

Introdução aos sistemas dinâmicos

LEI 2007/08

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática, Universidade do Minho,

Campus de Gualtar, 4710-057 Braga, PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url w3.math.uminho.pt ou w3.math.uminho.pt/~scosentino

17 de Setembro de 2007

Programa resumido

- Equações diferenciais ordinárias, aplicações à dinâmica de sistemas mecânicos, oscilações lineares.
[Apostol] [Robinson] [Boyce] [Haberman]
- Equações diferenciais com derivadas parciais, análise de Fourier, equação de onda e equação de difusão.
[Boyce] [Olver] [Spiegel] [O'Neil] [Dyke]
- Sistemas não-lineares, sistemas caóticos. Implementação computacional de sistemas dinâmicos.
[Olver] [Robinson] [Haberman]
- Aplicações à dinâmica de fluidos, turbulência.
[Olver]

Resultados de aprendizagem

- Descrever técnicas de integração e exemplificar aplicações de equações diferenciais ordinárias (EDOs). (10T+4TP)
- Analisar qualitativamente sistemas de EDOs não-lineares (10T+3TP)
- Aplicar ferramentas computacionais no contexto da unidade curricular. (0T+4TP)
- Descrever técnicas de integração e aplicações de equações diferenciais de derivadas parciais. (10T+4TP)

Referências

- [Apostol] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, New York 1969.
- [Boyce] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley 1992.
- [Dyke] P.P.G. Dyke, *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer 2002.
- [Figueiredo] Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA 1987.
- [O'Neil] Peter V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons 1999.
- [Haberman] Richard Haberman, *Mathematical Models*, SIAM's Classics in Applied Mathematics 1998.
- [Hasselblatt] B. Hasselblatt and A. Katok, *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- [Spiegel] Murray R. Spiegel, *Análise de Fourier*, McGraw-Hill 1976.
- [Olver] Peter J. Olver, *Applied Mathematics Lecture Notes*.
<http://www.math.umn.edu/~olver/appl.html>
- [Robinson] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.
- [Vandenbroucq] L. Vandembroucq e T. Kahl, *Apontamentos das aulas de Complementos de Análise Matemática*, Universidade do Minho, Braga 2006. <http://www.math.uminho.pt>

Avaliação contínua/periódica

Elementos de avaliação. Um teste e um trabalho de grupo.

Testes. Um teste (sobre EDOs e séries de Fourier) realizado no dia 12 de Novembro de 2007.

Trabalho de grupo. Os grupos são compostos por $n \leq 5$ alunos. O trabalho consiste na implementação de um código (em **C**, **C++** ou **Java**) para simular um sistema dinâmico e no estudo de um problema prático. Os problemas dos trabalhos podem ser escolhidos dentro dos temas propostos pelo docente, e devem ser aprovados pelo docente. A composição dos grupos e os temas escolhidos devem ser comunicados ao docente até o dia 26 de Novembro de 2007. O desenvolvimento do trabalho será acompanhado durante as aulas TP e no horário de atendimento do docente. A avaliação dos trabalhos de grupo será baseada numa apresentação oral e num relatório escrito.

Apresentação do trabalho de grupo. Cada grupo será chamado a fazer uma breve apresentação oral do próprio trabalho, nas aulas T ou TP ou em horário de atendimento, a partir do mês de Dezembro. A data de cada apresentação será decidida pelo docente, e comunicada aos grupos com uma semana de antecedência.

Relatório do trabalho de grupo. Cada grupo deve entregar um breve relatório (uma dezena de páginas) do seu trabalho. O prazo para entrega dos relatório do trabalho é o dia 7 de Janeiro de 2008.

Classificação. A nota final é

$$N = \frac{T_g + T_t}{2}$$

onde T_g é a nota obtida no trabalho de grupo, T_t é a nota obtida no teste, desde que o aluno tenha uma nota mínima em cada um dos elementos de avaliação. Notas mínimas para obter aprovação são $T_g \geq 8$ e $T_t \geq 8$.

Avaliação por exame final

Elementos de avaliação. Um exame escrito e uma prova oral, não obrigatória.

