

MAT
2016/17

Métodos Matemáticos da Física

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

18 de Dezembro de 2016



This work is licensed under a
[Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 2.5 Portugal License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pt/).

CONTEÚDO	2
----------	---

Conteúdo

1 As EDPs da física-matemática	5
2 EDPs de primeira ordem	10
3 Operadores diferenciais lineares	15
4 Difusão/calor	21
5 Ondas	26
6 Separação de variáveis, harmónicas e modos	29
7 Séries de Fourier	35
8 Convergência das séries de Fourier	43
9 Aplicações das séries de Fourier às EDPs	51
10 Funções harmónicas	54
11 Transformada de Fourier	60
12 Aplicações da transformada de Fourier às EDPs	67

Notações

Números. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais, e $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ denota o anel dos números inteiros. $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ denota o corpo dos números racionais. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

Notação de Landau. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas no mesmo intervalo ou subconjunto I dos reais, e seja a um ponto de acumulação de I , ou ∞ . A notação

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{quando } x \rightarrow a$$

quer dizer que existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M |g(x)|$ para todo x suficientemente próximo de a (grande se $a = \infty$).

A notação

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{quando } x \rightarrow a.$$

quer dizer que para todo o $\varepsilon > 0$ acontece que $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ se x é suficientemente próximo de a (grande se $a = \infty$). Se $g(x) \neq 0$ numa vizinhança de a , então isto é equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Espaço euclidiano. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço Euclidiano de dimensão n . Fixada a base canónica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são os vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

de coordenadas $x_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

O produto interno Euclidiano é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

O produto interno realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico) $(\mathbb{R}^n)^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e o próprio $\mathbb{R}^n$: o valor da forma linear $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ no vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$.

A norma Euclidiana do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. A distância Euclidiana entre os pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A bola aberta de centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto $B_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ se cada seu ponto $\mathbf{a} \in A$ é o centro de uma bola $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Os pontos e as relativas coordenadas no plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço Euclidiano 3-dimensional $\mathbb{R}^3$ (ou seja, as posições dos pontos materiais da física) são também denotados, conforme a tradição, pelas letras $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então $r := \|\mathbf{r}\|$ denota o comprimento do vetor $\mathbf{r}$, ou seja, a distância do ponto $\mathbf{r}$ da origem do referencial.

Caminhos. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável do “tempo” $t \in I \subset \mathbb{R}$, ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com valores no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, a primeira derivada $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ é dita *velocidade*, e a sua norma $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$ é dita *velocidade escalar* (em inglês “speed”). A segunda derivada $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$ é dita *aceleração*.

Campos. Um *campo escalar* é uma função real $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* é uma função $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$, cujas coordenadas $F_i(\mathbf{x})$ são k campos escalares.

A derivada do campo diferenciável $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a aplicação linear $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \langle d\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle + o(\|\mathbf{v}\|)$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma $\|\mathbf{v}\|$ suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana $(\text{Jac}\mathbf{F})(\mathbf{x}) := (\partial F_i / \partial x_j(\mathbf{x})) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$. Em particular, o *diferencial* do campo escalar $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a forma linear $du(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$du(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n$$

(onde dx_k , o diferencial da função coordenada $\mathbf{x} \mapsto x_k$, é a forma linear que envia o vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ em $dx_k \cdot \mathbf{v} := v_k$). A derivada do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na direção do vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicado) no ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = \langle du(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vetorial $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\langle du(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

para todo os vetores (tangentes) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicados no ponto $\mathbf{x} \in X$).

É útil, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, definir o operador diferencial “nabla”

$$\nabla := (\partial_x, \partial_y, \partial_z).$$

De consequência $\nabla \cdot \mathbf{F}$ e $\nabla \times \mathbf{F}$ são a “divergência” e o “rotacional” do campo vetorial $\mathbf{F}$, respetivamente.

O *Laplaciano* é o operador diferencial

$$\Delta := \text{div} \circ \text{grad} = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

1 As EDPs da física-matemática

1. (partículas e mecânica Newtoniana) A mecânica Newtoniana descreve essencialmente o movimento de partículas puntiformes por meio de equações diferenciais ordinárias: a trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma partícula no campo de forças $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ é solução da *equação de Newton*

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F}$$

A descrição de sistemas compostos de mais partículas, como o sistema solar ou o corpo rígido, não é muito diferente, usando apenas um espaço de configurações com um número maior de coordenadas. Se $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ são umas coordenadas generalizadas e $\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ é a *Lagrangiana* (tipicamente a diferença $\mathcal{L} = T - V$ entre a energia cinética $T = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ e a energia potencial $V = V(\mathbf{q})$) então as trajetórias do sistemas são os pontos críticos da ação $S = \int \mathcal{L} dt$, ou seja, são determinadas pelo princípio variacional

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt = 0$$

onde t_0 e t_1 são os tempos inicial e final, respetivamente. As equações de Newton tomam então a forma das *equações de Euler-Lagrange*

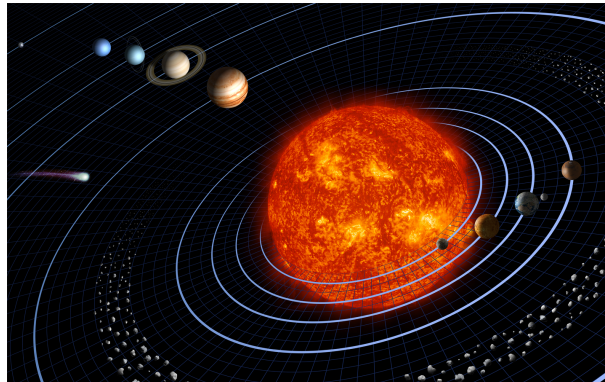
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Na formulação Hamiltoniana, os momentos são definidos por $p_i := \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$, e a *Hamiltoniana* é a transformada de Legendre da Lagrangiana:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$$

As equações do movimento são então

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$



- O *oscilador harmónico* é o sistema descrito pela Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q})^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2$, e portanto pela equação de Newton $\ddot{q} = -\omega^2 q$. A Hamiltoniana é $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$, onde $p = \dot{q}$. Escreva as equações de movimento em termos das p e q 's, e deduza que a energia $\mathcal{H}$ é uma constante do movimento.
2. (campos de forças da física clássica) As forças da física clássicas são determinadas por certas leis que assumem a forma de equações integrais (involvendo fluxos) ou, equivalentemente, de equações diferenciais parciais. Por exemplo, o campo de forças gravitacional gerado por uma distribuição de massas com densidade $\rho = \rho(\mathbf{r})$ satisfaz a *lei de Gauss* $\nabla \cdot \mathbf{F} = -4\pi\rho$. Sendo

um campo conservativo, admite um “potencial”, um campo escalar ϕ tal que $\mathbf{F} = -\nabla\phi$. O “potencial gravitacional” ϕ satisfaz portanto a *equação de Poisson*

$$\Delta\phi = 4\pi\rho \quad (1.2)$$

Numa região onde a densidade de massas é nula o potencial gravitacional satisfaz a *equação de Laplace*

$$\Delta\phi = 0 \quad (1.3)$$

Esta equação é ubíqua em física, e as suas soluções são chamadas “funções harmónicas” pelos matemáticos.

Os outros campos da física clássica são os campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$. Estes campos satisfazem (sem considerar os efeitos da matéria) as *leis de Gauss*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(onde ρ é a densidade de carga elétrica), a *lei de Faraday*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

e a *lei de Ampère*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{J}$$

(onde $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente elétrica). Numa região sem cargas e sem correntes, estas leis implicam que os campos elétrico e magnético satisfazem a *equação de onda*

$$\partial_{tt}\mathbf{E} = \Delta\mathbf{E}$$

- Verifique que o potencial Newtoniano

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r}$$

(onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) é uma função harmónica em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

- Verifique que $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$, onde f e g são funções arbitrárias duas vezes diferenciáveis, satisfaz a equação de onda em dimensão um

$$\partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u$$

Interprete as soluções $f(x + ct)$ e $g(x - ct)$.

3. (fenómenos coletivos/macroscópicos) Objetos estendidos como um fluido são necessariamente descritos por meio de campos de densidades, de velocidades, ..., funções que a cada ponto $\mathbf{r}$ de uma região e a cada tempo t associam o valor “macroscópico” $u(\mathbf{r}, t)$ de um certo observável neste ponto e no instante t .

Por exemplo, se ρ é a densidade de um material/soluto transportado por um fluido cujo campo de velocidade é $\mathbf{v}$, então a conservação do material é equivalente à *equação de continuidade/transporte*

$$\partial_t\rho - \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (1.4)$$

Por outro lado, se $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ é o campo de velocidades de um fluido de partículas não interagentes, então a equação de Newton $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ para cada partícula implica a *equação de Euler*

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0 \quad (1.5)$$

É possível acrescentar uma força proporcional a $-\Delta\mathbf{v}$, que imita a viscosidade do fluido, assim como uma força devida à pressão p e uma força externa $\mathbf{F}$. O resultado é uma das famosas *equações de Navier-Stokes*

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F} - \frac{\nu}{\rho}\Delta\mathbf{v} \quad (1.6)$$

É importante lembrar que esta não é uma “lei da natureza” mas apenas uma lei fenomenológica que, é esperado, modela alguns fenómenos da natureza.



Outro exemplo importante é a lei fenomenológica que modela a difusão ou a propagação de calor num meio homogêneo. Se $\rho = \rho(x, t)$ denota a densidade de soluto/calor numa solução/condutor unidimensional, então a massa total de soluto/calor contido num intervalo entre x e $x + dx$ é $M \simeq \rho dx$ e a sua variação no tempo é $\dot{M} \simeq \partial_t \rho dx$. Mas esta variação é a soma algébrica entre os fluxos de soluto/calor que entram ou saem da fronteira do intervalo, os pontos $x + dx$ e x . Em primeira aproximação, estes fluxos são proporcionais ao gradiente da densidade/temperatura (*lei de Fick/Fourier*). De consequência,

$$\partial_t \rho(x, t) dx \simeq \partial_x \rho(x + dx, t) - \partial_x \rho(x, t)$$

Ao dividir por dx e ao fazer o limite quando $dx \rightarrow 0$, obtemos a lei

$$\partial_t \rho = \partial_{xx} \rho$$

A generalização em dimensão 3 (ou em dimensão arbitrária) é a *equação de difusão/calor*

$$\partial_t \rho = \Delta \rho$$

O caso estacionário, i.e. independente do tempo, é modelado mais uma vez pela equação de Laplace $\Delta \rho = 0$.

- A equação de transporte em dimensão um num campo de velocidade constante v é

$$u_t + v u_x = 0$$

Verifique que $u(x, t) = \varphi(x - vt)$, onde φ é uma função derivável arbitrária, é uma solução.

4. ([partículas e campos quânticos](#)) Na mecânica quântica, e depois na teoria de campos, a distinção entre campos e partículas deixa de existir. A função de onda $\psi(t, \mathbf{r})$ de uma partícula não relativística num potencial $V(\mathbf{r})$ segue a *equação de Schrödinger*

$$-i\partial_t \psi = \Delta \psi + V(\mathbf{r}) \psi$$

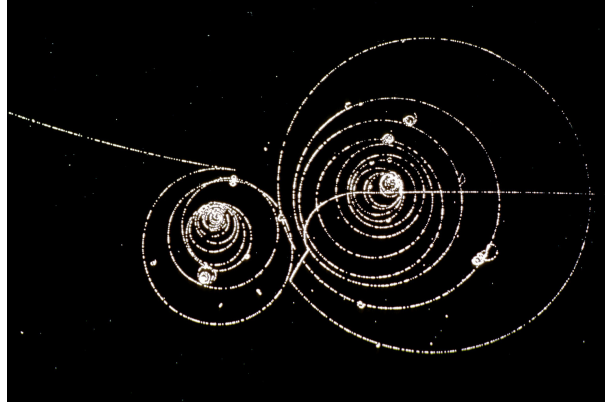
Por exemplo, a função de onda do eletrão do átomo de hidrogénio satisfaz a equação

$$-i\partial_t \psi = \Delta \psi + \frac{e^2}{r} \psi$$

Em particular, uma partícula livre é modelada pela equação

$$-i\partial_t \psi = \Delta \psi \tag{1.7}$$

que é a equação de calor com tempo imaginário!



5. (gravitação) O campo gravitacional é o próprio espaço-tempo, ou melhor, a métrica $g_{\mu\nu}$. A matéria determina o espaço-tempo de acordo com a *equação de Einstein*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

onde $R_{\mu\nu}$ e R denotam a curvatura de Ricci e a curvatura escalar, respetivamente, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, e Λ é a constante cosmológica.



6. (equações diferenciais parciais) Uma *equação diferencial parcial* (EDP) é uma lei

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots, u_{x_i x_j x_k}, \dots) = 0$$

para algumas (i.e. um número finito de) derivadas parciais

$$u_{x_i x_j \dots x_k} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} u$$

de um campo $u(x_1, \dots, x_n)$, escalar ou vetorial, definido num domínio $D \subset \mathbb{R}^n$.

A *orden* de uma EDP é a maior ordem das derivadas parciais que aparecem na equação.

Dependendo do significado físico das variáveis independentes $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (posição, tempo, velocidade, energia, ...), é posto o problema de determinar a/as solução/ões do *problema com condições iniciais*

$$u(\mathbf{x}, t_0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, t_0) = \psi(\mathbf{x}), \quad \dots$$

se as variáveis independentes são $(\mathbf{x}, t) := (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, t_0 é um “tempo inicial” e $\varphi, \psi, \dots$ são funções dadas, e/ou do *problema com condições de fronteira*

$$u(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(\mathbf{y}) \quad \text{quando } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \in \partial D,$$

se as variáveis independentes são $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, ∂D denota a fronteira do domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ e ϕ é uma função dada.

- Determine uma solução da EDP

$$u_t = 0$$

para o campo escalar $u(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$.

- Determine uma solução da EDP

$$u_{tt} = 0$$

para o campo escalar $u(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, com condições iniciais $u(x, 0) = \varphi(x)$ e $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

- Determine soluções da EDP

$$u_{tt} = u$$

para o campo escalar $u(x, t)$, com $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- Mostre que soluções de classe $\mathcal{C}^2$ da EDP

$$u_{xy} = 0$$

no plano $\mathbb{R}^2$ são $u(x, y) = f(x) + g(y)$, onde f e g são funções arbitrárias de classe $\mathcal{C}^2$.

- Mostre que as soluções de classe $\mathcal{C}^1$ da EDP

$$u_x = u_y$$

no plano $\mathbb{R}^2$ são $u(x, y) = f(x + y)$, onde f é uma função arbitrária de classe $\mathcal{C}^1$.

- Verifique que $u(x, y) = f(y/x)$, com f de classe $\mathcal{C}^1$, é solução da EDP

$$xu_x + yu_y = 0$$

2 EDPs de primeira ordem

1. (EDPs lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes) Considere a EDP

$$u_y = 0 \quad (2.1)$$

para o campo escalar $u(x, y)$ definido no plano $\mathbb{R}^2$. A equação afirma que u é independente da variável y , ou seja, que u é constante nas retas verticais $x = c$. As soluções da (2.1) são portanto da forma

$$u(x, y) = \psi(x),$$

onde ψ é uma função arbitrária de uma variável (de classe $\mathcal{C}^1$, se queremos soluções clássicas).

Por exemplo, a solução que vale $u(x, f(x)) = \varphi(x)$ ao longo da curva $y = f(x)$ é única e é dada pela expressão $u(x, y) = \varphi(x)$.

Por outro lado, existem infinitas soluções tais que $u(0, y) = c$ ao longo da reta vertical $x = 0$, com c constante (todas as funções $u(x, y) = \varphi(x)$ com $\varphi(0) = c$), mas não existe nenhuma solução que vale $u(0, y) = \theta(y)$ na reta vertical $x = 0$, se θ não é uma função constante.

Mais em geral, a EDP linear homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes

$$au_x + bu_y = 0 \quad (2.2)$$

(com $(a, b) \neq (0, 0)$, caso contrário não temos equação nenhuma!) diz que a derivada direcional do campo $u(x, y)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = (a, b)$ é nula, i.e.

$$\left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{r} + \mathbf{v}t) \right|_{t=0} = 0,$$

Isto quer dizer que u é constante ao longo das retas $\mathbf{r} + \mathbb{R}\mathbf{v}$ paralelas a $\mathbf{v}$, as soluções da EDO $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$. Estas retas têm equação cartesiana $bx - ay = c$ ao variar a constante c , e são chamadas retas características da EDP linear. As soluções da (2.2) são portanto da forma

$$u(x, y) = \psi(bx - ay)$$

onde ψ é uma função arbitrária de uma variável e de classe $\mathcal{C}^1$.

Outro ponto de vista consiste em fazer uma mudança de coordenadas que transforme a (2.2) na (2.1). Podemos, por exemplo, escolher variáveis ortogonais

$$x' = bx - ay \quad y' = ax + by$$

e observar que

$$\frac{\partial}{\partial x} = b \frac{\partial}{\partial x'} + a \frac{\partial}{\partial y'} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} = -a \frac{\partial}{\partial x'} + b \frac{\partial}{\partial y'}$$

De consequência, a equação (2.2) é equivalente a

$$a(bu_{x'} + au_{y'}) + b(-au_{x'} + bu_{y'}) = (a^2 + b^2)u_{y'}$$

e portanto, sendo $(a, b) \neq (0, 0)$, a

$$u_{y'} = 0$$

As soluções são funções arbitrárias de $x' = bx - ay$, como já sabemos.

- Determine as soluções de

$$u_x + u_y = 0$$

- Determine as soluções de

$$2u_x - 3u_y = 0$$

- Determine, se existir, uma solução de

$$u_x - u_y = 0$$

com condição inicial $u(x, 0) = \sin(x)$.

- Determine, se existir, uma solução de

$$u_x - 5u_y = 0$$

com condição inicial $u(0, y) = y^2$.

2. (EDP lineares de primeira ordem e características) Uma EDP linear de primeira ordem é uma lei

$$a_1(\mathbf{x}) u_{x_1} + \cdots + a_n(\mathbf{x}) u_{x_n} = f(\mathbf{x})$$

para o campo escalar $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})$ e $f(\mathbf{x})$ são funções dadas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. A EDP homogénea associada é

$$a_1(\mathbf{x}) u_{x_1} + \cdots + a_n(\mathbf{x}) u_{x_n} = 0.$$

O campo característico é o campo de vectores $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := (a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}))$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. As (curvas) características são as curvas integrais de $\mathbf{v}$, as soluções da EDO autónoma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ denota a característica com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$, então a derivada direccionada do campo escalar ϕ ao longo do campo vectorial $\mathbf{v}$ é

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\phi)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{x}(t)) \right|_{t=0} = a_1(\mathbf{x}) \phi_{x_1}(\mathbf{x}) + \cdots + a_n(\mathbf{x}) \phi_{x_n}(\mathbf{x}).$$

Em particular: as soluções do problema homogéneo $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u = 0$ são as funções u constantes ao longo das curvas características. Se $\Sigma \subset \Omega$ é uma hiper-superfície transversal ao campo característico $\mathbf{v}$ (ou seja, definida localmente por $\Sigma = \{f(\mathbf{x}) = 0\}$, com $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}f \neq 0$), então o problema não-homogéneo $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u = f$ com condição inicial $u|_{\Sigma}(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y})$ ($\forall \mathbf{y} \in \Sigma$) admite uma solução local numa vizinhança de Σ : num sistema de coordenadas tal que $\mathbf{v} = (1, 0, \dots, 0)$ e $\Sigma = \{x_1 = 0\}$, a solução local é

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

- Determine as características e a solução geral da EDP

$$u_x + y u_y = 0$$

- Determine as características da EDP

$$x u_x + u_y = 0$$

para o campo $u(x, y)$ definido no plano $\mathbb{R}^2$, e resolva o problema com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$.

