Introdução aos Sistemas Dinâmicos - Folhas práticas
LEI 2007/08

Salvatore Cosentino
Departamento de Matemática, Universidade do Minho,
Campus de Gualtar, 4710-057 Braga, PORTUGAL
gab B.4023, tel 253 604086
e-mail scosentino@math.uminho.pt
url w3.math.uminho.pt

12 de Dezembro de 2007

Conteúdo

1 EDOs de primeira ordem: autónomas, separáveis e lineares

1. (Integração de EDOs simples) O *teorema fundamental do cálculo* (Newton e Leibniz) implica que a solução de uma EDO simples
$$\dot{x} = v(t)$$
com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,
$$\boxed{\dot{x} = v(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)ds}$$
   - Integre as seguintes EDOs, definidas em oportunos domínios.
$$\dot{x} = 2\sin(t) \qquad \dot{x} = e^{-t} \qquad \dot{x} = \cos(3t) \qquad \dot{x} = \frac{1}{t}$$

2. (queda livre) A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela *equação de Newton*
$$m\ddot{r} = -mg$$
onde r é a altura, m é a massa da partícula, $g \simeq 9.8\ ms^{-2}$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\ddot{r}$ denota a segunda derivada de r em ordem ao tempo t.
   - Escreva a solução geral desta equação.
   - Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.
   - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?
   - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?

3. (EDOs autónomas) Queremos determinar soluções da EDO autónoma
$$\dot{x} = v(x)$$
com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. se $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0$ é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio)* da equação. Se x_0 não é um ponto singular, então uma solução local é determinanda separando as variáveis, $\frac{dx}{v(x)} = dt$, e integrando os dois membros, $\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$. Ou seja,
$$\boxed{\dot{x} = v(x)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}}$$
   - Considere as seguintes EDOs de primeira ordem
$$\dot{x} = -3x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = e^{x} \qquad \dot{x} = \sqrt{x}$$
$$\dot{x} = (x-1)(x-2) \qquad \dot{x} = e^{x} \qquad \dot{x} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

     Encontre, caso existam, as soluções estacionárias.

     Desenhe os respectivos campos de direcções e conjecture sobre o comportamento das soluções.

     Integre, quando possível, as equações e calcule soluções.

     Determine umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(t_0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

4. (decaimento radioactivo) A taxa de decaimento de matéria radioactiva é proporcional à quantidade de matéria existente. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioactiva existente no instante t satisfaz a EDO de primeira ordem

$$\dot{N} = -\beta N$$

para alguma *constante de decaimento* positiva β.

- Encontre a solução geral da equação.
- Encontre uma fórmula para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $N(0) = b$.
- O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioactiva é o tempo necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial, isto é, é o tempo T tal que $N(T)/N(0) = 1/2$. Encontre a relação entre o tempo de meia-vida T e a constante de decaimento β, e mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$.
- O carbono 14, C_{14}, tem constante de decaimento $\beta \simeq 1.238 \times 10^{-4}$ ano^{-1}. Sabendo que a quantidade de C_{14} presente actualmente num fóssil é 40 por cento da quantidade inicial, determine a idade do fóssil.

5. (crescimento exponencial) O crescimento de uma população num meio ilimitado segue a EDO de primeira ordem

$$\dot{N} = \alpha N$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t, e $\alpha > 0$ é uma *constante de reprodução*.

- Escreva a solução geral da equação como função da condição inicial $N(0) = b > 0$.
- O que acontece à solução para grandes intervalos de tempo?
- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?

6. (logística) Um modelo mais realista da dinâmica populacional é dado pela *equação logística*

$$\dot{N} = \alpha N(1 - N/N_{max})$$

onde a constante positiva N_{max} é a população máxima permitida num dado meio limitado. Note que, tal como antes, $\dot{N} \simeq \alpha N$ para N muito menor que N_{max}, e que a taxa de crescimento decai para zero quando N se aproxima do máximo valor permitido N_{max}.

- Seja $x(t) = N(t)/N_{max}$ a população relativa. Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a EDO de primeira ordem

  $$\dot{x} = \lambda x(1 - x)$$

  para alguma constante positiva λ.
- Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
- Verifique que

  $$x(t) = \frac{1}{1 + ce^{-\lambda t}} \quad ,$$

  onde c é uma constante, é uma solução da equação logística.
- Encontre uma fórmula para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(0) = b$.
- Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.

7. (crescimento super-exponencial) Um outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \alpha N^2.$$

- Determine soluções da equação.

- Note que as soluções que determinou não estão definidas para toda a recta real: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!

8. (EDOs separáveis) A solução de uma EDO separável

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{g(t)}$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, se $f(x_0) \neq 0$ e $g(t_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\dot{x} = f(x)/g(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{g(s)}}$$

- Resolva as seguintes EDOs separáveis definidas em oportunos domínios.

$$x' = tx^3 \qquad tx' + t = t^2 \qquad x' = t^3/x^2 \qquad xx' = e^{x+3t^2}t$$

$$x' = \frac{t-1}{x^2} \qquad \frac{x-1}{t}x' + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\left(t^2+1\right)x' = 2tx \qquad x' = t\left(x^2 - x\right) \qquad x' = e^{t-x}\,,$$

9. (EDOs homogéneas) Uma EDO homogénea

$$\dot{x} = v(t,x) \qquad \text{com} \qquad v(\lambda t, \lambda x) = v(x,t) \quad \forall \lambda > 0\,,$$

é transformada numa EDO separável com a mudança de variável $y(t) = x(t)/t$, i.e.

$$\boxed{\dot{x} = v(1, x/t) \qquad \Rightarrow \qquad y + t\dot{y} = v(1,y)}$$

- Seja
$$x' = v(t,x)$$
uma EDO homogénea, ou seja tal que $v(t,x) = v(\lambda t, \lambda x)$ para todo o $\lambda > 0$.
Mostre que se $\varphi(t)$ é uma solução então também $\phi(t) = \lambda\varphi\left(t/\lambda\right)$ é uma solução.
Seja $\varphi(t)$ uma solução tal que $\varphi(1) = 5$ e $\varphi(2) = 7$. Se $\phi(t)$ é uma outra solução tal que $\phi(3) = 15$, quanto vale $\phi(6)$?
- Resolva as seguintes EDOs homogéneas

$$x' = -t/x \qquad x' = \frac{x-t}{x+t} \qquad x' = 1 + x/t$$

$$x' = x/t \qquad x' = 2\frac{t}{x}e^{x/t} + \frac{x}{t} \qquad \frac{dy}{dx} = y/x + \sin(y/x)\,,$$

definidas em oportunos domínios, e esboce a representação gráfica de algumas das soluções.

