$

ou seja, um ponto tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Se a transformação $f(x)$ é diferenciável, o príncipio das contrações permite decidir sobre a estabilidade do estado estacionário.

> Se $|f'(\overline{x})| < 1$, então o ponto fixo é *atrativo*: as trajetórias de todo o ponto x_0 suficientemente próximo de $\overline{x}$ convergem para $\overline{x}$, ou seja $x_n \to \overline{x}$ quando $n \to \infty$.
> Se $|f'(\overline{x})| > 1$, então o ponto fixo é *repulsivo*: as trajetórias de todo o ponto $x_0 \neq \overline{x}$ numa vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$ saem da vizinhança em tempo finito.

Se $f'(\overline{x}) = 0$, o ponto fixo $\overline{x}$ é dito *super-atrativo*[20].

- Estude a natureza dos pontos fixos das seguintes transformações

$$f(x) = \alpha x \qquad f(x) = \alpha x^3 \qquad f(x) = \alpha x + \beta x^2$$

ao variar os parâmetros.

- Digite 0.1 na sua máquina de calcular, e pressione repetidamente a tecla "cos". O que acontece?
- Estude a natureza do ponto fixo não trivial do modelo logístico (exercício 4 da folha 2)

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$$

ao variar o parâmetro λ.

5. (método de Newton) O *método de Newton* para aproximar as raizes de um polinómio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\,,$$

ou seja, resolver a equação $P(z) = 0$, consiste em escolher uma primeira aproximação z_0, e iterar

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}\,.$$

Ou seja, se z_0 é uma primeira conjetura, uma conjetura melhor é a raiz da aproximação linear $P(z) \simeq P(z_0) + P'(z_0) \cdot (z - z_0)$.

- Mostre que se a sucessão (z_n) converge, i.e. $z_n \to z_\infty$, e se $P'(z_\infty) \neq 0$, então o limite z_∞ é uma raiz do polinómio. Mostre que, se a conjetura inicial z_0 está suficientemente próxima de uma raiz $\overline{z}$ e $P'(\overline{z}) \neq 0$, então a sucessão dos z_n converge para esta raiz.
- Verifique que o método de Newton aplicado ao polinómio quadrático $z^2 - a$, com $a > 0$, corresponde ao algoritmo de Heron.
- Escreva a receita do método de Newton para resolver $z^n - a = 0$, com $a > 0$ e $n \geq 2$.
- Utilize o método de Newton para estimar raizes de

$$z^2 + 1 + z \qquad z^3 - z - 1 \qquad z^5 + z + 1 \qquad z^3 - 2z - 5$$

---

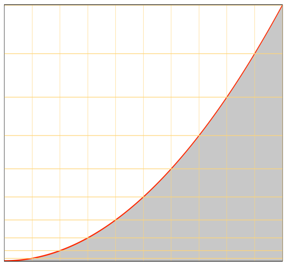
[20] Usando o polinómio de Taylor de grau 1 com resto, vê-se que, se x_0 está numa vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$, então a trajetória de x_0 converge para o ponto fixo $\overline{x}$ e a velocidade de convergência é "quadrática", ou seja,

$$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq \beta \cdot |x_n - \overline{x}|^2$$

onde β é uma constante.

12 Área, integral e métodos de integração

1. (área do segmento parabólico segundo Eudoxo e Arquimedes) O *método de exaustão*, utilizado por Eudoxo e Arquimedes, para calcular a área de uma figura geométrica, consiste em aproximar a região com reuniões de figuras simples, como retângulos e triângulos. Por exemplo, a área do "segmento parabólico"



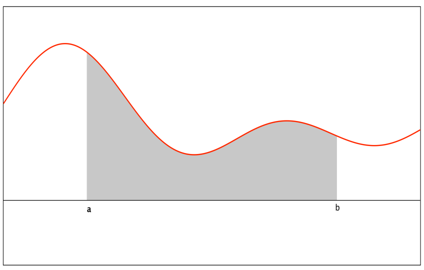
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x^2\},$$

pode ser aproximada dividindo o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos de comprimento $1/n$, e observando que área(A) é superior à soma $s_n(A)$ das áreas dos rectângulos de bases $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ e alturas $(k/n)^2$, e inferior à soma $S_n(A)$ das áreas dos rectângulos de bases $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ e alturas $((k+1)/n)^2$, onde $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = s_n(A) \leq \text{área}(A) \leq S_n(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$$

- Mostre que a diferença $S_n(A) - s_n(A) \to 0$ quando $n \to \infty$.
- Use a identidade
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$
para mostrar que, quando $n \to \infty$, as aproximações $s_n(A)$ e $S_n(A)$ convergem para $1/3$.

2. (área e integral) Se $f(x)$ é uma função (seccionalmente) contínua, o "integral de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$", denotado por $\int_a^b f(x)\,dx$, representa, quando $f(x) \geq 0$, a área da região



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Algumas propriedades elementares do integral são

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx := 0\,, \qquad \int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx\,, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,, \qquad \int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx \qquad \forall c \in \mathbb{R}\,, \qquad \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x/\lambda)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall \lambda > 0}$$

$$\boxed{f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$$

$$\boxed{m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b] \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)}$$

Em particular, o *teorema do valor médio* afirma que

$$\boxed{f(x) \quad \text{contínua} \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, c \in [a,b] \quad \text{tal que} \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)}$$

- Calcule os seguintes integrais.

$$\int_0^1 3dx \qquad \int_{-2}^2 7\,dx \qquad \int_1^{10} x\,dx \qquad \int_{-2}^3 (-2x)\,dx$$

$$\int_{-2}^2 |x|\,dx \qquad \int_0^3 (5x-2)\,dx \qquad \int_{-33}^{33} (11-x)\,dx$$

$$\int_0^{n+1} [x]\,dx \quad {}^{21} \qquad \int_6^x 7t\,dt \qquad \int_x^{x^2} (1-t)\,dt$$

3. (primitivas e cálculo de integrais) A função $F(x)$ é uma *primitiva/antiderivada* da função contínua $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$. Duas primitivas $F(x)$ e $G(x)$ da mesma função $f(x)$ diferem por uma constante, pois a derivada da diferença é $F'(x) - G'(x) = 0$. A notação de Leibniz para uma primitiva genérica de $f(x)$ é $F(x) = \int f(x)\,dx + c$ (onde c denota uma constante arbitrária). O *teorema (fundamental do cálculo) de Leibniz e Newton* diz que se $f(x)$ é contínua então o "integral indefinido" $\int_a^x f(t)dt$ é uma primitiva de $f(x)$, ou seja,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)\,.}$$

Portanto, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)\,.}$$

- Calcule as seguintes primitivas.

$$\int dx \qquad \int x^2\,dx \qquad \int \frac{1}{x^3}\,dx \qquad \int \sqrt{2x-1}\,dx$$

$$\int (x^2-2x+5)\,dx \qquad \int \sin(\theta)\,d\theta \qquad \int \left(\cos(\pi x) - 2x^3\right)\,dx \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Calcule os seguintes integrais.

$$\int_0^3 (x-1)\,dx \qquad \int_{-1}^1 (1-|x|)\,dx \qquad \int_0^{100} \sqrt{x}\,dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx$$

$$\int_{-3}^2 \sqrt{x^2}\,dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(2x)\,dx \qquad \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \int_3^5 \left(x^{1/3} - x^{1/5}\right)\,dx$$

$$\int_{-5}^5 \left(1 + 399x - x^2\right)\,dx \qquad \int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx \qquad \int_{-1}^1 (33-11x)^{66}\,dx$$

- Calcule a derivada das seguintes funções

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \qquad F(x) = \int_0^{x^2} \sin(t)\,dt \qquad F(x) = \int_{2x}^{x^3} (t-t^2)\,dt$$

[21] $[x]$ denota a "parte inteira de x", ou seja, o único inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$.

- Calcule a área da região do plano limitada entre as curvas

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x^3\,, \qquad \text{com } 0 \leq x \leq 1$$

$$y = \sin(x) \quad \text{e} \quad y = -\sin(x)\,, \qquad \text{com } 0 \leq x \leq \pi$$

$$y = x^{1/3} \quad \text{e} \quad y = x^{1/2}\,, \qquad \text{com } 0 \leq x \leq 1$$

4. (logaritmo e exponencial) O *logaritmo (natural)* é a função $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ (que os engenheiros denotam por "ln") definida pelo integral

$$\boxed{\log(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}\,.}$$

O valor do logaritmo em 1 é $\log(1) = 0$, e

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \qquad \text{e} \qquad \log(1/x) = -\log(x) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$$

A derivada do logaritmo é $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Em particular, o logaritmo é uma função estritamente crescente de $\mathbb{R}_+ := [0,\infty[$ sobre $\mathbb{R}$.

