

MIEGI 2011/12
8703N1 - Equações Diferenciais e Cálculo Integral
Folhas práticas

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar, 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086 (atendimento: 4^a-feira 14h-16h)

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

10 de Janeiro de 2012



This work is licensed under a
[Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 2.5 Portugal License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pt/).

<i>CONTEÚDO</i>	2
-----------------	---

Conteúdo

1	Equações diferenciais ordinárias	4
2	Integração numérica e simulações	9
3	EDOs simples e autónomas	11
4	EDOs lineares de primeira ordem	15
5	EDOs separáveis e homogéneas	17
6	EDOs exactas e campos conservativos	20
7	EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes	22
8	Números complexos e oscilações	25
9	Variação dos parâmetros e coeficientes indeterminados	27
10	Oscilador harmónico	29
11	Integrais duplos	34
12	Integrais triplos	37
13	Equações diferenciais parciais	39
14	EDPs de primeira ordem	41
15	EDPs lineares de segunda ordem: Laplace, ondas e calor	43
16	Separação de variáveis, harmónicas e modos	47
17	Séries de Fourier	52
18	Aplicações das séries de Fourier	56

Notações

Números. $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. \mathbb{R} e \mathbb{C} são os corpos dos números reais e complexos, respectivamente.

Espaço Euclidiano. \mathbb{R}^n denota o espaço Euclidiano de dimensão n . Fixada a base canónica e_1, \dots, e_n , os pontos de \mathbb{R}^n são os vectores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ de coordenadas $x_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, n$. As coordenadas no plano Euclidiano ou no espaço 3-dimensional são também denotadas, conforme a tradição, por $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

O produto interno Euclidiano em \mathbb{R}^n , denotado por $\langle x, y \rangle$ ou $x \cdot y$, é

$$\langle x, y \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

e a norma Euclidiana é $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. A distância Euclidiana entre os pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A bola aberta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|x - a\| < r\}$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em \mathbb{R}^n se cada seu ponto $a \in A$ é o centro de uma bola $B_\varepsilon(a) \subset A$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Caminhos. Se $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável do “tempo” $t \in I \subset \mathbb{R}$, ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com valores no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} := \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dddot{x} := \frac{d^3x}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, $v(t) := \dot{x}(t)$ é dita “velocidade” (da trajectória x no instante t), a sua norma $\|v(t)\|$ “velocidade escalar”, e $a(t) := \ddot{x}$ “aceleração”.

Campos. Um *campo escalar* é uma função real $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Um *campo vectorial* é uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, cujas coordenadas $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ são k campos escalares.

A derivada do campo diferenciável $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ no ponto $x \in X$ é a aplicação linear $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$f(x + v) = f(x) + df(x) \cdot v + o(\|v\|)$$

para todos os vectores $v \in \mathbb{R}^n$ de norma $\|v\|$ suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana $(\partial f_i / \partial x_j) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$. Em particular, o *diferencial* do campo escalar $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $x \in X$ é a forma linear $du(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$du(x) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) dx_n$$

(onde dx_k , o diferencial da função coordenada $x \mapsto x_k$, é a forma linear que envia o vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ em $dx_k \cdot v := v_k$). A derivada do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na direcção do vector $v \in \mathbb{R}^n$ (aplicado) no ponto $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_v u)(x) := \left. \frac{d}{dt} u(x + vt) \right|_{t=0} = du(x) \cdot v.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vectorial $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $du(x) \cdot v = \langle \nabla u(x), v \rangle$ para todos os vectores (tangentes) $v \in \mathbb{R}^n$ (aplicados no ponto $x \in X$).

1 Equações diferenciais ordinárias

1. **(partícula livre)** A trajectória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula livre de massa m num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = 0, \quad \text{ou seja, se } m \text{ é constante,} \quad ma = 0,$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$ denota a velocidade da partícula no instante t , e $a(t) := \ddot{q}(t)$ denota a aceleração da partícula no instante t . Em particular, o “momento linear” $p := mv$, é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}p = 0$, de acordo com o princípio de inércia de Galileu ou a primeira lei de Newton¹.

- Verifique que as soluções da equação de Newton da partícula livre são as rectas afins

$$q(t) = s + vt$$

onde $s, v \in \mathbb{R}^3$ são vectores constantes arbitrários, e interprete s e v .

- Determine a trajectória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $q(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{q}(0) = (1, 2, 3)$.
 - Determine a trajectória de uma partícula livre que passa pela posição $q(0) = (0, 0, 0)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $q(2) = (1, 1, 1)$ no instante $t_1 = 2$. Calcule a sua “velocidade escalar”, ou seja, a norma $\|v\|$.
2. **(queda livre)** A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = -mg$$

onde $q(t) \in \mathbb{R}$ é a altura da partícula no instante t , m é a massa da partícula, e $g \simeq 980 \text{ cm s}^{-2}$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre.

- Determine as soluções da equação de Newton (resolva a equação $\dot{v} = -g$ para a velocidade $v := \dot{q}$, e depois a equação $\dot{q} = v(t)$ para a altura).
 - Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.
 - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?
 - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?
3. **(o exponencial)** O *exponencial* (real) é a função $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (notação $\exp t$ ou e^t) definida pela série de potências

$$e^t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots,$$

que converge uniformemente em cada intervalo limitado da recta real.

- Verifique que $e^0 = 1$, e que, para todos os $t, s \in \mathbb{R}$,

$$e^{t+s} = e^t e^s.$$

Deduza que $e^t \neq 0$ para todos os $t \in \mathbb{R}$, e que $e^{-t} = (e^t)^{-1}$.

- Verifique que $x(t) = e^t$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x} = x.$$

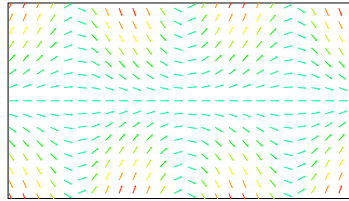
Verifique que $x(t) = x_0 e^t$ é uma solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = x_0$.

¹“Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare” [Isaac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1687].

- Mostre que, se $y(t)$ é uma solução de $\dot{y} = y$ com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $y(t)/e^t$ é constante e igual a x_0 . Deduza que $x_0 e^t$ é a única solução de $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = x_0$.
 - Verifique que a função $x(t) = e^{\lambda t}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, satisfaz a equação diferencial $\dot{x} = \lambda x$.
4. (equações diferenciais ordinárias) Uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem (resolúvel para a derivada) é uma lei

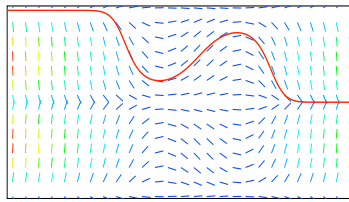
$$\dot{x} = v(t, x)$$

para a trajectória $t \mapsto x(t)$ de um sistema com *espaço de fases* $X \subset \mathbb{R}^n$, onde $x(t) \in X$ denota o *estado* do sistema no instante $t \in T \subset \mathbb{R}$, $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$ denota a derivada do observável/is x em ordem ao tempo t , e $v : T \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um *campo de direcções* dado.



Campo de direcções de $\dot{x} = \sin(t)x$.

Uma *solução* de $\dot{x} = v(t, x)$ é um caminho diferenciável $t \mapsto x(t)$ cuja velocidade satisfaz $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ para cada tempo t num intervalo $I \subset T$, ou seja, uma função $x : I \rightarrow X$ cujo gráfico $\Gamma := \{(t, x(t)) \in I \times X \text{ com } t \in I\}$, dito *curva integral*, é tangente ao campo de direcções $v(t, x)$ em cada ponto $(t, x(t)) \in \Gamma$. Uma solução de $\dot{x} = v(t, x)$ com *condição inicial* $x(t_0) = x_0$ (ou solução do “problema de Cauchy”) é uma solução definida numa vizinhança de $t_0 \in T$, cujo gráfico contém o ponto $(t_0, x_0) \in T \times X$.



Campo de direcções e uma solução de $\dot{x} = \sin(x)(1 - t^2)$.

O *teorema de Peano* afirma que, se o campo $v(t, x)$ é contínuo, então existem sempre soluções locais (i.e. definidas em vizinhanças suficientemente pequenas do tempo inicial) do problema de Cauchy. O *teorema de Picard* afirma que, se o campo $v(t, x)$ é contínuo e localmente Lipschitziano² (por exemplo, diferenciável de classe C^1) na variável x , então para cada ponto $(t_0, x_0) \in T \times X$ passa uma única solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$.

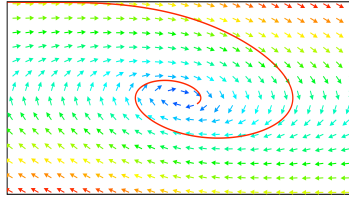
Um *campo de vectores* $v : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ no espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$ define uma equação diferencial ordinária *autónoma*

$$\dot{x} = v(x).$$

As imagens $x(I)$ das soluções/trajectórias $t \mapsto x(t)$ no espaço de fases X são ditas *órbitas*, ou *curvas de fases*, do sistema autónomo. As soluções constantes, $x(t) = \bar{x} \forall t \in \mathbb{R}$, são ditas soluções de *equilíbrio*, ou *estacionárias*.

²A função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é Lipschitziana no domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ se

$$\exists L > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$



Campo de vectores e uma curva de fases do pêndulo com atrito,

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\sin(q) - p/2.$$

- Esboce o campo de direcções e (quando autónoma) o campo de vectores das EDOs

$$\dot{x} = t \quad \dot{x} = -x \quad \dot{x} = x - 1 \quad \dot{x} = x + t$$

$$\dot{x} = x(1 - x) \quad \dot{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \quad \dot{x} = (x - 1)^2(x - 2)^2$$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{q} = 2q \\ \dot{p} = -p/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{q} = q - p \\ \dot{p} = p - q \end{cases}$$

e conjecture sobre o comportamento qualitativo das soluções.

- A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$? E a função $x(t) = 0$?

5. (quase todas as EDOs têm ordem um!) A EDO de ordem $n \geq 2$ (resolúvel para a n -ésima derivada)

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

para o observável $y(t) \in \mathbb{R}$ é equivalente à EDO (ou sistema de EDOs) de primeira ordem

$$\dot{x} = v(t, x)$$

para o observável $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$x_1 := y \quad x_2 := \dot{y} \quad x_3 := \ddot{y} \quad \dots \quad x_n := y^{(n-1)},$$

onde o campo de direcções é $v(t, x) := (x_2, \dots, x_n, F(t, x_1, x_2, \dots, x_n))$.

- Determine os sistemas de ODEs de ordem 1 que traduzem as seguintes ODEs de ordem > 1

$$\ddot{x} = t - x \quad \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \quad \ddot{x} = x$$

6. (constantes do movimento) Seja $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$ um campo de vectores definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Os observáveis $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que assumem valores $\varphi(x(t))$ constantes ao longo das soluções $x(t)$ da EDO autónoma $\dot{x} = v(x)$ são ditos *constantes do movimento*. As curvas de fases estão contidas nas superfícies de nível das constantes do movimento.

- Verifique que o observável diferenciável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma constante do movimento se e só se

$$\mathcal{L}_v \varphi := \sum_{k=1}^n (\partial \varphi / \partial x_k) v_k = 0.$$

7. (sistemas conservativos: Newton, Lagrange, Hamilton) A trajectória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula de massa m (suposta constante!) num campo de forças conservativo é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = F(q)$$

onde a força é $F(q) = -\nabla U(q)$, e $U(q)$ é um(a energia) *potencial*.

- Verifique que a *energia* (energia cinética + energia potencial)

$$E := \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 + U(q)$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$ ao longo das trajetórias.

- Verifique que a equação de Newton $m\ddot{q} = -\nabla U$ é equivalente às *equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3$$

onde a (função) *lagrangiana* do sistema é

$$L(q, \dot{q}) := \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 - U(q).$$

- O vector $p = m\dot{q}$, de coordenadas $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, é dito *momento (linear)*. O espaço $X = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, com coordenadas (q, p) , é dito *espaço de fases* do sistema mecânico. Verifique que a equação de Newton $m\ddot{q} = -\nabla U$ é equivalente às *equações de Hamilton*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3,$$

onde a (função) *hamiltoniana* do sistema é a “transformada de Legendre” da lagrangiana, definida por

$$\begin{aligned} H(q, p) &:= \sup_v (\langle p, v \rangle - L(q, v)) \\ &= \frac{1}{2m}\|p\|^2 + U(q). \end{aligned}$$

- Mostre que a Hamiltoniana é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) = 0$ ao longo das soluções das equações de Hamilton. Deduza que as órbitas do sistema no espaço de fases X estão contidas nas curvas/superfícies de nível $H(q, p) = c$ da Hamiltoniana.

8. (**pêndulo matemático**) A equação de Newton que modela as oscilações de um *pêndulo* é

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta),$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, g é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo. No espaço de fases, de coordenadas θ e $p := \dot{\theta}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin(\theta) \end{cases}$$

- Verifique que a energia

$$H := \frac{1}{2}p^2 + \omega^2(1 - \cos(\theta))$$

é uma constante do movimento.

- Esboce as curvas de energia constante e o campo de velocidades, e conjecture sobre as trajetórias.

