17/11/2016 1º teste	Métodos Matemáticos da Física	MAT

1. *(2 valores)* Determine as soluções de

$$u_t + 3u_x = 0\,.$$

2. *(2 valores)* Determine a solução $u(t,x)$ de

$$u_t + 3u_x = 0$$

tal que $u(0,x) = e^{-x^2}$.

3. *(2 valores)* Determine as soluções de

$$u_x + u_y = u\,.$$

4. *(2 valores)* Determine as curvas características de

$$u_x + yu_y = 0\,.$$

5. *(2 valores)* Determine a solução $u(x,y)$ de

$$u_x + yu_y = 0$$

tal que $u(0,y) = \sin(y)$.

6. *(2 valores)* Diga para quais valores de ω e k as ondas planas $\psi(t,x) = \sin(\omega t - kx)$ são soluções da equação de Klein-Gordon

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + m^2\psi = 0\,.$$

7. *(2 valores)* Diga se a EDP

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x = 0$$

é elíptica, parabólica ou hiperbólica.

8. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ da equação de calor

$$u_t - u_{xx} = 0$$

no intervalo $[0,\pi]$ com condições de fronteira de Dirichlet, i.e. $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t > 0$.

9. *(2 valores)* Escreva e deduza a solução de d'Alembert da equação de ondas

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

na reta real, dadas condições iniciais $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$.

10. *(2 valores)* Enuncie o princípio do máximo para a equação de calor

$$u_t - u_{xx} = 0$$

num intervalo limitado.

...

12/01/2017 2^o teste	Métodos Matemáticos da Física	MAT

1. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ da função definida por $f(x) = x$ no intervalo $(-\pi, \pi]$, e periódica de período 2π.

2. *(2 valores)* Use a série de Fourier calculada no exercício 1 e a identidade de Parseval para calcular a soma da série
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

3. *(2 valores)* Diga se a série de Fourier
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^3} e^{inx}$$
converge pontualmente e/ou uniformemente, e justifique.

4. *(2 valores)* Dê uma definição de função harmónica em um domínio do plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, e um exemplo de uma função harmónica no disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ que não seja constante.

5. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ da função $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha - \varepsilon \le x \le \alpha + \varepsilon \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$
(onde $\alpha \in (0, \pi)$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno).

6. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação de calor
$$u_t - u_{xx} = 0$$
com $x \in [0, \pi]$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para todo tempo $t > 0$ e condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ (a função definida no exercício 5).

7. *(2 valores)* Defina o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e dê um exemplo de uma função de Schwartz.

8. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier da gaussiana
$$g(x) = e^{-4\pi^2 x^2}$$

9. *(4 valores)* Determine uma fórmula integral para a solução formal da EDP (equação de calor com convecção)
$$u_t - \alpha u_x - u_{xx} = 0\,,$$
com $x \in \mathbb{R}$, com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ no espaço e Schwartz.