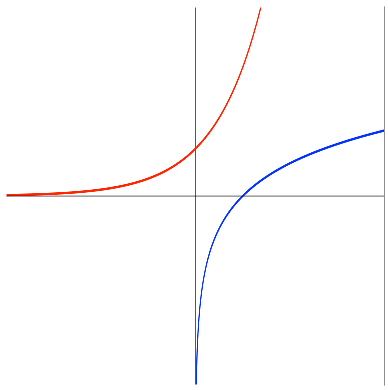
O *exponencial (natural)* é a função inversa do logaritmo, ou seja, a função $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$\boxed{\exp(\log x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+\,, \qquad \log(\exp(y)) = y \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}}$$

O valor $\exp(x)$ é também denotado por e^x, onde $e := \exp(1)$ (ou seja, $\log(e) = 1$). O valor do exponencial em 0 é $\exp(0) = 1$, e

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \text{e} \qquad \exp(-x) = 1/\exp(x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

A derivada do exponencial é $\exp'(x) = \exp(x)$. Em particular, o exponencial é uma função estritamente crescente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}_+$.



Gráficos do logaritmo (azul) e do exponencial (vermelho).

- Calcule os seguintes integrais

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} \qquad \int_{\log 1}^{\log 2} e^x\,dx \qquad \int \frac{dx}{x-1} \qquad \int_1^2 e^{x-1}dx$$

$$\int 2e^{3x}dx \qquad \int_0^7 e^{-x}dx \qquad \int \frac{1}{x(1-x)}dx$$

5. (integração por substituição) A substituição $y = g(x)$, donde $dy = g'(x)\,dx$, transforma $f(g(x))g'(x)\,dx$ em $f(y)\,dy$, e portanto

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,.}$$

- Calcule

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx \qquad \int \frac{\cos(\log x)}{x}dx \qquad \int \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{5+2\sin(\theta)}}d\theta \qquad \int \tan(\theta)d\theta$$

$$\int 3x^2\cos(x^3)dx \qquad \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx \qquad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx \qquad \int \frac{x}{x^2-1}dx \qquad \int_{\log 1}^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx \qquad \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$$

6. (integração por partes) Pela regra de Leibniz, a derivada de fg é $(fg)' = f'g + fg'$, portanto

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

- Calcule

$$\int_0^1 xe^{-x}dx \qquad \int \sin(\log(x))dx \qquad \int_1^{e^3} \log(x)dx$$

$$\int x\cos(x)dx \qquad \int x^2\sin(x) \qquad \int e^x\sin(x)dx$$

7. (velocidade + condição inicial $\Rightarrow$ lei horária) Uma partícula é deslocada numa reta com velocidade $v(t) = t - t^2$.

   - Determine a posição $q(t)$ sabendo que a posição inicial é $q(0) = 1$.

8. (aceleração + condições iniciais $\Rightarrow$ lei horária) Uma partícula é deslocada numa reta com aceleração $a(t) = \sin(2t)$.

   - Determine a velocidade $v(t)$ sabendo que a velocidade inicial é $v(0) = 3$.
   - Determine a posição $q(t)$ sabendo que a posição inicial é $q(0) = 4$.

9. (trabalho de expansão) O trabalho efectuado por um gás perfeito numa expansão do volume V_0 até o volume V_1 é dado pelo integral

$$L = \int_{V_0}^{V_1} p(V)\,dV$$

   onde p é a pressão.

   - Calcule o trabalho efectuado por um gás que expande de 3 l até 4 l a uma pressão constante de 2 atm.
   - Calcule o trabalho efectuado por 1 mole de oxigénio que expande isotermicamente, à temperatura de $T = 20$ ^{o}C, de 1 l até 2 l (a equação de estado de gás perfeito é $pV = nRT$, onde n é o número de moles, $R \simeq 8.314 \times 10^7$ J/K mol, e T é a temperatura absoluta).

Formulário primitivas

	(função)	(“uma” primitiva)
	$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)dx = F(x)$
(por substituição)	$f(y(x))y'(x)$	$\int f(y(x))y'(x)dx = \int f(y)dy$
(por partes)	$f(x)g'(x)$	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
(constantes)	λ	$\int \lambda dx = \lambda x$
(potências, $\alpha \neq -1$)	x^α	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
(logaritmo)	$1/x$	$\int \frac{dx}{x} = \log\lvert x\rvert$
(exponencial)	e^x	$\int e^x dx = e^x$
(seno)	$\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
(coseno)	$\cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x)$
(tangente)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$
(cotangente)	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\text{cotan}(x)$
(arco cujo seno)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$
(arco cuja tangente)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$
(exponencial $\times$ seno)	$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x)-\beta\cos(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}$
(exponencial $\times$ coseno)	$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}$
(coseno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\cos(nx)\cos(mx)$	$\int \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ seno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx)\sin(mx)$	$\int \sin(nx)\sin(mx)dx = -\frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno $\times$ coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx)\cos(mx)$	$\int \sin(nx)\cos(mx)dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)}$
(x $\times$ coseno, $n \neq 0$)	$x\cos(nx)$	$\int x\cos(nx)dx = \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n}$
(x $\times$ seno, $n \neq 0$)	$x\sin(nx)$	$\int x\sin(nx)dx = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}$
(x^k $\times$ coseno, $n \neq 0$)	$x^k\cos(nx)$	$\int x^k\cos(nx)dx = \frac{x^k\sin(nx)}{n} - \frac{k}{n}\int x^{k-1}\sin(nx)dx$
(x^k $\times$ seno, $n \neq 0$)	$x^k\sin(nx)$	$\int x^k\sin(nx)dx = -\frac{x^k\cos(nx)}{n} + \frac{k}{n}\int x^{k-1}\cos(nx)dx$

13 Equações diferenciais ordinárias

1. (partícula livre) A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula livre de massa $m > 0$ num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0\,, \qquad \text{ou seja, se } m \text{ é constante,} \qquad m\mathbf{a} = 0\,,$$

onde $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ denota a *velocidade* e $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$ denota a *aceleração* da partícula. Em particular, o *momento linear* $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ é uma constante do movimento (ou seja, $\frac{d}{dt}\mathbf{p} = 0$), de acordo com o princípio de inércia de Galileo[22] ou a primeira lei de Newton[23]. As soluções da equação de Newton da partícula livre são as retas afins

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{v}t\,,$$

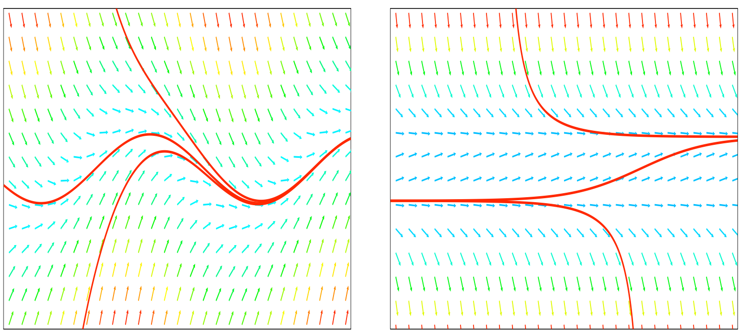
onde $\mathbf{s} = \mathbf{r}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a posição inicial $\mathbf{s} = \mathbf{r}(0)$ e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade (inicial).

- Determine trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $\mathbf{r}(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2, 3)$.
- Determine a velocidade de uma partícula livre que passa pela posição $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 2)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $\mathbf{r}(2) = (3, 4, 5)$ no instante $t_1 = 2$.

2. (equações diferenciais ordinárias) Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de primeira ordem (resolúvel para a derivada) é uma lei

$$\dot{x} = v(t, x)$$

para a trajectória $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ de um sistema dinâmico com *espaço de fases* $X \subset \mathbb{R}$, onde $x(t) \in X$ denota o *estado* do sistema no instante $t \in T \subset \mathbb{R}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ denota a derivada do observável x em ordem ao tempo t, e $v(t, x)$ é um "campo de direções" dado (uma reta com declive $v(t, x)$ em cada ponto (t, x) do espaço de fases ampliado $T \times X$). Uma *solução* da EDO $\dot{x} = v(t, x)$ é uma função diferenciável $t \mapsto x(t)$ tal que $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ para cada tempo t num certo intervalo $I \subset T \subset \mathbb{R}$, ou seja, uma função cujo gráfico, dito *curva integral*, é tangente ao campo de direções em cada ponto $(t, x(t))$. Se o campo $v(t, x)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável), para cada ponto (t_0, x_0) passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$.



Campos de direções e algumas soluções de $\dot{x} = \sin(t) - x$ e de $\dot{x} = x(1 - x)$.

- Esboce o campo de direções das EDOs

$$\dot{x} = t \qquad \dot{x} = -x + t \qquad \dot{x} = \sin(t)$$

e conjeture sobre o comportamento qualitativo das soluções.

[22] "...il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, né erta né china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo" [Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1623.]

