16/02/2012 recurso	8703N1 - Equações Diferenciais e Cálculo Integral	2011/12 MIEGI

Nome .... **N^o** ....

1. *(2 valores)* Determine as soluções estacionárias (ou seja, de equilíbrio) da equação logística

$$\dot{x} = 3x(x-1)\,.$$

As soluções estacionárias são $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$.

2. *(2 valores)* Determine a solução da EDO

$$\dot{x} = x^2$$

com condição inicial $x(0) = 1$.

A solução de $\dot{x} = x^2$ com condição inicial $x(0) = 1$ é

$$x(t) = \frac{1}{1-t}\,,$$

definida para tempos $t < 1$.

3. *(2 valores)* Considere a lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} + T = M(t)\,.$$

Determine a solução quando $M(t) = \sin(t)$, dada uma temperatura inicial $T(0) = 0$.

Uma solução não trivial da equação homogénea $\dot{y} + y = 0$ é $y(t) = e^{-t}$. O produto $T(t) = \lambda(t)y(t)$ é solução de $\dot{T} + T = M(t)$ se

$$\dot{\lambda}e^{-t} = M(t) \qquad \text{ou seja, se} \qquad \dot{\lambda} = Me^t\sin(t)\,, \qquad \text{donde} \qquad \lambda(t) = \lambda(0) + \int_0^t e^s \sin(s)\,ds\,.$$

Portanto, a solução con condição inicial $T(0) = \lambda(0) = 0$ é

$$T(t) = e^{-t}\int_0^t e^s\sin(s)\,ds = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin(t) - \cos(t)\right)\,.$$

4. *(2 valores)* Determine a solução geral da equação do oscilador amortecido

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

A função $x(t) = e^{zt}$ é solução de $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ se

$$(z^2 + z + 1)e^{zt} = 0 \qquad \text{ou seja, se} \qquad z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Portanto, a solução geral de $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ é

$$x(t) = ae^{-t/2}\cos\left((\sqrt{3}/2)t\right) + be^{-t/2}\sin\left((\sqrt{3}/2)t\right) \qquad \text{com } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

5. *(2 valores)* Determine uma solução da equação do oscilador forçado

$$\ddot{x} + x = \sin(2t)\,.$$

Uma solução é

$$x(t) = -\frac{1}{3}\sin(2t)\,.$$

6. *(2 valores)* Calcule o integral duplo

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2}\, dy dx\,.$$

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2}\, dy dx = \int_0^1 \int_0^y e^{-y^2}\, dx dy = \int_0^1 y e^{-y^2}\, dy = \frac{1-1/e}{2}\,.$$

7. *(2 valores)* Use coordenadas esféricas para calcular o integral triplo

$$\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz\ , \qquad \text{onde} \qquad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}\,.$$

$$\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^4 \cos(\varphi)\, d\rho d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{5}$$

8. *(2 valores)* Determine soluções separáveis da EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{com } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}\,.$$

Se $u(x,t) = X(x)T(t)$, então $X'T = XT'$. Isto acontece se existe uma constante λ tal que $X' = \lambda X$ e $T' = \lambda T$, donde

$$X(x) = ce^{\lambda x} \qquad \text{e} \qquad T(t) = de^{\lambda t}\,.$$

Portanto, soluções separáveis da equação são

$$u_{c,\lambda}(x,t) = ce^{\lambda(x+t)} \qquad \text{com } c, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

9. *(2 valores)* Determine a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{com } x \in \mathbb{R}\,,\, t \in \mathbb{R}\,,$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = e^{-3x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(2x)\,.$$

A soluç ao pode ser obtida usando a fórmula de d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{-3(x-3t)^2} + e^{-3(x+3t)^2}\right) + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \sin(2y)\, dy\,.$$

10. *(2 valores)* Considere o problema da condução de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

no intervalo $0 \le x \le \pi$, com condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para cada tempo $t > 0$. Use as séries de Fourier para determinar a solução formal do problema com condição inicial

$$u(x,0) = 1 \qquad \text{se } 0 < x < \pi\,.$$

A série de Fourier de senos da temperatura inicial é a série de Fourier da sua extensão ímpar, ou seja, da função $2\Theta(x) - 1$ do formulário. Portanto

$$u(x,0) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots\right)$$

e a solução formal é

$$u(x,t) \sim \frac{4}{\pi}\left(e^{-t}\sin(x) + \frac{1}{3}e^{-9t}\sin(3x) + \frac{1}{5}e^{-25t}\sin(5x) + \frac{1}{7}e^{-49t}\sin(7x) + \dots\right)\,.$$