24/01/2017 recurso	Métodos Matemáticos da Física	MAT

1. *(2 valores)* Determine a solução $u(x,t)$ da equação de transporte

$$u_t - u_x = 0$$

com condição inicial $u(x,0) = \sin(x)$.

2. *(2 valores)* Determine a solução $u(x,y)$ de

$$x u_x - u_y = 0$$

tal que $u(x,0) = \cos(x)$.

3. *(2 valores)* Diga se a EDP

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + 7u_y + 3u_x = 0$$

é elíptica, parabólica ou hiperbólica.

4. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ da equação da corda vibrante

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

com x no intervalo $[0,\pi]$, com condições de fronteira de Dirichlet, i.e. $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t > 0$.

5. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ da função $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

6. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação da corda vibrante

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

com $x \in [0,\pi]$, com condições de fronteira nulas $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t > 0$ e condições iniciais $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = \varphi(x)$ (a função definida no exercício 5).

7. *(2 valores)* Enuncie a identidade de Parseval.

8. *(2 valores)* Dê uma definição e um exemplo de função harmónica no plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$.

9. *(2 valores)* Calcule a transformada de Fourier do núcleo do calor

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$$

10. *(2 valores)* Determine uma fórmula integral para a solução formal da equação de calor com dissipação

$$u_t - u_{xx} = -u$$

na reta real, com condição inicial $u(x,0) = f(x)$ no espaço e Schwartz.