- Descreva as soluções da EDP

$$x u_x + y u_y = 0$$

no plano $\mathbb{R}^2$ e no domínio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- Descreva as soluções da EDP

$$x u_x = y u_y$$

no plano $\mathbb{R}^2$.

- Determine características e as soluções de

$$u_x + u_y = 1$$

- Determine as características da EDP

$$u_x = f(x, y)$$

para o campo $u(x, y)$ definido no plano $\mathbb{R}^2$. É possível resolver o problema com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$?

- [St08] 1.2.
- [Io05] 2.4

3. (equação de transporte) Seja $\rho = \rho(x, t)$ a concentração de soluto num fluido unidimensional cujo campo de velocidade é $v(x, t)$. A massa total de soluto contida no intervalo entre x e $x + dx$ é $M \simeq \rho(x, t) dx$, e a sua variação no tempo é $\dot{M} \simeq \partial_t \rho(x, t) dx$. Esta variação é a soma algébrica dos fluxos que entram e saem da fronteira do intervalo, os pontos x e $x + dx$, e estes fluxos são $\rho(x, t) v(x, t)$ e $-\rho(x + dx, t) v(x + dx, t)$, respetivamente. Portanto,

$$\partial_t \rho dx \simeq \rho(x, t) v(x, t) - \rho(x + dx, t) v(x + dx, t)$$

Ao dividir por dx e ao fazer o limite quando $dx \rightarrow 0$ obtemos a equação de transporte

$$u_t + (vu)_x = 0$$

Em dimensão 3 a equação de transporte escreve-se

$$\rho_t + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ é o campo de velocidades do fluido. A equação de transporte num fluido “incompressível”, i.e. tal que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, é

$$\rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

- Determine as características da equação de transporte num fluido incompressível em dimensão um,

$$\rho_t + v \rho_x = 0 \quad (2.3)$$

onde a velocidade $v = v(t)$ é uma função apenas do tempo t .

- Mostre que uma solução da equação de transporte (2.3) com condição inicial $\rho(x, 0) = \varphi(x)$ é

$$\rho(x, t) = \varphi \left(x - \int_0^t v(s) ds \right).$$

Em particular, se a velocidade v é constante, uma solução é

$$\rho(x, t) = \varphi(x - vt).$$

4. (EDP quase-lineares de primeira ordem e características) Uma EDP quase-linear de primeira ordem é uma lei

$$a_1(\mathbf{x}, u) u_{x_1} + \dots + a_n(\mathbf{x}, u) u_{x_n} = f(\mathbf{x}, u)$$

para o campo escalar $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $a_1(\mathbf{x}, u), \dots, a_n(\mathbf{x}, u)$ e $f(\mathbf{x}, u)$ são funções dadas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. O campo característico é o campo de vectores $\mathbf{V}(\mathbf{x}, u) := (a_1(\mathbf{x}, u), \dots, a_n(\mathbf{x}, u), f(\mathbf{x}, u))$ em Ω . As (curvas) características são curvas integrais do campo característico, as soluções da EDO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(\mathbf{x}, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_n(\mathbf{x}, u) \\ \dot{u} = f(\mathbf{x}, u) \end{cases},$$

ou seja, eliminando o tempo t , de

$$\frac{dx_1}{a_1(\mathbf{x}, u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(\mathbf{x}, u)} = \frac{du}{f(\mathbf{x}, u)}.$$

Uma EDP quase-linear de primeira ordem em dimensão 2 é do género

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (2.4)$$

Se $u(x, y)$ é uma solução de (2.4), então o seu gráfico $\{z = u(x, y)\}$ é uma superfície em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, a *superfície integral*, que pode ser interpretada como a superfície de nível $F(x, y, z) = 0$ de

$$F(x, y, z) := u(x, y) - z$$

A própria equação (2.4) diz que o gradiente $\nabla F = (u_x, u_y, -1)$ é orthogonal ao campo vetorial característico $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Iso significa que $\mathbf{v}$ é tangente à superfície integral. Por outro lado, se o gráfico de uma função é tangente ao campo característico, então esta função é uma solução da EDP (2.4).

As curvas características são as curvas integrais de $\mathbf{v}$. Os gráficos das soluções são reuniões de curvas características.

Uma condição inicial $u|_C = \varphi$ é uma função φ definida numa curva $C = \{(x(s), y(s)) : s \in I\} \subset \mathbb{R}^2$. O gráfico de φ determina uma curva $\Gamma = \{(x(s), y(s), \varphi(x(s), y(s))) : s \in I\}$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Se $\mathbf{v}$ não é tangente a Γ , para cada ponto $(x(0, s), y(0, s), z(0, s))$ de Γ , com $z(0, s) := \varphi(x(0, s), y(0, s))$, passa uma característica (local), solução de

$$\begin{cases} \dot{x}(t, s) = a(x, y, z) \\ \dot{y}(t, s) = b(x, y, z) \\ \dot{z}(t, s) = c(x, y, z) \end{cases},$$

e a reunião destas características gera uma superfície integral $\Sigma = \{(x(t, s), y(t, s), z(t, s)) : (t, s) \in J \times I\}$. A curva inicial C é dita *não-característica* se não é tangente ao campo característico projetado (a, b) . Se C é não-característica então a função $(t, s) \mapsto (x(t, s), y(t, s))$ é invertível, e portanto é possível definir a função $u(x, y) = z(t(x, y), s(x, y))$ que resolve o problema.

- Determine as soluções $u(x, t)$ da EDP

$$u_t = u$$

- Determine a solução de

$$u_x + xu_y = u$$

com condição inicial $u(1, y) = \sin(y)$.

5. (equação de Euler) Considere um fluido de partículas não interagentes na reta. O campo de velocidades do fluido é $v(x, t) := \dot{x}(t)$, onde $s \mapsto x(s)$ denota a trajetória da partícula que passa pelo ponto x no instante t .

- Mostre que a equação de Newton $\ddot{x} = 0$ implica que $v(x, t)$ satisfaz a *equação de Euler*

$$v_t + vv_x = 0. \quad (2.5)$$

- Mostre que a equação (2.5) pode ser escrita

$$v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(v^2) = 0.$$

- Mostre que, se $x(t)$ é uma solução da EDO $\dot{x} = v(x, t)$, então a função $u(t) := v(x(t), t)$ é uma constante. Portanto, o vetor $(x(t), u(t))$ satisfaz a EDO característica

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$$

- Resolva o sistema característico, e deduza que uma solução implícita da equação de Euler (2.5) com condição inicial $v(x, 0) = \varphi(x)$ é dada por

$$v(x + t\varphi(x), t) = \varphi(x),$$

desde que t seja suficientemente pequeno.

- O que acontece para grandes valores de t quando o perfil de velocidades inicial $v(x, 0)$ não é constante?

6. (equação “eikonal”) Considere a equação “*eikonal*” da óptica geométrica

$$\|\nabla u\| = 1,$$

ou seja,

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1$$

para o “tempo” $u(\mathbf{r}) = u(x, y)$, definido num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com condições de fronteira $u(\mathbf{r}) = 0$ se $\mathbf{r} \in \partial\Omega$.

- Mostre que $u(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\|$ é uma solução se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

3 Operadores diferenciais lineares

1. (equações de Maxwell e ondas electromagnéticas) O campo elétrico $\mathbf{E}$ e o campo magnético $\mathbf{B}$ “in vacuum” (numa região sem cargas nem correntes) satisfazem as *equações de Maxwell*

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

Os campos dependem das variáveis espaço-temporais t e $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Aplicando o operador rotacional $\nabla \times$ às duas equações na esquerda (leis de Ampère e Faraday), usando a identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$$

(onde $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ é o Laplaciano) e as equações de Maxwell à direita (leis de Gauss), deduzimos as equações de onda

$$\partial_{tt} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = 0 \quad \partial_{tt} \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

para os dois campos.

- Verifique que as “ondas planas”

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (3.3)$$

(ou a parte real $\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ desta expressão se estamos interessados em soluções físicas) são soluções da equação de onda (3.2) desde que a “frequência (angular)” ω e o “vetor de onda” $\mathbf{k}$ satisfazam a “relação de dispersão”

$$\omega^2 - \|\mathbf{k}\|^2 = 0.$$

A lei de Gauss $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ então diz que o vetor constante $\mathbf{E}_0$ é ortogonal a $\mathbf{k}$. Observe que a velocidade de fase das ondas planas, $v = \omega / \|\mathbf{k}\|$, não depende da frequência ω .

- Descreva os conjuntos de nível das ondas planas definidas acima para um tempo t fixado, depois descreva como mudam quando o tempo cresce. Justifique o nome “ondas planas”.
- Use a lei de Faraday para calcular o campo magnético

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

associado à solução (3.3). Use as leis de Gauss para verificar que os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são ortogonais, e oscilam no plano ortogonal ao vetor de onda $\mathbf{k}$ (que é a direção de propagação da onda).

- Observe que uma sobreposição (finita)

$$\sum_i \mathbf{E}_i e^{i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}$$

de ondas planas também é solução da equação de onda.

2. (derivadas, translações e ondas planas) Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, de grau $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, o operador diferencial ∂^α , que age sobre o espaço das funções C^∞ (ou suficientemente diferenciáveis) definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ com valores reais ou complexos, é definido por

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

As *ondas planas*, ou *harmónicas*, são as funções $e_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$e_\xi(\mathbf{x}) := e^{i\xi \cdot \mathbf{x}},$$

com $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in (\mathbb{R}^n)' \approx \mathbb{R}^n$ dito “vetor de onda”¹. Os valores das e_ξ ’s pertencem à circunferência unitária $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, que é um subgrupo (compacto) do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dos números complexos diferentes de zero. A identidade

$$e_\xi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = e_\xi(\mathbf{x}) e_\xi(\mathbf{y}),$$

diz que as ondas planas são homomorfismos do grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ no grupo multiplicativo $\mathbb{S}$.

- Verifique que as ondas planas $e_\xi(\mathbf{x}) = e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}$ são funções próprias dos operadores diferenciais ∂^α , com $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, com valores próprios

$$(i\xi)^\alpha := (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n},$$

ou seja,

$$\partial^\alpha e_\xi = (i\xi)^\alpha e_\xi.$$

- O operador de *translação* $T_{\mathbf{a}}$, com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(T_{\mathbf{a}}f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{a}).$$

Verifique que as ondas planas $e_\xi(\mathbf{x}) = e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}$ são também funções próprias dos operadores de translação com valores próprios $\lambda_{\mathbf{a}}(\xi) = e^{i\xi \cdot \mathbf{a}}$, ou seja,

$$T_{\mathbf{a}} e_\xi = e^{i\xi \cdot \mathbf{a}} e_\xi.$$

- O operador de *modulação* M_ξ , com $\xi \in (\mathbb{R}^n)' \simeq \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(M_\xi f)(\mathbf{x}) := e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}).$$

Mostre que

$$T_{\mathbf{a}} M_\xi = e^{i\xi \cdot \mathbf{a}} M_\xi T_{\mathbf{a}}.$$

3. (**operadores diferenciais lineares, princípio de sobreposição**) Um *operador diferencial linear* de grau k , definido numa região $X \subset \mathbb{R}^n$, é um polinómio

$$L = P(\partial, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha,$$

em ∂ , com “coeficientes” $a_\alpha(\mathbf{x})$ que são funções $a_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$, e onde pelo menos uma das $a_\alpha(\mathbf{x})$ com $|\alpha| = k$ (o *grau* do operador) é diferente de zero. Opera, por exemplo, no espaço vetorial $\mathcal{C}^\infty(X)$ das funções infinitamente diferenciáveis definidas em X , pois define um endomorfismo $L : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$. Também é possível pensar que $L : \mathcal{C}^{n+k}(X) \rightarrow \mathcal{C}^n(X)$, com $n \geq 0$ arbitrário. O valor de L sobre o vetor $u = u(\mathbf{x})$ é o vetor

$$(Lu)(\mathbf{x}) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x}).$$

A escolha do domínio de tais operadores em espaços lineares de dimensão infinita é uma escolha delicada, que depende do problema que queremos tratar (tipicamente das condições de fronteira) e do tipo de soluções às quais estamos interessados. Soluções das EDPs que possuem todas as derivadas necessárias para escrever a próprio aquaçã são chamadas *soluções clássicas*. Por outro lado, é possível e útil, tanto em física-matemática como em engenharia, procurar soluções “fracas” das EDPs, e portanto definir operadores diferenciais em espaços maiores (chamados espaços de “distribuições”) dos quais fazem parte funções que nem sequer admitem derivadas no sentido usual.

A linearidade é a seguinte propriedade importante: se u e v são funções (por exemplo $\mathcal{C}^\infty$), então

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L u + \mu L v$$

¹Às vezes é útil usar a normalização alternativa $e_\xi(\mathbf{x}) = e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}}$

para todos os coeficientes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Em particular, o valor de L no vetor nulo $u(\mathbf{x}) \equiv 0$ é o vetor nulo.

O operador L comuta com as translações (que fazem sentido desde que a região X seja invariante por translações, e portanto seja o próprio $\mathbb{R}^n$) se os coeficientes a_α não dependem do ponto $\mathbf{x}$, i.e. são constantes.

Exemplos de operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes são o Laplaciano $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, o operador de d'Alembert $\square := \partial_{tt} - \Delta$, o operador do calor $\partial_t - \Delta$.

Uma EDP linear é uma equação do género

$$Lu = f \quad (3.4)$$

onde $L = P(\partial, \mathbf{x})$ é um operador diferencial linear e onde $f(\mathbf{x})$ é uma função dada. Uma interpretação natural é que f é uma “força externa” ou uma “fonte”, e as soluções u são os efeitos de f sobre o sistema modelado pelo operador L . A equação homogénea associada é

$$Lu = 0 \quad (3.5)$$

cujas soluções são os vetores do núcleo do operador L .

Exemplos de EDPs homogéneas são a equação de Laplace $\Delta u = 0$, a equação de ondas $\square u = 0$ e a equação de calor $\partial_t u - \Delta u = 0$. Exemplos de EDPs lineares mas não homogéneas são a equação de Poisson $\Delta u = 4\pi\rho$, a lei de Ampère $\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}$.

A seguinte observação é evidente.

Teorema 3.1 (princípio de sobreposição). *O espaço das soluções de uma EDP homogénea (3.5) é um espaço linear.*

Ou seja, se $u(\mathbf{x})$ e $v(\mathbf{x})$ são soluções de (3.5), então também uma combinação linear

$$\lambda u(\mathbf{x}) + \mu v(\mathbf{x}),$$

com coeficientes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, é solução de (3.5), e portanto toda combinação linear finita de soluções é solução. Em particular, uma EDP homogénea admite a solução trivial $u(\mathbf{x}) \equiv 0$. Tipicamente, o espaço $\mathcal{L}$ das soluções de (3.5) é um espaço de dimensão infinita (ou seja, não admite uma base finita). Ainda mais importante é então a possibilidade de representar as soluções como somas infinitas, ou seja, séries, de soluções simples, que formam num certo sentido uma “base” de $\mathcal{L}$. Esta observação será central na teoria das séries de Fourier.

O espaço das soluções da EDP linear (3.4) é um espaço afim modelado sobre o espaço linear $\mathcal{L}$ das soluções da equação homogénea associada, ou seja, é um “plano” $w + \mathcal{L}$ onde $w(\mathbf{x})$ é uma solução (particular) da (3.4).

As EDPs lineares não homogéneas também verificam o

Teorema 3.2 (princípio de sobreposição). *Seja $L = P(\partial, \mathbf{x})$ um operador diferencial linear, e sejam $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ duas funções. Se u é uma solução de $Lu = f$ e v é uma solução de $Lv = g$, então a sobreposição $w = \lambda u + \mu v$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, é solução da EDP linear*

$$Lw = \lambda f + \mu g.$$

Em outras palavras: quando o sistema é linear, o efeito produzido por uma sobreposição de um número finito de forças é a sobreposição dos efeitos produzidos por cada uma das forças.

Ainda mais interessante é a possibilidade de considerar somas infinitas, ou até integrais. Esta observação será usada na teoria do potencial.

- Diga se as seguintes EDPs (famosas) são lineares, homogêneas, não lineares (as letras gregas denotam parâmetros):

$$\begin{array}{ll}
\Delta u + \lambda u = 0 & (\text{equação de Helmholtz}) \\
\|\nabla u\|^2 = 1 & (\text{equação eikonal}) \\
u_{xx} - xu_{yy} = 0 & (\text{equação de Euler-Tricomi}) \\
u_{tt} - u_{xx} = \sin(t) & (\text{corda vibrante forçada}) \\
\Delta u + e^{\lambda u} = 0 & (\text{equação de Liouville}) \\
u_{tt} + u_t + u_{xxxx} = 0 & (\text{equação de Euler-Bernoulli}) \\
u_t - u_{xx} + uu_x = 0 & (\text{equação de Burger}) \\
u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 & (\text{equação de sine-Gordon}) \\
u_{tt} + \alpha u_t - u_{xx} + \beta u = 0 & (\text{equação do telégrafo}) \\
u_t + u_{xxx} - 6uu_{xx} = 0 & (\text{equação de Korteweg-de Vries}) \\
iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = i\alpha u & (\text{equação de Ginzburg-Landau})
\end{array}$$

- Dê exemplos de EDPs sem soluções.
 - [St08] 1.1.
 - [Io05] 1.4.
4. (ondas planas e símbolos) As ondas planas $e_{\xi}(\mathbf{x}) := e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}$, com “vector de onda” $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, são funções próprias de cada operador linear com coeficientes constantes $L = P(\partial)$, ou seja, satisfazem

$$Le_{\xi} = \sigma(\xi) e_{\xi},$$

onde o valor próprio, o polinómio

$$\sigma(\xi) := P(i\xi),$$

é dito *símbolo* do operador L . O *símbolo principal* é o termo (polinómio homogêneo) de grau máximo,

$$\sigma_p(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha} \cdot (i\xi)^{\alpha},$$

se k é o grau de L . O operador $L = P(\partial)$ é dito *elíptico* se o seu símbolo principal só se anula na origem, i.e. se $\sigma_p(\xi) \neq 0$ para todos os $\xi \neq 0$.

Se L é um operador de grau 2, então o seu símbolo é uma forma quadrática, um polinómio de grau 2 do género

$$\sigma_p(\xi) = \sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j.$$

O operador é elíptico se esta forma quadrática é definida positiva ou negativa.

Em geral, o símbolo do operador linear $L = P(\partial, \mathbf{x})$ é a função que a cada $\mathbf{x} \in X$ associa o polinómio $\xi \mapsto P(i\xi, \mathbf{x})$.