9. (**oscilador harmónico/lei de Hooke**) As pequenas oscilações de um pêndulo à volta da posição de equilíbrio $\theta = 0$, ou de uma partícula sujeita à *lei de Hooke*, são modeladas pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}$$

- Verifique que a energia

$$H := \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2$$

é uma constante do movimento.

- Esboce as curvas de de energia constante e o campo de velocidades, e conjecture sobre as trajectórias.

2 Integração numérica e simulações

1. (método de Euler) Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x).$$

O método de Euler consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) - x(t) \simeq v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo” dt suficientemente pequeno. Portanto, a solução $x(t_0 + n \cdot dt)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$, é estimada pela sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$. Numa linguagem como **C++** ou **Java**, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) = x$, é

```
while (time < t)
{
  x += v(time, x) * dt ;
  time += dt ;
}
```

- Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$ e o tempo final é $t = n\varepsilon$ com $n \in \mathbb{N}$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq x_n = (1 + \varepsilon)^n$$

onde $n = t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \rightarrow 0$, as aproximações convergem para a solução e^t , pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

- Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...
- Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

2. (método RK-4) O método de Runge-Kutta (de ordem) 4 para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \quad \text{com condição inicial} \quad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um “passo” dt , e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dt}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$, e os coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_1\right) \quad k_3 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)$$

- Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.
3. (simulações com software proprietário) Existem software proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinárias e parciais. Por exemplo, a função `ode45` do [MATLAB[®]](#), ou a função `NDSolve` do [Mathematica[®]](#), calculam soluções aproximadas de EDOs $\dot{x} = v(t, x)$ utilizando variações do método de Runge-Kutta.
- Verifique se os PC do seu Departamento/da sua Universidade têm acesso a um dos software proprietários [MATLAB[®]](#) ou [Mathematica[®]](#).
 - Em caso afirmativo, aprenda a usar as funções `ode45` ou `NDSolve`.

3 EDOS simples e autónomas

1. (**integração de EDOS simples**) O *teorema fundamental do cálculo*³ afirma que a derivada do integral indefinido $F(t) := \int_a^t f(s) ds$ de uma função contínua $f(t)$ existe e é igual a $F'(t) = f(t)$. Portanto, se $v(t)$ é um campo de direcções contínuo definido num intervalo de tempos $T \subset \mathbb{R}$, a solução da EDO

$$\dot{x} = v(t)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,

$$\dot{x} = v(t), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

- Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(t)$, então também $x(t) + c$ é solução, $\forall c \in \mathbb{R}$.
- Integre as seguintes EDOS, definidas em oportunos domínios:

$$\dot{x} = 2 - t + 3t^2 + 5t^6 \quad \dot{x} = e^{-t} \quad \dot{x} = \cos(3t) \quad \dot{x} = 1/t$$

2. (**foguetão**) Se um foguetão (no espaço vazio, sem forças gravitacionais!) expulsa combustível a uma velocidade relativa constante $-V$ e a uma taxa constante $\dot{m} = -\alpha$, então a sua trajectória num referencial inercial (uni-dimensional) é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = \alpha(V - v), \quad \text{ou seja,} \quad \dot{m}v + m\dot{v} = \alpha(V - v).$$

- Resolva a EDO $\dot{m} = -\alpha$ para a massa do foguetão, com massa inicial $m(0) = m_0$, e substitua o resultado na equação de Newton, obtendo

$$\dot{v} = \frac{\alpha V}{m_0 - \alpha t}$$

(válida se $0 \leq t < m_0/\alpha$).

- Calcule a trajectória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = v_0$ e posição inicial $q(0) = 0$, válida para tempos t inferiores ao tempo necessário para acabar o combustível.
3. (**campos de vectores e EDOS autónomas**) Um campo de vectores $v : X \rightarrow \mathbb{R}$, definido num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, define uma EDO *autónoma*

$$\dot{x} = v(x).$$

Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. um ponto onde $v(x_0) = 0$, então $x(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$ é uma solução *estacionária* (ou de *equilíbrio*) da equação. Se x_0 é um ponto regular do campo contínuo $v(x)$, i.e. se $v(x_0) \neq 0$, então uma solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada separando as variáveis, $\frac{dx}{v(x)} = dt$, e integrando os dois membros, $\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$. Ou seja,

$$\dot{x} = v(x), x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Se o campo $v(x)$ é diferenciável, estas soluções são únicas.

- Mostre que, se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = v(x)$, então também $x(t - c)$ é solução, $\forall c \in \mathbb{R}$.

³A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é “*Data aequatione quocunq;e fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*”.

- Considere as seguintes EDOs autónomas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x & \dot{x} &= x - 1 & \dot{x} &= x^2 & \dot{x} &= \sqrt{x} \\ \dot{x} &= (x - 1)(x - 2) & \dot{x} &= e^x & \dot{x} &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

definidas em intervalos convenientes.

Encontre, caso existam, as soluções estacionárias.

Desenhe os respectivos campos de vectores e conjecture sobre o comportamento das soluções.

Integre, quando possível, as equações e calcule soluções.

Determine, quando possível, umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

4. (**decaimento radioactivo**) A taxa de decaimento de matéria radioactiva é proporcional à quantidade de matéria existente, desde que a amostra seja suficientemente grande. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioactiva existente no instante t satisfaz a lei

$$\dot{N} = -\beta N,$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a “vida média” dos núcleos⁴.

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$. O que acontece quando $t \rightarrow \infty$?
- O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioactiva é o tempo necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial, ou seja, o tempo T tal que $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$. Mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$, e determine a relação entre o tempo de meia-vida T e o parâmetro β .
- O radiocarbono ^{14}C tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, assumindo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é fixa e conhecida⁵.
- Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante $\alpha > 0$, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha.$$

Verifique que a solução de equilíbrio é $\bar{N} = \alpha/\beta$. Mostre que $N(t) \rightarrow \bar{N}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (considere a mudança de variável $x(t) = N(t) - \bar{N}$).

5. (**atrito e tempo de relaxamento**) O atrito pode ser modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. Portanto, a equação de Newton (em dimensão 1) de uma partícula livre de massa m em presença de atrito é

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$$

onde $\gamma > 0$ é o “coeficiente de atrito”.

- Mostre que a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v$$

onde $\tau = m/\gamma > 0$ é um “tempo de relaxamento”. Resolva a equação com velocidade inicial $v(0) = v_0 > 0$. Deduza a trajectória $q(t)$ com posição inicial $q(0) = 0$.

⁴O tempo de vida de cada núcleo é modelado por uma variável aleatória exponencial X , com lei $\text{Prob}(X \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$ se $t \geq 0$, e 0 se $t < 0$, e média $\mathbf{E}X := \int_0^\infty t d\text{Prob}(X \leq t) = 1/\beta$. A equação diferencial, quando a quantidade N de núcleos é grande, é uma consequência da lei dos grandes números.

⁵J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

- Mostre que a energia cinética $T := \frac{1}{2}mv^2$ da partícula satisfaz

$$\dot{T} = -\frac{2}{\tau}T,$$

e portanto decresce exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau/2$.

6. (**crescimento exponencial**) Um modelo do crescimento (Malthusiano) de uma população num meio ambiente ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N,$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t , e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$).

- Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$. O que acontece quando $t \rightarrow \infty$?
- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante γ , então a população segue a lei

$$\dot{N} = \lambda N - \gamma.$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assintótico das outras soluções.

7. (**logística**) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população é dado pela *equação logística*⁶

$$\dot{N} = \lambda N(1 - N/M)$$

onde a constante positiva $M > 0$ é a população máxima permitida num dado meio ambiente limitado. Note que, tal como antes, $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll M$, e que $\dot{N} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow M$.

- Seja $x(t) = N(t)/M$ a população relativa. Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a equação logística “adimensional”

$$\dot{x} = \lambda x(1 - x).$$

- Determine as soluções de equilíbrio da equação logística.
- Verifique que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right)e^{-\lambda t}}.$$

- Discuta o comportamento assintótico das soluções da equação logística.

8. (**crescimento super-exponencial**) Um outro modelo de dinâmica de uma população em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N^2,$$

ou seja, a taxa de crescimento é proporcional aos pares de indivíduos contidos na população.

- Determine a solução estacionária e a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ arbitrária.
- Note que as soluções que determinou não estão definidas para toda a recta real: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!

9. (**fazer modelos**) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

⁶Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

- A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá é proporcional à diferença entre a temperatura do quarto, suposta constante, e a temperatura do chá.
- A velocidade vertical de um foguetão é inversamente proporcional à altura atingida.
- A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.
- A taxa de crescimento de uma população de marcianos é proporcional ao número de trios que é possível formar com a dada população.

4 EDOS lineares de primeira ordem

1. (EDOs lineares de primeira ordem) A solução de uma EDO linear de primeira ordem

$$\dot{x} + p(t)x = q(t),$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, pode ser determinada pelos seguintes dois passos: determinar uma solução não-trivial $y(t)$ da equação homogênea associada $\dot{y} + p(t)y = 0$, substituir a conjectura $x(t) = \lambda(t)y(t)$ na equação não-homogênea e resolver para $\lambda(t)$. O resultado é

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u)du} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u)du} q(s)ds \right).$$

- Mostre que se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções da EDO linear de primeira ordem $\dot{x} + p(t)x = q(t)$, então a diferença $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução da equação homogênea associada, $\dot{y} + p(t)y = 0$.
- Determine a solução geral das EDOS lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \quad \dot{x} + 2x = t \quad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \quad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t^3 \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan \theta = \cos \theta \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

2. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula (ou um paraquedista) próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência é modelada como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade, assim que a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - mg$$

onde $\gamma > 0$ é m coeficiente de atrito. Portanto, a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$m\dot{v} = -kv - mg.$$

- Resolva o problema com condição inicial $v(0) = 0$.
 - Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para um valor assintótico \bar{v} quando $t \rightarrow \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
 - Utilize a solução encontrada para determinar a trajetória $q(t)$ com condição inicial $q(0) = s$.
3. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V(t)$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Escreva a solução geral como função da corrente inicial $I(0) = I_0$.
- Resolva a equação para um circuito alimentado com tensão constante $V(t) = E$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.

- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E \sin(\omega t)$. Verifique que a solução com $I(0) = 0$ é

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde ϕ é uma fase que depende de ω , L e R .

4. (lei do arrefecimento de Newton) A temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ segue a lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} = -k(T - M(t)),$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva (que depende do material do corpo).

- Escreva a solução geral como função da temperatura inicial $T(0) = T_0$ e dos valores da função $M(\tau)$ com $0 \leq \tau \leq t$.
 - Determine a solução assintótica (ou seja, quando t é grande) $T(t)$ quando $M(t) = M \sin(\omega t)$.
 - Resolva a equação quando a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$. Esboce a representação gráfica de algumas das soluções e diga o que acontece para grandes intervalos de tempo.
 - Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100°C , é colocada numa sala cuja temperatura é de 20°C . Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60°C em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40°C .
5. (equações de Bernoulli) Uma EDO da forma

$$\dot{x} + P(t)x = Q(t)x^n,$$

onde P e Q são funções contínuas num intervalo I e com $n \neq 0$ ou 1 (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita *equação de Bernoulli*.

- Verifique que $x(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio da equação de Bernoulli.
- Seja $k = 1 - n$. Mostre que $x(t)$ é uma solução positiva da equação de Bernoulli com condição inicial $x(t_0) = x_0 > 0$ sse a função $y(t) = x(t)^k$ é uma solução da EDO linear

$$\dot{y} + kP(t)y = kQ(t)$$

com condição inicial $y(t_0) = (x_0)^{1/k}$.

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$\dot{x} + x = x^2(\cos t - \sin t) \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} + e^{t^2}x = x^2 \log t \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$\dot{x} - x/t = t\sqrt{x} \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

5 EDOS separáveis e homogéneas

1. (**produto direto de EDOS**) As soluções do sistema autónomo (*produto directo*)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(y) \end{cases}$$

são os caminhos $t \mapsto (x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são as soluções das EDOS autónomas $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$, respectivamente.

- Determine as soluções e as curvas de fases do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

quando $\lambda = 0, \pm 1, 2, \dots$ e quando $\lambda = 1/2, 1/3, \dots$.

- Mostre que a curva de fases que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, onde $f(x_0) \neq 0$ (ou onde $g(y_0) \neq 0$), é (localmente) o gráfico de uma função $x \mapsto y(x)$ (ou $y \mapsto x(y)$) que satisfaz a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)} \quad \left(\text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{f(x)}{g(y)} \right).$$

2. (**EDOs separáveis**) A solução da uma EDO *separável*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}.$$

com condição inicial $y(x_0) = y_0$ tal que $f(x_0) \neq 0$ e $g(y_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}, y(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}}$$

- Resolva as seguintes EDOS separáveis definidas em oportunos domínios.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \frac{dy}{dx} = kx^\alpha y^\beta \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}$$

$$\dot{x} = tx^3 \quad t\dot{x} + t = t^2 \quad \dot{x} = t^3/x^2 \quad x\dot{x} = e^{x+3t^2}t$$

$$\dot{x} = \frac{t-1}{x^2} \quad \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$(t^2 + 1)\dot{x} = 2tx \quad \dot{x} = t(x^2 - x) \quad \dot{x} = e^{t-x},$$

3. (**homotetias e funções homogéneas**) As *homotetias (positivas)* do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n são as transformações $x \mapsto \lambda x$, com $\lambda \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$. Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida num domínio “homogéneo” (i.e. invariante para homotetias), é dita *homogénea de grau k* se

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \forall x \in D,$$

e é dita *homogénea* (de grau 0) se é invariante para homotetias, ou seja, se

$$f(\lambda x) = f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \forall x \in D.$$

O *teorema de Euler* afirma que uma função diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é homogénea de grau k se e só se $\langle x, \nabla f(x) \rangle = k f(x)$ para todos os pontos $x \in D$.