10. (fazer modelos) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

- A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá no instante t é proporcional à diferença entre a temperatura do ar e a temperatura do chá no instante t.
- A taxa de variação do número de elementos de uma população de cogumelos no instante t é proporcional à raiz quadrada do número de elementos da população no instante t.
- A velocidade de um foguetão no instante t é inversamente proporcional à altura atingida no instante t.
- A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.

11. (EDOs lineares de primeira ordem) A solução de uma EDO linear

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada pelos seguintes dois passos: resolver a equação homogénea associada $\dot{y} + p(t)y = 0$, substituir a conjectura $x(t) = \lambda(t)y(t)$ na equação não-homogénea e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\boxed{\dot{x} + p(t)x = q(t)\,,\ x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(u)du}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} p(u)du} q(s)ds\right)\,.}$$

- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2x' - 6x = e^{2t} \qquad x' + 2x = t \qquad x' + x/t^2 = 1/t^2 \qquad x' + tx = t^2$$

  definidas em oportunos intervalos da recta real.
- Resolva os seguintes problemas de Cauchy nos intervalos indicados:

$$2x' - 3x = e^{2t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$
$$x' + x = e^{3t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$
$$tx' - x = t^3 \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$
$$x' + tx = t^3 \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$
$$dr/d\theta + r\tan\theta = \cos\theta \qquad \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

12. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força $-k\dot{r}$ proporcional e contrária à velocidade, assim a equação de Newton escreve-se $m\ddot{r} = -k\dot{r} - mg$, onde k é uma constante positiva. Chamando $v = \dot{r}$ a velocidade da partícula, somos levados a EDO

$$m\dot{v} = -kv - mg$$

- Resolva o problema de Cauchy com condição inicial $v(0) = 0$.
- Mostre que a velocidade v tende para um valor assimptótico quando $t \to \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
- Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $r(t)$ com condição inicial $r(0) = s$.

13. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L, é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Escreva a solução geral como função da corrente inicial $I(0) = b$.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E\sin(\omega t)$. Se não conseguir[1], mostre que a solução com $I(0) = 0$ tem a forma

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \alpha) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

  onde α é uma constante que depende de ω, L e R.

[1]ajuda: $\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right)$ e $\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx) + b\sin(bx)\right)$

14. (lei do arrefecimento de Newton) A temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ segue a *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k\,(T - M(t))$$

onde k é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

- Escreva a solução geral como função da temperatura inicial $T(0) = b$.
- Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
- Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100^oC, é colocada numa sala cuja temperatura é de 20^oC. Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60^oC em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40^oC.

15. (equações de Bernoulli) Uma EDO da forma

$$x' + P(t)x = Q(t)x^n,$$

onde P e Q são funções contínuas num intervalo I e com $n \neq 0$ ou 1 (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita *equação de Bernoulli*.

- Mostre que $x(t) = 0$ é uma solução da equação de Bernoulli.
- Seja $k = 1 - n$. Mostre que $x(t)$ é uma solução positiva da equação de Bernoulli com condição inicial $x(a)^k = b$ sse a função $y(t) = x(t)^k$ é uma solução da EDO linear

$$y' + kP(t)y = kQ(t)$$

  com condição inicial $y(a) = b$.
- Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$x' + x = x^2\,(\cos t - \sin t) \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t x' + e^{t^2} x = x^2 \log t \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$x' - x/t = t\sqrt{x} \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

2 EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes

1. (EDOs de segunda ordem homogéneas com coeficientes constantes) Soluções da EDO homogénea

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$$

podem ser determinadas usando a conjectura $x(t) = e^{zt}$. Em particular, se $z_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ são as raizes do *polinómio caractéristico* $z^2 + 2\alpha z + \beta$, então duas soluções independentes são

$e^{-\alpha t}e^{kt}$, $e^{-\alpha t}e^{-kt}$	raizes reais e distintas $z_\pm = -\alpha \pm k$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$, $e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	raizes complexas conjugadas $z_\pm = -\alpha \pm i\omega$
$e^{-\alpha t}$, $te^{-\alpha t}$	raiz dupla $z_0 = -\alpha$

- Determine a solução geral das seguintes EDOs homogéneas:

$$x'' - 2x = 0 \qquad x'' + \pi^2 x = 0 \qquad 3x'' + x' = 0 \qquad x'' - x' = 0$$

$$x'' + 2x' - x = 0 \qquad x'' + 2x' + x = 0 \qquad x'' + 4x' + 5x = 0 \qquad x'' - 4x' + x = 0 \,.$$

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

$$x'' + 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } x'(0) = 2$$

$$x'' + x' = 0 \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } x'(0) = 0$$

$$x'' + 4x' + 5x = 0 \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } x'(0) = -1$$

$$x'' - 17x' + 13x = 0 \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } x'(3) = 0$$

$$x'' - 2x' - 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } x'(0) = 9$$

$$x'' - 4x' - x = 0 \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } x'(1) = 1 \,.$$

- Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:

$$e^{2t} \quad \text{e} \quad e^{-2t}\,, \qquad e^{-t}\sin(2\pi t) \quad \text{e} \quad e^{-t}\cos(2\pi t)\,, \qquad \sinh(t) \quad \text{e} \quad \cosh(t)\,,$$

$$e^{-3t} \quad \text{e} \quad te^{-3t}\,, \qquad \sin(2t+1) \quad \text{e} \quad \cos(2t+2)\,, \qquad 3 \quad \text{e} \quad 5t\,.$$

2. (oscilador harmónico) Considere a equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q\,.$$

- Determine a solução com condição inicial $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, mostre que é periódica e determine o período das oscilações.
- Mostre que a solução pode ser escrita nas formas

$$q(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad A\cos(\omega t + \phi)\,,$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais q_0 e v_0.

- Mostre que a energia

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento, ou seja que se $q(t)$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt}E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$ para todo o tempo t.

- Determine a energia em quanto função da amplitude e da frequência das oscilações.
- Esboce as curvas de fases no plano q-$\dot{q}$.

3. (partícula numa montanha) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = k^2 q\,,$$

que descreve uma partícula de massa m num potencial $U(q) = -\frac{1}{2}k^2q^2$.

- Determine a solução geral.
- Existem soluções de equilíbrio? Existem outras órbitas periódicas ou limitadas?

4. (oscilações amortecidas) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q\,,$$

onde α é uma constante positiva.

- Resolva a equação, esboce algumas soluções e discuta os casos
  $\alpha^2 < \omega^2$ (amortecimento sub-crítico),
  $\alpha^2 = \omega^2$ (amortecimento crítico),
  e $\alpha^2 > \omega^2$ (amortecimento super-crítico).
- Mostre que a energia

  $$E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

  não é uma constante do movimento.
- O que acontece quando α é negativo?