- Determine os símbolos dos seguintes operadores, e determine os domínios onde são elípticos

$$\begin{array}{lll}
\partial_{xx} + \partial_{yy} & \partial_{xx} - \partial_{yy} & \partial_t - \partial_{xx} \\
\partial_{tt} - \partial_{xx} + \partial_x & \partial_{xx} - x\partial_{yy} &
\end{array}$$

5. (classificação dos operadores diferenciais lineares de grau 2) O *símbolo* de um operador diferencial linear de grau dois

$$L = P(\partial) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0$$

definido num domínio de $\mathbb{R}^n$ é o polinómio quadrático

$$\sigma(i\xi) := - \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \xi_i \xi_j + i \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \xi_i + a_0,$$

onde $A := (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica que define a “forma quadrática” $-\sigma_p(i\xi) = \langle \xi, A\xi \rangle$. A forma quadrática pode ser diagonalizada (por um operador ortogonal e depois umas dilatações/contrações) e transformada na forma canónica, associada a uma matriz diagonal $D = CAC^\top$ com valores próprios ± 1 e 0. Portanto, existe uma base de $\mathbb{R}^n$ tal que o símbolo principal do operador L assume a forma canónica

$$-\sigma_p(\xi) = (\xi_1 + \cdots + \xi_p) - (\xi_{p+1} + \cdots + \xi_{p+q}),$$

onde $p + q \leq n$, e q é a “índice” da forma quadrática. O operador L é dito *elíptico* se o seu símbolo principal é uma forma quadrática definida (positiva ou negativa), ou seja equivalente a

$$\pm (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2).$$

O operador L é dito *hiperbólico* se o seu símbolo principal é uma forma quadrática não-degenerada de índice 1 ou $n - 1$, ou seja equivalente a

$$\pm (\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 - \xi_n^2).$$

O operador L é dito *parabólico* se o seu símbolo principal é uma forma quadrática degenerada com núcleo uni-dimensional e definida (positiva ou negativa) no complemento ortogonal do núcleo, ou seja equivalente a

$$\pm (\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2).$$

A EDO homogénea associada ao operador L é $Lu = 0$, ou seja,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i u_{x_i} + a_0 = 0$$

A mudança (linear) de variáveis independentes $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = C\mathbf{x}$, ou seja,

$$y_i = \sum_j c_{ij} x_j,$$

definida pela matriz invertível $C = (c_{ij})$ que diagonaliza a forma quadrática A , transforma as derivadas parciais de acordo com

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_j c_{ji} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Então transforma o operador L num operador

$$\sum_{k, l} \left(\sum_{i, j} c_{ki} a_{ij} c_{lj} \right) \frac{\partial}{\partial y_k \partial y_l} + \text{termos de ordem um},$$

cujas partes principais são o operador diagonal associado a matriz diagonal $D = CAC^\top$. De consequência, a EDP $Lu = 0$ é transformada na sua forma canónica.

Em dimensão 2, uma EDP linear com coeficientes constantes de segunda ordem é uma equação do género

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad (3.6)$$

A matriz do símbolo principal é a matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

que define a forma quadrática $\xi \cdot A \xi$. Uma mudança de coordenadas linear pode transformar esta forma quadrática numa forma diagonal com valores próprios ± 1 ou 0 , e de consequência a EDP (3.6) na sua forma canónica. Então a EDP (3.6) é elíptica se $\det A = ac - b^2 > 0$, e portanto é equivalente a

$$u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0,$$

é hiperbólica se $\det A < 0$, e portanto é equivalente a

$$u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0,$$

e parabólica se $\det A = 0$ e pelo menos um dos coeficientes a, b ou c for $\neq 0$ (caso contrário a equação é de primeira ordem), e portanto é equivalente a

$$u_{xx} + \dots = 0.$$

- [St08] 1.6.

6. (equação de Klein-Gordon) A função de onda $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ de uma partícula livre relativística de massa própria m satisfaz a equação de Dirac, e portanto a equação de Klein-Gordon

$$\psi_{tt} - \Delta \psi + m^2 \psi = 0.$$

- Verifique que as ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\xi \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

são soluções da equação de Klein-Gordon em $\mathbb{R}^3$ se a frequência ω (a energia da partícula) e o número de onda ξ (o momento linear) satisfazem a relação de dispersão

$$\omega^2 = \|\xi\|^2 + m^2$$

(que são as relações momento-energia da relatividade especial). Neste caso, a velocidade de fase das ondas depende de maneira não-linear da frequência, pois é

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}$$

Portanto, ondas com diferentes frequências propagam-se a diferentes velocidades. Este fenómeno é chamado “dispersão”.

7. (dispersão)



4 Difusão/calor

1. **(Laplaciano)** O *Laplaciano* (ou *operador de Laplace*) no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o operador diferencial $\Delta = \text{div} \circ \text{grad}$, definido, em coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, por

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

se $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função real de classe C^2 .

A *equação de Laplace* para o campo escalar $u(\mathbf{x})$, definido num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é a EDP

$$\Delta u = 0. \quad (4.1)$$

As soluções da equação de Laplace são ditas *funções harmônicas*.

O Laplaciano é invariante por translações. Ou seja, $\Delta \circ T_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}} \circ \Delta$ se $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. De consequência, se $u(\mathbf{x})$ é uma função harmônica, então também $v(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ é uma função harmônica, para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

- Quais funções satisfazem a equação de Laplace $u''(x) = 0$ na reta?
- Determine as soluções da equação de Laplace $u''(x) = 0$ no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com condições de fronteira $u(a) = A$ e $u(b) = B$.
- Verifique que

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

é uma solução da equação de Laplace (4.1) em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- Verifique que (o potencial elétrico/gravitacional gerado por uma carga/massa colocada na origem)

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

é uma solução da equação de Laplace (4.1) em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

- Se $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ é uma função holomorfa numa região do plano complexo $\mathbb{C}$, com coordenadas $z = x + iy$, então (as condições de Cauchy-Riemann implicam que) a sua parte real $u(x, y)$ e a sua parte imaginária $v(x, y)$ são funções harmônicas.
2. **(equação de calor)** A *equação de calor/difusão* para o campo escalar $u(\mathbf{x}, t)$, definido para $\mathbf{x}$ numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e tempos $t > 0$, é

$$u_t = \beta \Delta u \quad (4.2)$$

onde Δ é o Laplaciano no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e $\beta > 0$ é um coeficiente de difusão. As funções harmônicas são soluções estacionárias (i.e. independentes do tempo) da equação de calor.

- Mostre que a substituição $\tau = \beta t$ transforma a equação do calor acima em $u_\tau = \Delta u$.
- Mostre que se $u(\mathbf{x}, t)$ é uma solução da equação de calor (4.2), então também $v(\mathbf{x}, t) := u(\mathbf{x} - \mathbf{a}, t)$ é solução, para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ (invariância por translações).
- Mostre que se $u(\mathbf{x}, t)$ é uma solução da equação de calor (4.2), então também $v(\mathbf{x}, t) := u(\sqrt{\lambda} \mathbf{x}, \lambda t)$ é solução, para todo $\lambda > 0$ (invariância por quase-homotetias).
- Verifique que $v(x, t) := f(x/\sqrt{t})$ é uma solução da equação de calor $u_t - u_{xx} = 0$ (na reta) se a função $f(q)$ é solução da equação diferencial

$$f'' + \frac{q}{2} f' = 0$$

e portanto se f é uma primitiva da Gaussiana $Ce^{-q^2/4}$. Por exemplo, ao escolher $C = 1$,

$$v(x, t) = \int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-q^2/4} dq.$$

- Verifique que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}$$

(a derivada em ordem a x da solução $v(x, t)$ da alínea anterior) é uma solução da equação de calor $u_t - u_{xx} = 0$ na reta.

- Verifique que

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/4\beta t}$$

é uma solução da equação de calor (4.2) no plano.

3. (**princípio do máximo, unicidade e estabilidade**) Dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um problema natural é procurar soluções da equação de calor

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty)$$

dada uma “condição inicial”

$$u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{em } \bar{\Omega} \times \{0\}$$

e umas “condições de fronteira”

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \partial\Omega \times [0, \infty)$$

(compatíveis com a condição inicial). As soluções “clássicas” são funções de classe $\mathcal{C}^2$ no domínio $\Omega \times (0, \infty)$ (mas é suficiente que sejam contínuas as derivadas parciais u_t e u_{xx}) e contínuas na aderência $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$.

A unicidade e a estabilidade das soluções da equação de calor numa região limitada são consequências de um princípio físico intuitivo: um ponto interior de um condutor isolado num instante $t > 0$ não pode ser mais quente ou mais frio do que era no instante inicial $t = 0$, ou dos pontos da fronteira do condutor. Dado um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e um tempo finito $T > 0$, consideramos o cilindro $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$, e a sua *fronteira parabólica* $\partial_p \Omega_T := (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T])$ (ou seja, os pontos onde são dadas as condições iniciais e de fronteira).

Teorema 4.1 (Princípio do máximo). *Seja $u(\mathbf{x}, t)$ uma solução de classe $\mathcal{C}^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_T)$ da equação de calor*

$$u_t - \Delta u = f$$

no cilindro Ω_T , onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $f \leq 0$. Então o máximo (e também o mínimo se $f = 0$) de u em $\bar{\Omega}_T$ é atingido na fronteira parabólica $\partial_p \Omega_T$.

Demonstração. (em dimensão um) O primeiro passo consiste em provar a afirmação para a função $v := u - \varepsilon t$, com $\varepsilon > 0$, no cilindro menor $\Omega_{T-\varepsilon}$, que satisfaz a equação de calor

$$v_t + v_{xx} = f - \varepsilon < 0. \quad (4.3)$$

Seja (x_0, t_0) um ponto de máximo de v em $\bar{\Omega}_{T-\varepsilon}$. Se $(x_0, t_0) \notin \partial_p \Omega_{T-\varepsilon}$, então neste ponto as derivadas de v satisfazem $v_x(x_0, t_0) = 0$ (porque x_0 é um ponto interior de Ω) e

$$v_t(x_0, t_0) \geq 0 \quad (4.4)$$

(porque t_0 pode também ser igual a $T - \varepsilon$). Pela fórmula de Taylor,

$$v(x, t_0) - v(x_0, t_0) = v_{xx}(\bar{x}, t_0)(x - x_0)^2 \leq 0$$

para algum ponto $\bar{x}$ entre x e x_0 . No limite quando $x \rightarrow x_0$ temos portanto

$$v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0. \quad (4.5)$$

Mas as desigualdades (4.4) e (4.5) não são compatíveis com (4.3). Esta contradição prova que

$$\max_{\bar{\Omega}_{T-\varepsilon}} v = \max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} v.$$

A função u é limitada por

$$v \leq u \leq v + \varepsilon T \quad (4.6)$$

em $\bar{\Omega}_T$. A primeira das desigualdades (4.6) implica que

$$\max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} v \leq \max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} u \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u$$

Usando também a segunda das desigualdades (4.6) e a continuidade (uniforme, pois estamos numa região compacta) de u , obtemos

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \max_{\bar{\Omega}_{T-\varepsilon}} u \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \max_{\bar{\Omega}_{T-\varepsilon}} (v + \varepsilon T) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} v + \varepsilon T \right) \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u$$

Se $f = 0$, a afirmação sobre o mínimo segue considerando o máximo de $-u$. $\square$

Uma primeira consequência importante é o teorema de unicidade para as soluções da equação de calor num domínio limitado.

Teorema 4.2 (Unicidade). *Existe no máximo uma solução $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_T)$ da equação de calor não-homogênea*

$$u_t - \Delta u = f,$$

com $f \in \mathcal{C}^0(\Omega_T)$, num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dadas condições iniciais e de fronteira arbitrárias $u = g$ em $\partial_p \Omega_T$, com $g \in \mathcal{C}^0(\partial_p \Omega_T)$.

Demonstração. A diferença entre duas soluções satisfaz a equação de calor homogênea e é nula na fronteira parabólica. Pelo princípio do máximo, o teorema 4.1, é identicamente nula. $\square$

Outra consequência é um resultado de estabilidade.

Teorema 4.3 (Comparação e estabilidade). *Sejam u e v soluções de classe $\mathcal{C}^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_T)$ das equações de calor*

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{e} \quad v_t - \Delta v = g,$$

respetivamente, num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

i) Se $u \geq v$ em $\partial_p \Omega_T$ e $f \geq g$, então $u \geq v$ em Ω_T .

ii) A diferença entre u e v é limitada por

$$\max_{\bar{Q}_T} |u - v| \leq \max_{\partial_p \Omega_T} |u - v| + T \cdot \max_{\bar{\Omega}_T} |f - g|.$$

Demonstração. A primeira afirmação vem do princípio do máximo aplicado a $w := v - u$, pois satisfaz $w_t - \Delta w = g - f \leq 0$ e é não positiva na fronteira parabólica.

Para provar a segunda afirmação, definimos $M := \max_{\bar{\Omega}_T} |f - g|$. As funções

$$w^\pm := \pm(v - u) - tM$$

satisfazem

$$w_t^\pm - \Delta w^\pm = \pm(g - f) - M \leq 0$$

e portanto o princípio do máximo 4.1. De consequência,

$$\begin{aligned} \max_{\Omega_T} \pm(v - u) &= \max_{\Omega_T} (tM + w^\pm) \\ &\leq \max_{\Omega_T} tM + \max_{\Omega_T} w^\pm \\ &\leq TM + \max_{\partial_p \Omega_T} (\pm(v - u) - tM) \\ &\leq TM + \max_{\partial_p \Omega_T} |v - u| \end{aligned}$$

□

• [St08] 2.3.

4. (método da energia) Se $u(x, t)$ é uma solução da equação de calor homogênea

$$u_t - u_{xx} = 0$$

no intervalo $[0, \ell]$ com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$, então a *energia*

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_0^\ell u(x, t)^2 dx$$

é não-crescente, pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= \int_0^\ell u u_t dx = \int_0^\ell u u_{xx} dx \\ &= - \int_0^\ell u_x^2 dx + [u u_x]_0^\ell = - \int_0^\ell u_x^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Em particular, se a energia inicial é nula, i.e. $\mathcal{E}(0) = 0$, então a energia fica nula para todos os tempos $t \geq 0$

- Use esta observação para dar uma prova alternativa do teorema de unicidade 4.2.
- Use esta observação para provar o seguinte teorema de estabilidade: se u e v são soluções da equação de calor homogênea no intervalo $[0, \ell]$ com condições de fronteira nulas, então

$$\int_0^\ell (u(x, t) - v(x, t))^2 dx \leq \int_0^\ell (u(x, 0) - v(x, 0))^2 dx.$$

5. (movimento Browniano) No modelo do movimento Browniano proposto por Einstein em 1905², a densidade de probabilidade $P(x, t)$ de encontrar a partícula Browniana na posição x no tempo t sabendo que ela estava na posição 0 no tempo 0 é a solução não-negativa da equação da difusão

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

tal que $\lim_{t \rightarrow 0} P(x, t) = 0$ para todo o $x \neq 0$, e $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = 1$ para todo o tempo $t > 0$. O “coeficiente de difusão” é $\beta = \frac{RT}{N\alpha}$, onde R é a constante de gás perfeito, T a temperatura absoluta, N o número de Avogadro, e $\alpha = 6\pi\eta\rho$ um coeficiente de fricção (que depende da viscosidade dinâmica η do líquido e do raio ρ da partícula Browniana).

- Verifique que a Gaussiana

$$P_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}} e^{-x^2/(4\beta t)}.$$

resolve o problema do movimento Browniano.

²A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* **17**, 549, 1905 [English translation in A. Einstein, *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, Dover, New York, 1956].

- Verifique que o seu integral na reta real é igual a um (calcule o quadrado do integral, que é equivalente a um integral no plano, usando coordenadas polares).
- Verifique que

$$P_{t+s}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) P_s(x-y) dy$$

e interprete este facto.

- Calcule o caminho quadrático médio da partícula Browniana no tempo t , definido por

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_t(x) dx.$$

6. (equação de Burgers) Considere a *equação de Burgers*

$$u_t = \mu u_{xx} + uu_x$$

com viscosidade $\mu > 0$.

- (substituição de Cole³-Hopf⁴) Mostre que se $v(x, t)$ é uma solução da equação de calor $v_t = \mu v_{xx}$, então

$$u = 2 \frac{\partial}{\partial x} \log v = \frac{2}{v} v_x$$

é uma solução da equação de Burgers $u_t = \mu u_{xx} + uu_x$.

³J.D. Cole, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* **9** (1951), 225-236.

⁴E. Hopf, The partial differential equation $ut + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 201-230.

5 Ondas

1. (equação de onda) A equação de onda para o campo $u(\mathbf{x}, t)$, com $\mathbf{x}$ num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, é

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad (5.1)$$

onde $c > 0$ é a velocidade de propagação das ondas. Os físicos também usam a notação $\square u = 0$, onde $\square := \partial_{tt} - \Delta$ é o *operador de d'Alembert*, em unidades em que $c = 1$.

- Mostre que a substituição $\tau = ct$ transforma a equação de onda (5.1) em $u_{\tau\tau} - \Delta u = 0$.
- Mostre que se $u(\mathbf{x}, t)$ é uma solução da equação de onda (5.1), então também $v(\mathbf{x}, t) := u(\mathbf{x} - \mathbf{a}, t)$ é solução, para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ (invariância por translações).
- Mostre que se $u(\mathbf{x}, t)$ é uma solução da equação de onda (5.1), então também $v(\mathbf{x}, t) := u(\lambda \mathbf{x}, \lambda t)$ é solução, para todo $\lambda > 0$ (invariância por homotetias).
- Verifique que as *ondas planas*

$$u_{\xi}(\mathbf{x}, t) := A e^{i(\xi \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

são soluções da equação das ondas $u_{tt} = c^2 \Delta u$ no “espaço-tempo” $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, se a frequência ω e o número de onda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfazem a relação de dispersão

$$\omega^2 - c^2 \|\xi\|^2 = 0.$$

- Escreva a equação de onda em coordenadas esféricas no espaço $\mathbb{R}^3$.
2. (solução de d'Alembert da equação de onda) A equação de onda em uma dimensão (espacial) é

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (5.2)$$

A mudança de variáveis independentes $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$, onde $\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$, transforma a equação de onda (5.2) na forma canónica

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad (5.3)$$

para a função $v(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$, ou seja,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) v = 0,$$

A solução geral de (5.3) é uma sobreposição $f(\xi) + g(\eta)$, i.e.

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

de duas “ondas viajantes” (traveling waves) com velocidades $\pm c$ e perfis f e g (duas funções diferenciáveis arbitrárias).

Teorema 5.1 (fórmula de d'Alembert⁵). *A solução da equação de onda na reta real com condições iniciais $u(x, 0) = \phi(x)$ e $u_t(x, 0) = \psi(x)$ é dada por*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy \quad (5.4)$$

O valor da solução u no ponto (x, t) do espaço-tempo depende apenas (e é soma das médias aritméticas!) dos valores iniciais nos pontos $x \pm ct$ e dos valores iniciais da derivada no intervalo $(x - ct, x + ct)$.

⁵J.-B. le Rond D'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, *Histoire de l'acadmie royale des sciences et belles lettres de Berlin* **3** (1747), 214-219.

- Considere a mudança de coordenadas do plano $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$, onde $\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$. Verifique que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \frac{\partial}{\partial t} = c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

Deduza que (5.2) é equivalente a (5.3).

- Prove a fórmula de d'Alembert, ou seja, resolva o sistema (não linear!)

$$\begin{aligned} f + g &= \phi \\ c(f' - g') &= \psi \end{aligned}$$

para as funções f e g (os perfis das ondas viajantes).

- Mostre que, se as condições iniciais $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são nulas fora dum intervalo $[-L, L]$, então a solução $u(x, t)$ é nula fora do intervalo $[-L - ct, L + ct]$, e dê uma interpretação.
- Determine uma solução quando as condições iniciais são

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos(2\pi x),$$

ou

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- Mostre que, se as condições iniciais $u(x, 0) = \phi(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$ são funções ímpar, então a solução de d'Alembert $u(x, t)$ é uma função ímpar de x para cada tempo t . Use esta observação para resolver o problema das ondas na semi-reta $x \geq 0$ com condição de fronteira nula $u(0, t) = 0$ (condições de fronteira de Dirichlet).
 - [St08] 2.1.
3. (energia, unicidade e estabilidade) As pequenas vibrações de uma corda vibrante com densidade linear ρ , tensão k e comprimento ℓ , são modeladas pela ‘equação da corda vibrante’

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

onde $u(x, t)$ denota o deslocamento transversal, na posição $x \in [0, \ell]$ e o tempo $t \in \mathbb{R}$, e $c = \sqrt{k/\rho}$. A unicidade das soluções é também consequência de um princípio físico: a conservação da energia. A *energia* de uma corda vibrante é

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\rho (u_t)^2 + k (u_x)^2 \right) dx$$

Se $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ para todos os tempos t , então a energia é uma constante do movimento, pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= \int_0^\ell (\rho u_t u_{tt} + k u_x u_{tx}) dx \\ &= [k u_t u_x]_0^\ell + \int_0^\ell (\rho u_t u_{tt} - k u_t u_x^2) dx \\ &= \int_0^\ell \rho u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx = 0. \end{aligned}$$

Teorema 5.2 (Unicidade das soluções). *Existe no máximo uma solução de classe $\mathcal{C}^2$ da equação da corda vibrante forçada*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t)$$

no intervalo $[0, \ell]$, dadas umas condições iniciais $u(x, 0) = \varphi(x)$ and $u_t(x, 0) = \psi(x)$ e condições de fronteira $u(0, t) = \lambda(t)$, $u(\ell, t) = \mu(t)$.

