

Nome N.º

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha, sem calcular explicitamente fatoriais, coeficientes binomiais, potências e exponenciais.

1. Um baralho francês é composto por 52 cartas (quatro naipes, $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$, e $\spadesuit$, cada um formado pelas treze cartas $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$).

a (1 valor) Retiro 4 cartas, sem reposição. Calcule a probabilidade de obter todas cartas vermelhas (ou seja, $\heartsuit$ ou $\diamondsuit$). $\frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}$

b (1 valor) Retiro duas vezes uma carta, sem reposição. Calcule a probabilidade da primeira ser um rei (ou seja, K) e a segunda ser uma dama (ou seja, Q). $\frac{4 \cdot 4}{52 \cdot 51}$

2. Temos dois dados normais (seis faces, com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 pintas) e um terceiro dado falso, que tem três faces com 1 pinta e três faces com 6 pintas. Um dos três dados é escolhido ao acaso, com probabilidade uniforme.

a (2 valores) Calcule a probabilidade do dado escolhido ser o falso sabendo que ao lançar três vez o dado escolhido observamos sempre 6 pintas. $27/29$

3. Considere um modelo do lançamentos de duas moedas. Seja ξ a variável aleatória que vale $\xi = 1$ se a primeira moeda mostra CARA e $\xi = 0$ se a primeira moeda mostra COROA, e seja η a variável aleatória que vale $\eta = 1$ se a segunda moeda mostra CARA e $\eta = 0$ se a segunda moeda mostra COROA. Considere as variáveis aleatórias $X = \min\{\xi, \eta\}$ e $Y = \max\{\xi, \eta\}$.

a (2 valores) Determine a densidade conjunta das variáveis X e Y , ou seja, as probabilidades $\mathbf{P}(X = i \text{ e } Y = j)$ para os diferentes valores possíveis de i e j .

$$\mathbf{P}(X = 0 \text{ e } Y = 0) = \mathbf{P}(X = 1 \text{ e } Y = 1) = 1/4, \mathbf{P}(X = 0 \text{ e } Y = 1) = 1/2 \text{ e } \mathbf{P}(X = 1 \text{ e } Y = 0) = 0.$$

b (1 valor) Calcule a covariância $\mathbf{Cov}(X, Y)$. $1/16$

4. Uma urna contém 10 bolas pretas e 990 bolas brancas. Retiro repetidamente uma bola, com reposição.

a (1 valor) Calcule a probabilidade de observar 1 bola preta e 9 bolas brancas nas primeiras 10 tentativas. $\binom{10}{1}(0.01)(0.99)^9$

b (1 valor) Estime, usando a aproximação de Poisson, a probabilidade de observar exatamente 2 bolas pretas nas primeiras 1000 tentativas. $50 e^{-10}$

c (1 valor) Calcule a probabilidade de retirar a primeira bola preta na 10^{a} tentativa. $(0.99)^9 \cdot 0.01$

5. Seja ξ uma variável aleatória uniforme no intervalo $[0, 1]$.

a (2 valores) Calcule uma densidade de $\eta = \xi^2$. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ se $0 < x < 1$.

b (1 valor) Calcule a média $\mathbf{E}\eta$ $1/3$

6. Sejam ξ e η duas variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x, y \leq 1 \text{ e } x + y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a (2 valores) Calcule as densidades marginais de ξ e η . $f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) = 2(1 - x)$ se $0 \leq x \leq 1$

7. Sejam ξ e η duas variáveis aleatórias independentes, com leis exponenciais e médias $\mathbf{E}\xi = 2$ e $\mathbf{E}\eta = 3$, respetivamente.

a (1 valor) Calcule a média $\mathbf{E}(\xi + \eta)$ e a variância $\mathbf{V}(\xi + \eta)$.

5 e 13

b (1 valor) Calcule a função característica de $\xi + \eta$.

$$\frac{1}{(1-i2t)(1-i3t)}$$

8. Uma urna contém 500 bolas pretas e 500 bolas brancas. Retiro repetidamente uma bola, com reposição. Seja S_n o número de bolas pretas retiradas nas primeiras n tentativas.

a (1 valor) Estime a probabilidade $\mathbf{P}(S_{100} \leq 40)$.

$$\Phi(-2) \simeq 0.023$$

b (2 valores) Estime o menor valor de n tal que $\mathbf{P}(|S_n/n - 1/2| \leq 1/10) \geq 0.954$. $n \geq 100$