- Determine os polinómios homogéneos de grau 2 e 3 no plano \mathbb{R}^2 .
- Mostre que uma função homogénea e contínua, definida em todo o espaço \mathbb{R}^n , é constante.

- Determine o grau de homogeneidade dos campos de forças elástico e gravitacional/elétrico, definidos por

$$F(x) := -x \quad \text{e} \quad F(x) := -\frac{x}{\|x\|^3},$$

respectivamente, para $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

- Diga se as seguintes funções $f(x, y)$, definidas em oportunos domínios do plano, são homogéneas:

$$x/y \quad e^{x-y} \quad \frac{x^2 - xy}{xy + 3y^2} \quad \sin(y) \cos(x)$$

4. (EDOs homogéneas) Uma EDO *homogénea* é uma equação diferencial

$$\dot{x} = v(t, x)$$

definida, no plano \mathbb{R}^2 de coordenadas (t, x) , por um campo de direções homogéneo, ou seja, tal que $v(\lambda t, \lambda x) = v(t, x)$ para todos os $\lambda > 0$. As homotetias $(t, x) \mapsto (\lambda t, \lambda x)$, com $\lambda \in \mathbb{R}_+$, enviam curvas integrais de uma EDO homogénea em curvas integrais. A mudança de variável $y(t) := x(t)/t$, num domínio onde $t > 0$ ou $t < 0$, transforma uma EDO homogénea $\dot{x} = v(t, x)$ numa EDO separável $y + t\dot{y} = v(1, y)$. Ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(1, x/t) \quad \Rightarrow \quad y + t\dot{y} = v(1, y) \quad \text{se } y = x/t}$$

- Seja $\dot{x} = v(t, x)$ uma EDO homogénea. Mostre que, se $\varphi(t)$ é uma solução e $\lambda \in \mathbb{R}$, então também $\phi(t) := \lambda \cdot \varphi(t/\lambda)$ é uma solução.
- Seja $\varphi(t)$ uma solução da EDO homogénea $\dot{x} = v(t, x)$ tal que $\varphi(1) = 5$ e $\varphi(2) = 7$. Se $\phi(t)$ é uma outra solução tal que $\phi(3) = 15$, quanto vale $\phi(6)$?
- Resolva as seguintes EDOs homogéneas

$$\begin{aligned} \dot{x} = -t/x & & \dot{x} = \frac{x-t}{x+t} & & \dot{x} = 1 + x/t \\ \dot{x} = x/t & & \dot{x} = 2\frac{t}{x}e^{x/t} + \frac{x}{t} & & \frac{dy}{dx} = y/x + \sin(y/x), \end{aligned}$$

definidas em oportunos domínios, e esboce a representação gráfica de algumas das soluções.

5. (equação de Newton com forças homogéneas) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = F(q)$$

para a trajetória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula sujeita a uma força $F(q)$ homogénea de grau k , ou seja tal que $F(\lambda q) = \lambda^k F(q)$ para todos os $\lambda > 0$ e todo os pontos $q \in X \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

- Verifique que as “quase-homotetia” $(t, q) \mapsto (\lambda^\alpha t, \lambda^\beta q)$, com $\lambda > 0$, enviam curvas integrais em curvas integrais se os “pesos” α e β satisfazem $\beta(1 - k) = 2\alpha$.
- Deduza que uma órbita fechada de dimensão linear L e período de revolução T é enviada numa órbita fechada de dimensão linear $L' = \lambda^\beta L$ e período de revolução $T' = \lambda^\alpha T$, e portanto o quociente T^β/L^α é constante.
- Considere uma força constante (e.g. a gravidade próximo da superfície da terra)

$$F(q) \propto 1,$$

e determine a relação entre espaço percorrido e tempo necessário.

- Considere a força elástica (e.g. lei de Hooke, oscilador harmónico)

$$F(q) \propto -q,$$

e deduza que os períodos das órbitas fechadas não dependem das amplitudes das oscilações.

- Considere uma força elástica “fraca”

$$F(q) \propto -q^3,$$

Determine o período das pequenas oscilações em quanto função da amplitude.

- Considere a força gravitacional

$$F(q) \propto -\frac{q}{\|q\|^3},$$

e deduza a *terceira lei de Kepler*⁷: “os quadrados dos períodos de revolução T são proporcionais aos cubos das distâncias médias L do Sol aos planetas, ou seja, $T^2 = kL^3$, onde k é uma constante”.

⁷Johannes Kepler, *Harmonices mundi*, 1619.

6 EDOS exactas e campos conservativos

1. (EDOs exactas, diferenciais exactos e campos conservativos) O diferencial $Pdx + Qdy$ é dito *exacto* no domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ se existe uma função $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , dita *primitiva*, tal que $dU = Pdx + Qdy$, ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

A primitiva é também dita *potencial* do campo de vectores $F := -\nabla U = -(P, Q)$. As curvas de nível regulares

$$\Sigma_c := \{(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } U(x, y) = c\},$$

com $c \in \mathbb{R}$ valor regular de U (i.e. tal que $\nabla U \neq 0$ nos pontos de Σ_c), ortogonais ao campo de vectores F em todos os pontos de D , são as soluções da equação diferencial *exacta*

$$Pdx + Qdy = 0.$$

O *teorema de Euler-Poincaré* afirma que o diferencial $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, definido num domínio convexo⁸ (ou, melhor, “simplesmente conexo”) $D \subset \mathbb{R}^2$, é exacto se e só se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

e, se isto acontecer, um potencial é dado pelo integral de linha

$$U(x, y) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy$$

onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ é um caminho diferenciável entre $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(1) = (x, y)$.

- Diga quais dos seguintes diferenciais,

$$\begin{aligned} dx + dy & & (2y + 3x) dx + (y + 2x) dy \\ e^{xy} dx + e^{xy} dy & & \frac{x}{y} dy + (1 + \log y) dx, \end{aligned}$$

definidos em oportunos rectângulos, são exactos, e esboce algumas curvas integrais da correspondente equação diferencial.

- Diga quais das seguintes EDOs

$$\begin{aligned} 5 + 3 \frac{dx}{dt} = 0 & & (x - t) \frac{dx}{dt} + e^x = 0 & & \frac{1}{x} + t - \frac{t}{x^2} \frac{dx}{dt} = 0 \\ (4x + 3y^2) + 2xy \frac{dy}{dx} = 0 & & 2x^2 + 4t^3 + (4tx + 1) \frac{dx}{dt} = 0 & & (r^2 + 1) \cos \theta + 2r \sin \theta \frac{dr}{d\theta} = 0, \end{aligned}$$

definidas em oportunos rectângulos, são exactas, e resolva-as.

- Verifique que, se a forma $Pdx + Qdy$ está definida numa bola $B_R(0)$ de raio $0 < R \leq \infty$, e satisfaz a condição $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ do teorema de Euler-Poincaré, então uma primitiva é também dada pelo integral

$$U(x, y) = \int_0^1 (xP(tx, ty) + yQ(tx, ty)) dt.$$

2. (factores integrantes) Um diferencial arbitrário $pdx + qdy$ pode ser transformado num diferencial exacto $(p\mu)dx + (q\mu)dy$ por meio de um *factor integrante*, uma função $\mu(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial(\mu p)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu q)}{\partial x}.$$

⁸ Uma região $D \subset \mathbb{R}^n$ é *convexa* se $a, b \in D$ implica $ta + (1 - t)b \in D$ para todos os $t \in [0, 1]$.

Não existem métodos gerais para determinar factores integrantes. No entanto, factores integrantes que dependem de apenas uma variável podem ser determinados, quando existem!, por meio de uma integração. Por exemplo, um factor integrante $\mu(x)$ é solução da EDO linear de primeira ordem

$$\mu \frac{\partial p}{\partial y} = \mu' q + \mu \frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{ou seja,} \quad \mu' / \mu = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \quad \text{ou seja} \quad \mu = e^{\int \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx}$$

desde que $\frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$ não depende de y .

- Considere as equações diferenciais

$$(4x + 3y^2) + 2xy \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2x^2 + y) + (x^2y - x) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mostre que não são exactas.

Determine um factor integrante da forma x^n com n inteiro. Multiplique as equações pelos respectivos factores integrantes e resolva as equações resultantes.

3. (**curvas ortogonais**) Se a família \mathcal{C} de curvas no plano é definida como sendo as curvas integrais da equação diferencial

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0,$$

então a família \mathcal{C}^\perp de curvas ortogonais é composta pelas curvas integrais da equação diferencial

$$p(x, y)dy - q(x, y)dx = 0.$$

(o operador que envia o diferencial $\omega = pdx + qdy$ no diferencial $*\omega = pdy - qdx$ é chamado “Hodge star operator” no plano euclidiano).

- Determine e esboce as curvas ortogonais ...

... à família de círculos $x^2 + y^2 = c$,

... à família de hipérbolas $xy = c$,

... e à família de parábolas $y^2 = cx$.

4. (**campos conservativos**) O *trabalho* efectuado pelo campo de vectores/forças $F(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $F(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, definido num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 , ao longo do caminho diferenciável $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ é o integral de linha

$$\mathcal{L}[F, \gamma] := \int_{\gamma} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

O campo de vectores F é *conservativo* se o trabalho apenas depende dos pontos inicial e final dos caminhos, ou seja, se admite um *potencial*, i.e. uma função diferenciável $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = -\nabla U$, e portanto

$$\int_{\gamma} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)).$$

- Diga quais dos seguintes campos de forças

$$F(x, y) = (3, 2) \quad F(x, y) = (x, y) \quad F(x, y) = (x, -y) \quad F(x, y) = (-y, x)$$

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

definidos em oportunos domínios do plano, são conservativos, e determine as curvas equipotenciais.

7 EDOS lineares homogêneas com coeficientes constantes

1. (equação de Newton num potencial quadrático) Considere a equação de Newton

$$\ddot{q} = -\beta q$$

que descreve a trajectória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}$ de uma partícula (de massa $m = 1$) num potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$.

- Verifique que $q(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio.
- Verifique que, se $\beta = 0$, as soluções da equação (de Newton da partícula livre)

$$\ddot{q} = 0$$

são $q(t) = a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

- Verifique que, se $\beta = -k^2 < 0$, as soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = k^2 q$$

são $q(t) = ae^{kt} + be^{-kt}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

- Verifique que, se $\beta = \omega^2 > 0$, as soluções da equação (do oscilador harmónico)

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

são $q(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

2. (partícula num potencial quadrático com atrito) A função $q(t) := e^{-\alpha t} y(t)$ é uma solução da equação de Newton de uma partícula num potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$ com uma força de atrito $-2\alpha q$ (se $\alpha > 0$),

$$\ddot{q} = -2\alpha \dot{q} - \beta q,$$

se $y(t)$ é uma solução da equação de Newton $\ddot{y} = -(\beta - \alpha^2)y$ de uma partícula num potencial quadrático $U(y) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha^2)y^2$.

- Verifique a afirmação acima.
- Determine a solução geral da equação.
- Existem soluções de equilíbrio?

3. (EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes, polinómio característico) A conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução (complexa) da EDO linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0$$

se z é igual a uma das raízes $z_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ do polinómio característico

$$P(z) := z^2 + 2\alpha z + \beta.$$

Duas soluções (reais) independentes podem ser obtidas calculando a parte real e a parte imaginária das soluções complexas, e são

$e^{-\alpha t} e^{kt}$	e	$e^{-\alpha t} e^{-kt}$	se $z_{\pm} = -\alpha \pm k$, com $k > 0$ (raízes reais e distintas)
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	e	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	se $z_{\pm} = -\alpha \pm i\omega$, com $\omega > 0$ (raízes complexas conjugadas)
$e^{-\alpha t}$	e	$te^{-\alpha t}$	se $z_{\pm} = -\alpha$ (raiz dupla)

O espaço \mathcal{H} das soluções (reais) da EDO linear homogénea $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0$ é um espaço linear de dimensão 2. Se $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ formam uma base de \mathcal{H} , então a “solução geral” (ou seja, uma fórmula que representa todas as soluções, ao variar os parâmetros a e b) da EDO linear homogénea $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0$ é $x(t) = a\phi_+(t) + b\phi_-(t)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

- Verifique que o espaço das soluções da EDO homogênea $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$ é um espaço linear, ou seja, que uma combinação linear $c_+x_+(t) + c_-x_-(t)$, com $c_{\pm} \in \mathbb{R}$, de soluções $x_{\pm}(t)$ é uma solução.
- Determine a solução geral das seguintes EDOs homogêneas:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2x = 0 & \quad \ddot{x} + \pi^2 x = 0 & \quad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 & \quad \ddot{x} - \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 & \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 & \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 & \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0. \end{aligned}$$

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2 \\ \ddot{x} + \dot{x} = 0 & \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0 \\ \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1 \\ \ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 & \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0 \\ \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9 \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 & \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1. \end{aligned}$$

- Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:

$$\begin{aligned} e^{2t} \quad \text{e} \quad e^{-2t}, & \quad e^{-t} \sin(2\pi t) \quad \text{e} \quad e^{-t} \cos(2\pi t), & \quad \sinh(t) \quad \text{e} \quad \cosh(t), \\ e^{-3t} \quad \text{e} \quad te^{-3t}, & \quad \sin(2t+1) \quad \text{e} \quad \cos(2t+2), & \quad 3 \quad \text{e} \quad 5t. \end{aligned}$$

4. (**independência linear e Wronskiano**) O (*determinante*) *Wronskiano* entre as funções $f(t)$ and $g(t)$, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, é a função

$$W_{f,g}(t) := f(t)\dot{g}(t) - \dot{f}(t)g(t)$$

Se $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos $t \in I$ então o quociente g/f (ou f/g) é constante no intervalo I . Consequentemente, se $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes, então o Wronskiano $W_{f,g}(t) \neq 0$ em algum ponto $t \in I$.