[23] "Lex prima: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare" [Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

- A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$? E a função $x(t) = 0$?
- Determine umas equações diferenciais de primeira e de segunda ordem que admitam como solução a gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

3. (integração de EDOs simples) O *teorema (fundamental do cálculo) de Newton e Leibniz*[24] afirma que a derivada do integral indefinido $F(t) := \int_a^t f(s)\,ds$ de uma função contínua $f(t)$ existe e é igual a $F'(t) = f(t)$. Portanto, se $v(t)$ é um campo de direções contínuo, a solução da EDO
$$\dot{x} = v(t)$$
com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,
$$\boxed{\dot{x} = v(t)\,,\; x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s)ds}$$
   - Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(t)$, então também $x(t) + c$ é solução, $\forall c \in \mathbb{R}$.
   - Integre (ou seja, determine soluções com $x(t_0) = x_0$) as seguintes EDOs.
$$\dot{x} = 2\sin(t) \qquad \dot{x} = e^{-t} \qquad \dot{x} = \cos(3t) \qquad \dot{x} = t - t^2$$
   - Determine $x(t)$ sabendo que
$$\dot{x} = e^{-2t} \quad \text{e} \quad x(0) = 6$$
$$\dot{x} = \sin(t) \quad \text{e} \quad x(\pi) = 0$$

4. (o exponencial) O *exponencial (real)* $\exp(t) = e^t$ é a única função real de uma variável real $f(t)$ tal que $f'(t) = f(t)$ e tal que $f(0) = 1$. Em geral, o exponencial $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, é a única solução da equação diferencial
$$\dot{x} = \lambda x$$
com condição inicial $x(0) = x_0$.
   - Mostre que, se $y(t)$ é uma solução de $\dot{y} = \lambda y$, então o quociente $y(t)/e^{\lambda t}$ é constante (calcule a derivada do quociente). Deduza que se $y(0) = x_0$ então $y(t) = x_0 e^{\lambda t}$.

5. (campos de vetores e EDOs autónomas) Um campo de vetores $v : X \to \mathbb{R}$, definido num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, define uma EDO *autónoma*
$$\dot{x} = v(x)\,.$$
Se $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0\ \forall t \in \mathbb{R}$ é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio)* da equação diferencial. Se $v(x_0) \neq 0$ e o campo $v(x)$ é contínuo, então uma solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada "separando as variáveis", $\frac{dx}{v(x)} = dt$, e integrando os dois membros, $\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$.
$$\boxed{\dot{x} = v(x)\,,\; x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}}$$
Se o campo $v(x)$ é diferenciável, estas soluções são únicas.
   - Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(x)$, então também $x(t - c)$ é solução, $\forall c \in \mathbb{R}$.

[24] A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é "*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*".

- Considere as seguintes EDOs de primeira ordem

$$\dot{x} = -3x \qquad \dot{x} = 2x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = x^2 \qquad \dot{x} = (x-1)(x-2)$$

  Determine as soluções estacionárias. Esboce os campos de direções e conjeture sobre o comportamento das soluções. Determine, se possível, fórmulas para a solução com condição inicial $x(0) = x_0$, e esboce o gráfico de algumas das soluções encontradas.

6. (decaimento radioativo) A taxa de decaimento dos núcleos radioativos é proporcional à quantidade de núcleos existentes, desde que a amostra seja suficientemente grande. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de núcleos radioativos existentes no instante t satisfaz a lei

$$\dot{N} = -\beta N \,,$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a "vida média" dos núcleos. A solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\beta t} \,.$$

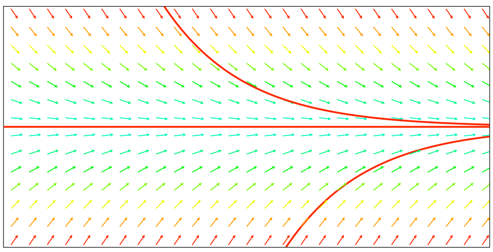
- O tempo de *meia-vida* é o tempo necessário até a quantidade de núcleos se reduzir a metade da quantidade inicial, ou seja, o tempo τ tal que $N(\tau) = \frac{1}{2}N(0)$. Mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$, e determine a relação entre o tempo de meia-vida τ e o parâmetro β.
- O radiocarbono ^{14}C tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, assumindo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é fixa e conhecida[25].
- Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante $\alpha > 0$, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha \,.$$

  A solução de equilíbrio é $\overline{N} = \alpha/\beta$. Mostre que a diferença $x(t) := N(t) - \overline{N}$ satisfaz

$$\dot{x} = -\beta x \,,$$

  e deduza que $N(t) = \overline{N} + (N(0) - \overline{N})e^{-\beta t}$. Em particula, $N(t) \to \overline{N}$ quando $t \to \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$.
- Estime a incerteza relativa $\frac{\Delta N}{N}(0)$ na população inicial dada uma incerteza relativa $\frac{\Delta N}{N}(t)$ na população atual.



Campo de direções e soluções da equação $\dot{x} = -2x + 1$.

7. (equilíbrio metabólico) Uma célula (que não existe!) esférica de raio R absorve nutrientes a una taxa proporcional à sua superfície $S = 4\pi R^2$, e gasta nutrientes a uma taxa proporcional ao seu volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Se ρ é a densidade (constante), então a taxa de crescimento da massa $M = \rho V$ da célula é

$$\dot{M} = \alpha S - \beta V$$

[25] J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

com α, β constantes positivas. O equilíbrio (i.e. $\dot{M} = 0$) é possível quando $\alpha S - \beta V = 0$, ou seja, quando o raio é $\overline{R} = 3\alpha/\beta$. Se o raio inicial é $R(0) = R_0 \neq \overline{R}$, então

$$\rho 4\pi R^2 \dot{R} = \alpha 4\pi R^2 - \beta \tfrac{4}{3}\pi R^3 \qquad \text{ou seja,} \qquad \dot{R} = -\frac{1}{\tau}(R - \overline{R})$$

onde o tempo caraterístico é $\tau := 3\rho/\beta$.

- Deduza que
$$R(t) = (R_0 - \overline{R})e^{-t/\tau} + \overline{R}\,.$$

8. (atrito e tempo de relaxamento) O atrito pode ser modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. Portanto, a equação de Newton (em dimensão 1) de uma partícula livre de massa m em presença de atrito é

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}\,,$$

onde $\gamma > 0$ é o "coeficiente de atrito". A velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO

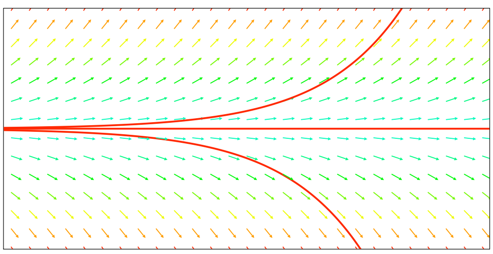
$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v\,, \qquad \text{donde} \qquad v(t) = e^{-t/\tau}\,,$$

onde $\tau := m/\gamma > 0$ é um "tempo de relaxamento".

- Deduza a trajectória $q(t)$ com posição inicial $q(0) = 0$.
- Mostre que a energia cinética $T := \frac{1}{2}mv^2$ da partícula satisfaz
$$\dot{T} = -\frac{2}{\tau}T\,,$$
e portanto decresce exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau/2$.

9. (crescimento exponencial) Um modelo do crescimento (Malthusiano) de uma população num meio ambiente ilimitado é
$$\dot{N} = \lambda N\,,$$
onde $N(t)$ é a população no instante t, e $\lambda > 0$ é a taxa de crescimento relativa (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$).

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ e o seu limite quando $t \to \infty$.
- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\alpha > 0$, então
$$\dot{N} = \lambda N - \alpha$$
Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assimptótico das outras soluções.



Campo de direções e soluções da equação $\dot{x} = 2x - 1$.

10. (equação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população é dado pela *equação logística*[26]

$$\dot{N} = \lambda\, N\, (1 - N/M)$$

onde $\lambda > 0$ e a constante positiva $M > 0$ é a população máxima permitida num dado meio ambiente limitado. Em particular, $\dot{N} \simeq \lambda N$ (e portanto o crescimento é exponencial) se $N \ll M$, e $\dot{N} \simeq 0$ (e portanto a população é constante) quando $N \simeq M$. A "população relativa" $x(t) := N(t)/M$ satisfaz a equação logística adimensional

$$\dot{x} = \lambda\, x\, (1 - x)\,.$$

- Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
- Se a condição inicial $x(0) = x_0$ é $0 < x_0 < 1$, podemos separar as variáveis e integrar

$$\frac{dx}{x(1-x)} = \lambda dt \qquad \Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y(1-y)} = \lambda \int_0^t dt\,,$$

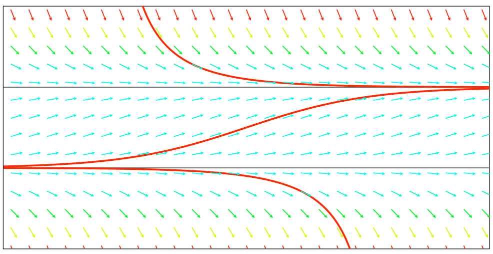
utilizar a identidade $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}$, e obter

$$\log \frac{|x\,(x_0 - 1)|}{|x_0\,(x-1)|} = -\lambda t$$

Verifique que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}\,.$$

- Discuta o comportamento assimptótico das soluções da equação logística.