5. (equação de Schrödinger estacionária) Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$

para a função de onda $\Psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula e $\hbar$ é a constante de Planck reduzida. Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0,\ell]$ com condições de fronteira $\Psi(0) = 0$ e $\Psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

6. (equações equidimensionais) Uma equação diferencial da forma

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

é dita *equidimensional*.

- Mostre que a substituição $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) = y(x(t))$.
- Resolva a equação

  $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0\,,$$

  na semirecta $x > 0$.

7. (variação dos parâmetros) Uma solução particular da EDO

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = r(t)$$

é dada por

$$z(t) = \lambda_+(t)\phi_+(t) + \lambda_-(t)\phi_-(t)$$

onde

$$\boxed{\lambda_+(t) = -\int \phi_-(t)\frac{r(t)}{W_{\phi_+,\phi_-}(t)}dt\,, \qquad \lambda_-(t) = \int \phi_+(t)\frac{r(t)}{W_{\phi_+,\phi_-}(t)}dt\,,}$$

$\phi_+(t)$ and $\phi_-(t)$ são duas soluções independentes da equação homogénea $y'' + 2\alpha y' + \beta y = 0$, e $W_{\phi_+,\phi_-}(t) = \phi_+(t)\phi_-'(t) - \phi_+'(t)\phi_-(t)$ é o Wronskiano.

- Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em oportunos domínios, utilizando o método de variação dos parâmetros:

$$x'' + x = 1/\sin(t) \qquad x'' + 2x' + x = e^{-t} \qquad x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}\log t\,.$$

$$x'' + x = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \qquad x'' + x = \tan(t) \qquad x'' - 4x' + 8x = \frac{e^{2t}}{\cos(2t)} \qquad .$$

8. (coeficientes indeterminados) Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$x'' + x = t \qquad x'' - x' = t^2 \qquad x'' + 4x' + 3x = t^2 - 1 \qquad x'' - 4x = e^{-2t}$$

$$x'' + 2x' + x = t^3e^{-t} + e^t \qquad x'' + x = \sin(t) \qquad x'' + 4x = 2t\cos(t)$$

$$x'' + 9x = \sin(\pi t) \qquad x'' + 4x = \cos(2t) \qquad x'' - 4x = te^{-2t} \qquad x'' + 4x = te^{-t}\cos(2t)\,.$$

9. Mostre que uma solução particular da equação $x'' + \omega^2 x = r(t)$ é

$$\varphi(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t r(s)\sin\left(\omega(t-s)\right)ds\,,$$

e que uma solução particular da equação $x'' - k^2x = r(t)$ é

$$\phi(t) = \frac{1}{k}\int_0^t r(s)\sinh\left(k(t-s)\right)ds\,.$$

10. (partícula num campo de forças dependente do tempo) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} + F(t)$$

de uma partícula de massa m sujeita a uma força $F(t)$, onde $\alpha \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, determine a trajectória quando a força é

- $F(t) = g$, ou seja, constante,
- $F(t) = 3 - t^2$,
- $F(t) = F_0\cos(\gamma t)$,
- $F(t) = \sum_{i=1}^n F_i\cos(\gamma_i t)$.

11. (oscilações forçadas) Considere a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + F(t)\,.$$

onde a força é $F(t) = F_0\cos(\gamma t)$.

- Determine a solução geral da equação quando $\gamma^2 \neq \omega^2$.
- Mostre que a solução quando $\gamma^2 = \omega^2$ (frequência ressonante) é

$$q(t) = A\sin\left(\omega t + \varphi\right) + \frac{F_0}{2\omega}t\sin\left(\omega t\right)\,.$$

onde a amplitude A e a fase φ dependem dos dados iniciais.

12. (oscilações forçadas amortecidas) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q + F(t)\,,$$

onde $\alpha > 0$ e a força é $F(t) = F_0\cos(\gamma t)$.

- Mostre que, se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), a solução geral é

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\, t + \varphi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \sin\left(\gamma t + \phi\right) ,$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais. A primeira parcela da solução representa um regime transitório (transiente), desprezável para grandes valores do tempo. A segunda é dita solução estacionária, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função

$$R(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}}$$

é dita *curva de ressonância* do sistema, pois representa o factor de proporcionalidade entre a amplitude da força e a amplitude da resposta.

- Esboce o gráfico da curva de ressonância. Mostre que a curva de ressonância $R(\gamma)$ atinge um máximo para o valor

$$\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2}$$

da frequência, chamada *frequência de ressonância*.

- Determine a solução estacionária quando a força é uma sobreposição

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos(\gamma_i t)\, .$$

- Discuta também os casos $\alpha^2 = \omega^2$ e $\alpha^2 > \omega^2$.

13. (circuito RLC) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R, indutância L e capacidade C, é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{V}\, ,$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$, e esboce as soluções.
- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).
- Determine a frequência de ressonância do circuito.

3 Ondas e difusão: método de separação de variáveis

1. (corda vibrante) Considere as pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ, tensão k e densidade linear ρ. O deslocamento transversal $u(x,t)$ da corda verifica a *equação das ondas*

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

onde $c = \sqrt{k/\rho}$, com condições de fronteira $u(0,t) = 0$ e $u(\ell,t) = 0$ para todo o tempo $t \geq 0$.

- Mostre que a energia

$$E = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + k \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) dx$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E = 0$.

- Verifique que umas soluções da equação com os extremos fixos são as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \Big(a_n \cos(2\pi\nu_n t) + b_n \sin(2\pi\nu_n t) \Big) \sin(2\pi x/\lambda_n) \\ &= A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\lambda_n) \ , \qquad \text{com } n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

onde a_n e b_n são constantes arbitrárias, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\tau_n = \arctan(a_n/b_n)$, as *frequências próprias* da corda são

$$\nu_n = \frac{c}{2\ell} n \, , \qquad \text{com } n = 1,2,3,\ldots \, ,$$

e os *comprimentos de onda* são

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} \, , \qquad \text{com } n = 1,2,3,\ldots \, .$$

A primeira frequência, $\nu_1 = \frac{c}{2\ell}$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = \frac{cn}{2\ell}$, são ditas n-ésimas *harmónicas* da corda.

- Determine a energia da uma sobreposição de ondas estacionárias

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\lambda_n) \ ,$$

suposta convergente, em função das amplitudes das harmónicas.

- A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70N (ou seja, $\simeq$ 7.1Kg), vibra com frequências 660Hz, 1320Hz, 1980Hz, ... Determine a densidade linear e o peso da corda. O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880Hz com esta corda?