Se ϕ_+ e ϕ_- são duas soluções da mesma EDO linear $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e $t_0 \in I$, então

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = W_{\phi_+, \phi_-}(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

Portanto, ϕ_+ e ϕ_- são linearmente independente se e só se $W_{\phi_+, \phi_-}(t) \neq 0$ num ponto (e portanto em todos os pontos) $t \in I$.

- Sejam ϕ_+ e ϕ_- duas soluções da EDO linear $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$. Calcule a derivada de $W_{\phi_+, \phi_-}(t)$, e deduza a *identidade de Abel*

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = W_{\phi_+, \phi_-}(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

- Calcule

$$W_{e^{-\alpha t}, te^{-\alpha t}}, \quad W_{e^{-\alpha t} e^{kt}, e^{-\alpha t} e^{-kt}} \quad \text{and} \quad W_{e^{-\alpha t} \sin(\omega t), e^{-\alpha t} \cos(\omega t)}.$$

5. (**equação de Schrödinger estacionária**) Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.262... \times 10^{-34}$ J·s.

- Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

6. (EDOs equidimensionais) Uma equação diferencial da forma

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

é dita *equidimensional* (é invariante pela transformação $x \mapsto \lambda x$ com $\lambda > 0$).

- Mostre que a substituição $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) := y(x(t))$.
- Resolva a equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0,$$

na semirecta $x > 0$.

8 Números complexos e oscilações

1. (o plano dos números complexos) O corpo dos *números complexos* é o conjunto $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dos pontos $z = x + iy \simeq (x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, munido das operações “soma” e “multiplicação”, definidas por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

(que corresponde à soma dos vectores (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano \mathbb{R}^2) e

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Em particular, $i \cdot i = -1$, ou seja, $i = \sqrt{-1}$. O *conjugado* de $z = x + iy$ é $\bar{z} := x - iy$. O *módulo* de $z = x + iy$ é

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Os números reais

$$x = \Re(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \Im(z) := \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z = x + iy$. A *representação polar* do número complexo $z = x + iy \simeq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$z = \rho e^{i\theta}$$

onde $\rho = |z| \geq 0$ é o módulo, $\theta \in \mathbb{R}$ é “um” *argumento* de z , ou seja, um “ângulo” $\arg(z) = \theta + 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$, tal que $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$, e o símbolo $e^{i\theta}$ é definido pela *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

- Verifique que o inverso multiplicativo de um número complexo $z \neq 0$ é

$$1/z = \bar{z}/|z|^2$$

- Represente na forma $x + iy$ os seguintes números complexos

$$1/i \quad \frac{2-i}{1+i} \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{i}{2+i} \quad (1-i3)^2$$

- Resolva as seguintes equações

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

- Verifique que, se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, então

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{se } \rho_2 \neq 0).$$

Deduza que a multiplicação por $z = \rho e^{i\theta}$, no plano $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, corresponde a uma dilatação/contração por ρ e uma rotação de um ângulo θ . Em particular, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$ é a “raiz quadrada” da inversão $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, ou seja, uma rotação de um ângulo $\pi/2$.

- Use a fórmula de Euler para provar as fórmulas

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) \mp \sin(\theta) \sin(\phi)$$

e

$$\sin(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \sin(\phi) \pm \sin(\theta) \cos(\phi).$$

- Use a representação polar e a fórmula de Euler para provar a *fórmula de de Moivre*

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Deduza as fórmulas

$$\cos(n\theta) = \dots \quad \text{e} \quad \sin(n\theta) = \dots$$

- Verifique que o conjugado de $z = \rho e^{i\theta}$ é $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.
- Calcule

$$\sqrt{i} \quad \sqrt{-i} \quad \sqrt{1+i}$$

- Resolva as equações $z^3 = 1$, $z^5 = 1$ e $z^3 = 81$.
- Mostre que se ω é uma raiz n -ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

(multiplique por $1 - \omega \dots$).

2. (exponencial complexo e funções trigonométricas) A função exponencial $\exp(z) := e^z$, é a função inteira $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida pela série de potências

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

- Verifique a fórmula de adição $e^{z+w} = e^z e^w$, e deduza que $e^z \neq 0$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.
- Verifique que e^z é igual à sua derivada, ou seja, $\exp'(z) = \exp(z)$.
- Mostre que, se $\theta \in \mathbb{R}$, então o conjugado de $e^{i\theta}$ é $e^{-i\theta}$, e portanto $|e^{i\theta}| = 1$. Defina as funções reais de variável real “cos” e “sin” usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, ou seja,

$$\cos(\theta) := \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) := \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

e deduza as suas expansões em série de potências em torno de 0.

- Deduza que, se $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha+i\theta} = e^\alpha (\cos \theta + i \sin \theta)$$

3. (oscilações complexas e sobreposição) A função $t \mapsto z(t) = e^{i\omega t}$ descreve um ponto que percorre o círculo unitário $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$ do plano complexo $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ no sentido anti-horário com “frequência angular” $\omega > 0$, e portanto com período $T := 2\pi/\omega$ e frequência $\nu := \omega/(2\pi)$.

- Verifique que a função $z(t) = e^{i\omega t}$ satisfaz as equações diferenciais

$$\dot{z} = i\omega z \quad \text{e} \quad \ddot{z} = -\omega^2 z.$$

- Calcule a parte real (e a parte imaginária) da solução complexa $z(t) = e^{i\omega t} z(0)$, de $\ddot{z} = -\omega^2 z$, e deduza a trajectória (real) $q(t)$ do oscilador harmónico. Identifique as condições iniciais $q(0)$ e $\dot{q}(0)$ em quanto funções de $z(0) = \rho e^{i\varphi}$.
- Observe que a sobreposição das oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$,

$$z(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t},$$

é máxima quando $\omega_1 t = \omega_2 t$ (módulo 2π), e mínima quando $\omega_1 t - \omega_2 t = \pi$ (módulo 2π).

- Observe que, se $\omega_1 = \omega + \varepsilon$ e $\omega_2 = \omega - \varepsilon$, a sobreposição das duas oscilações pode ser representada como

$$z(t) = e^{i\omega t} (e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t}) = 2e^{i\omega t} \cos(\varepsilon t)$$

Em particular, se $|\varepsilon| \ll |\omega|$, então a sobreposição consiste numa modulação lenta (com período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) da frequência fundamental $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$.

9 Variação dos parâmetros e coeficientes indeterminados

1. (EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes) Uma EDO de segunda ordem linear com coeficientes constantes é uma equação

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são parâmetros, e $f(t)$ é uma função dada, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. O espaço das soluções da EDO linear $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$ é um espaço afim $z + \mathcal{H}$, modelado sobre o espaço linear $\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^2$ das soluções da EDO homogénea associada

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0,$$

ou seja, a solução geral da EDO linear $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$ é

$$x(t) = z(t) + y(t),$$

onde $z(t)$ é uma (i.e. apenas uma!) “solução particular” da EDO linear $\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \beta z = f(t)$ e $y(t) := a\phi_+(t) + b\phi_-(t)$ é a solução geral da EDO homogénea associada $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$, combinação linear de duas soluções independentes, $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$, com coeficientes arbitrários $a, b \in \mathbb{R}$.

- Verifique que a diferença $y(t) := x_2(t) - x_1(t)$ entre duas soluções, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, da EDO linear $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$ é uma solução da EDO homogénea associada $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$.
- Verifique o *princípio de sobreposição*: se $x_n(t)$ são soluções das EDOs lineares $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f_n(t)$, com $n = 1, 2, \dots, N$, então a “sobreposição” $x(t) := \sum_{n=1}^N x_n(t)$ é solução da EDO linear $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = \sum_{n=1}^N f_n(t)$.

2. (variação dos parâmetros) Uma solução particular da EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

é dada por

$$z(t) = \lambda_+(t)\phi_+(t) + \lambda_-(t)\phi_-(t)$$

onde

$$\lambda_+(t) = - \int \phi_-(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt, \quad \lambda_-(t) = \int \phi_+(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt,$$

$\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ são duas soluções independentes da equação homogénea $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$, e $W_{\phi_+, \phi_-}(t) = \phi_+(t)\dot{\phi}_-(t) - \dot{\phi}_+(t)\phi_-(t)$ é o Wronskiano.

- Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em oportunos domínios, utilizando o método de variação dos parâmetros:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= 1/\sin(t) & \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= e^{-t} & \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x &= e^{-2t} \log t. \\ \ddot{x} + x &= \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} & \ddot{x} + x &= \tan(t) & \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x &= \frac{e^{2t}}{\cos(2t)}. \end{aligned}$$

3. (coeficientes indeterminados) O *método dos coeficientes indeterminados* permite determinar soluções particulares de uma EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

quando o segundo membro (a força externa) $f(t)$ é um “quase-polinómio”. Se

$$f(t) = p(t)e^{\lambda t} := p(t)e^{\rho t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)),$$

onde $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_k t^k$ é um polinómio de grau k , e $\lambda = \rho + i\omega \in \mathbb{C}$, então a EDO admite uma solução particular

$$z(t) = t^n q(t)e^{\lambda t},$$

onde $q(t) = q_0 + q_1 t + \dots + q_k t^k$ é um polinómio de grau $\leq k$, se λ é uma raiz do polinómio característico $z^2 + 2\alpha z + \beta$ com multiplicidade $n \leq 2$. Usando o princípio de sobreposição, é possível determinar soluções particulares quando o segundo membro $f(t)$ é uma combinação linear de quase-polinómios.

- Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x = t & \quad \ddot{x} - \dot{x} = t^2 & \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = t^2 - 1 & \quad \ddot{x} - 4x = e^{-2t} \\ \ddot{x} + 2\dot{x} + x = t^3 e^{-t} + e^t & \quad \ddot{x} + x = \sin(t) & \quad \ddot{x} + 4x = 2t \cos(t) \\ \ddot{x} + 9x = \sin(\pi t) & \quad \ddot{x} + 4x = \cos(2t) & \quad \ddot{x} - 4x = te^{-2t} & \quad \ddot{x} + 4x = te^{-t} \cos(2t). \end{aligned}$$

4. (representação integral da resposta de um oscilador) Uma solução particular da equação (das oscilações forçadas)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad \text{é} \quad x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau.$$

Uma solução particular da equação

$$\ddot{x} - k^2 x = f(t) \quad \text{é} \quad x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sinh(k(t - \tau)) d\tau.$$

- Verifique as afirmações acima.
- Determine uma solução particular da equação das oscilações forçadas $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ quando a força é

$$f(t) = F \cdot \sin(\gamma t),$$

nos casos $\omega^2 \neq \gamma^2$ e $\omega = \gamma$.

5. (partícula num campo de forças dependente do tempo) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} + F(t)$$

de uma partícula de massa m sujeita a uma força $F(t)$, onde $2\alpha := 1/\tau \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, determine a trajetória quando a força é

- $F(t) = g$, ou seja, constante,
- $F(t) = -t^2$,
- $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$,
- $F(t) = \sum_{i=1}^n F_i \cos(\gamma_i t)$.

10 Oscilador harmónico

1. (**oscilador harmónico**) As pequenas oscilações de um pêndulo $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta)$ em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descritas pela equação de Newton do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q,$$

onde ω é a “frequência (angular) característica”. No espaço de fases $X = \mathbb{R}^2$, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}.$$

- Mostre que a solução com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

- Mostre que as trajectórias podem ser escritas como

$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega t + \phi),$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ (use as fórmulas $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$).

- Mostre que a variável complexa $z := p + i\omega q$ satisfaz

$$\dot{z} = i\omega z,$$

cuja solução é $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$.

