1. *(4 valores)* Considere a equação diferencial
$$\dot{x} = x^2 \,.$$
Determine as soluções estacionárias e a solução com condição inicial $x(0) = 7$.

A única solução estacionária de $\dot{x} = x^2$ é $x(t) = 0$. A solução de $\dot{x} = x^2$ com condição inicial $x(0) = 7$ é
$$x(t) = \frac{1}{1/7 - t} \,,$$
definida para tempos $t < 1/7$.

2. *(4 valores)* Determine a solução de
$$\dot{x} = t/x$$
com condição inicial $x(1) = 1$.

A solução de $\dot{x} = t/x$ com condição inicial $x(1) = 1$ pode ser determinada separando as variáveis
$$x\,dx = t\,dt \qquad \dots \qquad \int_1^x y\,dy = \int_1^t s\,ds \qquad \dots \qquad (x^2 - 1^2)/2 = (t^2 - 1)/2 \,.$$
O resultado é $x(t) = t$.

3. *(4 valores)* Determine a solução de
$$\dot{x} + x = e^{3t}$$
com condição inicial $x(0) = 0$.

Uma solução não trivial da homogénea $\dot{y} + y = 0$ é $y(t) = e^{-t}$. O produto $x(t) = \lambda(t)y(t)$ é solução de $\dot{x} + x = e^{3t}$ se
$$\dot{\lambda}e^{-t} = e^{3t} \qquad \text{ou seja, se} \qquad \dot{\lambda} = e^{4t} \,, \qquad \text{donde} \qquad \lambda(t) = \lambda(0) + \int_0^t e^{4s} ds = \lambda(0) + \frac{1}{4}\left(e^{4t} - 1\right) \,.$$
Portanto, a solução con condição inicial $x(0) = \lambda(0) = 0$ é
$$x(t) = \frac{1}{4}\left(e^{4t} - 1\right)e^{-t} = \frac{1}{4}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) \,.$$

4. *(4 valores)* Determine a solução de
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$$
com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$.

A função $x(t) = e^{zt}$ é solução de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ se
$$(z^2 + 2z + 2)e^{zt} = 0 \qquad \text{ou seja, se} \qquad z = -1 \pm i \,.$$
Portanto, a solução geral de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ é
$$x(t) = ae^{-t}\cos(t) + be^{-t}\sin(t) \,.$$
As condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$ implicam que
$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ -a + b & = & -1 \end{array} \right. \,, \qquad \text{donde} \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \,.$$
Portanto, a solução é $x(t) = e^{-t}\cos(t)$.

5. *(4 valores)* Determine uma solução da equação diferencial
$$\ddot{x} + 4x = \sin(2t) \,.$$

Uma solução é
$$x(t) = -\frac{1}{4}t\cos(2t) \,.$$

1. *(4 valores)* Calcule o seguinte integral duplo, recorrendo, se necessário, a uma inversão da ordem de integração:
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3)\, dxdy\,.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3)\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \sin(x^3)\, dydx \\ &= \int_0^1 x^2 \sin(x^3)\, dx \\ &= \frac{1}{3}(1-\cos(1))\end{aligned}$$

2. *(4 valores)* Calcule o volume da região $R \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

O volume é dado pelo integral duplo
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dydx &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= -\left[\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1 \\ &= 1/6\,.\end{aligned}$$

3. *(4 valores)* Determine soluções separáveis da EDP
$$t\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$
com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Se $u(x,t) = X(x)T(t)$, então $tX'T + XT' = 0$. Isto acontece se existe uma constante λ tal que
$$X' = \lambda X \qquad \text{e} \qquad T' = -\lambda t T\,,$$
donde
$$X(x) = ce^{\lambda x} \qquad \text{e} \qquad T(t) = de^{-\lambda t^2/2}\,.$$
Portanto, soluções separáveis da equação são
$$u_{c,\mu}(x,t) = ke^{\lambda(x-t^2/2)}$$
com $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

4. *(4 valores)* Determinar a solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,, \qquad \text{com } \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1\,.$$

A série de Fourier de senos do deslocamento inicial é

$$u(x,0) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x)\,.$$

A série de Fourier de senos da velocidade inicial inicial é a série de Fourier da sua extensão ímpar, ou seja, da função denotada por $2\Theta(x) - 1$ no formulário:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots\right)$$

Portanto, a solução é

$$\begin{aligned} u(x,t) \sim \quad & \cos(2t)\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(4t)\sin(2x) + \frac{1}{3}\cos(6t)\sin(3x) + \\ & + \frac{2}{\pi}\left(\sin(2t)\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(6t)\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(10t)\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(14t)\sin(7x) + \dots\right)\,. \end{aligned}$$

5. *(4 valores)* Determine a solução formal do problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{em } 0 \leq x \leq \pi\,,$$

com fluxo de calor nulo na fronteira, ou seja, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para cada tempo $t > 0$, e condição inicial

$$u(x,0) = x \qquad \text{se } \ 0 < x < \pi\,.$$

A série de Fourier de cosenos da temperatura inicial é a série de Fourier da sua extensão par, ou seja, da função definida por $|x|$ em $[-\pi,\pi]$. Portanto

$$u(x,0) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \frac{1}{49}\cos(7x) + \dots\right)$$

e a solução formal é

$$u(x,t) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(e^{-\cdot t}\cos(x) + \frac{1}{9}e^{-9\cdot t}\cos(3x) + \frac{1}{25}e^{-25\cdot t}\cos(5x) + \frac{1}{49}e^{-49\cdot t}\cos(7x) + \dots\right)\,.$$