Demonstração. A diferença $w = u_1 - u_2$ entre duas soluções, u_1 e u_2 , é uma solução da equação de onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ com condições iniciais e de fronteira triviais. A energia de w é igual ao seu valor inicial, que é zero. Portanto $\partial w / \partial x$ e $\partial w / \partial t$ são identicamente nulas, e de consequência w é constante e igual ao seu valor inicial, que também é nulo. $\square$

Teorema 5.3 (Estabilidade das soluções). *Para cada $\varepsilon > 0$ e cada tempo $T > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$ tal que, se u_1 e u_2 são duas soluções da equação de onda $u_{tt} - u_{xx} = 0$ com condições iniciais que diferem por menos de $|u_1(x, 0) - u_2(x, 0)| \leq \delta$ então*

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$$

para cada posição $x \in \mathbb{R}$ e cada tempo $0 \leq t \leq T$.

Demonstração. Se os valores absolutos das condições iniciais $u(x, 0)$ e $u_t(x, 0)$ são limitadas por δ , a fórmula de d'Alembert (5.4) diz que a solução da equação de onda na reta é limitada por $|u(x, t)| \leq \delta + \delta t$. Em particular, para tempos $0 \leq t \leq T$, a solução é limitada por $\delta(1 + T)$. Portanto, basta considerar $\delta(\varepsilon, T) = \varepsilon / (1 + T)$. $\square$

- [St08] 2.2.

4. (equação de Korteweg-de Vries) Considere a equação de Korteweg-de Vries⁶ (KdV)

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0. \quad (5.5)$$

- Mostre que $u(x, t) := \phi(x - vt - x_0)$ é uma solução da (5.5) se ϕ é uma solução da EDO

$$-v\phi' + \phi''' + 6\phi\phi' = 0,$$

e portanto se existe uma constante c tal que ϕ é uma solução da equação de Newton

$$\phi'' = -3\phi^2 + v\phi + c$$

- Verifique que a “secante hiperbólica”

$$\operatorname{sech}(x) := \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

é solução da EDO

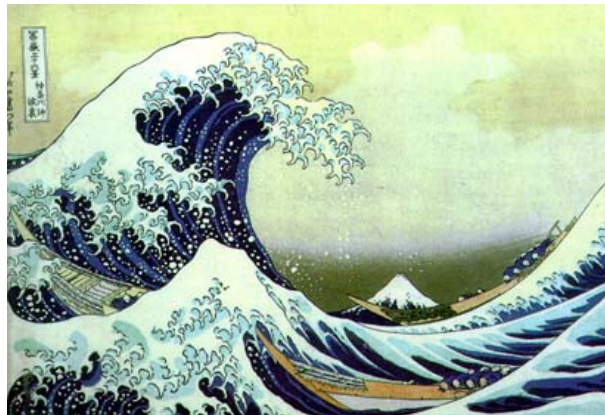
$$f'' = -2f^2 + f$$

com condições de fronteira $f(\pm\infty) = 0$.

- Deduza que

$$u(x, t) = \frac{v}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right)$$

é uma solução da (5.5), que descreve uma “onda solitária” (*soliton*), localizada numa vizinhança de $x_0 + vt$, que viaja com velocidade v .



⁶D.J. Korteweg and G. de Vries, On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Wave, *Philosophical Magazine* **39** (1894), 422-443

6 Separação de variáveis, harmônicas e modos

1. (corda vibrante e harmônicas) As pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ , tensão k e densidade linear ρ são modeladas pela equação de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (6.1)$$

com condições de fronteira (*condições de Dirichlet*)

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t,$$

onde $u(x, t)$ denota o deslocamento transversal da corda na posição $x \in [0, \ell]$ e no tempo t , e $c = \sqrt{k/\rho}$. Para ter fórmulas simples, consideramos $\ell = \pi$ (que corresponde a uma mudança de variável $x \mapsto x' = \pi x/\ell$)

O produto $u(x, t) = X(x)T(t)$ é uma solução “separável” da equação de onda (6.1) se $X T'' = c^2 X'' T$, e portanto se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$X'' = \lambda X \quad \text{e} \quad T'' = \lambda c^2 T.$$

As únicas soluções não triviais do problema de Sturm-Liouville $X'' = \lambda X$ no intervalo $[0, \pi]$ com condições de fronteira nulas $X(0) = X(\pi) = 0$ são proporcionais a $X_n(x) = \sin(nx)$ e têm valores próprios $\lambda_n = -n^2$, com $n = 1, 2, 3, \dots$. Para cada um destes valores de λ_n , T_n é solução da equação do oscilador harmônico $T_n'' = -n^2 c^2 T_n$ de frequência nc . As soluções separáveis do problema da corda vibrante são portanto as *ondas estacionárias*

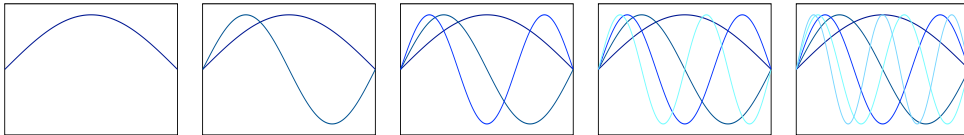
$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct) \right) \sin(nx) \\ &= A_n \sin(nct + \tau_n) \sin(nx) \end{aligned}$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$, onde os coeficientes a_n e b_n , ou a amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, e a fase $\tau_n = \arctan(a_n/b_n)$, são constantes arbitrárias (que dependem das condições iniciais). A linearidade da equação de ondas implica o *princípio de sobreposição*: toda sobreposição de soluções ainda é uma solução. Em particular, se as condições iniciais são sobreposições finitas de harmônicas

$$u(x, 0) = \sum_n a_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = \sum_n b_n \sin(nx),$$

então a solução é (a unicidade vem do teorema de unicidade 5.2)

$$u(x, t) = \sum_n \left(a_n \cos(nct) + \frac{b_n}{nc} \sin(nct) \right) \sin(2\pi x/\ell_n).$$



Primeiras 5 harmônicas de uma corda vibrante.

No caso geral em que o comprimento é ℓ , as ondas estacionárias são

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

onde as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n := n \frac{c}{2\ell} \quad \text{e} \quad \ell_n := \frac{2\ell}{n},$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$, respetivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = c/\ell_1$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = n\nu_1 = c/\ell_n$, com $n = 2, 3, 4, \dots$, são ditas n -ésimas *harmônicas* (ou *overtones*) da corda.

Por exemplo, se a fundamental é o A_4 de 440 Hz (é o caso da segunda corda de um violino), então a segunda harmônica é o A_5 de 880 Hz, a terceira está próxima do E_6 de 1318.5 Hz, a quarta é o A_6 de 1760 Hz, a quinta está próxima do $C\sharp_7$ de 2217.5 Hz, a sexta está próxima do E_7 de 2637 Hz, a sétima está próxima do G_7 de 3136 Hz, ... Em particular, as primeiras harmônicas contêm a “fundamental” A, a “quinta justa” E a “terça maior” $C\sharp$, as três notas (“triade maior”) do “acorde maior”!⁷



Primeiras 12 harmônicas de uma corda cuja fundamental é C.

- Mostre que a energia

$$E := \frac{1}{2} \int_0^\ell (\rho u_t^2 + k u_x^2) dx$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E = 0$ (calcule a derivada e integre por partes).

- Mostre que a energia de uma onda estacionária

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n)$$

é dada por

$$E_n = \pi^2 M A_n^2 \nu_n^2,$$

onde $M = \rho\ell$ é a massa da corda.

- Determine as vibrações de uma corda de comprimento $\ell = \pi$ dadas as condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(3x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = 2 \sin(4x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 \sin(x) - \sin(2x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = \sin(3x).$$

- A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq 7.1$ Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Determine a densidade linear e o peso da corda. O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

- [St08] 4.1.

2. (problema de Sturm-Liouville) O problema de Sturm-Liouville consiste em determinar constantes $\lambda \in \mathbb{R}$ e correspondentes funções $u(x)$, definidas num intervalo $x \in [a, b]$, que resolvam a equação

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = \lambda w(x)u$$

com condições de fronteira $u(a)$ ou $u'(a) = A$ e $u(b)$ ou $u'(b) = B$, dadas umas funções $p(x)$ e $w(x)$. Se definimos o operador L como

$$Lu := \frac{1}{w(x)} \left(-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u \right) = \frac{1}{w} (-(pu')' + qu)$$

então o problema de Sturm-Liouville consiste em resolver

$$Lu = \lambda u$$

ou seja, determinar os *valores próprios* λ e as correspondentes *funções próprias* u de L .

⁷To learn more about music, you may want to visit <http://www.phys.unsw.edu.au/music/>

- Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u(0) = u(\pi) = 0$.

- Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u'(0) = u'(\pi) = 0$.

- Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u(0) - u'(0) = u(\pi) - u'(\pi) = 0$.

- Mostre que as funções próprias $u(r)$, com $0 < r < \infty$, de

$$r^2 u'' + r u' = n^2 u$$

quando $n \in \mathbb{Z}$, são $u_{\pm}(r) = r^{\pm n}$ se $n \neq 0$, e $u_0(r) = 1$ ou $u_0(r) = \log r$ se $n = 0$.

3. (separação de variáveis) O método de *separação de variáveis* para determinar soluções de uma EDPs linear homogênea $Lu = 0$, por exemplo nas variáveis x e t , consiste em substituir a conjectura

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

na equação, e deduzir $(A_x X)T = (B_t T)X$, onde A_x e B_t são operadores diferenciais lineares nas variáveis x e t , respetivamente. A igualdade então implica que existe uma constante λ tal que X e T satisfazem as equações de Sturm-Liouville

$$A_x X = \lambda X \quad \text{e} \quad B_t T = \lambda T.$$

As condições de fronteira determinam certos valores próprios λ e as correspondentes funções próprias admissíveis $X_\lambda(x)$ e $T_\lambda(t)$, e portanto as soluções separáveis $X_\lambda(x)T_\lambda(t)$. Pelo princípio de sobreposição são também soluções combinações lineares (finitas)

$$u(x, t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t),$$

com $c_{\lambda} \in \mathbb{R}$.

- Determine, se possível, soluções separáveis das seguintes EDPs.

$$\begin{array}{lll} u_x + u_y = 0 & t u_{xx} + u_t = 0 & u_t = 2u_x \\ u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0 & u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0 & u_{tx} = u_x \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & y u_{xx} + x u_{yy} + x y u_{zz} = 0 & u_{tx} = 0 \end{array}$$

4. (vibrações amortecidas) Considere a equação da corda vibrante “amortecida”

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2\alpha u_t = 0.$$

em $0 \leq x \leq \pi$, onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

- Mostre que a conjectura $u_n(x, t) = q_n(t) \sin(nx)$ implica que $q_n(t)$ satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha \dot{q}_n = 0,$$

com frequência $\omega_n^2 = (cn)^2$.

- Deduza as soluções separáveis do problema com atrito pequeno (i.e. $\alpha^2 < \omega_1^2$).

5. (condução de calor com temperatura constante na fronteira) A condução de calor num fio condutor de comprimento π (para ter fórmulas simples; se o comprimento for ℓ , basta fazer a mudança de variável $x \mapsto x' = \pi x/\ell$) e difusividade térmica $\beta > 0$ é modelada pela equação de calor

$$u_t - \beta u_{xx} = 0 \quad (6.2)$$

onde $u(x, t)$ é a temperatura na posição x e no instante t . Colocamos o problema de resolver o problema com condições de fronteira constantes, $u(0, t) = a$ e $u(\pi, t) = b$ para todos os tempos $t \geq 0$. A função

$$w(x, t) := a + \frac{b-a}{\pi}x$$

é uma solução estacionária, i.e. independente do tempo (o limite esperado do perfil de temperatura quando $t \rightarrow \infty$). Então a solução da equação de calor (6.2) com condições de fronteira constantes $u(0, t) = a$ e $u(\pi, t) = b$ é igual a

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

onde $v(x, t)$ é a solução da equação de calor (6.2) com condições de fronteira nulas (i.e. de Dirichlet) $v(0, t) = v(\pi, t) = 0$.

Um cálculo análogo ao da corda vibrante mostra que as soluções separáveis da equação de calor (6.2) com condições de fronteira nulas são (proporcionais a)os *modos*

$$v_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n e^{-\beta n^2 t} \sin(nx)$$

é uma solução da equação com condições de fronteira nulas $v(0, t) = 0$ e $v(\ell, t) = 0$ e condição inicial

$$v(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx)$$

É importante observar que o limite de $v(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$ é a função identicamente nula, e portanto o limite de $u(x, t)$ é a solução estacionária $w(x, t)$, como esperado.

- Um fio condutor de comprimento 1m e difusividade térmica $10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$ é posto em contacto térmico, nos dois extremos, com dois reservatórios mantidos a temperatura constante de 0°C . Sabendo que o perfil inicial da temperatura do condutor é

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{1\text{m}}x\right) \times 60^\circ\text{C},$$

quanto tempo é necessário esperar para que nenhuma parte do condutor tenha temperatura superior a 4°C ? O que acontece para grandes valores do tempo?

E se os dois extremos do condutor forem mantidos a temperaturas constantes de 0°C e 100°C , respectivamente, qual o perfil de temperatura do condutor passado um tempo grande?

- Determine as soluções da equação de calor num condutor de comprimento π com condições de fronteira nulas, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$, e condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x) + 3\sin(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = \pi \sin(7x) - \sin(5x).$$

6. (condução de calor num condutor isolado) A condução de calor num fio condutor termicamente isolado de comprimento π e difusividade térmica $\beta > 0$ é modelada pela equação de calor

$$u_t - \beta u_{xx} = 0,$$

em $0 \leq x \leq \pi$, com condições de fronteira (*condições de Neumann*)

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0$$

(o fluxo é proporcional ao gradiente de temperatura). As soluções separáveis são os modos

$$u_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

é uma solução com condição inicial

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx).$$

O limite de $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$ é o coeficiente a_0 , que é a média dos valores iniciais

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, 0) dx$$

(pois os $\cos(nx)$, com $n \geq 1$, têm média nula em $[0, \pi]$).

- Mostre que o “calor”

$$Q(t) := C \int_0^\pi u(x, t) dx,$$

onde $C = mc$ é a capacidade térmica do conductor (o produto da massa m e o calor específico c) é constante, ou seja, que $\frac{d}{dt} Q(t) = 0$.

- Determine as soluções da equação de calor num condutor isolado de comprimento π com condição inicial

$$u(x, 0) = \cos(x) + 3 \cos(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 - \cos(5x).$$

- [St08] 4.2.

7. (condução de calor num condutor circular) Também podemos considerar um condutor isolado circular, por exemplo uma circunferência de comprimento 2π (a circunferência unitária $\mathbb{S} = \{e^{ix}, x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$). Neste caso, não há fronteira, e de consequência não há condições de fronteira, mas condições de periodicidade: $u(0, t) = u(2\pi, t)$ para todos os tempos $t \geq 0$. Então as soluções separáveis da equação de calor (6.2) são

$$u_n(x, t) = e^{-\beta n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Pelo princípio de sobreposição, uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} e^{-\beta n^2 t} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

é uma solução com condição inicial

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

8. (calor com dispersão) Considere a equação de calor com dispersão

$$u_t - \beta u_{xx} = u$$

no intervalo $0 \leq x \leq \ell$ com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ para todos os $t \geq 0$.

- Verifique que a substituição $v(x, t) := e^{-t} u(x, t)$ transforma a equação acima na equação

$$v_t - \beta v_{xx} = 0.$$

- Determine as soluções separáveis do problema.

9. (ondas e calor no intervalo infinito) Determine soluções separáveis e limitadas das equações de onda e de calor

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{e} \quad u_t - \beta u_{xx} = 0$$

com $x \in \mathbb{R}$.

10. (equação de Schrödinger livre) A “função de onda” $\psi(\mathbf{x}, t)$ de uma partícula livre não-relativística satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

onde m é a massa da partícula e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida.

- Determine soluções separáveis no intervalo $x \in [0, \ell] \subset \mathbb{R}$, com condições de fronteira nulas, $\psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0$.
- Mostre que as soluções separáveis e limitadas na reta real são proporcionais a

$$\psi_E(x, t) = e^{-iEt/\hbar} e^{ipx/\hbar},$$

onde $E \geq 0$ e $p = \sqrt{2mE}$.

- Verifique que as ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Schrödinger em $\mathbb{R}^3$ se a frequência ω e o número de onda $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfazem a relação de dispersão $\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} \|\boldsymbol{\xi}\|^2$.

11. (o problema de Fourier) Moral: sabemos resolver o problema da corda vibrante ou os problemas da condução de calor quando as condições iniciais são sobreposições (finitas) de ondas estacionárias ou modos. Isto levanta o problema de decidir quais funções periódicas $f(x)$ podem ser representadas, ou pelo menos aproximadas com precisão arbitrária, por meio de combinações lineares de senos e/ou cossenos. Em termos mais concretos, o problema é decidir quando e em que sentido uma função $f(x)$, periódica de período 2π , pode ser representada como uma série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi n x}.$$

7 Séries de Fourier

1. **(epiciclos e deferentes)** A ideia de Aristóteles e Platão, de que “todos os movimentos são combinações de movimentos circulares uniformes” está na base dos calendários calculados por Iparco e Ptolomeu, e transmitidos pelos árabes no *Almagesto*. Nestas cosmologias, cada corpo celeste, estrelas fixas ou errantes, descreve uma circunferência, dita *epiciclo*, à volta de uma circunferência, que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência, ..., que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência inicial, dita *deferente*, centrada na Terra. Até o sistema de Copérnico funciona assim: a única novidade, que também não é uma novidade porque os próprios gregos consideraram esta possibilidade, é que o centro do deferente é colocado no Sol, ideia que pareceu simplificar muito o modelo.