Campo de direções e soluções da equação logística.

11. (surtos epidémicos) Num surto epidémico, a taxa de crescimento do número $I(t)$ de indivíduos infetados, dentro de uma população total constante N, é proporcional ao produto do número de indivíduos infetados e o número $S(t) = N - I(t)$ de indivíduos saudáveis (e portanto susceptíveis de serem infetados), ou seja,

$$\dot{I} = \lambda I (N - I)$$

com $\lambda > 0$.

- Determine a lei de crescimento da população infetada relativa $x(t) := I(t)/N$, e discuta o comportamento assimptótico de $x(t)$.

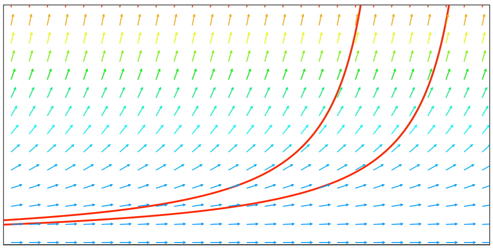
12. (crescimento super-exponencial) Um outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N^2$$

com $\lambda > 0$.

[26] Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$.
- Observe que as soluções que determinou não estão definidas para todos os tempos: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!



Campo de direções e soluções da equação $\dot{x} = x^2$.

14 EDOs lineares de primeira e segunda ordem

1. (EDOs lineares de primeira ordem) A solução de uma EDO *linear de primeira ordem*

$$\dot{x} + p(t)\, x = q(t)\,,$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada usando o método da "variação das constantes", ou seja, pelos seguintes dois passos: determinar (apenas) uma solução não trivial $y(t)$ da *equação homogénea associada* $\dot{y} + p(t)\, y = 0$, por exemplo $y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t p(s)ds\right)$ (que vale 1 quando $t = t_0$), substituir a "conjetura" $x(t) = \lambda(t)\, y(t)$ (a solução da homogénea vezes uma "constante/parâmetro" variável!) na equação não-homogénea $\dot{x} + p(t)x = q(t)$, e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\boxed{\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u)du}\left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u)du} q(s)ds\right)\,.}$$

- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \qquad \dot{x} + 2x = t \qquad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \qquad \dot{x} + tx = t^2$$

  definidas em oportunos intervalos da reta real.
- Resolva os seguintes problemas nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 3$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 2$$

2. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula (ou um paraquedista) próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade, assim que a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - mg$$

onde $\gamma > 0$ é m coeficiente de atrito. Portanto, a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$m\dot{v} = -\gamma v - mg\,.$$

- Resolva o problema com condição inicial $v(0) = 0$.
- Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para um valor assimptótico $\overline{v}$ quando $t \to \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
- Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $q(t)$ com condição inicial $q(0) = s$.

3. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L, é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito. A solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0 + \frac{1}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}s}\, V(s)\, ds\right)$$

- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece quando $t \to \infty$.

- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E\sin(\omega t)$. Se não conseguir, mostre que a solução com $I(0) = 0$ tem a forma

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t - \phi) + \frac{E\omega L}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde ϕ é uma fase constante que depende de ω, L e R.

4. (lei do arrefecimento de Newton) Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ pode ser modelada pela *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k\,(T - M(t))$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva (que depende do material do corpo). A solução com condição inicial $T(0) = T_0$ é

$$T(t) = e^{-kt}\left(T_0 + k\int_0^t e^{ks}M(s)\,ds\right)$$

- Se a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$, então a diferença $x(t) := T(t) - M$ satisfaz a EDO

$$\dot{x} = -kx\,.$$

Determine $T(t)$ e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.

- Uma chávena de café, com temperatura inicial de $100\,^o$C, é colocada numa sala cuja temperatura é de $20\,^o$C. Sabendo que o café atinge uma temperatura de $60\,^o$C em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de $40\,^o$C.

5. (allometric laws) If two organs/tissues/components of a living body/organism/community grow with different (but both constant!) relative growth rates α and β, say

$$\dot{x} = \alpha x \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = \beta y$$

(the independent variable t may be time, or a linear dimension, or something else), then they satisfy the relation

$$\frac{1}{\beta y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha x}\frac{dx}{dt}$$

Eliminating "*dt*", we get the linear/separable ODE

$$\frac{dy}{dx} = (\beta/\alpha)\,\frac{y}{x}\,,$$

whose solution is the *allometric law* [27] [28]

$$y = c\cdot x^\gamma \qquad \text{or, equivalently,} \qquad \log y = \gamma\cdot\log x + \log c\,,$$

with "scaling exponent" $\gamma = \beta/\alpha$, and some constant $c = x_0/y_0$ related to the initial conditions $x(t_0) = x_0$ and $y(t_0) = y_0$.

- *Kleiber's law* [29] (*mouse-to-elephant curve*)

$$\mathrm{BMR} = c\cdot M^{3/4}$$

relates the basal metabolic rate (BMR) to the mass M of an animal.

[27] W. D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 1917, 2nd ed. 1942 [Cambridge University Press, 1992].
[28] Julian S. Huxley, *Problems of Relative Growth (2nd ed.)*, Dover, 1972.
[29] M. Kleiber, Body size and metabolism, *Hilgardia* **6** (1932), 315-351. M. Kleiber, Body size and metabolic rate, *Physiological Reviews* **27** (1947), 511-541.

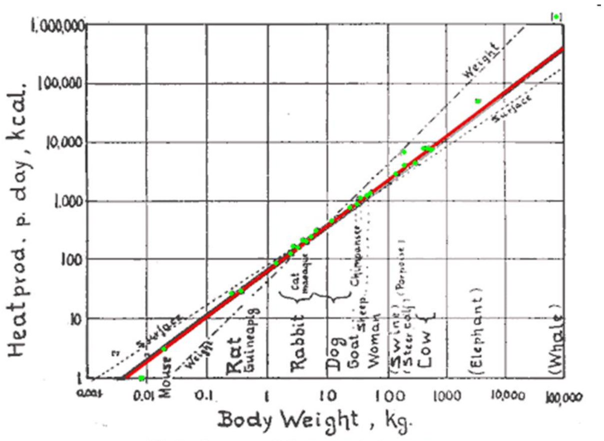


Fig. 1. Log. metabol. rate/log body weight

Original graph of body size versus metabolic rate hand-drawn by Max Kleiber (source Wikipedia)

.

- The heart rate T and the mass M of an animal are related by the allometric law

$$T = c \cdot M^{1/4}$$

6. (fazer modelos) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

   - A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá é proporcional à diferença entre a temperatura do quarto, suposta constante, e a temperatura do chá.
   - A velocidade vertical de um foguetão é inversamente proporcional à altura atingida.
   - A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.
   - Uma esfera de gelo derrete a uma taxa proporcional à sua superfície.
   - A taxa de crescimento de uma população de marcianos é proporcional ao número de trios que é possível formar com a dada população.

7. (equação de Newton num potencial quadrático) Considere a equação de Newton

$$\ddot{q} = -\beta q$$

que determina a trajetória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}$ de uma partícula (de massa $m = 1$) num potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$.

   - Verifique que $q(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio.
   - Verifique que, se $\beta = 0$, as soluções da equação de Newton (da partícula livre)

$$\ddot{q} = 0$$

     são $q(t) = a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.
   - Verifique que, se $\beta = -k^2 < 0$, as soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = k^2 q$$

     são $q(t) = ae^{kt} + be^{-kt}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.
   - Verifique que, se $\beta = \omega^2 > 0$, as soluções da equação (do oscilador harmónico)

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

     são $q(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

8. (partícula num potencial quadrático com atrito) A função $q(t) := e^{-\alpha t} y(t)$ é uma solução da equação de Newton de uma partícula num potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$ com uma força de atrito $-2\alpha q$ (se $\alpha > 0$),
$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \beta q\,,$$
se $y(t)$ é uma solução da equação de Newton $\ddot{y} = -\left(\beta - \alpha^2\right) y$ de uma partícula num potencial quadrático $U(y) = \frac{1}{2}\left(\beta - \alpha^2\right) y^2$.
   - Verifique a afirmação acima.
   - Determine a solução geral da equação.
   - Existem soluções de equilíbrio?