- Determine umas soluções da equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \, , \qquad \text{com } 0 \leq x \leq \pi \, ,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 0$, e condições iniciais

$$u(x,0) = \sin(3x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\sin(4x) \, ,$$

ou

$$u(x,0) = 3\sin(x) - \sin(2x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \, .$$

2. (condução do calor)) Considere a condução de calor num fio condutor de comprimento ℓ e difusividade térmica β. A temperatura $u(x,t)$ na posição x e no tempo t verifica a equação do calor

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

- Verifique que a função
$$a + \frac{b-a}{\ell} x$$
é uma solução estacionária da equação do calor com condições de fronteira constantes $u(0,t) = a$ e $u(\ell,t) = b$. Deduza que a solução da equação com condições de fronteira constantes $u(0,t) = a$ e $u(\ell,t) = b$ é igual a
$$a + \frac{b-a}{\ell} x + u(x,t)\,,$$
onde $u(x,t)$ é a solução da equação com condições de fronteira nulas $u(0,t) = 0$ e $u(\ell,t) = 0$.
- Verifique que umas soluções da equação do calor com condições de fronteira nulas $u(0,t) = 0$ e $u(\ell,t) = 0$ são os *modos*
$$u_n(x,t) = b_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{com } n = 1,2,3,\dots\,,$$
onde b_n são constantes arbitrárias.
- Mostre que uma sobreposição finita de modos
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$
também é solução da equação com condições de fronteira nulas $u(0,t) = 0$ e $u(\ell,t) = 0$, e determine o limite de $u(x,t)$ quando $t \to \infty$.
- Um fio condutor de comprimento 1m e difusividade térmica $10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$ é posto em contacto térmico, nos dois extremos, com dois reservatórios mantidos a temperatura constante de 0^oC. Sabendo que o perfil inicial da temperatura do condutor é
$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{1\text{m}} x\right) \times 60^o\text{C}\,,$$
quanto tempo é necessário esperar para que nenhuma parte do condutor tenha temperatura superior a 4^oC? O que acontece para grandes valores do tempo?
E se os dois extremos do condutor forem mantidos a temperaturas constantes de 0^oC e 100^oC, respectivamente, qual o perfil de temperatura do condutor passado um tempo grande?
- Determine as soluções da equação do calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad \text{com } 0 \le x \le \pi\,,$$
com condições de fronteira nulas, $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 0$, e condição inicial
$$u(x,0) = \sin(x) + 3\sin(2x)\,,$$
ou
$$u(x,0) = \pi\sin(7x) - \sin(5x).$$

3. (condução do calor) Considere a equação do calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$
em $0 \le x \le \ell$, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0$, que descreve o perfil de temperatura de um fio condutor termicamente isolado.

- Verifique que umas soluções são os modos

$$u_n(x,t) = a_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

  onde a_n são constantes arbitrárias.

- Mostre que uma sobreposição finita de modos

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

  também é uma solução, e determine o limite de $u(x,t)$ quando $t \to \infty$.

4 Séries de Fourier e aplicações às EDPs

1. (séries de Fourier) A *série de Fourier* da função $f(x)$, periódica de período 2ℓ, é

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)}$$

onde os *coeficientes de Fourier* de f são

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx}$$

- Determine as séries de Fourier das seguintes funções periódicas (as soluções estão no formulário!):
$f(x) = \cos(\pi x) - 2\sin(3\pi x)$,
$f(x) = x \quad$ se $-\pi \leq x < \pi$, $\quad$ e periódica de período 2π ,
$f(x) = |x| \quad$ se $-\pi \leq x < \pi$, $\quad$ e periódica de período 2π .
- Mostre que a série de Fourier da função $\Theta(x)$, periódica de período 2π e definida por

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$\Theta(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots \right)$$

Deduza que a série de Fourier da função $2\Theta(x) - 1$, periódica de período 2π e definida por

$$2\Theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$2\Theta(x) - 1 \sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots \right) .$$

- Mostre que a série de Fourier da função $f(x)$, periódica de período 2π e definida por

$$f(x) = x^2$$

no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{9}\cos(3x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \ldots \right) .$$

Deduza que o valor da *função zeta de Riemann* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ no ponto $s = 2$ é

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} .$$

2. (séries de Fourier de senos) A *série de Fourier de senos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão ímpar 2ℓ-periódica de f, ou seja,

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{onde} \qquad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx}$$

- Determine as séries de Fourier de senos (ou seja, das extensões ímpares e 2π-periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq x < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad\qquad 1 - \cos(2x) \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

3. (séries de Fourier de co-senos)A *série de Fourier de co-senos* da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão par 2ℓ-periódica de f, ou seja,

$$\boxed{f(x) \sim \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right) , \qquad \text{onde} \qquad a_n = \tfrac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right) dx}$$

- Determine as séries de Fourier de co-senos (ou seja, das extensões pares e 2π-periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq x < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \qquad\qquad \sin(2x) \qquad\qquad \pi - x$$

4. (aplicação à corda vibrante) A solução formal do problema da corda vibrante

$$\boxed{\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in [0, \ell] , \qquad \text{com } \ u(0,t) = u(\ell, t) = 0}$$

com condições iniciais

$$\boxed{u(x,0) \sim \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{e} \qquad \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) \sim \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

é

$$\boxed{u(x,t) \sim \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\left(\tfrac{\pi c n}{\ell} t\right) + b_n \tfrac{\ell}{\pi c n} \sin\left(\tfrac{\pi c n}{\ell} t\right) \Big) \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi , \qquad \text{com } \ u(0,t) = u(\pi, t) = 0$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 ,$$

e com condições iniciais (deslocamento inicial "triangular")

$$u(x,0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 .$$

5. (aplicação à condução de calor) A solução formal do problema da condução de calor com condições de fronteira nulas

$$\boxed{\tfrac{\partial u}{\partial t} - \beta \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in [0, \ell] , \qquad \text{com } \ u(0,t) = u(\ell, t) = 0}$$

e com condição inicial

$$\boxed{u(x,0) \sim \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{é} \qquad u(x,t) \sim \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta (\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

A solução formal do problema da condução de calor com fluxo nulo nas extremidades

$$\boxed{\tfrac{\partial u}{\partial t} - \beta \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in [0, \ell] , \qquad \text{com } \ \tfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \tfrac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0}$$

com condição inicial

$$\boxed{u(x,0) \sim \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right) \qquad \text{é} \qquad u(x,t) \sim \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\beta (\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\tfrac{\pi n}{\ell} x\right)}$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi ,$$

com condição inicial

$$u(x,0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx) ,$$

e condições de fronteira nulas $u(0,t) = u(\pi, t) = 0$.

- Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi \, ,$$

  com condição inicial

$$u(x,0) = 100 \qquad \text{se } 0 < x < \pi \, ,$$

  e condições de fronteira constantes $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 200$.

- Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi \, ,$$

  com condição inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} 10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 20 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases} \, ,$$

  e fluxo de calor nulo nas extremidades, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$.

6. (timbres) Considere uma corda de um instrumento musical, de comprimento ℓ, densidade linear ρ e afinada com tensão k.

   Ao tocar um cavaquinho, a corda é excitada com velocidade inicial desprezável e deslocamento inicial aproximadamente triangular, ou seja, da forma

$$u(x,0) \simeq \begin{cases} h\frac{x}{\alpha} & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ \frac{h}{\ell-\alpha}(\ell - x) & \text{se } \alpha \leq x < \ell \end{cases}$$

   onde $0 < \alpha < \ell$ é o ponto onde dedilhamos a corda, e h é o máximo do deslocamento inicial.

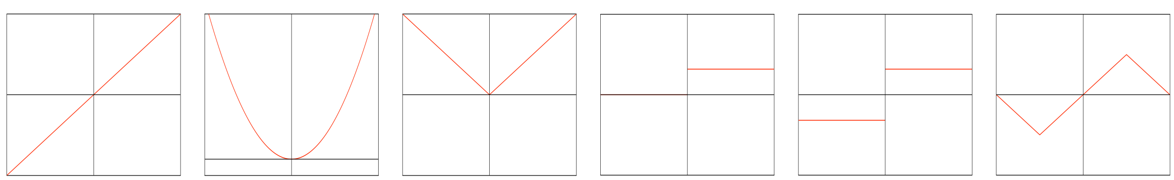
   Ao tocar um piano, a corda é excitada utilizando um martelo. Numa primeira aproximação podemos imaginar que o deslocamento inicial é desprezável e que o martelo tansmite à corda apenas um impulso instantâneo localizado num ponto (ou num intervalo de comprimento pequeno 2ε à volta de um ponto) $0 < \beta < \ell$ da corda, e portando a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \simeq \begin{cases} v & \text{se } |x-\beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x-\beta| > \varepsilon \end{cases}$$

   - Determine as vibrações, ou seja, as amplitudes das harmónicas excitadas, da corda do cavaquinho e da corda do piano.
   - Determine as energias E_n das n-ésimas harmónicas nos dois casos. Explique porque o som do piano é mais "cheio" do que o som do cavaquinho.

Algumas séries de Fourier das extensões periódicas de período 2π de funções definidas no intervalo $-\pi \leq x < \pi$

$$
\begin{aligned}
x &\sim 2\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \ldots\right) \\
x^2 &\sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{9}\cos(3x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \ldots\right) \\
|x| &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \frac{1}{49}\cos(7x) + \ldots\right) \\
\left.\begin{array}{cc} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{array}\right\} = \Theta(x) &\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots\right) \\
\left.\begin{array}{cc} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{array}\right\} = 2\Theta(x) - 1 &\sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots\right) \\
\left.\begin{array}{cc} \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \\ x & \text{se } -\pi/2 \leq x < \pi/2 \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < -\pi/2 \end{array}\right\} = Z(x) &\sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) - \frac{1}{9}\sin(3x) + \frac{1}{25}\sin(5x) - \frac{1}{49}\sin(7x) + \ldots\right) \\
\delta(x - \alpha) - \delta(x + \alpha) &\sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)\sin(nx) \\
\delta(x - \alpha) + \delta(x + \alpha) &\sim \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\alpha)\cos(nx)
\end{aligned}
$$



x | x^2 | $|x|$ | $\Theta(x)$ | $2\Theta(x) - 1$ | $Z(x)$

Integrais úteis

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx))^2\, dx = \pi \qquad \text{se } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} \qquad \text{se } n^2 \neq m^2$$

$$\int \sin(nx)\sin(mx)dx = -\frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} \qquad \text{se } n^2 \neq m^2$$

$$\int \sin(nx)\cos(mx)dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)} \qquad \text{se } n^2 \neq m^2$$

$$\int x\cos(nx)dx = \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n} \qquad \text{se } n \neq 0$$

$$\int x\sin(nx)dx = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n} \qquad \text{se } n \neq 0$$

$$\int x^k\cos(nx)dx = \frac{x^k\sin(nx)}{n} - \frac{k}{n}\int x^{k-1}\sin(nx)dx \qquad \text{se } n \neq 0 \text{ e } k = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\int x^k\sin(nx)dx = -\frac{x^k\cos(nx)}{n} + \frac{k}{n}\int x^{k-1}\cos(nx)dx \qquad \text{se } n \neq 0 \text{ e } k = 2, 3, 4, \ldots$$

5 Modelos discretos e iteração

1. (crescimento/decaimento exponencial) O crescimento ou decaimento exponencial de uma população num meio ambiente ilimitado é modelado com a equação recursiva

$$P_{n+1} = \lambda P_n$$

onde P_n representa a população no tempo n, dada uma certa população inicial P_0.

   - Interprete o parâmetro λ imaginando que em cada unidade de tempo o incremento $P_{n+1} - P_n$ da população é a soma de uma parcela αP_n, onde $\alpha > 0$ é um coeficiênte de fertilidade, e uma parcela $-\beta P_n$, onde $\beta > 0$ é um coeficiênte de mortalidade.
   - Discuta o comportamento das soluções da equação recursiva ao variar o parâmetro λ.

2. (sequência de Fibonacci) Considere o seguinte problema, posto por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci, ou seja, "filius Bonacci")[2]:

> *Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?*

A resposta de Leonardo Pisano consiste no seguinte modelo. Se F_n o número de pares de coelhos no n-ésimo mês, então

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,.$$

Esta é uma "lei" que prescreve recursivamente os valores dos F_n dados uns valores iniciais F_0 e F_1.

   - Responda ao problema de Fibonacci, ou seja, determine F_{12}, sabendo que $F_0 = 1$ e $F_1 = 2$.
   - Seja $Q_n = F_{n+1}/F_n$ o quociente entre sucessivos números de Fibonacci. Mostre que os quocientes satisfazem a equação recursiva

$$Q_{n+1} = 1 + \frac{1}{Q_n}$$

   - Escreva um programa para calcular recursivamente os "números de Fibonacci" F_n e os quocientes Q_n.
   - Assuma que, para grande valores de n, os quocientes são praticamente constantes, ou seja, $Q_n \to \Phi$ se $n \to \infty$. Utilize a a equação recursiva para mostrar que

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.61803398874989...$$

3. (crescimento/decaimento com recolha/adição) A uma população que cresce segundo o modelo exponencial, é adicionada ou retirada uma certa quantidade β em cada unidade de tempo. O modelo é portanto

$$P_{n+1} = \lambda P_n + \beta$$

onde β é um parâmetro positivo ou negativo.

