15/11/2007 teste	Introdução aos sistemas dinâmicos	LEI

NOME	N^o	CURSO

O teste tem a duração de 2h.
Escolha um, e apenas um, exercício em cada página e responda em português.
Não é permitido o uso de máquinas de calcular programáveis ou gráficas.
É permitido o uso das folhas práticas da disciplina.

1. *(5 valores)* Considere a equação logística

$$\dot{x} = x(1-x)$$

Determine as soluções de equilíbrio, a solução com condição inicial $x(0) = 1/2$, e esboce os seus gráficos.

2. *(5 valores)* Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = \alpha x^2$$

onde $\alpha > 0$. Determine as soluções de equilíbrio, a solução com condição inicial $x(0) = 1$, e esboce os seus gráficos.

3. *(5 valores)* A temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura M é mantida constante segue a *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k\,(T - M)$$

onde k é uma constante positiva. Determine a solução de equilíbrio, a solução $T(t)$ com condição inicial $T(0) = M/2$, e esboce os seus gráficos.

4. *(5 valores)* A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L, alimentado com tensão constante E, é determinada pela equação diferencial

$$L\dot{I} + RI = E$$

Determine a solução estacionária, a solução $I(t)$ com condição inicial $I(0) = 0$, e esboce os seus gráficos.

5. *(5 valores)* Determine a solução geral da equação diferencial

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0\,.$$

e esboce o seu gráfico.

6. *(5 valores)* Determine uma solução particular da equação diferencial

$$\ddot{x} + x = \cos(t)\,.$$

e esboce o seu gráfico.

7. *(5 valores)* Determine a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 0$, e condições iniciais

$$u(x,0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,.$$

8. *(5 valores)* Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 0$, e condição inicial

$$u(x,0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)\,.$$