9. (EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes, polinómio característico) A conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução (complexa) da EDO *linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes*
$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$$
se z é igual a uma das raizes $z_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ do *polinómio caractéristico*
$$\boxed{P(z) := z^2 + 2\alpha z + \beta\,.}$$
Duas soluções (reais) independentes podem ser obtidas calculando a parte real e a parte imaginária das soluções complexas, e são

$e^{(-\alpha+k)t}$	e	$e^{(-\alpha-k)t}$	se $z_\pm = -\alpha \pm k$, com $k > 0$ (raizes reais e distintas)
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	e	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	se $z_\pm = -\alpha \pm i\omega$, com $\omega > 0$ (raizes complexas conjugadas)
$e^{-\alpha t}$	e	$te^{-\alpha t}$	se $z_\pm = -\alpha$ (raiz dupla)

O espaço das soluções (reais) da EDO homogénea $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$ é um espaço linear $\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^2$, de dimensão 2. Se $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ formam uma base de $\mathcal{H}$, então a "solução geral" é $x(t) = c_+\phi_+(t) + c_-\phi_-(t)$, onde $c_\pm \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

   - Determine a solução geral das seguintes EDOs homogéneas:
$$\ddot{x} - 2x = 0 \qquad \ddot{x} + \pi^2 x = 0 \qquad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 \qquad \ddot{x} - \dot{x} = 0$$
$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 \qquad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \qquad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0\,.$$
   - Resolva os seguintes problemas de Cauchy:
$$\ddot{x} + 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$
$$\ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1$$
$$\ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0$$
$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9$$
$$\ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1\,.$$
   - Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:
$$e^{2t} \quad \text{e} \quad e^{-2t}\,, \qquad e^{-t}\sin(2\pi t) \quad \text{e} \quad e^{-t}\cos(2\pi t)\,, \qquad \sinh(t) \quad \text{e} \quad \cosh(t)\,,$$
$$e^{-3t} \quad \text{e} \quad te^{-3t}\,, \qquad \sin(2t+1) \quad \text{e} \quad \cos(2t+2)\,, \qquad 3 \quad \text{e} \quad 5t\,.$$

10. (oscilador harmónico) As pequenas oscilações de um pêndulo $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta)$ em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descritas pela equação de Newton do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q\,,$$

onde $\omega > 0$ é a "frequência (angular) característica". No espaço de fases $X = \mathbb{R}^2$, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases} .$$

- Mostre que a solução com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)\,.$$

- Mostre que as trajectórias podem ser escritas como

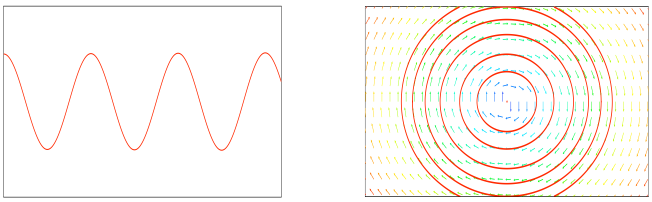
$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad A \cos(\omega t + \phi)\,,$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ (use as fórmulas $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$).

- Determine a energia

$$E(q,p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

em quanto função da amplitude e da frequência das oscilações.



Uma trajectória e retrato de fases do oscilador harmónico.

11. (oscilações amortecidas) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q\,,$$

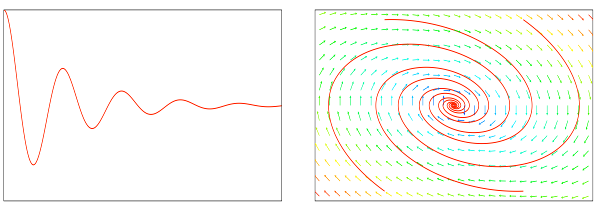
onde $2\alpha := 1/\tau > 0$ é um coeficiente de atrito (τ é o tempo de relaxamento). No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q - 2\alpha p \end{cases} .$$

- Mostre que as soluções do sistema "sub-crítico", ou seja, com $\alpha^2 < \omega^2$, são

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\, t + \varphi\right)$$

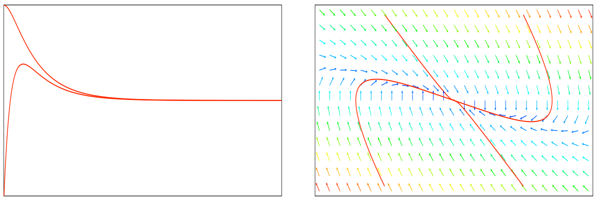
Observe que a frequência é $\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \simeq \omega - \frac{\alpha^2}{2\omega} + \dots$ se $\alpha \ll \omega$, mas tende para zero (e consequentemente, o período das oscilações tende para o ∞) quando $\alpha \to \omega$.



Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido sub-crítico.

- Mostre que as soluções do sistema "super-crítico", ou seja, com $\alpha^2 > \omega^2$, são

$$q(t) = Ae^{-\alpha t}\sinh\left(\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t+\varphi\right)$$



Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido super-crítico.

- Mostre que as soluções do sistema "crítico", ou seja, com $\alpha^2 = \omega^2$ (uma condição muito difícil de observar!), são

$$q(t) = (a+bt)e^{-\alpha t}\,.$$

15 Modelos contínuos e simulações*

não lecionado

1. (método de Euler) Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x)\,.$$

O *método de Euler* consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) - x(t) \simeq v(t, x) \cdot dt\,,$$

dado um "passo" dt suficientemente pequeno. Portanto, os valores $x(t_n)$ da solução nos tempos $t_n := t_0 + n \cdot dt$, dada uma condição inicial $x(t_0) = x_0$, são estimados pela sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt}$$

Numa linguagem como `c++` ou `Java`, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) =$ `x`, é

```
while (time < t)
  {
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
  }
```

- Considere a equação diferencial
$$\dot{x} = x$$
com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$ e o tempo final é $t = n\varepsilon$ com $n \in \mathbb{N}$, então o método de Euler fornece a aproximação
$$x(t) \simeq x_n = (1 + \varepsilon)^n$$
onde $n = t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \to 0$, as aproximações convergem para a solução e^t, pois
$$\lim_{\varepsilon \to 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$
- Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)\, x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t - t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...
- Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico
$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$
com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

2. (método RK-4) O *método de Runge-Kutta* (de ordem) *4* para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \qquad \text{com condição inicial} \qquad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um "passo" dt, e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \tfrac{dt}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$, e os coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$\boxed{k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \tfrac{dt}{2}, x_n + \tfrac{dt}{2} \cdot k_1\right) \quad k_3 = v\left(t_n + \tfrac{dt}{2}, x_n + \tfrac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)}$$

- Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

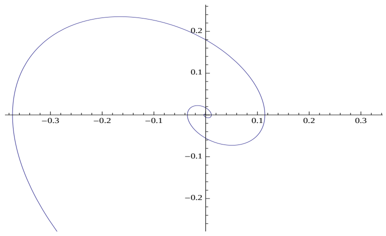
3. (simulações com software proprietário) Existem software proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinarias e parciais. Por exemplo, a função `ode45` do MATLAB®, ou a função `NDSolve` do Mathematica®, calculam soluções aproximadas de EDOs $\dot{x} = v(t, x)$ utilizando variações do método de Runge-Kutta.

   - Verifique se os PC do seu Departamento/da sua Universidade têm accesso a um dos software proprietários MATLAB® ou Mathematica®.
   - Em caso afirmativo, aprenda a usar as funções `ode45` ou `NDSolve`.

     Por exemplo, o pêndulo com atrito pode ser simulado, no Mathematica®, usando as instruções

```
s = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -Sin[x[t]] - 0.7 y[t],
   x[0] == y[0] == 1}, {x, y}, {t, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 20}]
```

     O resultado é



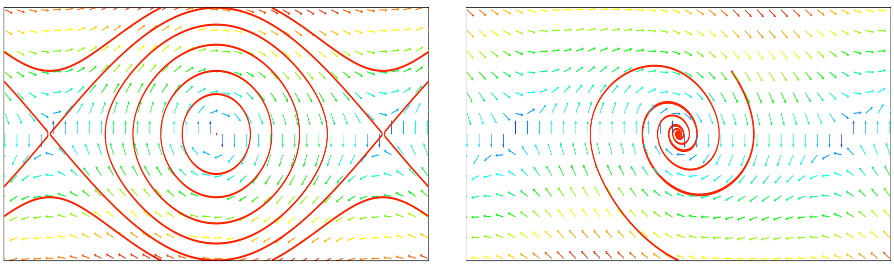
4. (pêndulo matemático) Considere a equação de Newton

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha\dot{\theta}\,,$$

que modela as oscilações de um *pêndulo*, onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, g é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo, e $\alpha \geq 0$ um coeficiente de atrito. No espaço de fase, de coordenadas θ e $p = \dot{\theta}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha p \end{aligned}$$

   - Simule o sistema, e esboce as trajetórias e as curvas de fases.



Retrato de fases do pêndulo (sem e com atrito).