- Mostre que a energia

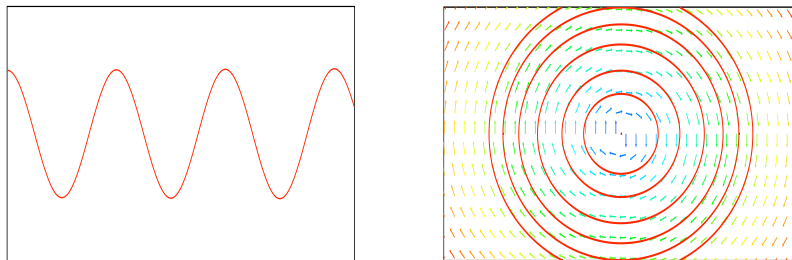
$$E(q, p) := \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) = \frac{1}{2} |z|^2$$

é uma constante do movimento, ou seja que se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt} E(q(t), p(t)) = 0$ para todo o tempo t .

- Determine a energia em quanto função da amplitude e da frequência das oscilações.
- “Elimine” dt no sistema, e mostre que as curvas de fases são soluções da EDO exacta

$$p dp + \omega^2 q dq = 0,$$

equivalente a $dE = 0$.



Uma trajectória e retrato de fases do oscilador harmónico.

2. (oscilações amortecidas) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2q,$$

onde $2\alpha := 1/\tau > 0$ é um coeficiente de atrito (τ é o tempo de relaxamento). No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2q - 2\alpha p \end{cases}.$$

- Mostre que a energia

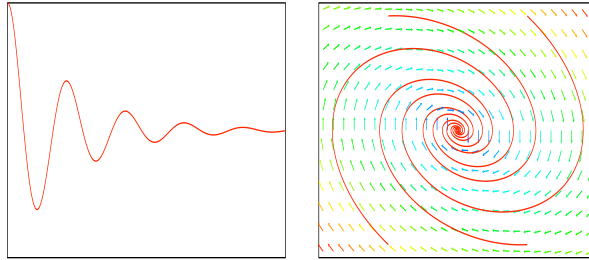
$$E(q, \dot{q}) := \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2q^2$$

não é uma constante do movimento.

- Mostre que as soluções do sistema “sub-crítico”, ou seja, com $\alpha^2 < \omega^2$, são

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \varphi)$$

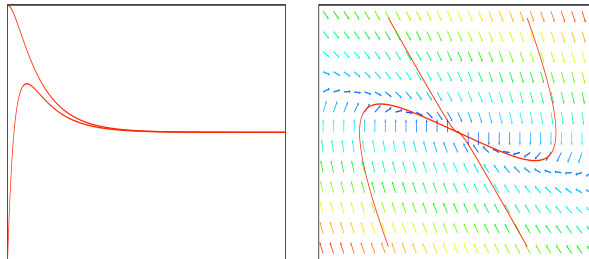
Observe que a frequência é $\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \simeq \omega - \frac{\alpha^2}{2\omega} + \dots$ se $\alpha \ll \omega$, mas tende para zero (e consequentemente, o período das oscilações tende para o ∞) quando $\alpha \rightarrow \omega$.



Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido sub-crítico.

- Mostre que as soluções do sistema “super-crítico”, ou seja, com $\alpha^2 > \omega^2$, são

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sinh(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}t + \varphi)$$



Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido super-crítico.

- Mostre que as soluções do sistema “crítico”, ou seja, com $\alpha^2 = \omega^2$ (uma condição muito difícil de observar!), são

$$q(t) = (a + bt)e^{-\alpha t}.$$

3. (oscilações forçadas, batimentos e ressonância) Considere a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} = -\omega^2q + f(t),$$

onde $f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$.

- Mostre que, quando $\gamma^2 \neq \omega^2$, a solução geral é

$$q(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t)$$

onde A e ϕ são constantes arbitrárias.

- Verifique que a solução com condições iniciais triviais pode ser escrita

$$q(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} (\cos(\gamma t) - \cos(\omega t)) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} 2 \sin\left(\frac{\omega - \gamma}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega + \gamma}{2} t\right)$$

Quando a diferença $2\varepsilon := \omega - \gamma$ é pequena, ou seja $|\varepsilon| \ll |\omega|$, e portanto $\frac{\omega + \gamma}{2} \simeq \omega$, podemos estimar

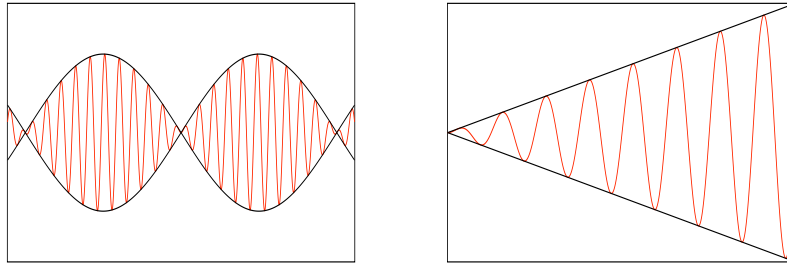
$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \cdot \sin(\omega t).$$

Portanto, a resposta do oscilador à força externa é uma “modulação” lenta (de período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) de uma oscilação com frequência fundamental ω . Este fenómeno é chamado “batimentos”. Calcule o limite da resposta $q(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Mostre que, quando $\gamma^2 = \omega^2$, a solução com condições iniciais triviais é

$$q(t) = \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

Este fenómeno, uma resposta cuja amplitude cresce linearmente no tempo, é chamado “ressonância”.



Batimentos e ressonância.

4. (oscilações forçadas em notação complexa) Considere a equação das oscilações forçadas

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + f(t).$$

A variável complexa $z := p + i\omega q$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$\dot{z} - i\omega z = f(t).$$

- Uma solução não trivial da EDO homogénea associada $\dot{\zeta} = i\omega\zeta$ é $\zeta(t) = e^{i\omega t}$. Use o método da variação das constantes para determinar a solução na forma de um produto $z(t) = \lambda(t)e^{i\omega t}$. Deduza que a solução é

$$z(t) = z(0)e^{i\omega t} + \int_0^t f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)} d\tau.$$

- Verifique que a energia cedida ao oscilador por uma força $f(t)$ que actua num intervalo de tempos $(-\infty, \infty)$ é dada por

$$E = \frac{1}{2}|z|^2 = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right|^2.$$

5. (oscilações forçadas amortecidas) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2q + f(t),$$

onde $2\alpha := 1/\tau > 0$ é um coeficiente de atrito, e a força é $f(t) = F_0 \sin(\gamma t)$.

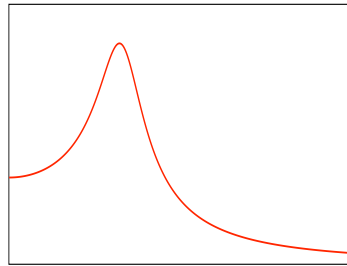
- Mostre que, se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), a solução geral é

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \varphi) + R(\gamma)F_0 \sin(\gamma t + \phi),$$

onde a amplitude A e a fases φ dependem dos dados iniciais,

$$R(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \quad \text{e} \quad \tan \phi = -\frac{2\alpha\gamma}{\omega^2 - \gamma^2}.$$

A primeira parcela da solução representa um “regime transitório” (transiente), desprezável para grandes valores do tempo (i.e. para $t \gg 2\tau$). A segunda é dita “solução estacionária”, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função $R(\gamma)$ é dita *curva de ressonância* do sistema, pois representa o factor de proporcionalidade entre a amplitude da força e a amplitude da resposta.



Um exemplo de curva de ressonância.

- Mostre que a curva de ressonância $R(\gamma)$ atinge um máximo para o valor

$$\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2}$$

da frequência, chamada *frequência de ressonância*. Observe que, se $\omega\tau \gg 1$, então $\gamma_r \simeq \omega(1 - 1/(4\tau^2\omega^2) + \dots)$.

- Discuta também os casos $\alpha^2 = \omega^2$ e $\alpha^2 > \omega^2$.

6. (circuito RLC) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R , indutância L e capacidade C , é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Calcule a frequência própria de um circuito RLC com resistência $R \simeq 0$. Determine a corrente $I(t)$ quando o circuito é alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas).
- Determine a corrente $I(t)$ num circuito RLC alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$ (compare com a equação das oscilações amortecidas).
- Determine a corrente $I(t)$ num circuito RLC alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).
- Determine a frequência de ressonância de um circuito RLC.

Formulário primitivas

	(função)	("uma" primitiva)
	$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)dx = F(x)$
(por substituição)	$f(y(x))y'(x)$	$\int f(y(x))y'(x)dx = \int f(y)dy$
(por partes)	$f(x)g'(x)$	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
(constantes)	λ	$\int \lambda dx = \lambda x$
(potências, $\alpha \neq -1$)	x^α	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
(logaritmo)	$1/x$	$\int \frac{dx}{x} = \log x $
(exponencial)	e^x	$\int e^x dx = e^x$
(seno)	$\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
(coseno)	$\cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x)$
(tangente)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$
(cotangente)	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cotan(x)$
(arco cujo seno)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$
(arco cuja tangente)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$
(exponencial \times seno)	$e^{\alpha x} \sin(\beta x)$	$\int e^{\alpha x} \sin(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$
(exponencial \times coseno)	$e^{\alpha x} \cos(\beta x)$	$\int e^{\alpha x} \cos(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$
(coseno \times coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\cos(nx) \cos(mx)$	$\int \cos(nx) \cos(mx)dx = \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno \times seno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx) \sin(mx)$	$\int \sin(nx) \sin(mx)dx = -\frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}$
(seno \times coseno, $n^2 \neq m^2$)	$\sin(nx) \cos(mx)$	$\int \sin(nx) \cos(mx)dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)}$
($x \times$ coseno, $n \neq 0$)	$x \cos(nx)$	$\int x \cos(nx)dx = \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \sin(nx)}{n}$
($x \times$ seno, $n \neq 0$)	$x \sin(nx)$	$\int x \sin(nx)dx = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n}$
($x^k \times$ coseno, $n \neq 0$)	$x^k \cos(nx)$	$\int x^k \cos(nx)dx = \frac{x^k \sin(nx)}{n} - \frac{k}{n} \int x^{k-1} \sin(nx)dx$
($x^k \times$ seno, $n \neq 0$)	$x^k \sin(nx)$	$\int x^k \sin(nx)dx = -\frac{x^k \cos(nx)}{n} + \frac{k}{n} \int x^{k-1} \cos(nx)dx$

11 Integrais duplos

1. (**integrais duplos e integrais iterados**) Se $f(x, y)$ é uma função contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, então o integral duplo $\iint_R f(x, y) dx dy$ é igual a um dos integrais iterados

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Se o domínio de integração é uma região $V = \{a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, então

$$\iint_V f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Se o domínio de integração é uma região $H = \{c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$, então

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

- Calcule os seguintes integrais iterados.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-1}^1 y dx dy & \quad \int_1^2 \int_0^3 xy^2 dx dy & \quad \int_0^3 \int_1^2 xy^2 dy dx \\ \int_0^e \int_1^{\log(2)} e^x dx dy & \quad \int_0^1 \int_\pi^{2\pi} y \sin(x) dx dy & \quad \int_0^1 \int_\pi^{3\pi} \sin^2(x) dx dy \end{aligned}$$

- Esboce a região de integração e calcule os seguintes integrais duplos recorrendo, se necessário, a uma inversão da ordem de integração.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^y x^3 y dx dy & \quad \int_0^1 \int_{y^3}^{y^2} dx dy & \quad \int_0^3 \int_{x^2}^{2x^2} xy^2 dy dx \\ \int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2} dy dx & \quad \int_0^2 \int_{y/2}^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx dy & \quad \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3) dx dy \end{aligned}$$

- Calcule os seguintes integrais duplos.

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy & \quad \text{onde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 \leq y \leq 10\}. \\ \iint_D e^{x+y} dx dy & \quad \text{onde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}. \\ \iint_D (x+y) dx dy & \quad \text{onde } D \text{ é o triângulo de vértices } (0, 0), (0, 1) \text{ e } (1, 0). \\ \iint_D x^3 \cos(xy) dx dy & \quad \text{onde } D \text{ é a região limitada pelas curvas } y = x^2, y = 0, \text{ e } x = 2. \end{aligned}$$

2. (**coordenadas polares**) As coordenadas polares (ρ, θ) , com $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in [0, 2\pi[$, no plano estão definidas por

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

onde x e y são as coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^2 . O elemento de área em coordenadas polares é $dx dy \simeq \rho d\rho d\theta$, portanto,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta$$

- Calcule os seguintes integrais utilizando as coordenadas polares.

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \quad \text{onde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2 \leq x^2 + y^2 \leq 7\}.$$

$$\iint_D y dx dy \quad \text{onde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 3\}$$

- Calcule o integral duplo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

utilizando coordenadas polares, e deduza o valor do integral gaussiano $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

3. (**áreas**) A área de uma região $R \subset \mathbb{R}^2$ é igual ao integral

$$\boxed{\text{Área}(R) = \iint_R dx dy.}$$

Esboce as seguintes regiões do plano e calcule as suas áreas recorrendo a um integral duplo.

- Círculo de raio r .
 - Elipse $x^2 + y^2/9 = 1$.
 - Região do plano definida por $-y^2 \leq x \leq y^2$ e $0 \leq y \leq 1$.
 - Região do plano definida por $y \leq 4x - x^2$, $y \geq 0$ e $y \geq 6 - 3x$.
 - Região do plano limitada pelas curvas $y = 4 - x^2$ e $y = x + 2$.
 - Triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(2, 1)$.
 - Região do plano limitada pela curva $\rho = \sin(\theta/2)$ com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
4. (**volumes**) O volume da região $R \subset \mathbb{R}^3$ do espaço limitada pelos gráficos $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ no domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ é igual ao integral duplo

$$\boxed{\text{Volume}(R) = \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy.}$$

Esboce os seguintes sólidos e calcule os seus volumes recorrendo a um integral duplo.