2. **(aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos)** A intuição subjacente é que todo movimento periódico planar pode ser aproximado com precisão arbitrária por uma sobreposição finita de movimentos circulares uniformes.⁸ Este é o conteúdo da Análise de Fourier. Um polinômio trigonométrico (complexo) de grau $\leq N$ definido na circunferência $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (ou seja, periódico de período 2π) é uma sobreposição finita

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

de (ondas planas) harmônicas $e_n(t) := e^{int}$, com coeficientes $c_n \in \mathbb{C}$. Se $c_n = \overline{c_{-n}}$ para todos os n , então o polinômio é real, e pode ser representado como combinação linear real de senos e cossenos. O problema é o de determinar, fixado um grau N , o polinômio trigonométrico $p(t)$ que melhor aproxima uma função periódica $f(t)$ (de período 2π). A ideia de Bessel (1828) é escolher os coeficientes c_k 's usando o *princípio dos mínimos quadrados*, ou seja, procurando minimizar a “soma dos quadrados das distâncias” entre $f(t)$ e a sobreposição $p(t)$, o integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p(t)|^2 dt.$$

3. **(geometria do espaço das funções de quadrado integrável)** O problema de minimização de Bessel admite uma interpretação geométrica. Seja $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ o espaço vetorial complexo das funções Riemann-integráveis $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \approx (-\pi, \pi]$ (ou, equivalentemente, definidas na reta real e periódicas de período 2π), munido do *produto interno* e da *norma* L^2 , definidos por

$$\langle f, g \rangle_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{e} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle_2}$$

⁸G. Gallavotti, Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, *Rendiconti Lincei - Matematica e Applicazioni*, Series 9, Band 12, No. 2 (2001), 125-152 (<http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9907004>). See also Mark Eichenlaub's answer in [Fourier transform for dummies](#) and this [video](#).

respetivamente. Apesar do nome, esta norma não é estritamente positiva, pois pode acontecer que $\|f\|_2 = 0$ para funções f que não são identicamente nulas. Os matemáticos dizem que este é um espaço *pré-Hilbertiano*. O produto interno permite definir a ortogonalidade, e portanto enunciar o teorema de Pitágoras. O produto interno e a norma L^2 também satisfazem a

Teorema 7.1 (desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, então*

$$|\langle f, g \rangle_2| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Demonstração. Se $\|f\|_2 = 0$ ou $\|g\|_2 = 0$ a desigualdade é trivial. Nos outros casos, a desigualdade elementar $|2ab| \leq |a|^2 + |b|^2$ implica que, se $\lambda > 0$,

$$|f(x) \overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2}(\lambda |f(x)|^2 + \lambda^{-1} |g(x)|^2),$$

e portanto, integrando, que

$$|\langle f, g \rangle_2| \leq \frac{1}{2}(\lambda \|f\|_2^2 + \lambda^{-1} \|g\|_2^2).$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz segue ao escolher $\lambda = \|g\|_2 / \|f\|_2$. □

A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que a norma satisfaz a desigualdade do triângulo $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$. Então o quociente $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) / \sim$ pela relação de equivalência $f \sim g$ se $\|f - g\|_2 = 0$ é um espaço euclidiano complexo (de dimensão infinita).

As harmónicas, ou ondas planas (ou caracteres, na linguagem dos matemáticos),

$$e_n(t) := e^{int}$$

com $n \in \mathbb{Z}$, formam um sistema ortonormado, pois $\langle e_n, e_m \rangle_2 = 0$ se $n \neq m$, e $\|e_n\|_2 = 1$.

- Verifique as relações de ortogonalidade

$$\langle e_n, e_m \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

4. **(coeficientes de Fourier e desigualdade de Bessel)** Fixado um inteiro $N \geq 0$, seja $\mathcal{E}_N \approx \mathbb{C}^{2N+1}$ o subespaço de dimensão finita de $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gerado pelas harmónicas e_n 's com $|n| \leq N$. Os vetores/pontos de $\mathcal{E}_N$ são chamados *polinómios trigonométricos* de grau N , e são somas finitas

$$v(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

com coeficientes $c_n \in \mathbb{C}$. Usando a identidade de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, é também possível representar os pontos de $\mathcal{E}_N$ como combinações lineares de $\cos(nt)$ e $\sin(nt)$, com $0 \leq n \leq N$.

Dada uma função $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, colocamos o problema de minimizar a sua distância $\|f - v\|$ com os pontos do subespaço $\mathcal{E}_N$. A intuição geométrica (nos espaços de dimensão finita) sugere que o mínimo seja atingido quando v é igual a projecção ortogonal de f sobre $\mathcal{E}_N$, o polinómio trigonométrico

$$S_N f = \sum_{|n| \leq N} c_n e_n,$$

onde os coeficientes c_n são os produtos internos (i.e. as componentes)

$$c_n = \langle f, e_n \rangle_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

Os c_n 's são chamados *coeficientes de Fourier* de f relativamente ao sistema ortonormado dos e_n 's. De fato, um cálculo elementar mostra que a diferença $f - S_N f$ é ortogonal a $\mathcal{E}_N$ (sendo ortogonal a todas as harmônicas $e_n \in \mathcal{E}_N$), e portanto, se $w \in \mathcal{E}_N$ é qualquer outro ponto, pelo teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}\|f - w\|_2^2 &= \|(f - S_N f) + (S_N f - w)\|_2^2 \\ &= \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f - w\|_2^2 \geq \|f - S_N f\|_2^2.\end{aligned}$$

Mais um cálculo elementar mostra que o quadrado da distância entre f e $S_N f$ é

$$0 \leq \|f - S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{|n| \leq N} |c_n|^2 \quad (7.1)$$

Em particular, a série de termos não-negativos $\sum_n |c_n|^2$ é limitada, logo convergente. No limite quando $N \rightarrow \infty$ obtemos a

Teorema 7.2 (desigualdade de Bessel). *Se $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ e $c_n = \langle f, e_n \rangle_2$ são os seus coeficientes de Fourier, então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$$

- Considere o espaço $\mathcal{E}_N$ munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Mostre que o operador Laplaciano $\Delta : \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{E}_N$ é auto-adjunto, e que é diagonal na base formada pelos e_n 's. Calcule a sua matriz nesta base (ou seja, os seus valores próprios).
- 5. (geometria do espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$) Os coeficientes de Fourier de uma função integrável são sucessões $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tais que $\sum_n |c_n|^2 < \infty$. O espaço de todas estas sucessões é chamado $\ell^2(\mathbb{Z})$, e pode ser munido de um produto interno

$$\langle c, d \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$$

que induz a norma

$$\|c\| := \sqrt{\langle c, c \rangle} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$ é

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{d_n} \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 \right)^{1/2}$$

Portanto a “transformada de Fourier”, o operador $\mathcal{F} : f \mapsto (c_n)$, que associa a cada função integrável na circunferência a sucessão dos seus coeficientes de Fourier, envia $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ em $\ell^2(\mathbb{Z})$. A desigualdade de Bessel diz que este operador não dilata as normas.

- 6. (séries de Fourier) Seja $f(x)$ é uma função integrável em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ou seja, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica de período 2π , e portanto determinada pelos seus valores no intervalo $(-\pi, \pi]$. A *série de Fourier (complexa)* de $f(x)$ é a série formal

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}} \quad (7.2)$$

(o símbolo “ $\sim$ ” é apenas uma notação para dizer que a série à direita, que pode não ser convergente!, é a série de Fourier da função à esquerda!), onde os *coeficientes de Fourier (complexos)* de f são os números complexos

$$\boxed{c_n = \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx} \quad (7.3)$$

Em particular, o coeficiente c_0 é a média de f no intervalo $[-\pi, \pi]$ (ou em qualquer outro intervalo de comprimento 2π).

As “somadas parciais da série de Fourier” são os polinómios trigonométricos

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, a série de Fourier (7.2) pode ser representada como uma série de senos e cossenos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (7.4)$$

onde $a_0/2 = c_0$, e $a_n = c_n + c_{-n}$ e $b_n = i(c_n - c_{-n})$ se $n \geq 1$, ou seja,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

É evidente que se f tem valores reais então também os seus coeficientes a_n e b_n são reais.

Se $f(x)$ é par, então $c_n = c_{-n}$, logo $b_n = 0$, para todos os $n \geq 1$, e a série de Fourier de f é uma série de cossenos $a_0/2 + \sum_n a_n \cos(nx)$ com coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Se $f(x)$ é ímpar, então $c_n = -c_{-n}$, logo $a_n = 0$, para todos os $n \geq 0$, e a série de Fourier de f é uma série de senos $\sum_n a_n \sin(nx)$ com coeficientes

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

- Determine as séries de Fourier das seguintes funções periódicas de período 2π definidas, no intervalo $[-\pi, \pi]$ por (as soluções estão no formulário!)

$$f(\theta) = \theta, \quad f(\theta) = |\theta|, \quad f(\theta) = \theta^2,$$

$$\Theta(\theta) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}, \quad 2\Theta(\theta) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}.$$

$$Z(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Mostre que a série de Fourier complexa da função *sawtooth* (dente de serra) $S(\theta)$, periódica de período 2π e definida por

$$S(\theta) := \begin{cases} \pi - \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi \\ -\pi - \theta & \text{se } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq \theta < \pi$, é

$$S(\theta) \sim \frac{1}{i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\theta}}{n} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(n\theta).$$

- Mostre que a série de Fourier complexa da função *square wave* $Q(\theta)$, periódica de período 2π e definida por

$$Q(x) := \begin{cases} +1 & \text{se } |x| < \pi/2 \\ -1 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq \theta < \pi$, é

$$Q(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} e^{-inx} = \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \cos(5x) - \dots \right).$$

- [St08] 5.1, 5.2.

7. (**séries de Fourier e séries de Laurent**) Seja $g(z)$ é uma função holomorfa numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contém a circunferência unitária $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$. A sua expansão em série de Laurent centrada em $p = 0$,

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

pode ser escrita, nos pontos $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}$ (i.e. com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), como

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Os “coeficientes” c_n da série de Laurent de $g(z)$ são portanto os coeficientes de Fourier da função $f(\theta) := g(e^{i\theta})$, periódica de período 2π .

8. (**fórmulas para séries de Fourier num intervalo genérico**) Seja $f(x)$ é uma função integrável em $\mathbb{R}/2\ell\mathbb{Z}$, ou seja, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica de período 2ℓ , e portanto determinada pelos seus valores no intervalo $[-\ell, \ell]$. A *série de Fourier (real)* de $f(x)$ é

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)$$

onde os *coeficientes de Fourier* de f são definidos pelos integrais

$$a_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \quad \text{e} \quad b_n := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

Também é útil, na resolução de problemas como a corda vibrante ou a propagação de calor, desenvolver funções, definidas num intervalo $[0, \pi]$, em séries de apenas senos ou apenas cosenos.

A *série de Fourier de senos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão ímpar 2ℓ -periódica de f , ou seja,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

A *série de Fourier de cosenos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão par 2ℓ -periódica de f , ou seja,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right), \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

- Determine as séries de Fourier de senos (ou seja, da extensão ímpar e 2π -periódica) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq \theta < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \quad 1 - \cos(2\theta) \quad f(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{se } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \pi - \theta & \text{se } \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

- Determine as séries de Fourier de cossenos (ou seja, da extensão par e 2π -periódica) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq \theta < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \quad \sin(2\theta) \quad \pi - \theta$$

9. (lema de Riemann-Lebesgue) Uma função f , definida num intervalo $[a, b]$, é *seccionalmente contínua* se é contínua em todos os pontos do intervalo exceto num número finito de pontos $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, onde admite limites laterais $f(x^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_k^\pm} f(x)$ finitos. Uma função seccionalmente contínua é integrável.

Se a função f é limitada então os coeficientes de Fourier também são limitados. De fato, se $|f(x)| \leq M$ então

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx \leq M.$$

Se f é contínua, a intuição sugere que os coeficientes $\hat{f}(n)$ com $|n|$ grande sejam pequenos. A ideia é que as harmónicas $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ com $|n| \gg 1$ oscilam rapidamente em intervalos pequenos, onde f não varia muito por ser contínua, e portanto acontecem cancelações entre termos positivos e termos negativos.

Teorema 7.3 (lema de Riemann-Lebesgue). *Se $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável (por exemplo, seccionalmente contínua) então $\hat{f}(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \pm\infty$.*

Demonstração. A desigualdade de Bessel 7.2 diz que se f é uma função integrável então a série $\sum_n |c_n|^2$ é convergente. Mas os termos de uma série convergentes decrescem para 0 quando $n \rightarrow \pm\infty$. $\square$

10. (derivadas e coeficientes de Fourier) A relação entre séries de Fourier e derivadas está no seguinte facto.

Teorema 7.4. *Se a k -ésima derivada de f existe e é integrável, por exemplo se f é de classe $\mathcal{C}^k$, então os coeficientes de Fourier da k -ésima derivada de f são*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n)$$

Demonstração. Se f' é integrável, então os seus coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned} \hat{f}'(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [f(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-in) e^{-inx} dx \\ &= in \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in \hat{f}(n) \end{aligned}$$

O teorema segue por indução. $\square$

Esta relação simples entre coeficientes de Fourier e derivadas é a razão principal da utilidade das séries de Fourier na análise das equações diferenciais. Diz é que a “transformada de Fourier”, o operador $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$, que envia uma função $f(x)$ na sucessão $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dos seus coeficientes de Fourier, transforma derivadas $f \mapsto f'$ em produtos $c_n \mapsto in c_n$. De consequência, no espaço dos coeficientes de Fourier, uma equação diferencial é uma equação algébrica!

O lema de Riemann-Lebesgue 7.3 aplicado à k -ésima derivada então implica que

Teorema 7.5. *Os coeficientes de Fourier de uma função de classe $\mathcal{C}^k$ decaem mais rápido que $|n|^{-k}$, ou seja,*

$$\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k})$$

quando $n \rightarrow \pm\infty$.

De consequência, os coeficientes de Fourier de uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ decrescem mais rápido que o inverso de qualquer potência $|n|^k$.

- Determine a série de Fourier de uma função periódica de período 2π (i.e uma função $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$) e de classe $\mathcal{C}^1$ que resolva a “equação cohomológica”

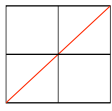
$$f' = 0$$

ou a equação de Laplace

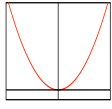
$$f'' = 0.$$

Séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$

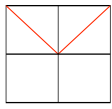
	função $\sim$ série de Fourier ($x \in [-\pi, \pi]$)	coefficients de Fourier ($n \in \mathbb{Z}$)
complexa	$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$	$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$
real	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$	$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ $b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

Algumas séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$ função em $[-\pi, \pi]$ $\sim$ série de Fourier x

$$\sim 2 \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$

 x^2

$$\sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{9} \cos(3x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \dots \right)$$

 $|x|$

$$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{49} \cos(7x) + \dots \right)$$



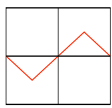
$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



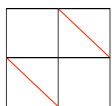
$$2\Theta(x) - 1 := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$Z(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) - \frac{1}{9} \sin(3x) + \frac{1}{25} \sin(5x) - \frac{1}{49} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$S(x) := \begin{cases} \pi - x & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\sim 2 \left(\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$

8 Convergência das séries de Fourier

1. **(sucessões e séries de funções)** Seja (f_n) uma sucessão de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), definidas numa região $X \subset \mathbb{R}^d$ fixada (por exemplo, um intervalo $[a, b]$ da reta real).

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é o *limite pontual* das f_n 's, ou $f_n \rightarrow f$ *pontualmente* (ou seja, “as f_n 's convergem pontualmente para f ”), se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo o $x \in X$. Isto significa que para cada x e cada $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ (que depende de ε e do ponto x) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ se $n > \bar{n}$.

Acontece que o limite pontual não herda necessariamente as boas propriedades das f_n 's. Por exemplo, o limite pontual de uma sucessão de funções contínuas pode não ser uma função contínua (qual o limite pontual da sucessão $f_n(x) = x^n$ definida em $[0, 1]$?).

A *norma uniforme* no espaço linear $\mathcal{C}_b(X)$ das funções limitadas definidas em X é

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Induzes a *distância uniforme* $d_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty$.

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é o *limite uniforme* das f_n 's, ou $f_n \rightarrow f$ *uniformemente* (ou seja, as f_n 's convergem *uniformemente* para f), se $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ (que depende de ε mas é independente do ponto x , ou seja, “uniforme em x ”) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo o $x \in X$ se $n > \bar{n}$.

O teste de Cauchy para a convergência uniforme é o seguinte: $f_n \rightarrow f$ uniformemente sse para todo o $\varepsilon > 0$ existe um tempo $\bar{n}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ quando $n, m > \bar{n}$.

Teorema 8.1. *O limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas é uma função contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Se n é suficientemente grande, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo o $x \in X$. Pela continuidade de f_n , existe $\delta > 0$ tal que $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$ se $|x - x'| < \delta$. Então, pela desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

se $|x - x'| < \delta$. □

Uma série de funções $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente para uma função $F(x)$ num domínio $X \subset \mathbb{R}^d$ se a sucessão das somas parciais $S_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ converge uniformemente para F , ou seja se $\|S_n - F\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

O critério de Cauchy para a convergência uniforme de uma série é o seguinte: $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente para $F(x)$ se para todo o $\varepsilon > 0$, existe um tempo $\bar{n}$ tal que

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

para todo o $x \in D$ e todos os $n > \bar{n}$ e $m \geq 1$.

Se os termos $f_n(x)$ da série são limitados uniformemente pelos termos de uma série numérica $\sum_n M_n$, ou seja, se $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo o $x \in X$, então

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \leq |M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+m}|$$

Em particular,

Teorema 8.2 (Teste M de Weierstrass). *Se $\sum_n M_n$ é uma série (numérica) convergente e $\|f_n\|_\infty \leq M_n$ para todo o n , então a série de funções $\sum_n f_n(x)$ é uniformemente convergente.*

Se as f_n 's são contínuas, então também as somas parciais S_n são contínuas, e de consequência, pelo teorema 8.1, o limite uniforme da série $\sum_n f_n(x)$ é também uma função contínua.

A convergência uniforme da série $\sum_n f_n(x)$ de funções contínuas f_n 's num intervalo limitado $[a, b]$ garante que o integral da soma é a soma dos integrais, i.e.

$$\int_a^b \left(\sum_n f_n(x) \right) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

A convergência uniforme da série $\sum_n f_n(x)$ (mas é suficiente a convergência apenas num ponto!) e da série das derivadas $\sum_n f'_n(x)$ de funções f_n 's de classe C^1 num intervalo $[a, b]$ garantem que a soma $\sum_n f_n(x)$ é uma função derivável, e que a sua derivada pode ser calculada somando as derivadas das f_n 's, i.e.

$$\left(\sum_n f_n(x) \right)' = \sum_n f'_n(x).$$

- Determine o limite pontual da sucessão $f_n(x) = x^n$, definida no intervalo $[0, 1]$.
- A sucessão $f_n(x) = \sin(nx)$, definida em $[-\pi, \pi]$, converge pontualmente?
- Use o teste M de Weierstrass, o teorema 8.2, para mostrar que a série

$$f_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

é uniformemente convergente.

2. (convergência uniforme das séries de Fourier de funções regulares) Uma função f é *seccionalmente regular* se é contínua e se a sua derivada f' é seccionalmente contínua.

Teorema 8.3. *A série de Fourier de uma função seccionalmente regular, por exemplo de classe C^1 , é uniformemente absolutamente convergente.*

Demonstração. Pelo teorema 11.7, a desigualdade de Cauchy-Schwarz 7.1, e depois pela desigualdade de Bessel 7.2, a série dos módulos é limitada por

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| &= |c_0| + \sum_{n \neq 0} \frac{|\hat{f}'(n)|}{|n|} \\ &\leq |c_0| + \sqrt{\sum_{n \neq 0} 1/n^2} \sqrt{\sum_{n \neq 0} |\hat{f}'(n)|^2} \\ &\leq |c_0| + C \|f'\|_2, \end{aligned}$$

onde $C^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$. □

Se a série de Fourier de f converge uniformemente, a sua soma $\sum_n \hat{f}(n)e^{inx}$ é uma função contínua. Esta soma tem grandes probabilidades de ser a própria f . De fato, é possível (mas difícil!) provar o seguinte resultado de unicidade ([SS03], Theorem 2.1 e Corollary 2.2).

Teorema 8.4. *Se $f(x)$ é uma função contínua na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e os seus coeficientes de Fourier são nulos, i.e. $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $f(x) \equiv 0$.*

Um corolário é que duas funções contínuas que têm os mesmos coeficientes de Fourier são necessariamente iguais. Por outro lado, é fácil ver que se a série de Fourier de f converge uniformemente, então os seus coeficientes de Fourier são os próprios $\widehat{f}(n)$ (trocando somas e integral). De consequência, se a série de Fourier de uma função contínua $f(x)$ converge uniformemente, então converge uniformemente para a própria $f(x)$. Isto acontece, por exemplo, para uma função de classe $\mathcal{C}^2$, pois os seus coeficientes de Fourier são limitados por $|\widehat{f}(n)| \leq M/n^2$ (se $n \neq 0$). De fato, usando o teorema 8.3, é suficiente a existência e a continuidade da primeira derivada.