   - Determine soluções estacionárias, ou seja, que não dependem do tempo n.
   - Determine a solução com condição inicial P_0 arbitrária.
     (Observe que, se $x_n = P_n - \overline{P}$, onde $\overline{P}$ é a solução estacionária, então $x_{n+1} = \lambda x_n$)
   - Para quais valores dos parâmetros λ e β as soluções P_n convergem para a solução estacionária quando o tempo $n \to \infty$?

[2] Leonardo Pisano, *Liber Abaci*, 1202.

4. (modelos discretos e análise gráfica) Um sistema dinâmico com tempo discreto é definido por uma equação/lei recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n)\,,$$

onde x_n denota o *estado* (posição, população, concentração, temperatura, ...) do sistema no tempo n (segundos, horas, meses, anos, ...). As *trajectórias* do sistema dinâmico são as sucessões (x_n),

$$x_0 \mapsto x_1 = f(x_0) \mapsto x_2 = f(x_1) \mapsto \dots \mapsto x_{n+1} = f(x_n) \mapsto \dots\,,$$

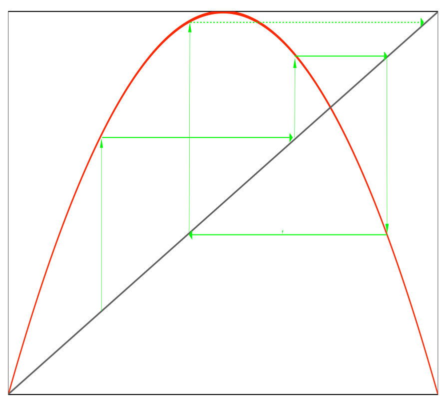
definidas a partir de uma *condição inicial* x_0 usando a recursão $x_{n+1} = f(x_n)$.

As *soluções estacionárias*, ou *de equilíbrio*, são as trajectórias constantes $x_n = \overline{x}$, onde o *estado estacionário*, ou *de equilíbrio*, $\overline{x}$ é um "ponto fixo" da transformação f, ou seja, um ponto tal que

$$f(\overline{x}) = \overline{x}\,.$$

As *soluções periódicas* são as trajectórias (x_n) tais que $x_{n+p} = x_n$ para todos os n e algum tempo $p \geq 1$, dito *periódo*.

Se o espaço dos estados é um intervalo da recta real, as trajectórias podem ser observadas no plano x-y esboçando o caminho poligonal (*cobweb plot*)



$$(x_0, x_0) \mapsto (x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_1) \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2) \mapsto (x_2, x_3) \mapsto \dots$$

entre o gráfico da transformação, $y = f(x)$, e a diagonal, $y = x$.

- Mostre que, se uma trajectória (x_n) do sistema dinâmico $x_{n+1} = f(x_n)$ é convergente e se a transformação f é contínua, então o limite $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ é um estado estacionário, ou seja, $f(x_\infty) = x_\infty$.
- Estude as trajectórias (ou seja, determine os estados de equilíbrio, as trajectórias periódicas, e o comportamento assimptótico de algumas das outras trajectórias) dos sistemas dinâmicos definidos pelas seguintes transformações

$$f(x) = \frac{1}{3}x \qquad f(x) = 7x \qquad f(x) = -x$$

$$f(x) = 3x + 1 \qquad f(x) = 2x - 7 \qquad f(x) = \frac{1}{2}x + 5$$

$$f(x) = |1 - x| \qquad f(x) = x^2 - \frac{1}{4} \qquad f(x) = x^2 - 2$$

$$f(x) = x^3 \qquad f(x) = -x^3 \qquad f(x) = x^{1/3}$$

$$f(x) = x - x^3 \qquad f(x) = x + x^3$$

5. (transformação logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é

$$P_{n+1} = \lambda P_n \left(1 - P_n/M\right)$$

onde a contante $M > 0$ é a maior população suportada pelo meio ambiente (observe que $P_{n+1} < 0$ quando $P_n > M$, o que pode ser interpretado como "extinção" no tempo $n+1$). A substituição $x_n = P_n/M$ transforma a lei acima na forma adimensional

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)\,,$$

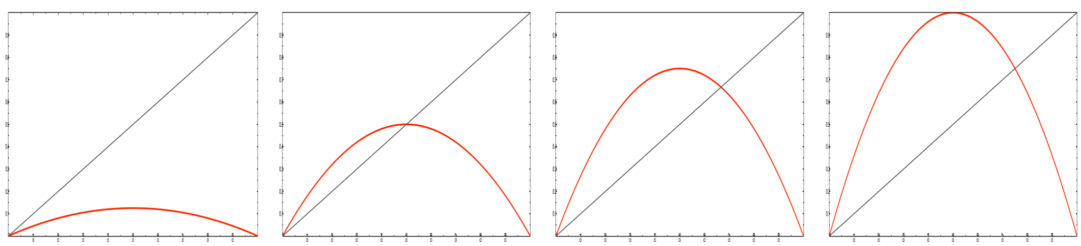
chamada *transformação logística*[3].

- Mostre que os ponto estacionários são o estado trivial 0 e

$$\overline{x} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

- Esboce o gráfico da transformação logística para diferentes valores do parâmetro λ. Discuta e interprete o comportamento das soluções para valores do parâmetro

$$0 < \lambda \leq 1 \qquad 1 < \lambda \leq 3 \qquad 3 < \lambda \leq 4 \qquad \lambda > 4$$



Gráficos da transformação logística quando $\lambda = 0.5$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$.

- Implemente um programa para fazer simulações do sistema.
- Esboce o *diagrama de Feigenbaum*, as trajectórias assimptóticas versus o parâmetro λ.

6. (algoritmo de Heron) O problema de construir um quadrado dada a sua área A consiste em determinar o lado ℓ tal que $\ell^2 = A$, ou seja, o número que hoje chamamos $\ell = \sqrt{A}$.

Um método, utilizado provavelmente pelos babilónios e descrito por Heron[4], consiste em construir recursivamente rectângulos de área A com lados cada vez mais próximos. Se x_0 e y_0 são a base e a altura do primeiro rectângulo, e portanto $x_0 y_0 = A$, então as bases dos rectângulos sucessivos são definidas pela equação recursiva

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

- Mostre que bases e alturas dos rectângulos são dadas por

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad y_{n+1} = \frac{1/x_n + 1/y_n}{2}$$

- Calcule a diferença $x_{n+1} - y_{n+1}$ e mostre que

$$y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_3 < x_2 < x_1$$

e que

$$x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

- Estime $\sqrt{2}$ com um erro ≤ 0.01 e ≤ 0.001.
- Estime quantas iterações é preciso fazer para obter os primeiros n dígitos decimais de $\sqrt{2}$ usando o método dos babilónios.

