31/10/2024 1º teste	Probabilidade e Aplicações	MAT

Nome .... **Nº** ....

Instruções: `responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha, sem calcular explicitamente fatorias, coeficientes binomiais, potências e exponenciais.`

1. Um baralho francês é composto por 52 cartas (quatro naipes, $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$, e $\spadesuit$, cada um formado pelas treze cartas $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$).

   a *(2 valores)* Escolho duas vezes uma carta, sem reposição. Calcule a probabilidade das duas cartas serem uma dama (ou seja, Q) e um rei (ou seja, K), nesta ordem. $\frac{4\cdot 4}{52\cdot 51}$

   b *(2 valores)* Retiro 5 cartas, sem reposição. Calcule a probabilidade de obter todas copas (ou seja, $\heartsuit$). $\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}$

   c *(1 valor)* Retiro apenas uma carta. Os eventos $C =$"a carta é uma copa (ou seja, $\heartsuit$)" e R="a carta é um rei (ou seja, K)" são independentes? Sim.

2. Temos dois dados normais (seis faces, com $1, 2, 3, 4, 5$ e 6 pintas) e um terceiro dado falso, que tem duas faces com 1 pinta, duas faces com 3 pintas e duas faces com 5 pintas. Um dos três dados é escolhido ao acaso, com probabilidade uniforme.

   a *(1 valor)* Calcule a probabilidade de obter um número ≤ 3 de pintas ao lançar uma vez o dado escolhido. 5/9

   b *(1 valor)* Calcule a probabilidade de obter sempre um número ímpar de pintas ao lançar três vezes o dado escolhido. 5/12

   c *(2 valores)* Calcule a probabilidade do dado escolhido ser o falso sabendo que ao lançar três vez o dado escolhido observamos sempre um número ímpar de pintas. 4/5

3. Considere um modelo do lançamentos de dois dados. Sejam ξ a variável aleatória que conta o número de pintas do primeiro dado, e η a variável aleatória que conta o número de pintas do segundo dado. Considere as variáveis aleatórias $X = \min\{\xi, \eta\}$ e $Y = \max\{\xi, \eta\}$.

   a *(2 valores)* Determine a densidade conjunta das variáveis X e Y, ou seja, as probabilidades $\mathbf{P}(X = i \text{ e } Y = j)$ para os diferentes valores possíveis de i e j.
   . $1/36$ se $i = j$, $1/18$ se $i < j$, e 0 se $i > j$

   b *(1 valor)* Calcule a probabilidade $\mathbf{P}(X \neq Y)$. 5/6

   c *(1 valor)* Calcule a esperança $\mathbf{E}(X + Y)$. 7

   d *(1 valor)* As variáveis X e Y são independentes ? Não.

4. Uma urna contém 997 bolas brancas e 3 bolas pretas. Retiro repetidamente uma bola, com reposição.

   a *(1 valor)* Calcule a probabilidade de observar 5 bolas pretas e 5 bolas brancas nas primeiras 10 tentativas. $\binom{10}{5}(0.003)^5(0.997)^5$

   b *(1 valor)* Calcule a média e a variância da variável S_{100} que conta o número de bolas pretas retiradas nas primeiras 100 tentativas. 0.3 0.2991

   c *(1 valor)* Estime a probabilidade de observar exatamente 2 bolas pretas nas primeiras 1000 bolas retiradas. $\simeq e^{-3}\, 9/2$

   d *(1 valor)* Calcule a probabilidade de retirar a primeira bola preta na 10ª tentativa.
   . $(0.997)^9 \cdot 0.003$

   e *(1 valor)* Calcule a probabilidade de retirar a terceira bola preta na 10ª tentativa.
   . $\binom{9}{2} \cdot (0.997)^7 \cdot (0.003)^3$

   f *(1 valor)* Calcule a esperança do número de provas necessárias até retirar a primeira bola preta. 1000/3

16/12/2024 2º teste	Probabilidade e Aplicações	MAT

Nome .... **Nº** ....

Instruções: `responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. Seja τ uma variável aleatória exponencial com média $\mathbf{E}\tau = b > 0$.

   a *(2 valores)* Calcule a probabilidade $\mathbf{P}(2b < \tau < 3b)$. $e^{-2} - e^{-3}$

   b *(2 valores)* Calcule a probabilidade condicionada $\mathbf{P}(\tau \geq 3b \,|\, \tau \geq 2b)$. e^{-1}

   c *(1 valor)* Calcule a densidade de $\xi = \tau^2$. $\frac{1}{2b\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/b}$ se $x > 0$

2. Sejam ξ e η duas variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x < y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   a *(2 valores)* Calcule as densidades marginais de ξ e η.
   . $f_\xi(x) = 2(1-x)$ e $f_\eta(y) = 2y$ se $0 \leq x, y \leq 1$

   b *(2 valores)* Calcule a densidade condicionada de η dado $\xi = x$, com $0 < x < 1$.
   . $f_{\eta|\xi}(y|x) = 1/(1-x)$ se $x < y < 1$

   c *(1 valor)* Calcule a média $\mathbf{E}(\xi\eta)$. $1/4$

   d *(1 valor)* Calcule a covariância $\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$. $1/36$

3. Sejam ξ e η duas variáveis aleatórias independentes e uniformes no intervalo $[0,1]$.

   a *(1 valor)* Calcule a probabilidade $\mathbf{P}(\xi^2 < \eta)$. $2/3$

   b *(2 valores)* Calcule a função de repartição de $\xi + \eta$, ou seja, $F(x) = \mathbf{P}(\xi + \eta \leq x)$.
   . $F(x) = x^2/2$ se $0 \leq x \leq 1$, e $F(x) = 1 - (2-x)^2/2$ se $1 < x \leq 2$.

   c *(1 valor)* Calcule a densidade de $\xi + \eta$. $f(x) = 1 - |x-1|$ se $0 \leq x \leq 2$.

   d *(1 valor)* Calcule a média $\mathbf{E}(\xi + \eta)$ e a variância $\mathbf{V}(\xi + \eta)$. 1 e $1/6$

4. Sejam ξ e η duas variáveis aleatórias independentes e normais com lei $N(0,1)$.

   a *(1 valor)* Calcule a função característica de $\xi - \eta$. e^{-t^2}

   a *(1 valor)* Determine a lei de $\xi - \eta$. $N(0,2)$

5. Sejam $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com lei exponencial e média $\mathbf{E}\xi_k = 1$. Considere as somas $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$.

   a *(1 valor)* Estime a probabilidade $\mathbf{P}(S_{100} \geq 80)$. $1 - \Phi(-2) \simeq 0.977$

   b *(2 valores)* Estime o menor valor de n tal que $\mathbf{P}(|S_n - n| \leq n/10) \geq 0.997$. $n \geq 900$