

O teste tem a duração de 2h. **Escolha** um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda. Não é permitido o uso de máquinas de calcular programáveis ou gráficas. É permitido o uso das folhas práticas da disciplina.

1. (4 valores) O decaimento do radiocarbono é modelado pela equação diferencial

$$\dot{N} = -\beta N,$$

onde $N(t)$ é a quantidade de núcleos presentes no instante t , e $1/\beta \simeq 8033$ anos.

- Determine o tempo de meia-vida, ou seja, o tempo T tal que $N(T)/N(0) = 1/2$.
- A radiação cósmica produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma certa taxa $\alpha > 0$. Portanto, o número de núcleos de radiocarbono na atmosfera segue a EDO

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha$$

Mostre que $N(t)$ converge para o valor estacionário $\bar{N} = \alpha/\beta$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$.

2. (4 valores) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , alimentado com tensão $V(t)$, é determinada pela equação diferencial

$$L\dot{I} + RI = V$$

- Determine a solução estacionária quando a tensão $V = V_0$ é constante..
- Determine a solução com condição inicial $I(0) = 0$ quando $V(t) = V_0 t$, e esboce o seu gráfico.

3. (4 valores) Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = (x - 1)(x - 2)$$

- Determine as soluções estacionárias.
- Determine a solução com condição inicial $x(0) = 1$.

4. (4 valores) Considere a equação do oscilador harmónico

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

cuja solução geral é $q(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$.

- Mostre que a energia

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento.

- Esboce as curvas de fase no plano q - $\dot{q}$.

5. (4 valores) Considere a equação das oscilações amortecidas

$$\ddot{q} = -2\alpha \dot{q} - \omega^2 q, \quad \text{onde } \alpha > 0.$$

- Determine e esboce a solução geral quando $\alpha^2 < \omega^2$.
- Determine e esboce a solução geral quando $\alpha^2 > \omega^2$.

6. (4 valores) Determine uma solução particular da equação diferencial

$$\ddot{x} + 9\dot{x} = \sin 3t.$$

e esboce o seu gráfico.

7. (4 valores) Determine a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$, e condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}.$$

8. (4 valores) Determine uma solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = 10 \quad \text{se } 0 < x < \pi,$$

e condições de fronteira constantes $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

9. (4 valores) Considere a equação recursiva

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)},$$

onde $P(z)$ é um polinómio.

- Mostre que se a sucessão (z_n) converge, i.e. $z_n \rightarrow z_\infty$, e se $P'(z_\infty) \neq 0$, então o limite z_∞ é uma raiz do polinómio.
- Mostre que, se a conjectura inicial z_0 está suficientemente próxima de uma raiz $\bar{z}$ e $P'(\bar{z}) \neq 0$, então a sucessão (z_n) converge para esta raiz.

10. (4 valores) Considere a equação do pêndulo matemático

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

- Mostre que a energia

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega^2 (1 - \cos(\theta))$$

é uma constante do movimento.

- Discuta a estabilidade dos equilíbrios.

11. (4 valores) Considere o sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$$

- Determine as soluções estacionárias.
- Mostre que a função

$$H(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

é uma constante do movimento, e esboce o retrato de fase do sistema.

O teste tem a duração de 2h. **Escolha** um conjunto de exercícios cuja soma dos valores seja ≤ 20 e responda. Não é permitido o uso de máquinas de calcular programáveis ou gráficas. É permitido o uso das folhas práticas da disciplina.

1. (4 valores) A temperatura $T(t)$ de um corpo num meio ambiente cuja temperatura M é mantida constante segue a lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} = -k(T - M), \quad \text{onde } k > 0.$$

Uma chávena de café, com temperatura inicial $T(0) = 100^\circ\text{C}$, é colocada numa sala mantida à temperatura constante de $M = 20^\circ\text{C}$. Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60°C em 10 minutos,

- determine o valor da constante k do café e
- determine o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40°C .

2. (4 valores) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , alimentado com tensão $V(t)$, é determinada pela equação diferencial

$$L\dot{I} + RI = V$$

- Determine a solução estacionária quando a tensão $V = V_0$ é constante..
- Determine a solução com condição inicial $I(0) = 0$ quando $V(t) = V_0 \sin(t)$, e esboce o seu gráfico.

3. (4 valores) Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x(1 - x).$$

- Determine as soluções estacionárias.
- Determine a solução com condição inicial $x(0) = 1$.

4. (4 valores) Determine uma solução particular da equação diferencial

$$\ddot{x} + x = \sin t.$$

e esboce o seu gráfico.

5. (4 valores) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R , indutância L e capacidade C , é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$.
- Determine a frequência de ressonância do circuito.

6. (4 valores) Determine umas soluções da equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{com } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$, e condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2 \sin(4x).$$

7. (4 valores) Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx),$$

e condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

8. (4 valores) Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 20 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases},$$

e fluxo de calor nulo nas extremidades, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$.

9. (4 valores) Considere o sistema dinâmico definido por

$$P_{n+1} = \lambda P_n + \beta$$

onde $0 < \lambda < 1$ e $\beta > 0$.

- Determine as trajectórias estacionárias.
- Determine o comportamento assintótico das outras trajectórias.

10. (4 valores) Considere a equação do oscilador harmónico

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q \end{aligned}$$

- Mostre que a energia

$$E(q, p) = \frac{1}{2} (p^2 + q^2)$$

é uma constante do movimento.

- Esboce as curvas de fase no plano q - p .