[3] Robert M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459-467.

[4] Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1968. O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Dover, 1969.

7. (Estabilidade dos estados estacionários) Seja $\overline{x}$ um estado estacionário da equação recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

ou seja, um ponto tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Se a transformação $f(x)$ é diferenciável, o príncipio das contracções[5] permite decidir sobre a estabilidade do estado estacionário.

Se $|f'(\overline{x})| < 1$, então o ponto fixo é *atractivo*: as trajectórias de todo o ponto x_0 suficientemente próximo de $\overline{x}$ convergem para $\overline{x}$, ou seja $x_n \to \overline{x}$.

Se $|f'(\overline{x})| > 1$, então o ponto fixo é *repulsivo*: as trajectórias de todo o ponto $x_0 \neq \overline{x}$ numa vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$ saem da vizinhança em tempo finito.

Se $f'(\overline{x}) = 0$, então o ponto fixo $\overline{x}$ é dito *super-atractivo*: se x_0 está numa vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$, então a trajectória de x_0 converge para o ponto fixo e a velocidade de convergência é

$$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq \beta \cdot |x_n - \overline{x}|^2$$

onde β é uma constante.

- Estude a natureza dos pontos fixos das seguintes transformações

$$f(x) = \alpha x \qquad f(x) = \alpha x^3 \qquad f(x) = \alpha x + \beta x^2$$

  ao variar os parâmetros.

- Estude a natureza do ponto fixo não trivial do modelo logístico

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$$

  ao variar o parâmetro λ.

8. (método de Newton) O "método de Newton" para aproximar as raizes de um polinómio $P(z)$ (ou de outra função), ou seja, resolver a equação

$$P(z) = 0\,,$$

consiste em escolher uma primeira aproximação z_0, e iterar a transformação

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}\,.$$

- Mostre que se a sucessão (z_n) converge, i.e. $z_n \to z_\infty$, e se $P'(z_\infty) \neq 0$, então o limite z_∞ é uma raiz do polinómio.
- Verifique que o método de Newton aplicado ao polinómio quadrático $z^2 - a$ corresponde ao método de Heron.
- Escreva a receita do método de Newton para resolver $z^n - a = 0$, com $n \geq 2$.
- Mostre que, se a conjectura inicial z_0 está suficientemente próxima de uma raiz $\overline{z}$ e $P'(\overline{z}) \neq 0$, então a sucessão dos z_n converge para esta raiz.
- Utilize o método de Newton para estimar raizes de

$$z^2 + 1 + z \qquad z^3 - z - 1 \qquad z^5 + z + 1 \qquad z^3 - 2z - 5$$

---

[5] Se $f : I \to I$ é uma função difrenciável definida num intervalo fechado $I \subset \mathbf{R}$, e se $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo o $x \in I$, então f é dita *contracção*, pois, pelo teorema do valor médio,

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda \cdot |x - y|$$

O *princípio das contracções* afirma que então f tem um e um único *ponto fixo*, i.e. um ponto p tal que $f(p) = p$, e que a sucessão definida por

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

a partir de uma condição inicial arbitrária $x_0 \in I$, converge para este ponto fixo, ou seja $x_n \to p$ quando $n \to \infty$. A convergência é "exponencial", pois

$$|x_n - p| \leq \lambda^n \cdot |x_0 - p|\,.$$

6 Simulações

1. (método de Euler) Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t,x)\,.$$

O *método de Euler* consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t+dt) - x(t) \simeq v(t,x)\cdot dt\,,$$

dado um "passo" dt suficientemente pequeno. Portanto, a solução $x(t_0+n\cdot dt)$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, é estimada pela sucessão x_n definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n)\cdot dt}$$

onde $t_n = t_0 + n\cdot dt$. Numa linguagem como `c++` ou `Java`, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) =$ `x`, é

```
while (time < t)
  {
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
  }
```

- Considere a equação diferencial
$$\dot{x} = x$$
com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é ε, então o método de Euler fornece a aproximação
$$x(t) \simeq (1+\varepsilon)^n$$
onde $n \simeq t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \to 0$, as aproximações convergem para a solução verdadeira, pois
$$\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$$

- Simule a solução da equação diferencial separável $\dot{x} = (1-2t)\,x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

- Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico
$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q \end{aligned}$$
com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

2. (método de Runge-Kutta 4) O *método de Runge Kutta 4* para simular a solução da EDO

$$\dot{x} = v(t,x) \qquad \text{com condição inicial } x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um "passo" dt, e aproximar $x(t_0 + n\cdot dt)$ com a sucessão x_n definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \tfrac{dt}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)}$$

onde os coeficientes k_i são definidos recursivamente por

$$\boxed{k_1 = v(t_n, x_n) \qquad k_2 = v\left(t_n + dt/2, x_n + k_1 dt/2\right) \qquad k_3 = v\left(t_n + dt/2, x_n + k_2 dt/2\right) \qquad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dtk_3)}$$

e $t_n = t_0 + n\cdot dt$.

- Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK4.

7 Sistemas de EDOs

1. (sistemas lineares) As trajectórias de um sistema linear

$$\dot{x} = Ax$$

com $x \in \mathbf{R}^n$ e $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$, são dadas por $x(t) = e^{tA}x(0)$, onde o "operador exponencial" e^{tA} é definido pela série de potências

$$\boxed{e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n}$$

O campo linear $v(x) = Ax$ é dito *hiperbólico* se o espectro de A, o conjunto

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_k = \rho_k + i\omega_k \in \mathbf{C} \quad \text{t.q.} \quad \det(A - \lambda_k I) = 0\}$$

dos valores próprios de A, é disjunto do eixo imaginário (ou seja, $\rho_k \neq 0\ \forall k$).

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\rho_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 t} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad e^{tA} = e^{\rho t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho & \omega \\ -\omega & \rho \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad e^{tA} = e^{\rho t}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

2. (estabilidade local) Seja $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\overline{x}) = 0$. O equilíbrio é *(localmente) estável* se $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\|x(0) - \overline{x}\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|x(t) - \overline{x}\| < \varepsilon\,, \quad \forall t \geq 0\,.$$

O equilíbrio é *(localmente) assimptoticamente estável* se é estável e se $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|x(0) - \overline{x}\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad x(t) \to \overline{x}\,, \quad \text{quando } \ t \to \infty\,.$$

- Verifique que a solução de equilíbrio $x(t) = 0$ do campo linear $v(x) = Ax$ é estável se todos os valores próprios de A têm parte real $\rho_k = \Re(\lambda_k) \leq 0$.
- Verifique que a solução de equilíbrio $x(t) = 0$ do campo linear $v(x) = Ax$ é assimptoticamente estável se todos os valores próprios de A têm parte real $\rho_k = \Re(\lambda_k) < 0$.