- Sólido limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.
 - Sólido do primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + 2y = 2$.
 - Sólido limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.
 - Sólido limitado pelo plano $z = 0$, o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.
5. (**densidade e centro de massa**) Se $\rho(x, y)$ denota a densidade de um corpo que ocupa a região planar $R \subset \mathbb{R}^2$, então a massa total do corpo é o integral duplo

$$M = \iint_R \rho(x, y) dx dy$$

O *centro de massa* é o ponto $\vec{p} = (\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R x \rho(x, y) dx dy \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R y \rho(x, y) dx dy$$

- Determine o centro de massa do disco $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ de densidade constante ρ .
- Determine a massa de um disco $x^2 + y^2 \leq 1$ com densidade $\rho(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

- Determine o centro de massa de um triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(0, 3)$, cuja densidade é $\rho(x, y) = x + y$,
6. (teorema de Green) Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho diferenciável que descreve a curva fechada $C := \gamma([0, 1])$ (i.e. $\gamma(1) = \gamma(0)$). O integral de linha do campo de vetores $F = (P, Q)$ ao longo da curva C é o integral

$$\oint_C (Pdx + Qdy) := \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

O *teorema de Green* afirma que, se $S \subset \mathbb{R}^2$ é a região do plano limitada pela curva $C = \partial S$, então o integral de linha do campo vectorial F é igual ao integral de superfície do *rotacional* do campo, $\text{rot } F := \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, sobre S , ou seja,

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

- Calcule o integral de linha do campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$ ao longo dos círculos $C_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } \|(x, y)\| = R\}$.

12 Integrales triplos

1. (**integrales triplos e integrales iterados**) Se $f(x, y, z)$ é uma função contínua no cubo $C = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$, então o integral triplo $\iiint_C f(x, y, z) dx dy dz$ é igual a um dos integrales iterados

$$\begin{aligned} \iiint_C f(x, y, z) dx dy dz &= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^f f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \\ &= \dots \end{aligned}$$

- Calcule os seguintes integrales iterados.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 (x + 2y + 3z) dx dy dz & \quad \int_0^1 \int_0^z \int_0^y dx dy dz \\ \int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2 y dz dy dx & \quad \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^2 z dx dz dy \end{aligned}$$

2. (**coordenadas cilíndricas**) As *coordenadas cilíndricas* (ρ, θ, z) , com $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ e $z \in \mathbb{R}$, no espaço \mathbb{R}^3 estão definidas por

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \\ z &= z \end{aligned}$$

onde x , y e z são as coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^3 . O elemento de volume em coordenadas cilíndricas é $dx dy dz = \rho d\rho d\theta dz$, portanto,

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \rho d\rho d\theta dz$$

Use as coordenadas cilíndricas para determinar

- o volume do cilindro B definido por $x^2 + y^2 \leq 3$ e $-2 \leq z \leq 4$.
- o integral

$$\iiint_B dx dy dz$$

onde B é a região limitada pela superfície $x^2 + y^2 = z$ e pelo plano $z = 1$.

- o integral

$$\iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz$$

onde B é região limitada entre as esferas de centro $(0, 0, 0)$ e raios R e $R + \delta$.

- o volume da intersecção da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e do cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. (**coordenadas esféricas**) As *coordenadas esféricas* (ρ, θ, φ) , com $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, no espaço estão definidas por

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ y &= \rho \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ z &= \rho \sin(\varphi) \end{aligned}$$

onde x , y e z são as coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^3 . O elemento de volume em coordenadas esféricas é $dx dy dz = \rho^2 \cos(\varphi) d\rho d\theta d\varphi$, portanto,

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R f(\rho \cos(\varphi) \cos(\theta), \rho \cos(\varphi) \sin(\theta), \rho \sin(\varphi)) \rho^2 \cos(\varphi) d\rho d\theta d\varphi$$

Use as coordenadas esféricas para determinar

- o volume da bola de centro $(0, 0, 0)$ e raio R .
- o integral

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

onde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

- o integral

$$\iiint_B \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$$

onde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq (R + \delta)^2\}$ é a região limitada entre as esferas de centro $(0, 0, 0)$ e raios R e $R + \delta$.

- o volume da intersecção da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e do cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. (volumes) O volume de uma região $R \subset \mathbb{R}^3$ é igual ao integral triplo

$$\boxed{\text{Volume}(R) = \iiint_R \, dx \, dy \, dz.}$$

Esboce as seguintes regiões do espaço \mathbb{R}^3 e calcule os seus volumes recorrendo a um integral triplo.

- Região limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.
 - Região limitada por $z = 4y^2$, $z = 4$, $x = 0$ e $x = 2$.
 - Região limitada por $z = 3 - y^2$, $z = -2y$, $x = 0$ e $x = 2$.
 - Região limitada por $z = x^2 + y^2 - 1$ e $z = 1 - x^2 - y^2$.
 - Região limitada superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e inferiormente por $x^2 + y^2 = 4z$.
5. (teorema da divergência) Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ uma região limitada pela superfície lisa $S = \partial V$, seja n o campo de vectores unitários normais a S , e seja ds o elemento de área em S , assim que o elemento de volume é $dv = dn \, ds$. Então o fluxo do campo de vectores $F = (P, Q, R)$ ao longo da superfície S é igual ao integral da *divergência* do campo,

$$\text{div } F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

na região V , ou seja,

$$\boxed{\oint_S \langle F, n \rangle \, ds = \int_V (\text{div } F) \, dv.}$$

- Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ ao longo da esfera $S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ s.t. } \|r\| = R\}$.

13 Equações diferenciais parciais

1. (equações diferenciais parciais) Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma lei

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots, u_{x_i x_j x_k}, \dots) = 0$$

para as derivadas parciais

$$u_{x_i x_j \dots x_k} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} u$$

de um campo $u(x_1, \dots, x_n)$, escalar ou vectorial, definido num domínio $D \subset \mathbb{R}^n$. Dependendo do significado físico das variáveis independentes $x = (x_1, \dots, x_n)$ (posição, tempo, velocidade, energia, ...), é posto o problema de determinar a/s solução/ões do *problema com condições iniciais*

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u_t(x, t_0) = \psi(x), \quad \dots$$

se as variáveis independentes são $(x, t) := (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e t_0 é um “tempo inicial”, e/ou do *problema com condições de fronteira*

$$u(x) \rightarrow \varphi(y) \quad \text{quando } x \rightarrow y \in \partial D,$$

se as variáveis independentes são $x := (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ e ∂D denota a fronteira do domínio D .

- Determine a solução da EDP

$$u_t = 0$$

para o campo escalar $u(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$.

- Mostre que as soluções de classe C^2 da EDP

$$u_{xy} = 0$$

no plano \mathbb{R}^2 são $u(x, y) = f(x) + g(y)$, onde f e g são funções arbitrárias de classe C^2 .

2. (operadores diferenciais lineares, símbolos) Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, de grau $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, o operador diferencial ∂^α , que actua sobre as funções (suficientemente) diferenciáveis definidas em abertos de \mathbb{R}^n , é definido por

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Um operador diferencial linear de grau $\leq k$, definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é um polinómio

$$P(\partial, x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

em ∂ , com “coeficientes” $a_\alpha(x)$ que são funções $a_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$. O operador é invariante por translações se os coeficientes a_α não dependem do ponto x , i.e. são constantes.

As “ondas planas” $e_\xi(x) := e^{i\langle \xi, x \rangle}$, com “vector de onda” $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, são funções próprias do operador linear com coeficientes constantes $L = P(\partial)$, ou seja, satisfazem

$$L e_\xi = \sigma(\xi) e_\xi,$$

onde o valor próprio, o polinómio $\sigma(\xi) := P(i\xi)$, é dito *símbolo* do operador L . O *símbolo principal* é o termo (polinómio homogéneo) de grau máximo, $\sigma_p(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \cdot (i\xi)^\alpha$. O operador $L = P(\partial)$ é dito *elíptico* se o seu símbolo principal só se anula na origem, i.e. se $\sigma_p(\xi) \neq 0$ para todos os $\xi \neq 0$.

Em geral, o símbolo do operador linear $L = P(\partial, x)$ é a função que a cada $x \in X$ associa o polinómio $\xi \mapsto P(i\xi, x)$.

- Verifique que as ondas planas $e_\xi(x) = e^{i\langle \xi, x \rangle}$ são funções próprias dos operadores diferenciais ∂^α , com $\alpha \in \mathbb{N}^n$, i.e.

$$\partial^\alpha e_\xi = (i\xi)^\alpha e_\xi,$$

com valores próprios $(i\xi)^\alpha := (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n}$.

- O operador de *translação* T_a , com $a \in \mathbb{R}^n$, é definido por $(T_a f)(x) := f(x+a)$. Verifique que as ondas planas $e_\xi(x) = e^{i\langle \xi, x \rangle}$ são funções próprias dos operadores de translação, i.e.

$$T_a e_\xi = e^{i\langle \xi, a \rangle} e_\xi,$$

com valores próprios $\lambda_a(\xi) = e^{i\langle \xi, a \rangle}$.

- O operador de *modulação* M_ξ , com $\xi \in \mathbb{R}^n$, é definido por $(M_\xi f)(x) := e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x)$. Mostre que $T_a \circ M_\xi = e^{i\langle \xi, a \rangle} M_\xi \circ T_a$.
- Determine os símbolos dos seguintes operadores, e determine os domínios onde são elípticos

$$\partial_{tt} - \partial_{xx} + \partial_x \quad \partial_{xx} - x\partial_{yy}$$

14 EDPs de primeira ordem

1. (EDP lineares de primeira ordem e características) Uma EDP linear de primeira ordem é uma lei

$$a_1(x)u_{x_1} + \cdots + a_n(x)u_{x_n} = f(x)$$

para o campo escalar $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $a_1(x), \dots, a_n(x)$ e $f(x)$ são funções dadas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. A EDP homogénea associada é

$$a_1(x)u_{x_1} + \cdots + a_n(x)u_{x_n} = 0.$$

O campo característico é o campo de vectores $v(x) := (a_1(x), \dots, a_n(x))$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. As (curvas) características são as curvas integrais de v , as soluções da EDO $\dot{x} = v(x)$. Se $t \mapsto x(t)$ denota a característica com condição inicial $x(0) = x$, então a derivada de Lie do campo escalar ϕ ao longo do campo vectorial v é

$$(\mathcal{L}_v \phi)(x) := \left. \frac{d}{dt} \phi(x(t)) \right|_{t=0} = a_1(x)\phi_{x_1}(x) + \cdots + a_n(x)\phi_{x_n}(x).$$

Em particular: as soluções do problema homogéneo $\mathcal{L}_v u = 0$ são as funções u constantes ao longo das curvas características. Se $\Sigma \subset \Omega$ é uma hiper-superfície transversal ao campo característico v (ou seja, definida localmente por $\Sigma = \{f(x) = 0\}$, com $\mathcal{L}_v f \neq 0$), então o problema não-homogéneo $\mathcal{L}_v u = f$ com condição inicial $u|_{\Sigma}(y) = \varphi(y)$ ($\forall y \in \Sigma$) admite uma solução local numa vizinhança de Σ : num sistema de coordenadas tal que $v = (1, 0, \dots, 0)$ e $\Sigma = \{x_1 = 0\}$, a solução local é

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

- Determine as características da EDP

$$u_x = f(x, y)$$

para o campo $u(x, y)$ definido no plano \mathbb{R}^2 . É possível resolver o problema com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$?

- Determine as características da EDP

$$xu_x + u_y = 0$$

para o campo $u(x, y)$ definido no plano \mathbb{R}^2 , e resolva o problema com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$.

- Descreva as soluções da EDP

$$xu_x + yu_y = 0$$

no plano \mathbb{R}^2 e no domínio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- Descreva as soluções da EDP

$$xu_x = yu_y$$

no plano \mathbb{R}^2 .

2. (equação de transporte) Considere a equação de transporte

$$u_t + vu_x = 0$$

para o campo $u(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, onde $v(x, t)$ é um campo de velocidades dado.

- Determine as características.
- Mostre que, se o campo de velocidades $v(x, t) = v(t)$ depende apenas do tempo, então uma solução da equação de transporte com condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ é

$$u(x, t) = \varphi \left(x + \int_0^t v(s) ds \right).$$

3. (EDP quase-lineares de primeira ordem e características) Uma EDP quase-linear de primeira ordem é uma lei

$$a_1(x, u)u_{x_1} + \cdots + a_n(x, u)u_{x_n} = f(x, u)$$

para o campo escalar $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $a_1(x, u), \dots, a_n(x, u)$ e $f(x, u)$ são funções dadas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. A EDP homogénea associada é

$$a_1(x, u)u_{x_1} + \cdots + a_n(x, u)u_{x_n} = 0.$$

O campo característico é o campo de vectores $V(x, u) := (a_1(x, u), \dots, a_n(x, u), f(x, u))$ em Ω . As (curvas) características são curvas integrais do campo característico, as soluções da EDO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_n(x, u) \\ \dot{u} = f(x, u) \end{cases},$$

ou seja, eliminando o tempo t , de

$$\frac{dx_1}{a_1(x, u)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x, u)} = \frac{du}{f(x, u)}.$$

4. (equação de Euler) Considere um fluido de partículas não interagentes na recta. O campo de velocidades do fluido é $v(x, t) := \dot{x}(t)$, onde $s \mapsto x(s)$ denota a trajectória da partícula que passa pelo ponto x no instante t .