5. (circuito LRC) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R, indutância L e capacidade C, é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V}\,,$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

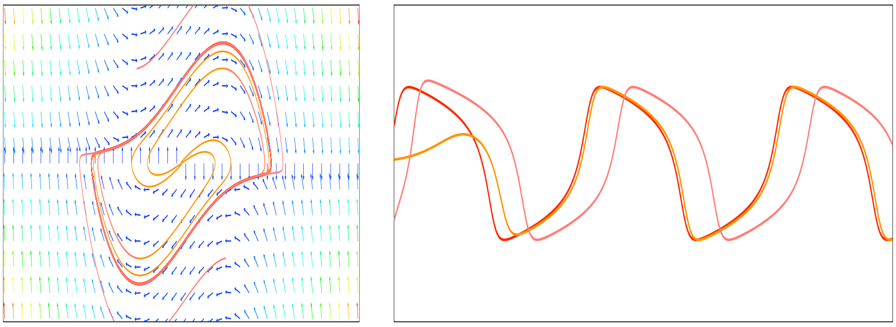
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$.
- Simule a corrente num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$.

6. (oscilador de van der Pol) Considere o *oscilador de van der Pol*[30]

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = 0$$

que modela a corrente num circuito com um elemento não-linear.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar o parâmetro μ.



Retrato de fases e trajetórias do oscilador de van der Pol.

- Simule o oscilador forçado

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = F_0 \sin(\omega t)$$

ao variar o parâmetro μ e a frequência ω.

7. (sistema de Lotka-Volterra) Considere o *sistema de Lotka-Volterra*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$$

Foi proposto por Vito Volterra[31] para modelar a competição entre x presas e y predadores, e por Alfred J. Lotka[32] para modelar o comportamento cíclico de certas reacções químicas, como o esquema abstracto

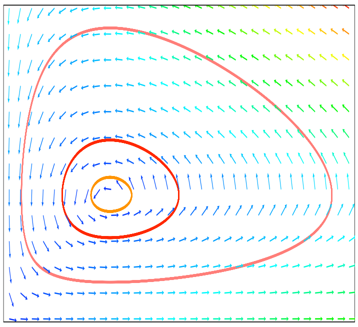
$$A + X \to 2X \qquad X + Y \to 2Y \qquad Y \to B$$

- Determine as soluções estacionárias.
- Mostre que a função
$$H(x,y) = dx + by - c\log x - a\log y$$
é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$. Deduza que as órbitas do sistema estão contidas nas curvas de nível de $H(x,y)$.
- Simule o sistema.

[30] B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* **1** (1920), 701-710 and 754-762. B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency demultiplication, *Nature* **120** (1927), 363-364.

[31] Vito Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie di animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei* **2** (1926), 31-113. Vito Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

[32] Alfred J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc* **27** (1920), 1595. Alfred J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.



Retrato de fases do sistema de Lotka-Volterra.

8. (rock-paper-scissor game) Considere a reação

$$X + Y \xrightarrow{\gamma} 2X \qquad Y + Z \xrightarrow{\alpha} 2Y \qquad Z + X \xrightarrow{\beta} 2Z$$

modelada pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\gamma y - \beta z) \\ \dot{y} &= y(\alpha z - \gamma x) \\ \dot{z} &= z(\beta x - \alpha y) \end{aligned}$$

- Simule o sistema ao variar os parâmetros α, β e γ.

9. (Brusselator) O *Brusselator* é um modelo autocatalítico proposto por Ilya Prigogine e colaboradores[33] que consiste na reação abstracta

$$A \to X \qquad B + X \to Y + C \qquad 2X + Y \to 3X \qquad X \to D$$

- Simule o sistema

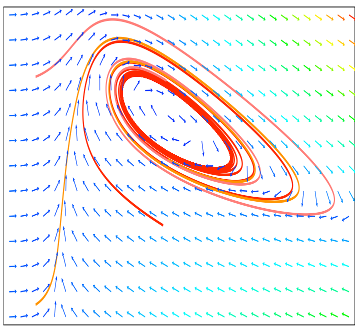
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha - (\beta + 1)x + x^2 y \\ \dot{y} &= \beta x - x^2 y \end{aligned}$$

para as concentrações das espécies catalíticas X e Y, obtido quando as concentrações $[A] \sim \alpha$ e $[B] \sim \beta$ são mantidas constantes.

- Simule o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha - (b + 1)x + x^2 y \\ \dot{y} &= bx - x^2 y \\ \dot{b} &= -bx + \delta \end{aligned}$$

para as concentrações de X, Y e B, obtido quando a concentração $[A] \sim \alpha$ é mantida constante e B é injetado a uma velocidade constante $v \sim \delta$.



Retrato de fases do Brusselator.

[33] I. Prigogine and R. Lefever, Symmetry breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* **48** (1968), 1655-1700. P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Wiley, New York 1971. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in non-equilibrium chemical systems*, Wiley, New York 1977.

10. (reacção de Schnakenberg) Considere a *reação de Schnakenberg*[34]

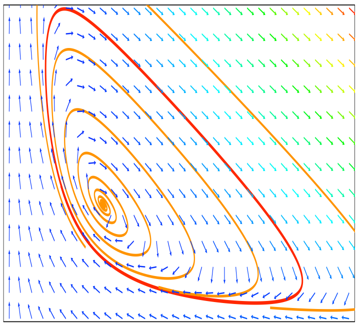
$$2X + Y \to 3X \qquad A \to Y \qquad X \to B$$

modelada pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 y - x + \beta \\ \dot{y} &= -x^2 y + \alpha \end{aligned}$$

para as concentrações $x \sim [X]$ e $y \sim [Y]$.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar so parâmetros.



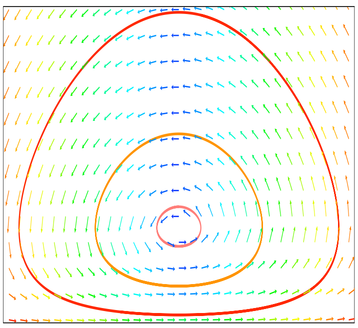
Retrato de fases do sistema de Schnakenberg.

11. (oscilador bioquímico de Goodwin) Um modelo de interações proteinas-mRNA proposto por Goodwin[35] é

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \tfrac{1}{1+P} - \alpha \\ \dot{P} &= M - \beta \end{aligned}$$

onde M e P denotam as concentrações relativas de mRNA e proteina, respectivamente.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar os parâmetros.



Retrato de fases do sistema de Goodwin.

- Simule o sistema[36]

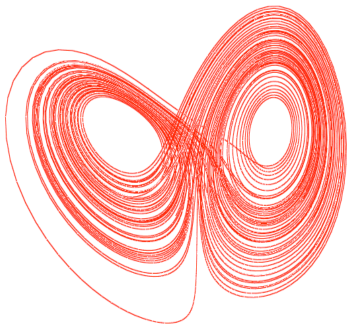
$$\begin{aligned} \dot{M} &= \tfrac{1}{1+P^n} - \alpha M \\ \dot{P} &= M^m - \beta P \end{aligned}$$

[34] J. Schnakenberg, Simple chemical reaction with limit cycle behavior, *J. Theor. Biol.* **81** (1979), 389-400.
[35] B.C. Goodwin, *Temporal organization in cells*, Academic Press, London/New York 1963. B.C. Goodwin, Oscillatory behaviour in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* **3** (1965), 425-438.
[36] T. Scheper, D. Klinkenberg, C. Pennartz and J. van Pelt, A Mathematical Model for the Intracellular Cicardian Rhythm Generator, *J. Neuroscience* **19** (1999), 40-47.

12. (atrator de Lorenz) Considere o *sistema de Lorenz*[37]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x)\\ \dot{y} &= x(\rho-z)-y\\ \dot{z} &= xy-\beta z\end{aligned}$$

- Analize o comportamento assimptótico das trajectórias ao variar os parâmetros σ, ρ e β.
- Observe o comportamento das trajetórias quando $\sigma \simeq 10$, $\rho \simeq 28$ e $\beta \simeq 8/3$.



Atrator de Lorenz.

[37] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmspheric Science* **20** (1963), 130-141.

16 Curvas e campos escalares

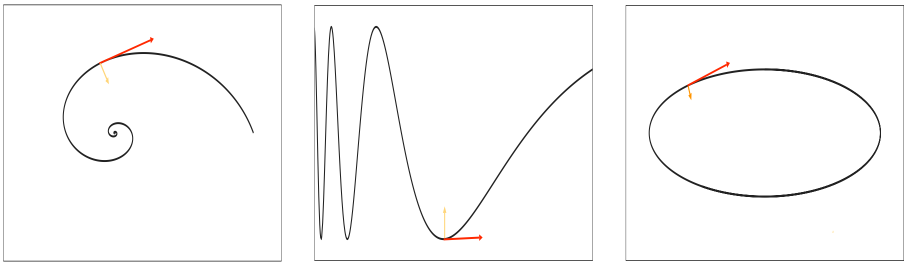
1. (caminhos e curvas) Um *caminho*, no plano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço $\mathbb{R}^3$, é uma função

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

definida num intervalo (de tempos) $t \in I \subset \mathbb{R}$. A imagem $\gamma := \mathbf{r}(I) \subset \mathbb{R}^{2 \text{ ou } 3}$ de um caminho contínuo é dita *curva*. A *velocidade* e a *aceleração* do caminho $\mathbf{r}(t)$ são os caminhos

$$\boxed{\mathbf{v}(t) := \tfrac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{a}(t) := \tfrac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))}$$

respectivamente. A norma da velocidade, $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$, é dita *velocidade escalar*.