Classificação. A nota final é

$$N = E$$

onde E é a nota obtida na prova escrita. Os alunos com nota não inferior a 8 valores podem ainda optar por uma prova oral complementar. Neste caso a nota final será a média aritmética

$$N = \frac{E + O}{2}$$

entre a nota O da prova oral e a nota E obtida no exame escrito.

Temas para o trabalho de grupo

Pêndulo matemático. Simular o *pêndulo matemático*,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

Analizar a variação do período em função da amplitude das oscilações, analisar a estabilidade das órbitas periódicas. Analizar as auto-oscilações do pêndulo com atrito e com momento de rotação constante,

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) + \alpha \dot{\theta} = M$$

Oscilações forçadas. Simular a equação

$$\ddot{q} + 2\alpha \dot{q} + \omega^2 q = F_0 \cos(\gamma t + \phi)$$

Analizar a resposta do sistema ao variar a frequência γ e os parâmetros α e ω . Simular a resposta a forças diferentes.

Pêndulo duplo. Simular o *pêndulo duplo*

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ell_1\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\ell_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 &= 0 \\ m_2\ell_2\ddot{\theta}_2 + m_2\ell_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\ell_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + gm_2 \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Detectar órbitas periódicas, analisar a estabilidade, detectar órbitas caóticas.

Problema de Kepler e problema dos 3 corpos. O problema de Kepler corresponde a uma equação $\ddot{r} = -U'(r)$ com potencial eficaz

$$U(r) = A/r^2 - 1/r$$

Sistema de Van der Pol.

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = 0$$

Sistema de Lotka-Volterra (presas-predadores).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$$

Oscilador de Duffing.

$$\ddot{q} + \delta \dot{q} + \omega^2 q + \beta q^3 = F_0 \cos(\gamma t + \phi)$$

Equação logística com retardo. Simular a equação logística com retardo

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) (1 - x(t - \tau))$$

Atrator de Lorenz. Simular o sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

Analizar o comportamento assintótico das trajectórias ao variar os parâmetros σ , ρ e β . Analizar a estrutura do *atractor de Lorenz*. Estimar os coeficientes de Lyapunov.

Transformação logística. Simular a *transformação logística*

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

ao variar o parâmetro $0 \leq \lambda \leq 4$. Esboçar o *diagrama de Feigenbaum*, as órbitas periódicas ao variar o parâmetro.

Método de Newton.

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}$$

Conjuntos de Julia e Mandelbrot. Iteração de polinómios no plano complexo, por exemplo

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Transformação de Hénon.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n + 1 - \alpha x_n^2 \\ y_{n+1} &= \beta x_n\end{aligned}$$

Transformação de Duffing.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= -\beta x_n + \alpha y_n - y_n^3\end{aligned}$$

Transformação de Arnold.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n \mod 1 \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \mod 1\end{aligned}$$

Fourier Fast Transform.

.

Plano das aulas

#	semana	matéria	avaliação periódica
I	17 set - 21 set	Introdução às EDOs	
II	24 set - 28 set	EDOs autônomas e separáveis, simulações	
III	1 out - 5 out (5 out feriado!)	EDOs lineares de primeira ordem	
IV	8 out - 12 out	EDOs lineares de segunda ordem com coeficientes constantes	
V	15 out - 19 out	Sistemas lineares (oscilador harmônico e oscilações forçadas)	
VI	22 out - 26 out	Equação das ondas e equação da difusão	
VII	29 out - 2 nov (1 nov feriado!)	Séries de Fourier	
VIII	5 nov - 9 nov	Aplicações das séries de Fourier	
IX	12 nov - 16 nov		teste
X	19 nov - 23 nov	Sistemas dinâmicos	
XI	26 nov - 30 nov	Sistemas não-lineares e linearização	
XII	3 dez - 7 dez	Estabilidade, funções de Lyapounov	
XIII	10 dez - 14 dez	Sistemas caóticos, iteração	
XIV	17 dez - 21 dez	Círculos limites	
XV	7 jan - 11 jan	Dinâmica de fluidos, PDEs não lineares, turbulência	trabalho
XVI	14 jan- 18 jan		
XVII	21 jan - 25 jan		
XVIII	28 jan - 1 fev		
XIX	4 fev - 8 fev	Exame	
XX	11 fev - 15 fev	Exame	