Teorema 8.5. *A série de Fourier de uma função $f(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ converge absolutamente e uniformemente para $f(x)$.*

3. (**produto de convolução**) O produto de convolução entre as funções integráveis $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, pensadas como funções periódicas de período 2π na reta, é a função

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y) dy.$$

também periódica de período 2π . Um interpretação é que o valor de $f * g$ num ponto x é uma “média” pesada dos valores $f(y)$, os pesos sendo os valores $g(x - y)$ da função g .

O produto de convolução é simétrico, i.e. $f * g = g * f$, e linear nas duas variáveis, ou seja, $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$ para todos os $\lambda \in \mathbb{R}$, e $f * (g + h) = f * g + f * h$. É também associativo, ou seja, $(f * g) * h = f * (g * h)$. As demonstrações são elementares.

Outro fenómeno importante é que o produto de convolução de duas funções integráveis é uma função contínua! A convolução melhora a regularidade das funções (mas a prova não é elementar).

Teorema 8.6. *Os coeficientes de Fourier de um produto de convolução são iguais aos produtos dos coeficientes de Fourier dos fatores, i.e.*

$$\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$$

Demonstração. Se f e g são contínuas

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x - y) e^{-in(x-y)} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right) dy \\ &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n) \end{aligned}$$

O caso geral usa o seguinte teorema de aproximação: se f é uma função integrável e limitada por M , existe uma sucessão (f_k) de funções contínuas limitadas por M e tais que os integrais das diferenças $|f - f_k|$ tendem para 0 quando $k \rightarrow \infty$. Os detalhes estão em [SS03]. $\square$

4. (**convergência pontual das séries de Fourier**) Seja $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável e c_n os seus coeficientes de Fourier. As somas parciais da série de Fourier de f podem ser

representadas como o produto de convolução

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \end{aligned} \quad (8.1)$$

da própria função com o núcleo de Dirichlet, definido por

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \quad (8.2)$$

Teorema 8.7. *Se $f(x)$ é uma função seccionalmente regular, então as somas parciais $S_N f(x)$ da sua série de Fourier convergem em cada ponto x para o valor médio dos limites laterais $f(x^\pm)$, ou seja,*

$$S_N f(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

quando $N \rightarrow \infty$. Em particular, convergem para $f(x)$ nos pontos onde f é contínua.

Demonstração. O núcleo de Dirichlet pode ser representado como

$$D_N(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx)$$

e portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2} \quad (8.3)$$

Usando (8.1) e as (8.3), e depois (8.2), podemos representar a diferença entre as somas parciais $S_N f(x)$ e o valor médio $(f(x^+) + f(x^-))/2$ como um integral

$$\begin{aligned} S_N f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(x+y) - f(x^-)) D_N(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+y) - f(x^+)) D_N(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) (e^{i(N+1)y} - e^{iNy}) dy \end{aligned}$$

onde F é a função definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x+y) - f(x^-)}{e^{iy} - 1} & \text{se } -\pi < y < 0 \\ \frac{f(x+y) - f(x^+)}{e^{iy} - 1} & \text{se } 0 < y < \pi \end{cases}$$

Se f é seccionalmente regular, então $F(x, y)$ admite limites laterais quando $y \rightarrow 0^\pm$, pela regra de l'Hôpital, e portanto é seccionalmente contínua. Então os integrais de $F(x, y)$ vezes e^{iNy} convergem para zero quando $N \rightarrow \infty$ pelo lema de Riemann-Lebesgue 7.3. $\square$

Em particular, pelo teorema 8.3, a série de Fourier de uma função $f(x)$ contínua e seccionalmente regular converge para $f(x)$ na norma uniforme, ou seja, $\|f - S_N f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$.

A hipótese no teorema 8.7 não é a melhor possível. Para a convergência no ponto x é suficiente que a função $F(x, y)$, definida na demonstração, seja integrável, em quanto função de y , numa vizinhança de $y = 0$. Esta é chamada “condição de Dini”.

Também é possível ler a regularidade de uma função no decaimento dos seus coeficientes de Fourier.

Teorema 8.8. Se os coeficientes de Fourier c_n de uma função f decaem como

$$|c_n| \leq C |n|^{-(k+\alpha)}$$

com $\alpha > 1$, uma constante $C > 0$ e um natural k , então a função f é de classe $\mathcal{C}^k$.

Demonstração. Para cada $0 \leq k' \leq k$, a série de Fourier $\sum_n (in)^{k'} c_n e^{inx}$ é absolutamente e uniformemente convergentes, pois

$$\sum_n |n|^{k'} |c_n| \leq \sum_n |n|^\alpha < \infty$$

se $\alpha > 1$. A sua soma é uma função contínua, igual a k' -ésima derivada de $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$. $\square$

- Verifique a fórmula (8.2) para o núcleo de Dirichlet (use as somas parciais da série geométrica), e deduza a expressão

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \quad (8.4)$$

- Verifique que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$$

- Calcule a série de Fourier de $f(x) = |x|$ em $x = 0$ e deduza a identidade

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

- Calcule a série de Fourier de $f(x) = x^2$ em $x = 0$ e deduza a identidade

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

ou em $x = \pi$ e deduza a identidade

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. (delta de Dirac e identidades aproximadas) A “função” delta de Dirac em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é definida pela identidade formal

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \delta(x-y) dy = f(x),$$

se $f(x)$ é uma função contínua e periódica de período 2π . De facto, δ não é uma função, mas uma “medida”, um funcional linear definido no espaço $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ das funções contínuas na circunferência, que associa à função $f(x)$ o valor $\langle \delta, f \rangle := f(0)$. Pode ser definida/pensada como sendo um limite (no sentido das distribuições) de uma família de funções satisfazendo as propriedades codificadas na definição de “identidade aproximada”.

Uma *identidade aproximada* (ou *good kernels*) na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é uma sucessão (K_n) de funções integráveis $K_n(x)$ de massa total unitária, i.e.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1, \quad (8.5)$$

uniformemente integráveis, i.e. tais que existe $M > 0$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M \quad (8.6)$$

para todos os $n \in \mathbb{N}$ (esta condição é uma consequência de (8.5) se $K_n(x) \geq 0$), e tais que, para cada $\delta > 0$, os integrais

$$I_n(\delta) := \int_{|x| \geq \delta} |K_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad (8.7)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 8.9. *Se f é uma função contínua e $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma identidade aproximada, então*

$$(f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) K_n(y-x) dy \rightarrow f(x)$$

uniformemente quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pela continuidade uniforme de f (contínua e periódica), existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/M$ se $|x - y| < \delta$. Seja $m = \sup_x |f(x)|$. Usando (8.5),

$$\begin{aligned} f(x) - (f * K_n)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+y)) K_n(y) dy \\ &= \int_{|y| < \delta} (f(x) - f(x+y)) K_n(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} (f(x) - f(x+y)) K_n(y) dy \end{aligned}$$

O módulo do primeiro integral é limitado por ε , pela (8.6). O módulo do segundo integral é limitado por $2m I_n(\delta)$, definido na (8.7). Como $I_n(\delta) \rightarrow 0$, existe $\bar{n}$ tal que $I_n(\delta) \leq \varepsilon/2m$ se $n \geq \bar{n}$. De consequência, se $n \geq \bar{n}$ a distância entre $f(x)$ e $(f * K_n)(x)$ é limitada por 2ε . $\square$

A delta de Dirac pode então ser interpretada/definida como o limite $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$, ou seja, pela seguinte identidade formal: $f * \delta := \lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n$.

- Verifique que a família de funções definidas por $K_n(x) = n/2$ se $|x| \leq 1/n$ e $K_n(x) = 0$ se $|x| > 1/n$, forma uma identidade aproximada.

6. (somas de Fejer e teorema de aproximação de Weierstrass) As somas de Cesàro de uma série $\sum_n a_n$ são as médias aritméticas

$$S_n := \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. A sucessão das S_n pode ser convergente também quando a série $\sum a_n$ é divergente.

As somas de Cesàro da série de Fourier de uma função integrável f são chamadas *somas de Fejer*. Um cálculo mostra que são dadas pela convolução

$$\begin{aligned} F_N f(x) &:= \frac{1}{N} (S_0 f(x) + S_1 f(x) + S_2 f(x) + \dots + S_{N-1} f(x)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x-y) \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_N(x-y) dy \end{aligned}$$

da própria função com o *núcleo de Fejer*, definido por

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \quad (8.8)$$

Acontece que

Teorema 8.10. *Os núcleos de Fejer formam uma identidade aproximada.*

Demonstração. A massa total de cada F_N (que é uma função não negativa) é igual a um, pois o mesmo acontece para os D_n , dos quais F_N é a média aritmética. Se $0 < \delta < |x| \leq \pi$ então $\sin^2(x/2) \geq c > 0$, e de consequência

$$F_N(x) \leq \frac{1}{cN}.$$

Isto implica que

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_N(x)| dx \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow \infty$. □

Portanto, pelo teorema 8.9,

Teorema 8.11 (Fejer). *Se $f(x)$ é contínua, então as somas de Fejer convergem uniformemente para f .*

O teorema de Fejer dá uma prova construtiva do *teorema de aproximação de Weierstrass*.

Teorema 8.12 (de aproximação de Weierstrass). *Os polinômios trigonométricos são densos no espaço $C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ das funções contínuas $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ munido da norma do sup.*

- Calcule o limite das somas de Cesàro da série divergente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
- Verifique a expressão (8.8): calcule $NF_N(x)$ usando a identidade (8.4)

$$\begin{aligned} NF_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n+1/2)x} \right) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im \left(\frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix/2} - e^{ix/2}} \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

7. (convergência em média quadrática) Uma função integrável $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser aproximada com precisão arbitrária na norma do sup por funções contínuas (ou até C^∞). Pelo teorema de Weierstrass 8.12, as funções contínuas podem ser aproximadas com precisão arbitrária na norma do sup por polinômios trigonométricos. Portanto, existe uma família (T_n) de polinômios trigonométricos tais que $\|f - T_n\|_\infty \rightarrow 0$. A convergência na norma do sup implica, sendo o comprimento da circunferência finito, a convergência na norma L^2 . Pela (prova da) desigualdade de Bessel 7.2, $\|f - S_N\|_2 \leq \|f - T_n\|_2$ se N é superior ou igual ao grau de T_n . Portanto,

Teorema 8.13 (convergência em média quadrática). *A série de Fourier de uma função integrável $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ converge para a própria função em média quadrática, ou seja,*

$$\|f - S_N f\|_2 \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow \infty$.

A fórmula (7.1) então implica que a desigualdade de Bessel é, na verdade, uma igualdade.

Teorema 8.14 (identidade de Parseval). *Se $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função integrável então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$$

Sendo os produtos internos determinados pelas normas, usando as identidades de polarização

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{4} (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2),$$

a identidade de Parseval 8.14 implica e é equivalente ao seguinte resultado.

Teorema 8.15 (teorema de Parseval). *Se f e g são funções integráveis na circunferência $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = \langle f, g \rangle_2$$

A identidade de Parseval é uma versão do teorema de Pitágoras em dimensão infinita. Do ponto de vista físico, é um teorema de conservação, chamado *teorema da energia de Rayleigh* (*Rayleigh energy theorem*). O teorema de Parseval diz que a “transformada de Fourier”, o operador $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ que envia uma função integrável na sucessão dos seus coeficientes de Fourier, é um operador unitário de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ em $\ell^2(\mathbb{Z})$.

- Mostre que as séries de Fourier de $f(x) = x$, definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, é

$$\sum_{n \neq 0} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}.$$

Calcule $\|f\|_2^2$ e use a identidade de Parseval para deduzir

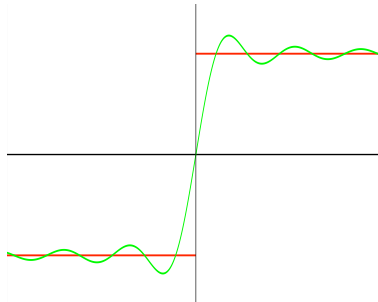
$$\zeta(2) := 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

- [St08] 5.4, 5.5.

8. (**fenómeno de Gibbs**) Uma série de Fourier $\sum_n c_n e^{inx}$ não pode ser convergente nos pontos de descontinuidade de $f(x)$. Se f tem um salto de amplitude $\delta := |f(x^+) - f(x^-)|$ no ponto x , então os gráficos das somas parciais da série de Fourier convergem para um segmento vertical que excede o salto de aproximadamente

$$-\frac{\delta}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \simeq \frac{0.28}{\pi} \delta \simeq 0.09 \cdot \delta$$

em cada lado.



Soma parcial de grau 17 (verde) da série de Fourier da função $2\Theta(x) - 1$ (vermelho), numa vizinhança da origem.

9 Aplicações das séries de Fourier às EDPs

1. (condução de calor com temperatura constante na fronteira) A solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $[0, \pi]$ com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para todo $t \geq 0$, e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta n^2 t} \sin(nx) .$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx) .$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi .$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial

$$u(x, 0) = x \quad \text{se } 0 < x < \pi .$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 200$, e condição inicial

$$u(x, 0) = 100 \quad \text{se } 0 < x < \pi .$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial concentrada num ponto $a \in (0, \pi)$, ou seja,

$$u(x, 0) \sim \mu \cdot \delta(x - a) .$$

- Determine a solução formal do problema com condições de fronteira nulas e condição inicial concentrada numa vizinhança dum ponto $a \in (0, \pi)$, ou seja,

$$u(x, 0) = \begin{cases} \lambda & \text{se } |x - a| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - a| > \varepsilon \end{cases} ,$$

com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Calcule o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ mantendo constante o produto $2\varepsilon\lambda = \mu$, e compare com o exercício anterior.

2. (condução de calor num condutor isolado) A solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, \ell] ,$$

no intervalo $[0, \pi]$ com fluxo nulo na fronteira (i.e. condutor isolado) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0$ para todo $t \geq 0$, e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\beta n^2 t} \cos(nx)$$

- Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = x^2.$$

- Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x).$$

- Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 20 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

- Determine a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases},$$

onde $0 < \beta < \pi$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

3. (corda vibrante) A solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

de comprimento π , i.e. $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para todo $t \geq 0$, com condições iniciais (deslocamento/perfil e velocidade)

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

é dada pela série

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(cnt) + \frac{b_n}{cn} \sin(cnt) \right) \sin(nx)$$

- Determinar a solução formal do problema com condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(4x) - \sin(5x).$$

- Determinar a solução formal do problema com condições iniciais (deslocamento inicial “triangular”)

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- Determinar a solução formal do problema com condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1.$$

- Determinar a solução formal do problema com condições iniciais (impulso inicial concentrado no ponto médio)

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \delta(x - \pi/2).$$

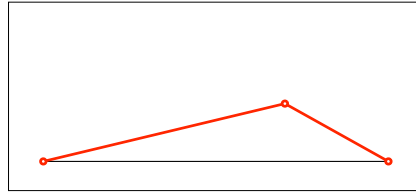
4. (timbres: cavaquinho e piano) Considere uma corda de um instrumento musical, de comprimento $\ell = \pi$, densidade linear ρ e afinada com tensão k . As pequenas vibrações são modeladas pela equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \pi], \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t,$$

onde $c = \sqrt{k/\rho}$.

Ao tocar um cavaquinho, a corda é excitada com velocidade inicial desprezável e deslocamento inicial aproximadamente triangular, ou seja, da forma

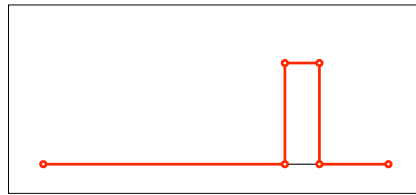
$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} \frac{h}{\alpha} x & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ \frac{h}{\pi - \alpha} (\pi - x) & \text{se } \alpha \leq x < \pi \end{cases}$$



onde $0 < \alpha < \pi$ é o ponto onde dedilhamos a corda, e h é o máximo do deslocamento inicial.

Ao tocar um piano, a corda é excitada utilizando um martelo. Numa primeira aproximação, podemos imaginar que o deslocamento inicial é desprezável e que o martelo transmite à corda apenas um impulso instantâneo $p = 2\varepsilon\rho v$ localizado num intervalo de comprimento pequeno $2\varepsilon \ll \pi$ à volta de um ponto $0 < \beta < \pi$ da corda, e portando a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \simeq \begin{cases} v & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases}$$



- Mostre que as amplitudes das harmónicas da corda do cavaquinho são

$$A_n = \frac{2h}{\alpha(\pi - \alpha)} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}.$$

- Mostre que as amplitudes das harmónicas da corda do piano são

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2v}{c} \frac{\sin(n\varepsilon)}{n^2} \frac{\sin(n\beta)}{n^2} \\ &\simeq \frac{p}{c\rho} \frac{\sin(n\beta)}{n}. \end{aligned}$$

no limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ mantendo constante o impulso transferido $p = 2\varepsilon\rho v$ (o que faz sentido desde que $n\varepsilon \ll 1$, ou seja, para as primeiras harmónicas).

- De consequência, as energias $E_n \sim A_n^2 \nu_n^2$ das (primeiras) harmónicas decaem como $E_n \sim 1/n^2$ no caso do cavaquinho e como $E_n \sim 1$ no caso do piano. Explique porque o som do piano é mais “cheio” do que o som do cavaquinho.

5. (funções harmónicas num retângulo)

10 Funções harmônicas

1. **(equações de Poisson e Laplace)** A equação de Poisson para o campo escalar u , definido num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do espaço euclidiano, é

$$\Delta u = \rho, \quad (10.1)$$

onde ρ é uma função dada. Uma função $u \in C^2(\Omega)$, real ou complexa, é dita *harmônica* se satisfaz a equação de Laplace (a equação de Poisson homogênea)

$$\Delta u = 0 \quad (10.2)$$

nos pontos de Ω .

O problema de Dirichlet consiste em determinar uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ de (10.1) ou (10.2) em Ω com condição de fronteira $u|_{\partial\Omega} = f$.

Na reta real, as soluções da equação de Laplace $u'' = 0$ são os polinômios de primeiro grau $u(x) = \alpha + \beta x$. Em particular, satisfazem o “fórmula do valor médio”: para todo x e todo $r \geq 0$ suficientemente pequeno (i.e. tal que os pontos $x \pm r$ estejam no domínio de u)

$$u(x) = \frac{1}{2} (u(x-r) + u(x+r)) \quad (10.3)$$

- Determine a única função harmônica no intervalo $[a, b]$ tal que $u(a) = A$ e $u(b) = B$,
 - Mostre que uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a fórmula do valor médio (10.3) é uma função harmônica (e, de consequência, uma função C^∞).
 - Verifique que $u(\mathbf{r}) = \log \|\mathbf{r}\|$ é uma função harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
 - Verifique que $u(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$ é uma função harmônica em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
2. **(funções harmônicas & funções holomorfas)** Na identificação $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ definida por $(x, y) \approx x + iy$, o Laplaciano é o operador $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$. Portanto, se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função holomorfa num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, então u e v são funções harmônicas reais, ditas funções “harmônicas conjugadas”. As curvas de nível de u e v formam duas famílias de curvas ortogonais (se $u = c$ são as curvas “equipotenciais”, então $v = c$ são as “linhas de força”).