As curvas $(e^t \cos(3t), e^t \sin(3t))$, $(t, \sin(1/t))$, e $(2\cos(t), \sin(-t)$.

- Esboce as seguintes curvas no plano, e calcule velocidade e aceleração, nos pontos onde podem ser definidas.

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2\right) \quad \text{com } t \in \mathbb{R}\,, \qquad \mathbf{r}(t) = \left(t^3, t^2\right) \quad \text{com } t \in \mathbb{R}\,,$$
$$\mathbf{r}(t) = (t, |t|) \quad \text{com } t \in [-1, 1]\ , \qquad \mathbf{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi]\ ,$$
$$\mathbf{r}(t) = (t, [t]) \quad \text{com } t \in [-2, 2]\ , \qquad \mathbf{r}(t) = (t, \sin(1/t)) \quad \text{com } t \in \,]0, \infty[\ .$$
$$\mathbf{r}(t) = (|\sin(5t)|\cos(2t), |\sin(5t)|\sin(2t)) \quad \text{com } t \in [0, 2\pi]\ ,$$
$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t) + 0.1\cos(17t), \sin(t) + 0.1\sin(17t)) \quad \text{com } t \in [0, 2\pi]\,.$$

- Verifique que a trajectória $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $a, b > 0$, descreve a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
- Esboce a trajectória $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $R, b > 0$, descrita por uma partícula em movimento numa *hélice circular*.
- Determine umas equações paramétricas para a parábola $x = y^2 + 1$ e para a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ com $x > 0$ (lembre a identidade $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ entre as funções "hiperbólicas").

2. (partícula livre) A trajetória $t \mapsto \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula livre de massa $m > 0$ num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0\,, \qquad \text{ou seja, se } m \text{ é constante,} \qquad m\mathbf{a} = 0\,,$$

onde $\mathbf{a}(t) := \dot{q}(t)$ denota a *velocidade* e $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{q}}(t)$ denota a *aceleração* da partícula. Em particular, o *momento linear* $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$, é uma constante do movimento (ou seja, $\frac{d}{dt}\mathbf{p} = 0$), de acordo com o princípio de inércia de Galileo ou a primeira lei de Newton.

- Verifique que soluções da equação de Newton da partícula livre são as retas afins

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{v}t$$

onde $\mathbf{s}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ são a posição e a velocidade iniciais.

- Determine a trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $\mathbf{q}(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{\mathbf{q}}(0) = (1, 2, 3)$.
- Determine a trajetória de uma partícula livre que passa pela posição $\mathbf{q}(0) = (0, 0, 0)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $\mathbf{q}(2) = (1, 1, 1)$ no instante $t_1 = 2$. Calcule a sua "velocidade escalar", ou seja, a norma $v = \|\mathbf{v}\|$.

3. (movimento circular uniforme) Considere a trajectória

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)) \qquad \text{com } R > 0\,,$$

descrita por uma partícula em *movimento circular uniforme* no plano.

- Mostre que a partícula descreve uma circunferência de raio R, e determine o período do movimento.
- Calcule a velocidade $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ e a aceleração $\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t)$, mostre que a aceleração é ortogonal à velocidade e que a aceleração é centrípeta (ou seja, é um vector que aponta para o centro da circunferência).
- Calcule a *velocidade angular*, o quociente entre a velocidade escalar $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ e o raio da circunferência.

4. (comprimento de uma curva) O comprimento de uma curva γ, imagem do caminho diferenciável $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ com velocidade contínua $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$, é dado pelo integral da velocidade escalar em ordem ao tempo: não lecionado

$$\boxed{\ell(\gamma) = \textstyle\int_a^b \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|\, dt\,.}$$

Por exemplo, se a curva é dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ou $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $t \in [a, b]$, o seu comprimento é

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt\,.$$

- Calcule o comprimento ...
  ...do arco de circunferência $(\cos\theta, \sin\theta)$ com $\theta \in [\pi/2, 2\pi]$,
  ...da espiral logarítmica $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ com $t \in [0, \infty[$,
  ...do arco de parábola $\left(t, t^2/2\right)$ com $t \in [0, 1]$ (considere a susbtituição $t = \sinh s$).

5. (comprimento de um gráfico) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função real com derivada contínua definida no intervalo $[a, b]$. O gráfico de f, o conjunto $\Gamma_f = \{(t, f(t)) \text{ com } t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$, é a imagem do caminho $t \mapsto (t, f(t))$ com $t \in [a, b]$. Em particular, o seu comprimento é não lecionado

$$\boxed{\ell\,(\Gamma_f) = \textstyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt\,.}$$

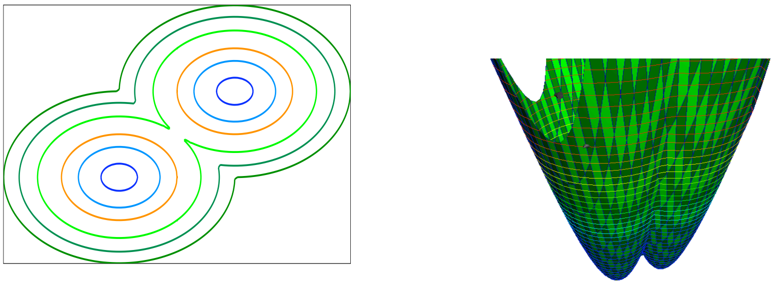
- Calcule ou estime o comprimento ...
  ...do arco de parábola $y = x^2$ com $x \in [0, 1]$,
  ...do gráfico da função $y = \sin(x)$ com $x \in [0, \pi]$.
  ...do gráfico da função $y = e^{-x}$ com $x \in [0, 1]$.

6. (campos escalares, curvas e superfícies de nível) Um *campo escalar* é uma função $f : X \to \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R}^3$. A *curva de nível* λ do campo escalar $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\boxed{\Sigma_\lambda := \left\{(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2 \;\text{ t.q. }\; f(x, y) = \lambda\right\}}$$

O *gráfico* da função f é

$$\boxed{\mathcal{G}_f := \left\{(x, y, z) \in X \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \;\text{ t.q. }\; f(x, y) = z\right\}}$$



Curvas de nível e gráfico.

- Esboce algumas curvas de nível e os gráficos das seguintes funções, nos domínios onde podem ser definidas:

$$f(x,y)=x+y \qquad f(x,y)=xy \qquad f(x,y)=x^2+2y^2 \qquad f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$f(x,y)=\log\left(x^2+y\right) \qquad f(x,y)=x^2-y^2 \qquad f(x,y)=\sin(xy)$$

7. (derivadas parciais, gradiente e derivadas direcionais) As derivadas parciais do campo escalar $f(x,y)$ no ponto (x,y) são os limites

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}}$$

O *diferencial* e o *gradiente* de $f(x,y)$ no ponto (x,y) são a “forma linear” e o vetor

$$\boxed{df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \qquad \text{e} \qquad \nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)}$$

A *derivada direcional* de $f(x,y)$ na direção do vetor $\mathbf{v}=(v_x,v_y)\in\mathbb{R}^2$ no ponto (x,y) é

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f((x,y)+t(v_x,v_y))-f(x,y))}{t}=\nabla f(x,y)\cdot\mathbf{v}}$$

Se $t\mapsto \mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$ é um caminho com velocidade $\mathbf{v}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t))$, e $f(x,y)$ um campo escalar, então a *regra da cadeia* diz que

$$\boxed{\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))=\langle\nabla f(x(t),y(t)),\mathbf{v}(t)\rangle=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot\dot{x}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot\dot{y}(t)}$$

- Considere o campo escalar $f(x,y)=\langle(w_x,w_y),(x,y)\rangle$, onde $\mathbf{w}=(w_x,w_y)\in\mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\nabla f(x,y)=\mathbf{w} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y)=\langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle$$

e que portanto o gradiente de f é constante e igual a $\nabla f(x,y)=\mathbf{w}$.

- Considere o campo escalar $f(x,y)=\|(x,y)\|^2=x^2+y^2$. Mostre que

$$\nabla f(x,y)=(2x,2y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y)=\langle(2x,2y),\mathbf{v}\rangle\ .$$

Calcule a derivada direcional de f no ponto $(2,4)$ na direção do vetor $\mathbf{v}=(3,5)$. Dado o caminho $t\mapsto(x(t),y(t))=(t^2,t^3)$, calcule a derivada de $f\,(x(t),y(t))$ em ordem a t no tempo $t=2$.

- Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das seguintes funções, nos domínios onde podem ser definidas:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad f(x,y,z)=x^3+y^2+zxy \qquad f(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right)$$

$$f(x,y)=e^{x+y} \qquad f(x,y)=\frac{\sin(x^2)}{y} \qquad f(x,y)=x^y$$

- Calcule o gradiente das seguintes funções, nos pontos onde pode ser definido:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad f(x,y) = x^2-y^2 \qquad f(x,y) = \sin\left(x^2+y^2\right)$$

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \qquad f(x,y,z) = xyz \qquad f(x,y) = e^{y\log x}$$

- Calcule a derivada $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))$ dos seguintes campos $f(\mathbf{r})$ ao longo dos respetivos caminhos $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ nos tempos indicados.

$$f(x,y) = x^3y - xy^2 \qquad t \mapsto (t^2, t^3) \qquad t = 0\,,$$

$$f(x,y) = xy \qquad t \mapsto (2e^t\cos(t), 2e^t\sin(t)) \qquad t = 1\,,$$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \qquad t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t) \qquad t = \pi\,,$$

- A temperatura do mar num ponto (x,y,z) é dada por $T(x,y,z) = x^3 - xy + yz^2$. Uma sardinha encontra-se no ponto $(3,2,1)$. Em que direção e sentido a sardinha tem de nadar para arrefecer mais rapidamente?
- Mostre que o potencial Newtoniano $\varphi(x,y,z) = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ em $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ satisfaz a *equação de Laplace*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z^2} = 0\,.$$

- Sejam $f(s)$ e $g(s)$ duas funções reais duas vezes diferenciáveis. Mostre que a função

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)\,,$$

que descreve duas ondas viajantes com velocidades $\pm c$, satisfaz a *equação de onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

8. (diferencial e aproximação linear) Use a aproximação linear

$$\boxed{f(x+dx, y+dy) \simeq f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot dy}$$

para estimar os seguintes valores:

$$e^{0.01}\sqrt{3.999} \qquad \frac{\log(1.01)}{1+0.001} \qquad \sqrt[3]{7.99}\sqrt{36.01}$$

9. (energia cinética e sistemas conservativos) Sejam $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ (ou $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$) a trajetória de uma partícula de massa m, $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ a sua velocidade e $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ a sua aceleração.

- Calcule a derivada de $t \mapsto \|\mathbf{r}(t)\|^2$ em ordem ao tempo t.
- Deduza que, se $\|\mathbf{r}(t)\|$ é constante, então a velocidade é ortogonal à posição, ou seja

$$\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{r}(t)\rangle = 0$$

- Mostre que a variação da energia cinética é igual ao produto interno $\langle ma(t), v(t)\rangle$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\mathbf{v}(t)\|^2\right) = \langle m\mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle\,.$$

Deduza que se a força $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ é ortogonal à velocidade, então a energia cinética é constante.

- As equações de Newton de um sistema conservativo dizem que

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}\,,$$

onde a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ é o gradiente de uma uma energia potencial $V(\mathbf{r})$. Verifique que a energia

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2 + V(\mathbf{r})$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt} E(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = 0$ ao longo das trajectórias.

10. (gás ideal) A equação de estado de um gás ideal é

$$PV = nRT$$

onde p é a pressão, V o volume, n o número de moles, $R \simeq 8.314 \times 10^7$ J/K·mol, e T é a temperatura absoluta.

- Esboce as curvas "isotermas" (i.e. de temperatura constante) no plano P-V. Descreva o comportamento do volume de um gás ideal ao variar a pressão, mantendo constante a temperatura.
- Mostre que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) = -1\,.$$

11. (reta/superfície tangente) Seja $\Sigma_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } f(x,y) = \lambda\}$ uma curva de nível do campo escalar $f(x,y)$, e seja $(a,b) \in \Sigma_\lambda$ um ponto onde $\nabla f(a,b) \neq 0$. A *reta tangente* à curva de nível Σ_λ no ponto (a,b) é a reta ortogonal ao gradiente, definida pela equação cartesiana não lecionado

$$\boxed{\nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b) = 0}$$

- Considere as seguintes funções:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f(x,y) = x^2$$

$$f(x,y) = xy \qquad f(x,y) = e^{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = 1 - y - x^2$$

$$f(x,y,z,) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

Calcule o gradiente.
Determine a reta/superfície tangente à curva/superfície de nível no ponto $\mathbf{r} = (1,1)$ (ou $\mathbf{r} = (1,1,1)$).

12. (máximos, mínimos e pontos de sela) Um *ponto crítico* do campo escalar $f(x,y)$ é um ponto (a,b) onde $\nabla f(a,b) = (0,0)$. A *matriz Hessiana* do campo (de classe $\mathcal{C}^2$) f no ponto crítico (a,b) é a matriz simétrica

$$\mathrm{Hess} f(a,b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}.$$

O ponto crítico isolado (a,b) é um máximo/mínimo relativo se os valores próprios da matriz Hessiana são os dois negativos/positivos, é um ponto de sela se a matriz Hessiana possui um valor próprio positivo e outro negativo.

- Considere os seguintes campos

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = xy \qquad f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$$

$$f(x,y) = (x-1)(y-2) \qquad f(x,y) = (x+1)^2 + (y-3)^2 \qquad f(x,y) = x^2 - y^2 + 7$$

$$f(x,y) = (x+y)^2 + 3(x-y)^2 \qquad f(x,y) = e^{x+y} \qquad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

Determine os pontos críticos. Determine os máximos, mínimos e os pontos de sela. Esboce os gráficos.

- Dados os N pontos do plano $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^2$ (ou do espaço $\mathbb{R}^n$), mostre que o ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ que minimiza a soma dos quadrádos

$$S(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\|^2$$

é o "centro geométrico"

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k$$

13. (mínimos quadrados) Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ os valores do observável y obtidos em n experiências em correspondência dos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do observável x, respetivamente. Os valores de α e β que minimizam a soma dos erros quadráticos

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - (\alpha + \beta x_k)\right)^2 ,$$

na hipótese de uma lei linear $y = \alpha + \beta x$, são dados por

$$\beta = \frac{\overline{\sigma}_{xy}^2}{\overline{\sigma}_{xx}^2} \qquad \text{e} \qquad \alpha = \overline{y} - \beta \overline{x} ,$$

onde

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

são os valores médios de x e y, e

$$\overline{\sigma}_{xx}^2 := \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 \qquad \text{e} \qquad \overline{\sigma}_{xy}^2 := \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$$

as covariâncias.

- Na seguinte amostra, obtida por Galileo, foram registadas as coordenadas (altura x e distância y) da trajectória de um objecto lançado com uma força horizontal,

x	100	200	300	450	600	800	1000
y	235	337	395	451	495	534	574

  Ajuste uma recta.

- Na seguinte tabela, colecionada por Jaques Cassini, foram registadas as obliquidades da eclíptica (o ângulo entre o plano equatorial da Terra e o seu plano orbital) $(y + 23)°$ em diferentes datas t,

t	−140	−140	390	880	1070	1300	1460
y	0.853	0.856	0.500	0.583	0.567	0.533	0.500

t	1500	1500	1570	1570	1600	1656	1672	1738
y	0.473	0.488	0.499	0.525	0.517	0.484	0.482	0.472

  Ajuste uma recta. Retire os dados anteriores ao ano 1500, e ajuste outra recta. Discuta o resultado.

Referências

[Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, 1969 [*Cálculo*, Editora Reverté, 1999].

[Ar78] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR, 1985.

[Ba79] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, Springer, 1979.

[Co04] V. Comincioli, *Modelli Matematici: elementi introduttivi*, Università degli studi di Pavia, 2004.

[Ei88] M. Eisen, *Mathematical Methods and Models in the Biological Sciences*, Prentice Hall, 1988.

[EK05] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, SIAM, 2005 [Random House, 1988].

[Go77] H.J. Gold, *Mathematical Modeling of Biological Systems - An Introduction Guidebook*, Wiley Interscinece, 1977.

[Gou77] S.J. Gould, *Ever Since Darwin: Reflections in Natural History*, Norton, 1977.

[HK03] B. Hasselblatt and A. Katok, *A first course in dynamics, with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, 2003.

[HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.

[KR85] D. Kleppner and N. Ramsey, *Quick calculus: a self-teaching guide*, Wiley, 1985.

[La86] S. Lang, *A First Course in Calculus*, UTM Springer, 1986.

[Li06] E.L. Lima, *Análise Real*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2006.

[MF05] Philip McCord Morse and Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953 [Feshbach Publishing, 2005].

[RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S. J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Third Edition, Cambridge University Press, 2006.

[Ri04] S.H. Rice, *Evolutionary Theory: Mathematical and Conceptual Foundations*, Sinauer, 2004.

[Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 2004.

[Ros84] S.L. Ross, *Differential equations*, John Wiley & Sons, 1984.

[Si91] G.F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill, 1991.

[Wr69] S. Wright, *Evolution and the Genetic of Populations*, The University of Chicago Press, 1969.