- Mostre que a equação de Newton $\ddot{x} = 0$ implica que $v(x, t)$ satisfaz a equação de Euler

$$v_t + vv_x = 0.$$

- Mostre que a equação pode ser escrita

$$v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(v^2) = 0.$$

- Mostre que, se $x(t)$ é uma solução da EDO $\dot{x} = v(x, t)$, então a função $u(t) := v(x(t), t)$ é uma constante. Portanto, o vector $(x(t), u(t))$ satisfaz a (o sistema de) EDO característica

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$$

- Resolva o sistema característico, e deduza que uma solução implícita da equação de Euler $v_t + vv_x = 0$ com condição inicial $v(x, 0) = \varphi(x)$ é dada por

$$v(x + t\varphi(x), t) = \varphi(x),$$

desde que t seja suficientemente pequeno.

- O que acontece para grandes valores de t quando o perfil de velocidades inicial $v(x, 0)$ não é constante?

15 EDPs lineares de segunda ordem: Laplace, ondas e calor

1. (classificação dos operadores diferenciais lineares de grau 2) O símbolo de um operador diferencial linear de grau dois

$$L = P(\partial) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0$$

definido num domínio de \mathbb{R}^n é um polinómio quadrático

$$\sigma(i\xi) = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \xi_i \xi_j + i \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \xi_i + a_0,$$

onde $A := (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica que define a “forma quadrática” $-\sigma_p(i\xi) = \langle \xi, A\xi \rangle$. A forma quadrática pode ser diagonalizada (por um operador ortogonal e depois umas dilatações/contrações) e transformada na forma canónica, associada a uma matriz diagonal com valores próprios ± 1 e 0 . Portanto, existe uma base de \mathbb{R}^n tal que o símbolo principal do operador L assume a forma canónica

$$-\sigma_p(i\xi) = (\xi_1 + \dots + \xi_p) - (\xi_{p+1} + \dots + \xi_{p+q}),$$

onde $p + q \leq n$, e $p - q$ é a “assinatura” da forma quadrática.

O operador L é dito *elíptico* se o seu símbolo principal for uma forma quadrática definida (positiva ou negativa), ou seja equivalente a $\pm(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)$.

O operador L é dito *hiperbólico* se o seu símbolo principal for uma forma quadrática não-degenerada de assinatura $n - 2$, ou seja equivalente a $\pm(\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 - \xi_n^2)$.

O operador L é dito *parabólico* se o seu símbolo principal for uma forma quadrática degenerada com núcleo uni-dimensional e definida (positiva ou negativa) no complemento ortogonal do núcleo, ou seja equivalente a $\pm(\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2)$.

2. (Laplaciano, equação de Laplace, funções harmónicas) O *Laplaciano* (ou *operador de Laplace*) no espaço euclidiano \mathbb{R}^n é o operador diferencial $\Delta := \text{div} \circ \text{grad}$, definido, em coordenadas Cartesianas (x_1, x_2, \dots, x_n) , por

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

se $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função real de classe C^2 . A *equação de Laplace* para o campo escalar $u(x)$ definido num domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ é a EDP

$$\Delta u = 0$$

As soluções da equação de Laplace são ditas *funções harmónicas*.

- Determine a símbolo de Δ em \mathbb{R}^n , e mostre que o Laplaciano é um operador elíptico.
- Quais funções satisfazem a equação de Laplace $u''(x) = 0$ na recta?
- Determine as soluções da equação de Laplace $u''(x) = 0$ no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com condições de fronteira $u(a) = c$ e $u(b) = d$.
- Verifique que

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

é uma solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- Verifique que (o potencial eléctrico/gravitacional gerado por uma carga/massa posta na origem)

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

é uma solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

3. (equação de calor) A equação de calor/difusão para o campo $u(x, t)$, com $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, é

$$\boxed{u_t = \beta \Delta u}$$

onde Δ é o Laplaciano no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n e $\beta > 0$ é um coeficiente de difusão.

- Mostre que a substituição $\tau = \beta t$ transforma a equação do calor acima em $u_\tau = \Delta u$.
- Determine o símbolo do operador de difusão (ou transporte)

$$L := \partial_t - \beta \Delta,$$

e mostre que é parabólico.

- Verifique que as funções harmônicas $u(x)$ são soluções estacionárias (i.e. independentes do tempo t) da equação de calor.
- Verifique que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4\beta t}$$

é uma solução da equação de calor $u_t = \beta u_{xx}$ em $t > 0$.

- Verifique que

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/4\beta t}$$

é uma solução da equação de calor $u_t = \beta(u_{xx} + u_{yy})$ em $t > 0$.

4. (equação de onda) A equação de onda para o campo $u(x, t)$, com $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, é

$$\boxed{u_{tt} = c^2 \Delta u}$$

onde c é a velocidade de propagação das ondas.

- Mostre que a substituição $\tau = ct$ transforma a equação de onda em $u_{\tau\tau} = \Delta u$.
- Determine o símbolo do operador de d'Alembert

$$\square := \frac{1}{c^2} \partial_{tt} - \Delta,$$

e mostre que é hiperbólico.

- Verifique que as “ondas planas”

$$u_\xi(x, t) := A e^{i(\xi \cdot x - \omega t + \varphi)}$$

são soluções da equação das ondas $u_{tt} = c^2 \Delta u$ no “espaço-tempo” $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, se a frequência ω e o número de onda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfazem a relação de dispersão $\omega^2 = c^2 \|\xi\|^2$.

5. (solução de d'Alembert da equação de onda (traveling waves)) Considere a equação de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{com } x \in \mathbb{R}}$$

- Mostre que a mudança de variáveis independentes $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$, onde $\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$, transforma a equação acima na forma canônica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0,$$

cujas soluções gerais são sobreposições de duas ondas (traveling waves)

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

onde f e g são funções diferenciáveis arbitrárias.

- Verifique que a fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(y) dy$$

é uma solução da equação de onda com condições iniciais

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi(x).$$

- Mostre que, se as condições iniciais $\phi(x)$ e $\varphi(x)$ são nulas fora dum intervalo $[-L, L]$, então a solução $u(x, t)$ é nula fora do intervalo $[-L - ct, L + ct]$, e interprete este facto.
- Determine uma solução quando as condições iniciais são

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos(2\pi x),$$

ou

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- Mostre que, se as condições iniciais $u(x, 0) = \phi(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi(x)$ são funções ímpares, então a solução de d'Alembert $u(x, t)$ é uma função ímpar de x para cada tempo t . Use esta observação para resolver o problema das ondas na semi-recta $x \geq 0$ com condição de fronteira nula $u(0, t) = 0$.

6. (difusão/movimento Browniano) No modelo do movimento Browniano proposto por Einstein em 1905⁹, a densidade de probabilidade $P(x, t)$ de encontrar a partícula Browniana na posição x no tempo t sabendo que ela estava na posição 0 no tempo 0 é a solução não-negativa da equação da difusão

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

tal que $\lim_{t \rightarrow 0} P(x, t) = 0$ para todo o $x \neq 0$, e $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = 1$ para todo o tempo $t > 0$. O “coeficiente de difusão” é $\beta = \frac{RT}{N\alpha}$, onde R é a constante de gás perfeito, T a temperatura absoluta, N o número de Avogadro, e $\alpha = 6\pi\eta\rho$ um coeficiente de fricção (que depende da viscosidade dinâmica η do líquido e do raio ρ da partícula Browniana).

- Verifique que a Gaussiana

$$P_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}} e^{-x^2/(4\beta t)}.$$

resolve o problema do movimento Browniano.

- Verifique que

$$P_{t+s}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) P_s(x - y) dy$$

e interprete este facto.

- Calcule o caminho quadrático médio da partícula Browniana no tempo t , definido por

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_t(x) dx.$$

7. (equação de Korteweg-de Vries) Considere a equação de Korteweg-de Vries¹⁰ (KdV)

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x$$

que descreve ...

⁹A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* **17**, 549, 1905 [English translation in A. Einstein, *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, Dover, New York, 1956].

¹⁰D.J. Korteweg and G. de Vries, On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Wave, *Philosophical Magazine* **39** (1894), 422-443

- Mostre que $u(x, t) := \phi(x - vt - x_0)$ é uma solução da KdV se ϕ é uma solução da EDO $-v\phi' + \phi''' + 6\phi\phi' = 0$, e portanto se existe uma constante c tal que ϕ é uma solução da equação de Newton

$$\phi'' = -3\phi^2 + v\phi + c$$

- Verifique que a “secante hiperbólica” $\operatorname{sech}(x) := \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ satisfaz a EDO

$$f'' = -2f^2 + f$$

com condições de fronteira $f(\pm\infty) = 0$.

- Deduza que

$$u(x, t) = \frac{v}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt - x_0) \right)$$

é uma solução da KdV, que descreve uma “onda solitária” (*soliton*), localizada numa vizinhança de $x_0 + vt$, que viaja com velocidade v .

8. (equação de Burgers) Considere a equação de Burgers

$$u_t = \mu u_{xx} + uu_x$$

com viscosidade $\mu \neq 0$.

- (substituição de Cole-Hopf ¹¹) Mostre que se $v(x, t)$ é uma solução da equação de calor $v_t = \mu v_{xx}$, então

$$u = 2 \frac{\partial}{\partial x} \log v = \frac{2}{v} v_x$$

é uma solução da equação de Burgers $u_t = \mu u_{xx} + uu_x$.

¹¹E. Hopf, The partial differential equation $ut + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 201-230.
J.D. Cole, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* **9** (1951), 225-236.

16 Separação de variáveis, harmônicas e modos

1. (**problema de Sturm-Liouville**) O *problema de Sturm Liouville* consiste em determinar constantes $\lambda \in \mathbb{R}$ e correspondentes funções $u(x)$, definidas num intervalo $x \in [a, b]$, que resolvam a equação

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = \lambda w(x)u$$

com condições de fronteira $u(a)$ ou $u'(a) = A$ e $u(b)$ ou $u'(b) = B$, dadas umas funções $p(x)$ e $w(x)$. Se definimos o operador L como

$$Lu = \frac{1}{w(x)} \left(-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u \right) = \frac{1}{w} (-(pu)'+qu)$$

então o problema de Sturm-Liouville consiste em resolver $Lu = \lambda u$, ou seja, determinar os *valores próprios* λ_n e as correspondentes *funções próprias* u_n

$$Lu_n = \lambda_n u_n .$$

- Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u(0) = u(\pi) = 0$.

- Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u'(0) = u'(\pi) = 0$.

- Determine os valores próprios e as funções próprias de

$$u'' = -\lambda u$$

no intervalo $x \in [0, \pi]$ com condições de fronteira $u(0) - u'(0) = u(\pi) - u'(\pi) = 0$.

- Mostre que as funções próprias $u(r)$, com $0 < r < \infty$, de

$$r^2 u'' + r u' = n^2 u$$

quando $n \in \mathbb{Z}$, são $u_{\pm}(r) = r^{\pm n}$ se $n \neq 0$, e $u_0(r) = 1$ ou $u_0(r) = \log r$ se $n = 0$.

2. (**separação de variáveis**) O método de *separação de variáveis* para determinar soluções de uma EDPs linear homogénea $Lu = 0$, por exemplo nas variáveis x e t , consiste em substituir a conjectura

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

na equação e deduzir $(L_x X)T = (L_t T)X$, onde L_x e L_t são operadores diferenciais lineares nas variáveis x e t , respectivamente. A igualdade então implica que existe uma constante λ tal que X e T satisfazem as equações de Sturm-Liouville

$$L_x X = \lambda X \quad \text{e} \quad L_t T = \lambda T .$$

As condições de fronteira determinam certos valores próprios λ e as correspondentes funções próprias admissíveis $X_{\lambda}(x)$ e $T_{\lambda}(t)$, e portanto as soluções separáveis $X_{\lambda}(x)T_{\lambda}(t)$. Pelo princípio de sobreposição são também soluções combinações lineares (finitas)

$$u(x, t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t),$$

com $c_{\lambda} \in \mathbb{R}$.

- Determine, se possível, soluções separáveis das seguintes EDPs.

$$\begin{array}{lll} u_x + u_y = 0 & tu_{xx} + u_t = 0 & u_t = 2u_x \\ u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0 & u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0 & u_{tx} = u_x \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & yu_{xx} + xu_{yy} + xyu_{zz} = 0 & u_{tx} = 0 \end{array}$$

3. (corda vibrante e harmônicas) Considere as pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ , tensão k e densidade linear ρ . O deslocamento transversal $u(x, t)$ da corda verifica a equação de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

onde $c = \sqrt{k/\rho}$, com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

- Mostre que a energia

$$E := \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt} E = 0$.