Viceversa, seja $u(x, y)$ uma função harmônica real. Um cálculo mostra que

$$g(z) = u_x - iu_y$$

é uma função holomorfa (se u é a parte real de $f = u + iv$, então $g = f'$). A forma $g(z) dz = g(z) (dx + idy)$ pode então ser representada como soma

$$\begin{aligned} g(z) dz &= (u_x dx + u_y dy) + i(-u_y dx + u_x dy) \\ &= du + i^* du, \end{aligned}$$

do diferencial du e i vezes a forma $*du$, onde o operador “estrela” de Hodge é definido por $*dx = dy$ e $*dy = -dx$. A forma $*du = -u_y dx + u_x dy$ é fechada. Numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ simplesmente conexa (por exemplo, um disco ou um retângulo), $\oint_\gamma *du = 0$ para todo contorno $\gamma \subset \Omega$. Então é possível definir uma função harmônica v , conjugada de u e definida a menos de uma constante aditiva, por meio do integral de linha

$$v(x, y) = \int_\gamma -u_y dx + u_x dy$$

onde γ é um caminho arbitrário entre um ponto fixado $p \in \Omega$ e o ponto variável $z = x + iy$. A função $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é holomorfa em Ω , e a sua derivada é $f' = g$. Portanto,

Teorema 10.1. *Uma função harmônica u é localmente (em cada região simplesmente conexa) a parte real de uma função holomorfa $f = u + iv$.*

Uma primeira consequência é que uma função harmônica é infinitamente diferenciável. Outra consequência é que se u é harmônica, logo localmente a parte real de uma função holomorfa $f = u + iv$, e se ψ é uma função holomorfa (por exemplo, uma aplicação conforme), então a composição $u \circ \psi$ (numa região onde faz sentido) é harmônica, sendo localmente a parte real da função holomorfa $f \circ \psi$.

- Verifique que a parte real u e a parte imaginária v de uma função holomorfa $f = u + iv$ são funções harmônicas, usando as condições de Cauchy-Riemann.
- Verifique que, se $f = u + iv$ é holomorfa, então ∇u e ∇v são ortogonais.
- Verifique que z^n e $\bar{z}^n$ são funções harmônicas (complexas).
- Esboce as curvas de nível das funções harmônicas conjugadas definidas pelas partes real e imaginária das seguintes funções holomorfas

$$f(z) = z^2 \quad f(z) = 1/z \quad f(z) = z + 1/z$$

- Determine, em domínios apropriados, umas funções harmônicas conjugadas de

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad u(x, y) = x - xy$$

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. (funções harmônicas separáveis no disco unitário) O Laplaciano em coordenadas polares (r, θ) , definidas por $re^{i\theta} = x + iy$, é

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (10.4)$$

De consequência, a equação de Laplace no plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ assume a forma

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 \quad (10.5)$$

Colocamos o problema de determinar uma função harmônica no disco unitário $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Soluções separáveis $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ da equação de Laplace (10.5) são produtos de duas funções que resolvem as EDOs

$$\Theta'' = -\lambda \Theta \quad \text{e} \quad r^2 R'' + r R' = \lambda R$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. As soluções não triviais de $\Theta'' = \lambda \Theta$, que devem ser funções periódicas de período 2π , são

$$\Theta(\theta) = c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta}$$

se $\lambda = n^2$. Em correspondência de cada $\lambda = n^2$, as soluções de $r^2 R'' + r R' = n^2 R$ são $R(r) = 1$ ou $\log r$ se $n = 0$, e $R(r) = r^{\pm n}$ se $n \neq 0$. As soluções $\log r$ e r^{-n} , com $n \geq 1$, são ilimitadas numa vizinhança da origem. Portanto, as soluções separáveis e limitadas da (10.5) no disco unitário são

$$u_n(r, \theta) = r^{|n|} e^{in\theta}$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Pelo princípio de sobreposição, a série

$$u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

se convergente uniformemente com as suas duas primeiras derivadas, define uma função harmônica no disco unitário. Se a convergência é uniforme também na fronteira do disco, então $u(r, \theta)$ resolve o problema de Dirichlet com condição de fronteira

$$u|_{\partial \mathbb{D}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$$

- Verifique a expressão (10.4) para o Laplaciano em coordenadas polares.
- Mostre que as funções harmônicas no plano que apenas dependem de r , soluções de $(ru_r)_r = 0$, são do gênero $a \log(r) + b$.
- Verifique que cada $r^{|n|}e^{in\theta}$, com $n \in \mathbb{Z}$, é uma função harmônica no disco unitário $\mathbb{D}$.
- [St08] 6.2.

4. (Laplaciano em coordenadas esféricas)

5. (princípio do valor médio) O valor de uma função harmônica num ponto do seu domínio é igual à média aritmética dos seus valores numa circunferência suficientemente pequena à volta deste ponto.

Teorema 10.2 (princípio do valor médio). *Se u é harmônica numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contém o disco $\overline{D_r(p)}$, então*

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{i\theta}) d\theta. \quad (10.6)$$

Demonstração. Pelo teorema 10.1, u é a parte real de uma função holomorfa $f = u + iv$ num disco $D_\rho(p)$ com $r < \rho$. Então pela fórmula de Cauchy

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=r} \frac{f(z)}{z-p} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{i\theta}) d\theta.$$

A parte real é a fórmula (10.6). □

Em dimensão arbitrária, a fórmula do valor médio é consequência do teorema da divergência.

Teorema 10.3. *Se u é harmônica numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que contém o disco $\overline{B_r(x)}$, então*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u dS = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u dx.$$

Demonstração. Pelo teorema da divergência

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} \Delta u dx &= \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial r}(x + ry) dS(y) \\ &= r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{\partial B_1(0)} u(x + ry) dS(y) \right) \\ &= r^{n-1} |\partial B_1(0)| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u dS \right) \end{aligned}$$

Ao dividir pelo volume da bola $B_r(x)$ (se este volume é $\gamma_n r^n$, então a “superfície” da esfera $\partial B_r(x)$ é a derivada $n\gamma_n r^{n-1}$) temos portanto

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta u dx = \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u dS \right)$$

Se u é harmônica o valor médio de u nas esferas $B_r(x)$ é portanto independente do raio r . Por continuidade, este valor médio é o próprio $u(x)$. A segunda igualdade é equivalente à primeira. □

Uma consequência é o

Teorema 10.4 (princípio do máximo). *Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é harmônica numa região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Demonstração. Se $\max_{\Omega} u > \max_{\partial\Omega} u$, então existe um ponto $x \in \Omega$ onde $u(x) = \max_{\Omega} u$ e tal que u não é constante numa vizinhança de x . Isto contradiz o princípio do valor médio. $\square$

Uma consequência do princípio do máximo é que uma função harmônica num domínio fechado e limitado Ω é determinada apenas pelos seus valores na fronteira $\partial\Omega$. De fato, a diferença $u = u_1 - u_2$ entre duas funções harmônicas, u_1 e u_2 , que coincidem em $\partial\Omega$ é uma função harmônica igual a zero em $\partial\Omega$, logo identicamente nula pelo princípio do máximo.

Teorema 10.5 (unicidade). *O problema de Dirichlet numa região limitada tem, no máximo, uma solução.*

- [St08] 6.1.

6. **(Dirichlet principle)** The *Dirichlet energy* of a differentiable real valued function $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ defined in a domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ (which we may assume connected) is

$$\mathcal{E}[u] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy$$

You may think that the graph of u describes a surface in $\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. The energy is zero iff u is constant, hence if the surface is flat. More interesting is trying to minimize the Dirichlet energy for fixed “boundary value” $u|_{\partial\Omega} = g$, given some well behaved function $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Consider a one-parameter perturbation of u of the form $u + t\phi$ with $t \in \mathbb{R}$ and $\phi|_{\partial\Omega} = 0$. If u minimizes the Dirichlet energy, then the function of a real variable $t \mapsto \mathcal{E}[u + t\phi]$ must have a minimum at $t = 0$. The derivative of the Dirichlet energy w.r.t. t is

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}[u + t\phi] = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi + t \|\nabla \phi\|^2) dx dy$$

and therefore its value at $t = 0$ is

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{E}[u + t\phi] \right|_{t=0} &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi) dx dy \\ &= - \int_{\Omega} (\Delta u) \phi dx dy \end{aligned}$$

where the last line follows integrating by parts and using the vanishing of ϕ on the boundary $\partial\Omega$. Thus, the derivative is zero for all variations ϕ iff $\Delta u = 0$, i.e. the function u is harmonic on Ω .

What is not obvious, and indeed not true (as Weierstrass discovered) for a generic region Ω , is that such a minimum of the Dirichlet energy exists.

7. **(fórmula integral de Poisson no disco unitário)** Seja $f(e^{i\theta})$ uma função contínua definida na circunferência unitária $\partial\mathbb{D} \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, e seja $\sum_n c_n e^{in\theta}$ a sua série de Fourier. Uma extensão harmônica de $e^{in\theta}$ no disco unitário é $r^{|n|} e^{in\theta}$. Portanto, um candidato para a extensão harmônica de f no interior do disco unitário, i.e. nos pontos $z = re^{i\theta}$ com $0 \leq r < 1$, é a série

$$(\mathcal{P}f)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (10.7)$$

se convergente. Usando a definição dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}f)(re^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) e^{-in\phi} d\phi \right) r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-\phi)} \right) d\phi \end{aligned}$$

é possível representar $\mathcal{P}f$ como um produto de convolução (*fórmula integral de Poisson*)

$$\boxed{(\mathcal{P}f)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) P_r(\theta - \phi) d\phi} \quad (10.8)$$

dos valores de f na circunferência unitária com o *núcleo de Poisson* no disco unitário, definido por

$$P_r(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

O núcleo de Poisson admite as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} P_r(\theta) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \\ &= 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \\ &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

onde $z = re^{i\theta}$, e portanto

$$\boxed{P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}.$$

A série de Fourier da função contínua $f(e^{i\theta})$ pode não ser convergente na circunferência unitária, mas a série $\sum c_n r^{|n|} e^{in\theta}$ é absolutamente convergente se $r < 1$ (pois os c_n 's são limitados). A convergência da série, assim como de todas as suas derivadas, é uniforme em cada disco $D_\rho(0)$ com $\rho < 1$, e portanto a (10.7) define uma função harmônica $u = \mathcal{P}f$ no disco unitário. Acontece que

Teorema 10.6. *A família dos núcleos de Poisson $(P_r)_{r<1}$ é uma identidade aproximada quando $r \rightarrow 1$.*

Demonstração. É imediato ver que $P_r(\theta) \geq 0$ e que o seu integral é $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 2\pi$. Seja $0 < \delta < \pi$. O denominador do núcleo de Poisson é

$$1 - 2r\cos(\theta) + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos(\theta))$$

Se $1/2 < r \leq 1$ e $\delta < |\theta| \leq \pi$ então existe uma constante $c = c(\delta)$ tal que

$$(1-r)^2 + 2r(1-\cos(\theta)) \geq c.$$

De consequência, existe uma constante $C = C(\delta)$ tal que

$$\int_{\delta < |\theta| \leq \pi} P_r(\theta) d\theta \leq C(1-r^2)$$

e portanto este integral $\rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 1$. □

De consequência, pelo teorema 8.9,

Teorema 10.7. *Se $f(e^{i\theta})$ é uma função contínua em $\partial\mathbb{D}$, então $u = \mathcal{P}f$ é uma extensão harmônica de f no disco unitário $\mathbb{D}$, contínua em $\overline{\mathbb{D}}$.*

Esta extensão é única pelo princípio do máximo, e resolve portanto o problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ em $\mathbb{D}$ com condição de fronteira $u|_{\partial\mathbb{D}} = f$.

- Verifique que

$$P_r(\theta) = \Re \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right)$$

- [St08] 6.3.
- Considere o problema de Dirichlet que consiste em determinar uma função harmônica u na região $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq \pi, y \geq 0\} \subset \mathbb{C}$ com condições de fronteira

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

onde $f(x)$ é uma função contínua que se anula nos pontos 0 e π , e cuja série de Fourier é $f(x) \sim \sum c_n \sin(nx)$. Determine as soluções separáveis $u(x, y) = Y(y) \sin(nx)$ da equação de Laplace $\Delta u = 0$ na região Ω tais que $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, e deduza uma fórmula análoga à fórmula de Poisson.

11 Transformada de Fourier

1. **(transformada de Fourier de funções integráveis)** A transformada de Fourier da função absolutamente integrável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (por exemplo, uma função seccionalmente contínua que decai como $|f(x)| \leq C/(1+|x|^{1+\varepsilon})$ com $\varepsilon > 0$) é a função $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{C}$ definida pelo integral impróprio

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (11.1)$$

O espaço onde vive a “variável conjugada” $\xi \in \mathbb{R}^* \approx \mathbb{R}$ (o dual de Pontryagin do corpo dos reais, isomorfo ao próprio $\mathbb{R}$). Uma notação tradicional é $\mathcal{F}f = \hat{f}$. Se a variável independente da função $f(t)$ é um “tempo” t , então a variável conjugada ξ representa uma “frequência” (pois o produto deve ser adimensional). Uma definição alternativa usa a “frequência angular” $\omega = 2\pi\xi$, e é

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (11.2)$$

na notação dos engenheiros. Se a variável independente da função $f(x)$ é uma “posição” x , então a variável conjugada ξ representa um “momento” p sobre uma “ação” (como, por exemplo, a constante de Planck $h \simeq 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ no contexto da mecânica quântica, assim que $e^{2\pi i \xi x} = e^{ipx/\hbar}$, onde $\hbar = h/2\pi$)

A transformada de Fourier é linear, ou seja,

$$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(\lambda f) = \lambda(\mathcal{F}f)$$

se $\lambda \in \mathbb{C}$.

A transformada de Fourier entrelaça translações com modulações. A transformada de Fourier de uma translação $(T_a f)(t) := f(t-a)$ no espaço dos tempos é uma modulação

$$\widehat{(T_a f)}(\xi) = e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi) \quad (11.3)$$

no espaço das frequências, ou seja, $\mathcal{F} \circ T_a = M_{-a} \circ \mathcal{F}$. Vice-versa, a transformada de Fourier de uma modulação $(M_b f)(t) := e^{2\pi i b t} f(t)$ no espaço dos tempos é uma translação

$$\widehat{(M_b f)}(\xi) = \hat{f}(\xi - b) \quad (11.4)$$

no espaço das frequências, ou seja, $\mathcal{F} \circ M_b = T_b \circ \mathcal{F}$.

A transformada de Fourier de uma homotetia $(H_\lambda f)(t) := f(\lambda t)$ no espaço dos tempos, com $\lambda > 0$, é

$$\widehat{(H_\lambda f)}(\xi) = \lambda^{-1} \hat{f}(\xi/\lambda), \quad (11.5)$$

ou seja, $\mathcal{F} \circ H_\lambda = \lambda^{-1} H_{\lambda^{-1}} \circ \mathcal{F}$. A transformada de Fourier da função complexa conjugada $\overline{f}(t) := \overline{f(t)}$ é

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)} \quad (11.6)$$

- Mostre que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua tal que $|f(x)| \leq C/(1+|x|^{1+\varepsilon})$, com $\varepsilon > 0$, então

$$I_N = \int_{-N}^N |f(x)| dx$$

é uma sucessão de Cauchy, e de consequência existe o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx.$$

- Verifique as propriedades (11.3), (11.4), (11.5) e (11.6).

- Use as propriedades (11.3) (11.4) e a fórmula de Euler para mostrar que a transformada de Fourier de $f(x) \cos(\alpha x)$ é

$$\frac{1}{2} \left(\widehat{f}(x - \alpha) + \widehat{f}(x + \alpha) \right)$$

e que a transformada de Fourier de $f(x) \sin(\alpha x)$ é

$$\frac{1}{2i} \left(\widehat{f}(x - \alpha) - \widehat{f}(x + \alpha) \right)$$

- Calcule a transformada de Fourier da função característica do intervalo $[-\ell, \ell]$.
- Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad \text{e} \quad f(x) = e^{-2\pi b|x|}.$$

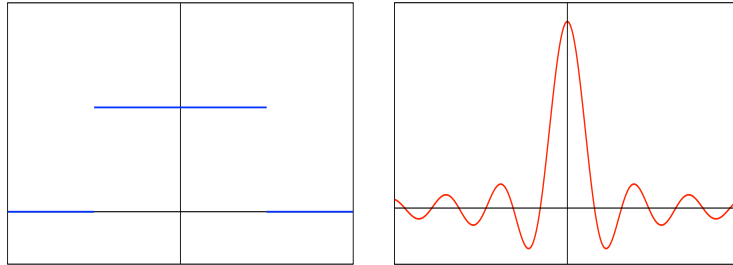
com $b > 0$.

2. (pulso e sinc) O *pulso*, ou *função retangular*, é a função característica do intervalo de comprimento um à volta da origem, ou seja,

$$\text{rect}(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A transformada de Fourier do pulso é a função *sinc* (“sinus cardinalis”) normalizada

$$\begin{aligned} \widehat{\text{rect}}(\xi) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi} =: \text{sinc}(\xi) \end{aligned}$$



3. (transformada de Fourier no espaço de Schwartz) O espaço das funções absolutamente integráveis é muito grande, e não é fácil compreender as propriedades das transformadas de Fourier dos seus elementos. Mais fácil é restringir a transformada a um espaço muito menor, feito de funções muito regulares.

O *espaço de Schwartz* (da reta real) é o espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ das funções infinitamente diferenciáveis na reta real que decrescem, com todas as suas derivadas, mais rápido que o inverso de qualquer polinómio. Ou seja, o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que $\|f\|_{n,m} < \infty$ para todos os $n, m \in \mathbb{N}$, onde as semi-normas $\|\cdot\|_{n,m}$ são definidas por

$$\|f\|_{n,m} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)|$$

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então pertencem ao espaço de Schwartz, e em particular são absolutamente integráveis, também todas as derivadas $f^{(k)}(x)$ e os produtos $p(x)f^{(k)}(x)$, onde $p \in \mathbb{C}[t]$ é um polinómio arbitrário. O *operador derivação* é definido por $(Df)(x) := f'(x)$, e o *operador multiplicação* é definido por $(Xf)(x) := xf(x)$. Então D e X são operadores lineares do espaço de Schwartz no próprio espaço de Schwartz.

A transformada de Fourier entrelaça derivadas com multiplicações, e esta é a causa da importância da transformada no estudo das equações diferenciais.

Teorema 11.1. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então a transformada de Fourier da derivada f' e a derivada da transformada de Fourier de f são

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) \quad e \quad \widehat{f'}(\xi) = \widehat{(-2\pi i x f)}(\xi), \quad (11.7)$$

respetivamente, ou seja, $\mathcal{F} \circ D = 2\pi i X \circ \mathcal{F}$ e $-2\pi i \mathcal{F} \circ X = D \circ \mathcal{F}$.

Por indução, a transformada de Fourier da k -ésima derivada de f é igual a $(2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi)$, e a k -ésima derivada da transformada de Fourier de f é a transformada de Fourier de $(-2\pi i x)^k f(x)$. Em particular, a transformada de Fourier envia o espaço de Schwartz em si próprio, ou seja pode ser pensado como um operador linear $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$.

O produto de convolução das funções de Schwartz f e g é a função $f * g$ definida por

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy$$

Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então também $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. O produto de convolução é simétrico e associativo.

Teorema 11.2. A transformada de Fourier de um produto de convolução é o produto pontual das transformadas de Fourier dos fatores, ou seja,

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) \quad (11.8)$$

- Mostre que uma função de Schwartz é uniformemente contínua (é arbitrariamente pequena numa vizinhança de $\pm\infty$ e uniformemente contínua na região compacta complementar).
- Mostre que o produto de convolução $(\text{rect} * \text{rect})(t)$ é a função triangular

$$\text{tri}(t) := \max\{1 - |t|, 0\},$$

e calcule a transformada de Fourier de $\text{tri}(x)$.