3. (funções de Lyapunov) Seja $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\overline{x}) = 0$. Uma *função de Lyapunov* é uma função diferenciável $H(x)$ que assume um mínimo local em $\overline{x}$ (i.e. $H(\overline{x}) < H(x)$ para todo $x \neq \overline{x}$ numa vizinnhança de $\overline{x}$) e que não cresce ao longo das trajectórias do sistema, ou seja,

$$\frac{d}{dt} H(x(t)) \leq 0$$

Se o sistema $\dot{x} = v(x)$ admite uma função de Lyapunov $H(x)$ numa vizinhança do equilíbrio $\overline{x}$, então

$$\boxed{\tfrac{d}{dt} H(x(t)) \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{x} \text{ é localmente estável}}$$

$$\boxed{\tfrac{d}{dt} H(x(t)) < 0 \quad \forall\, x(t) \neq \overline{x} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{x} \text{ é localmente assimptoticamente estável}}$$

- Considere o sistema conservativo $m\ddot{\vec{q}} = -\vec{\nabla} V(\vec{q})$, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} = &\quad \tfrac{1}{m}\vec{p} \\ \dot{\vec{p}} = &\quad -\vec{\nabla} V(\vec{q}) \end{aligned}$$

com $\vec{q}$, $\vec{p} \in \mathbf{R}^n$. Verifique que a energia

$$E(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}\|\vec{p}\|^2 + V(\vec{q})$$

é uma constante do movimento. Deduza que os pontos de equilíbrio $(\overline{q}, 0)$, onde $\overline{q}$ é um mínimo local do potencial $V(q)$, são localmente estáveis.

4. (oscilações) Considere a equação das oscilações amortecidas $\ddot{q} + 2\alpha q + \omega^2 q = 0$, ou seja, o sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} = &\quad p \\ \dot{p} = &\quad -2\alpha p - \omega^2 q \end{aligned}$$

- Esboce as curvas de fase do sistema para diferentes valores dos parâmetros $\alpha \geq 0$ e ω.
- Mostre que a energia

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é conservada quando $\alpha = 0$. Deduza que $(0, 0)$ é um equilíbrio estável.

- Mostre que $(0, 0)$ é um equilíbrio assimptóticamente estável se $\alpha > 0$.

5. (linearização) Seja $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\overline{x}) = 0$. A *linearização* do sistema em torno de $\overline{x}$ é o sistema linear

$$\dot{y} = Ay$$

para a diferença $y(t) = x(t) - \overline{x}$, onde $A = Dv(\overline{x})$ é a matriz Jacobiana do campo v no ponto $\overline{x}$.

O *teorema de Hartman-Grobman* afirma que, se o campo linearizado A é hiperbólico, então o campo $v(x)$ é "localmente equivalente" à sua parte linear A.

Em particular, se os valores próprios $\{\lambda_i\}$ de A têm parte real $\Re(\lambda_i) < 0$ então

$$\boxed{\Re(\lambda_i) < 0\,, \forall i \qquad \Rightarrow \qquad \overline{x} \text{ é localmente assimptoticamente estável}}$$

- Linearize o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} = &\quad -x^2 + x + \sin(y) \\ \dot{y} = &\quad \cos(y) - x^3 - 5y \end{aligned}$$

en torno do seu ponto de equiíbrio $(1, 0)$ e discuta a estabilidade.

- Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} = &\quad x^2 + y \\ \dot{y} = &\quad -x - y \end{aligned}$$

Determine os pontos de equiíbrio e discuta a estabilidade. Simule o sistema e esboce as curvas de fase.

- Discuta a estabilidade dos equilíbrios do pêndulo $\ddot{q} = -\omega^2 \sin(q) - \alpha\dot{q}$.

6. (pêndulo matemático) Considere o *pêndulo matemático*,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$$

- Simule o sistema.
- Mostre que a energia

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega^2(1 - \cos(\theta))$$

é uma constante do movimento.

- Discute a estabilidade das órbitas periódicas.
- Discuta as oscilações do pêndulo com atrito e com momento de rotação constante,

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) + \alpha\dot{\theta} = M$$

7. (foguetão) Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{h} &= v(t) \\ \dot{v} &= -g + \gamma \tfrac{u(t)}{m(t)} \\ \dot{m} &= -u(t) \end{aligned}$$

que descreve a altura $h(t)$ atingida por um foguetão no tempo t, dada uma taxa de combustão $u(t)$. Linearize o sistema ao longo da solução com $u(t) = u_0$ constante.

8. (ciclos limite) Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} = &\quad y + x(1 - x^2 + y^2) \\ \dot{y} = &\quad -x + y(1 - x^2 + y^2) \end{aligned}$$

- Simule o sistema.
- Mostre que, em coordenadas polares, o sistema é

$$\begin{aligned} \dot{r} = &\quad r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = &\quad 1 \end{aligned}$$

Deduza que a circunferência unitária é uma órbita periódica.
- Estude a estabilidade da órbita periódica.

9. (sistema de Van der Pol) Considere o *oscilador de Van der Pol*

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = 0$$

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar o parâmetro μ.

10. (modelo presas-predadores de Lotka-Volterra) Considere o *sistema de Lotka-Volterra*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$$

Foi proposto por Vito Volterra[6] para modelar a competição de x presas e y predadores, e por Alfred J. Lotka[7] para modelar o comportamento cíclico de certas reacções químicas, como o esquema abstracto

$$A + X \to 2X \qquad X + Y \to 2Y \qquad Y \to B$$

- Simule o sistema.
- Determine as soluções estacionárias.
- Mostre que a função

$$H(x, y) = dx + by - c\log x - a\log y$$

é uma constante do movimento, i.e. que $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$. Deduza que as curvas de fase são as curvas de nível de $H(x, y)$.

11. (Prigogine-Lefever Brusselator) Considere o *sistema de Prigogine-Lefever*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1 A - (k_2 + k_4)x + k_3 x^2 y \\ \dot{y} &= k_2 x - k_3 x^2 y \end{aligned}$$

para as concentrações dos elementos X e Y na reacção química

$$A \to X \qquad X \to Y \qquad 2X + Y \to 3X \qquad X \to ...$$

[6] Vito Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie di animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei*, **2** (1926), 31-113. Vito Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathémaique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

[7] Alfred J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc* **27** (1920), 1595-... Alfred J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.

- Simule o sistema.

12. (atractor de Lorenz) Considere o sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x) \\
\dot{y} &= x(\rho - z) - y \\
\dot{z} &= xy - \beta z
\end{aligned}$$

- Analize o comportamento assimptótico das trajectórias ao variar os parâmetros σ, ρ e β.