- Mostre que uma função de Schwartz $f(x)$ com valores reais é par sse $\widehat{f}(\xi)$ é real, e é ímpar sse $\widehat{f}(\xi)$ é imaginário puro.
4. (Gaussianas e identidades aproximadas) As gaussianas são as funções de Schwartz $Ce^{-\gamma x^2}$, onde C e $\gamma > 0$ são parâmetros reais. O cálculo

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

mostra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}, \quad \text{ou seja,} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Teorema 11.3. A gaussiana $g(x) := e^{-\pi x^2}$ é “auto-dual”, ou seja é igual à sua transformada de Fourier:

$$\widehat{g}(\xi) = g(\xi)$$

Demonstração. A função $f(z) = e^{-\pi z^2}$ é inteira (holomorfa em $\mathbb{C}$). Portanto, o seu integral $\oint_{\gamma} e^{-\pi z^2} dz$ ao longo do retângulo γ de vértices $\pm R$ e $\pm R + i\xi$ (com ξ real) é nulo. Este integral é

$$\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx + i \int_0^{\xi} e^{-\pi(R+iy)^2} dy - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx - i \int_0^{\xi} e^{-\pi(-R+iy)^2} dy$$

No limite quando $R \rightarrow \infty$, os dois integrais que formam a parte imaginária tendem para 0, pois o valor absoluto do integrando é limitado por $e^{-\pi(R^2-\xi^2)}$. O resultado é que

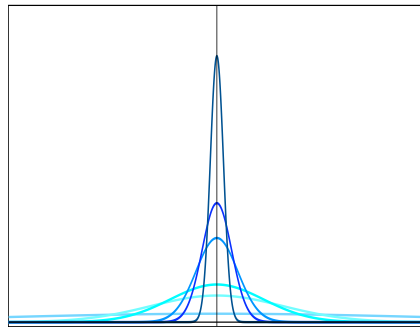
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}$$

□

Consideramos a família de gaussianas

$$G_{\tau}(x) := \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\pi x^2/\tau} \quad (11.9)$$

parametrizadas por $\tau > 0$



Gaussianas G_{τ} com $\tau = 1, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$.

Um cálculo (usando o teorema 11.3 e a propriedade (11.5)) mostra que

$$\widehat{G_{\tau}}(\xi) = e^{-\pi \tau \xi^2}$$

Uma *identidade aproximada* na reta real é uma família de funções integráveis (K_n) não-negativas, ou uniformemente absolutamente integráveis, i.e. tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_n(x)| dx < M,$$

de massa total unitária, i.e. tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x) dx = 1,$$

e “assimptoticamente concentradas na origem”, i.e. tais que para todo $\delta > 0$

$$I_{\tau}(\delta) := \int_{|x| \geq \delta} K_{\tau}(x) dx \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Acontece que a família das G_{τ} ’s forma uma “identidade aproximada” quando $\tau \rightarrow 0$ (ou seja, por exemplo, com $\tau = 1/n$ e $n \rightarrow \infty$). Essencialmente a mesma prova do teorema 8.9 (usando a observação que as funções de Schwartz são uniformemente contínuas) mostra que

Teorema 11.4. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então

$$(f * G_\tau)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) G_\tau(y) dy \rightarrow f(x)$$

uniformemente em x quando $\tau \rightarrow 0$.

- Mostre que a Gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$ é solução da equação diferencial

$$g' + (2\pi x)g = 0.$$

Observe que a sua transformada de Fourier $\widehat{g}(\xi) := (\mathcal{F}g)(\xi)$ também satisfaz a equação diferencial

$$\widehat{g}' + (2\pi\xi)\widehat{g} = 0.$$

Deduza que a gaussiana $g(x)$ é um ponto fixo da transformada de Fourier.

- Calcule a transformada de Fourier da gaussiana genérica $Ce^{-\gamma x^2}$ e de $Ce^{\gamma(x-a)^2}$ (use a transformada da gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$ e as propriedades elementares da transformada de Fourier).
- Verifique que $G_\tau * G_{\tau'} = G_{\tau+\tau'}$.
- Mostre que a família das $K_n(x) := n \cdot \text{rect}(nx)$ é uma identidade aproximada. Mostre que a família de gaussianas $G_\tau(x)$ é uma identidade aproximada quando $\tau \rightarrow 0$ (ou seja, por exemplo, com $\tau = 1/n$).

5. (teorema de inversão) O teorema de Fubini implica a “fórmula de multiplicação” seguinte.

Teorema 11.5 (fórmula de multiplicação). Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y) dy \quad (11.10)$$

Uma consequência é a *fórmula de inversão de Fourier*.

Teorema 11.6 (fórmula de inversão). Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\widehat{f} = \mathcal{F}f$ é a sua transformada de Fourier, então

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (11.11)$$

Demonstração. O núcleo do calor $G_\tau(x)$, definido em (11.9), é a transformada de Fourier da gaussiana $e^{-\pi\tau\xi^2}$. Pela fórmula de multiplicação 11.10,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G_\tau(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\tau\xi^2} d\xi$$

Quando $\tau \rightarrow 0$, o primeiro integral tende para $f(0)$ pelo teorema 11.4, e o segundo integral tende para $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) d\xi$. Isto prova a fórmula (11.11) no ponto $x = 0$. Para provar a fórmula de inversão para x arbitrário, basta considerar a função $g(y) = f(x+y)$ e observar que

$$f(x) = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

pelas (11.3). □

Portanto, a transformada de Fourier é uma bijeção linear $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$ do espaço de Schwartz, cuja inversa é a *transformada de Fourier inversa* $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^*) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definida pelo integral impróprio

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \check{g}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

Na notação (11.2), e fórmula de inversão é escrita

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

6. (teorema de Plancherel) O produto interno e a norma L^2 no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ são definidos por

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{e} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}}$$

respetivamente.

Teorema 11.7 (Plancherel). *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$, ou seja,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Demonstração. Se $g(x) := \overline{f(-x)}$, então $\widehat{g} = \widehat{\widehat{f}}$, pela (11.6). Seja $h = f * g$. Então $h(0) = \|f\|_2^2$, e, pela (11.8), $\widehat{h}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2$. Então, pelo teorema de inversão 11.11,

$$\|f\|_2^2 = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_2^2.$$

□

- Calcule a norma L^2 da gaussiana $e^{-x^2/2}$.
- [Io05] 5.5

Transformadas de Fourier

	(espaço do tempo t)	(espaço da frequência ξ)
(inversão/transformada)	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi t} \hat{f}(\xi) d\xi$	$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t) dt$
(linearidade ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$))	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda \hat{f}(\xi) + \mu \hat{g}(\xi)$
(conjugação)	$\overline{f(t)}$	$\overline{\hat{f}(-\xi)}$
(homotetia ($\lambda > 0$))	$f(t/\lambda)$	$\lambda \hat{f}(\lambda \xi)$
(translação/modulação)	$f(t-a)$	$e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi)$
(modulação/translação)	$e^{2\pi i b t} f(t)$	$\hat{f}(\xi-b)$
(derivação/multiplicação)	$f'(t)$	$2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$
(multiplicação/derivação)	$-2\pi i t f(t)$	$\hat{f}'(\xi)$
(convolução/produto)	$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$
(energia/Plancherel)	$E = \ f\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt$	$E = \ \hat{f}\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) ^2 d\xi$
(pulso/sinc)	$\text{rect}(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq 1/2 \\ 0 & \text{se } t > 1/2 \end{cases}$	$\text{sinc}(\xi) := \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi}$
(gaussiana)	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi \xi^2}$
(exponencial, $a > 0$)	$e^{-2\pi a t }$	$\frac{1}{\pi} \frac{a}{\xi^2 + a^2}$

12 Aplicações da transformada de Fourier às EDPs

1. (difusão na reta e núcleo do calor) Consideramos o problema de Dirichlet que consiste em resolver a equação de calor

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (12.1)$$

na reta real (ou seja, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$) com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Se $u(x, t)$ é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável x)

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

satisfaz a equação diferencial (consequência de (12.1))

$$\widehat{u}_t = -4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}$$

com condição inicial

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-2\pi i \xi x} dx = \widehat{f}(\xi)$$

A solução é

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t} \widehat{f}(\xi)$$

A função $e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$ é a transformada de Fourier do *núcleo do calor* (heat kernel)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t},$$

definido por $t > 0$, e portanto $\widehat{u}(x, t) = \widehat{H}_t(\xi) \widehat{f}(\xi)$. De consequência, um candidato para a solução é o produto de convolução

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (H_t * f)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy \end{aligned}$$

da condição inicial com o núcleo do calor.

Teorema 12.1. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $u(x, t) = (H_t * f)(x)$ é uma solução de classe $\mathcal{C}^\infty$ da equação de calor (12.1) na região $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, que converge uniformemente e na norma L^2 para $f(x)$, i.e.*

$$u(\cdot, t) \rightarrow f \quad e \quad \|u(\cdot, t) - f\|_2 \rightarrow 0,$$

quando $t \searrow 0$.

Demonstração. A função $u(x, t)$ está no espaço de Schwartz para todo tempo $t > 0$, pois é um produto de convolução de duas funções do espaço de Schwartz, e resolve a equação de calor se $t > 0$, porque o próprio $H_t(x)$ é uma solução da equação de calor.

O núcleo do calor $H_t(x)$ é uma identidade aproximada para $t \rightarrow 0$, logo, pelo teorema 11.4, $(H_t * f)(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente em x quando $t \searrow 0$.

Pela fórmula de Plancherel 11.7, o quadrado da norma L^2 da diferença entre $u(x, t)$ e $f(x)$ é

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi, t) - \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Este último integral tende para 0 quando $t \searrow 0$. De facto, seja $\varepsilon > 0$. Sendo $|e^{-4\pi^2\xi^2t} - 1|^2$ limitado e $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, é possível arranjar $R > 0$ tal que

$$\int_{|\xi| \geq R} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2\xi^2t} - 1|^2 d\xi \leq \varepsilon.$$

Por outro lado, sendo $|\widehat{f}(\xi)|^2$ limitado e sabendo que $|e^{-4\pi^2\xi^2t} - 1| \rightarrow 0$ quando $t \searrow 0$ uniformemente para $-R \leq \xi \leq R$, é possível arranjar um tempo T tempos suficientemente pequeno tal que $|\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2\xi^2t} - 1|^2 \leq \varepsilon/2R$ se $t < T$, assim que também o integral

$$\int_{|\xi| \leq R} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2\xi^2t} - 1|^2 d\xi \leq \varepsilon.$$

Isto prova a convergência na norma L^2 □

- Verifique que o núcleo do calor $H_t(x)$ é uma identidade aproximada quando $t \searrow 0$.
- Calcule a solução $u(x, t) = (H_t * f)(x)$ quando a condição inicial é a função pulso $f(x) = \text{rect}(x)$ ou a gaussiana $f(x) = H_1(x)$.
- Mostre que se $u(x, t)$ é uma solução da equação de calor (4.2) que está no espaço de Schwartz para todos os tempos $t > 0$, então a “energia”

$$\mathcal{E}(t) := \|u(\cdot, t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx$$

é não-crescente, i.e. satisfaz $d\mathcal{E}/dt \leq 0$.

- Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da equação de calor com dissipação

$$u_t - u_{xx} = -\alpha u$$

com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ no espaço de Schwartz.

- Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da equação de calor com convecção

$$u_t - u_{xx} = \alpha u_x$$

com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ no espaço de Schwartz.

2. (equação de ondas) Use a transformada de Fourier para determinar a solução formal da equação de onda

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

com condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$ no espaço de Schwartz.

3. (fórmula integral de Poisson no semi-plano) Consideramos o problema de determinar uma extensão harmónica e limitada $u(x, y)$ no semi-plano superior $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de uma função $f(x)$ definida na fronteira $\partial\mathbb{H} \approx \mathbb{R}$. Se $u(x, y)$ é suficientemente regular, a sua transformada de Fourier (apenas na variável x),

$$\widehat{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

satisfaz a equação diferencial

$$-4\pi^2\xi^2\widehat{u} + \widehat{u}_{yy} = 0$$

(consequência de $\Delta u = 0$) com condição inicial

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \widehat{f}(\xi).$$

A solução limitada em $y > 0$ é

$$\widehat{u}(\xi, y) = e^{-2\pi|\xi|y} \widehat{f}(\xi).$$

A função $e^{-2\pi|\xi|y}$ é a transformada de Fourier do *núcleo de Poisson* em $\mathbb{H}$, definido por

$$P_y(x) := \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Então $\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{P_y}(\xi) \widehat{f}(\xi)$. Portanto, um candidato para a extensão harmônica e limitada de $f(x)$ no semi-plano superior $\mathbb{H}$ é o produto de convolução

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (P_y * f)(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-z)^2 + y^2} f(z) dz \end{aligned}$$

de f com o núcleo de Poisson. O núcleo de Poisson não está no espaço de Schwartz, mas decresce (apenas) como $\leq C/(1+|x|^2)$ quando $|x| \rightarrow \infty$. É possível mostrar que é uma identidade aproximada quando $y \rightarrow 0$.

Teorema 12.2. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $u(x, y) = (P_y * f)(x)$ é uma função harmônica e limitada no semi-plano superior $\mathbb{H}$, que converge uniformemente e na norma L^2 para $f(x)$, i.e.*

$$u(\cdot, y) \rightarrow f \quad \text{e} \quad \|u(\cdot, y) - f\|_2 \rightarrow 0,$$

quando $y \searrow 0$.

- Verifique que o núcleo de Poisson $P_y(x)$ em $\mathbb{H}$ é uma identidade aproximada quando $y \searrow 0$.
 - Prove o teorema 12.2.
 - Verifique que $u(x, y) = y$ e $v(x, u) = 0$ são funções harmônicas em $\mathbb{H}$ que assume os mesmos valores (triviais) na fronteira $\partial\mathbb{H} \approx \mathbb{R}$. Isto mostra que o problema de Dirichlet na região ilimitada $\mathbb{H}$, sem mais condições, não admite soluções únicas.
 - [Io05] 5.5
4. (oscilador harmônico quântico e funções de Hermite) A equação de Schrödinger para a função de onda $\psi(x, t)$ de uma partícula de massa $m = 1$ num potencial $V(x) = x^2/2$ (oscilador harmônico), em unidades tais que a constante de Planck reduzida é $\hbar = 1$, é

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 \psi.$$

As soluções separáveis são $\psi_n(x, t) = e^{-iE_n t} f_n(x)$, onde as $f_n(x)$ são funções próprias do operador de Hermite $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definido por

$$2H := -D^2 - X^2,$$

com valores próprios E_n (umas energias), i.e. $Hf_n = E_n f_n$. Os operadores de *destruição* (annihilation) e de *criação* (creation) são os operadores

$$Z := X + D \quad \text{e} \quad Z^* := X - D,$$

respetivamente, definidos, por exemplo, no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. É imediato verificar que $[D, X] = I$ (o operador identidade), e que $2H = Z^*Z + I$. O operador de criação é o “adjunto” do operador de destruição, no sentido em que se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então

$$\langle Zf, g \rangle_2 = \langle f, Z^*g \rangle_2$$

Isto implica que $\langle Z^*Zf, f \rangle_2 = \|Zf\|_2^2 \geq 0$ para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ou seja, que $2H \geq I$. O produto $N := Z^*Z$ é chamado operador *número*, e satisfaz a relação de comutação $[N, Z^*] =$

$2Z^*$. Se f é um vetor próprio de N com valor próprio λ , então Z^*f é um vetor próprio de N com valor próprio $\lambda + 2$. De fato, se $Nf = \lambda f$,

$$N(Z^*f) = (Z^*N + [N, Z^*])f = (Z^*N + Z^*)f = Z^*(N + 2I)f = (\lambda + 2)Z^*f$$

A gaussiana $g(x) = e^{-x^2/2}$ está no núcleo do operador de destruição, ou seja, satisfaz a equação diferencial $Zg = 0$, e portanto $\phi_0 := g/\|g\|_2$ é um vetor próprio unitário do operador N com valor próprio $N\phi_0 = 0$. Então as funções de Hermite, definidas por

$$\phi_n := \frac{1}{\|(Z^*)^n \phi_0\|_2} (Z^*)^n \phi_0$$

se $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, formam uma família ortonormada de vetores próprios do operador número N com valores próprios $2n$ (os ϕ_n com n 's diferentes são ortogonais porque $N^* = N$), e de consequência do operador de Hermite H com valores próprios $(n + 1/2)$, i.e.

$$H \phi_n = (n + 1/2) \phi_n.$$

5. (**princípio de indeterminação de Heisenberg**) Acontece que uma função e a sua transformada de Fourier não podem ser, contemporaneamente, muito concentradas.

Se fixamos a energia $\|\psi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$, e portanto também $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = 1$ pelo teorema de Plancherel, podemos interpretar $|\psi(x)|^2$ e $|\widehat{\psi}(\xi)|^2$ como sendo umas densidades de probabilidades. Este é o caso da função de onda $\psi(x)$ de uma partícula quântica na representação de Schrödinger, onde $\int_a^b |\psi(x)|^2 dx$ é a probabilidade de observar a posição da partícula no intervalo $[a, b]$. Uma medida natural da “concentração” é a “variância”

$$\text{Var}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx$$

onde o “valor médio” é definido por

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx.$$

(em mecânica quântica, o valor médio do observável “posição” no estado ψ). Analogamente definimos a variância $\text{Var}(\xi)$ da transformada de Fourier e o valor médio $\bar{\xi}$ da variável conjugada ξ (em mecânica quântica, o valor médio do observável “momento linear”).

Teorema 12.3 (princípio de indeterminação de Heisenberg). *Se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tem norma $\|\psi\|_2 = 1$, e $\widehat{\psi}(\xi)$ é a sua transformada de Fourier, então*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq 1/4 \quad (12.2)$$

Demonstração. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, consideramos os operadores de destruição e criação deformados $Z_\lambda := \lambda X + D$ e $Z_\lambda^* = \lambda X - D$, respetivamente. Fixado $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, o polinómio quadrático

$$Q(\lambda) := \langle Z_\lambda^* Z_\lambda \psi, \psi \rangle = \lambda^2 \langle X\psi, X\psi \rangle - \lambda \langle \psi, \psi \rangle + \langle D\psi, D\psi \rangle$$

é não-negativo, pois é igual a $\langle Z_\lambda \psi, Z_\lambda \psi \rangle = \|Z_\lambda \psi\|_2^2 \geq 0$. Se $\|\psi\| = 1$, isto implica que $\langle X\psi, X\psi \rangle \cdot \langle D\psi, D\psi \rangle \geq 1/4$. O primeiro fator é $\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx$. Pelas (11.7) e pelo teorema de Plancherel, o segundo fator é $\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$. Portanto,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq 1/4.$$

A desigualdade (12.2) é obtida substituindo $\psi(x)$ por $e^{-2\pi i x \bar{\xi}} \psi(x - \bar{x})$. $\square$

- Mostre que valor médio minimiza o desvio quadrático $a \mapsto \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 |\psi(x)|^2 dx$.
- Verifique que o mínimo em (12.2) é atingido quando $\psi(x)$ é uma gaussiana.

Referências

- [Ar04] V.I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer - PHASIS, 2004.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Bi80] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, MIR, 1980.
- [Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [CH89] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Verlag 1924 [*Methods of mathematical physics*, Wiley-VCH, 1989].
- [Fo92] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematica Society, 1992.
- [GdF87] D. Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA, 1987.
- [HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers* (fourth edition), Oxford University Press, 1959.
- [KF83] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Elementos de Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR, 1983.
- [Io05] V. Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [Jo82] F. John, *Partial Differential Equations*, Springer, 1982.
- [MF05] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953 [Feshbach Publishing, 2005].
- [O'N99] P.V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1999.
- [Pe05] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Knopf, 2005.
- [Pi91] M.A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, 1991.
- [PR05] Y. Pinchover and J. Rubinstein, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2005.
- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2006.
- [Sa08] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action, From Modelling to Theory*, Springer, 2008.
- [SG04] M. Stone and P. Goldbart, *Mathematics for Physics*, Cambridge University Press, 2004.
- [SS03] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [St08] W. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, 2nd ed, Wiley, 2008.