- Verifique que umas soluções separáveis do problema da corda vibrante são as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &:= \left(a_n \cos(2\pi\nu_n t) + b_n \sin(2\pi\nu_n t) \right) \sin(2\pi x/\lambda_n) \\ &= A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\lambda_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

onde a_n e b_n , ou $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e τ_n , são constantes arbitrárias, e as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n = \frac{c}{2\ell} n \quad \text{e} \quad \lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

respectivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = \frac{c}{2\ell}$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = \frac{cn}{2\ell}$, são ditas *n-ésimas harmônicas* da corda.

- Mostre que a energia de uma onda estacionária

$$u_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\lambda_n)$$

é

$$E_n = \pi^2 M A_n^2 \nu_n^2,$$

onde $M = \rho\ell$ é a massa da corda.

- Determine umas soluções da equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{com } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$, e condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2 \sin(4x),$$

ou

$$u(x, 0) = 3 \sin(x) - \sin(2x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq 7.1$ Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Determine a densidade linear e o peso da corda. O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

4. (vibrações amortecidas) Considere a equação da corda vibrante “amortecida”

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

em $0 \leq x \leq \ell$, onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

- Mostre que a conjectura $u_n(x, t) = q_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$ implica que $q_n(t)$ satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha \dot{q}_n = 0,$$

com frequência $\omega_n^2 = (\pi c n / \ell)^2$.

- Deduza as soluções separáveis do problema.

5. (condução de calor com temperatura constante na fronteira e modos) Considere a condução de calor num fio condutor de comprimento ℓ e difusividade térmica β . A temperatura $u(x, t)$ na posição x e no tempo t verifica a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- Verifique que a função

$$a + \frac{b-a}{\ell} x$$

é uma solução estacionária da equação de calor com condições de fronteira constantes $u(0, t) = a$ e $u(\ell, t) = b$. Deduza que a solução da equação com condições de fronteira constantes $u(0, t) = a$ e $u(\ell, t) = b$ é igual a

$$u(x, t) = a + \frac{b-a}{\ell} x + v(x, t),$$

onde $v(x, t)$ é a solução da equação com condições de fronteira nulas $v(0, t) = 0$ e $v(\ell, t) = 0$.

- Verifique que umas soluções da equação de calor com condições de fronteira nulas $u(0, t) = 0$ e $u(\ell, t) = 0$ são os *modos*

$$u_n(x, t) = s_n e^{-\beta(\pi n / \ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots,$$

onde s_n são constantes arbitrárias.

- Mostre que uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N s_n e^{-\beta(\pi n / \ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

também é solução da equação com condições de fronteira nulas $u(0, t) = 0$ e $u(\ell, t) = 0$, e determine o limite de $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

- Um fio condutor de comprimento 1m e difusividade térmica $10^{-2} \text{cm}^2/\text{s}$ é posto em contacto térmico, nos dois extremos, com dois reservatórios mantidos a temperatura constante de 0°C . Sabendo que o perfil inicial da temperatura do condutor é

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{1\text{m}} x\right) \times 60^\circ\text{C},$$

quanto tempo é necessário esperar para que nenhuma parte do condutor tenha temperatura superior a 4°C ? O que acontece para grandes valores do tempo?

E se os dois extremos do condutor forem mantidos a temperaturas constantes de 0°C e 100°C , respectivamente, qual o perfil de temperatura do condutor passado um tempo grande?

- Determine as soluções da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{com } 0 \leq x \leq \pi,$$

com condições de fronteira nulas, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$, e condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x) + 3 \sin(2x),$$

ou

$$u(x, 0) = \pi \sin(7x) - \sin(5x).$$

6. (condução de calor com fluxo nulo na fronteira) Considere a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

em $0 \leq x \leq \ell$, com condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0$, que descreve o perfil de temperatura de um fio condutor termicamente isolado.

- Mostre que o “calor”

$$Q(t) := C \int_0^\ell u(x, t) dx,$$

onde $C = mc$ é a capacidade térmica do conductor (o produto da massa m e o calor específico c) é constante, ou seja, que $\frac{d}{dt}Q(t) = 0$.

- Verifique que umas soluções são os modos

$$u_n(x, t) = c_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

onde c_n são constantes arbitrárias.

- Mostre que uma sobreposição finita de modos

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N c_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

também é uma solução, e determine o limite de $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

7. (ondas e calor na recta) Determine soluções separáveis e limitadas das equações de onda e de calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

com $x \in \mathbb{R}$.

8. (equação de Schrödinger livre) A “função de onda” $\psi(x, t)$ de uma partícula livre não-relativística satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

onde m é a massa da partícula e \hbar é a constante de Planck reduzida.

- Determine soluções separáveis quando $x \in [0, \ell] \subset \mathbb{R}$ com condições de fronteira nulas, $\psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0$.

- Mostre que as soluções separáveis e limitadas na recta são proporcionais a

$$\psi_E(x, t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}},$$

onde $E \geq 0$ e $p = \sqrt{2mE}$.

- Verifique que as ondas planas

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\langle \xi, x \rangle - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Schrödinger em \mathbb{R}^3 se a frequência ω e o número de onda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfazem a relação de dispersão $\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} \|\xi\|^2$.

9. (equação de Klein-Gordon) A “função de onda” $\psi(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$, de uma partícula livre relativística de massa própria m satisfaz a equação de Dirac, e portanto a equação de Klein-Gordon (em unidades de Planck¹²)

$$-\psi_{tt} + \Delta\psi = m^2\psi.$$

- Verifique que as ondas planas

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\langle \xi, x \rangle - \omega t)}$$

são soluções separáveis da equação de Klein-Gordon em \mathbb{R}^3 se a frequência ω e o número de onda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfazem a relação de dispersão $\omega^2 - \|\xi\|^2 = m^2$.

¹² $c = 1, \hbar = 1, \dots$

17 Séries de Fourier

1. (séries de Fourier complexas) Seja $f(x)$ é uma função integrável em $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ou seja, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica de período 2π (e portanto determinada pelos seus valores no intervalo $[-\pi, \pi]$). A *série de Fourier complexa* de $f(x)$ é a série formal

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

(o símbolo “ \sim ” é apenas uma notação!), onde os *coeficientes de Fourier complexos* de $f(x)$ são

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

O *lema de Riemann-Lebesgue* afirma que os coeficientes de Fourier de uma função integrável convergem $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Se $f(x)$ é de classe C^k , então os coeficientes de Fourier da sua k -ésima derivada são

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$$

e, em particular, $|n|^k \widehat{f}(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

- Mostre que se $f(x)$ é par, então $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$ para todos os $n \geq 0$.
- Mostre que se $f(x)$ é ímpar, então $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$ para todos os $n \geq 0$.
- Determine as séries de Fourier complexas das seguintes funções periódicas de período 2π definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$ por (as soluções estão no formulário!):

$$f(x) = x, \quad f(x) = |x|, \quad f(x) = x^2,$$

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}, \quad 2\Theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}.$$

- Mostre que a série de Fourier complexa da função $S(x)$ (chamada *sawtooth*), periódica de período 2π e definida por

$$S(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -\pi - x & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, é

$$S(x) \sim \frac{1}{i} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n} \sim 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

2. (séries de Fourier) A *série de Fourier (real)* da função integrável $f(x)$, definida no intervalo $[-\ell, \ell]$ ou periódica de período 2ℓ , é

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)$$

onde os *coeficientes de Fourier* de f são

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

Se $f(x)$ é uma função de classe C^1 , então as soma parciais da sua série de Fourier convergem uniformemente para $f(x)$.

- Mostre que os coeficientes de Fourier reais de $f(x)$ são

$$a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) \quad \text{e} \quad b_n = i \left(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n) \right)$$

- Mostre que se $f(x)$ é par, então $b_n = 0$ para todos os $n \geq 1$.
- Mostre que se $f(x)$ é ímpar, então $a_n = 0$ para todos os $n \geq 0$.
- Determine as séries de Fourier das seguintes funções periódicas de período 2π definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$ por (as soluções estão no formulário!):

$$f(x) = x, \quad f(x) = |x|, \quad f(x) = x^2,$$

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}, \quad 2\Theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}.$$

- Calcule as séries de Fourier de $|x|$ e de x^2 em $x = 0$ e deduza as identidades

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{e} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. (séries de Fourier de senos) A série de Fourier de senos da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão ímpar 2ℓ -periódica de f , ou seja,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

- Determine as séries de Fourier de senos (ou seja, das extensões ímpares e 2π -periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq x < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \quad 1 - \cos(2x) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

4. (séries de Fourier de co-senos) A série de Fourier de co-senos da função $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, é a série de Fourier da extensão par 2ℓ -periódica de f , ou seja,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right), \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

- Determine as séries de Fourier de co-senos (ou seja, das extensões pares e 2π -periódicas) das seguintes funções definidas no intervalo $0 \leq x < \pi$ (algumas soluções estão no formulário!):

$$1 \quad \sin(2x) \quad \pi - x$$

5. (produto de convolução) O produto de convolução entre as funções f e g , integráveis e periódicas de período 2π , é a função

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) dy.$$

- Verifique que o produto de convolução é simétrico, i.e. $f * g = g * f$.
- Verifique que o produto de convolução é linear nas duas variáveis, ou seja, que $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$ para todos os $\lambda \in \mathbb{R}$, e que $f * (g + h) = f * g + f * h$.
- Verifique que

$$\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).$$

6. (séries de Fourier e espaço L^2) O produto interno e a norma L^2 no espaço $L^2(S^1)$ das funções $f : S^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ com quadrado integrável são

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{e} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Em particular, os coeficientes de Fourier de f são os produtos internos de f com as funções harmônicas $e_n(x) := e^{inx}$,

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle .$$

A série de Fourier de uma função $f(\theta) \in L^2(S^1)$ converge para $f(\theta)$ na norma L^2 , ou seja,

$$\left\| f(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} \right\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty .$$

A norma L^2 de uma função de quadrado integrável pode ser calculada usando a *identidade de Parseval*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

- Verifique as relações de ortogonalidade

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

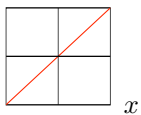
Séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$

	função \sim série de Fourier ($x \in [-\pi, \pi]$)	coeficientes de Fourier ($n \in \mathbb{Z}$)
complexa	$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$	$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$
real	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$	$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ $b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

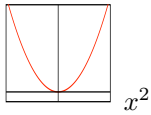
Algumas séries de Fourier em $[-\pi, \pi]$

função em $[-\pi, \pi]$

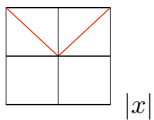
\sim série de Fourier



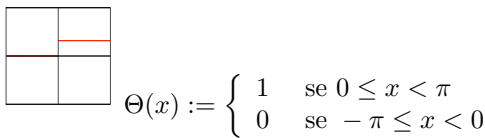
$$\sim 2 \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$



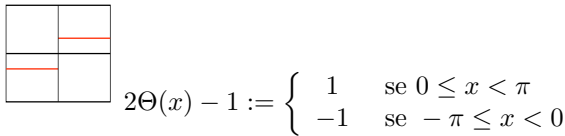
$$\sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{9} \cos(3x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \dots \right)$$



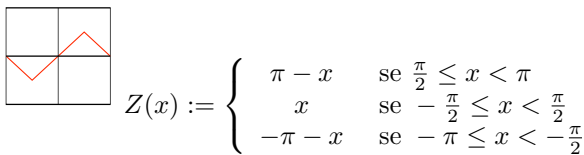
$$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{49} \cos(7x) + \dots \right)$$



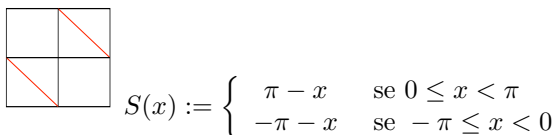
$$\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) - \frac{1}{9} \sin(3x) + \frac{1}{25} \sin(5x) - \frac{1}{49} \sin(7x) + \dots \right)$$



$$\sim 2 \left(\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right)$$

18 Aplicações das séries de Fourier

1. (condução de calor com temperatura constante na fronteira) A solução formal do problema da condução de calor com condições de fronteira nulas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, \ell], \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{é} \quad u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ e condição inicial

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx).$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ e condição inicial

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ e condição inicial

$$u(x, 0) = x \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 200$, e condição inicial

$$u(x, 0) = 100 \quad \text{se } 0 < x < \pi.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ e condição inicial

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} 3 & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases},$$

onde $0 < \beta < \pi$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor de comprimento $\ell = \pi$, com condições de fronteira nulas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, e condição inicial

$$u(x, 0) \sim \delta(x - \pi/2).$$

2. (condução de calor num condutor isolado) A solução formal do problema da condução de calor num condutor isolado, ou seja, com fluxo nulo na fronteira

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, \ell], \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

e com condição inicial

$$u(x, 0) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \quad \text{é} \quad u(x, t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\beta(\pi n/\ell)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor isolado de comprimento $\ell = \pi$, com condição inicial

$$u(x, 0) = x^2.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor isolado de comprimento $\ell = \pi$, com condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(x).$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor isolado de comprimento $\ell = \pi$, com condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 10 & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ 20 & \text{se } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

- Determine a solução formal do problema da condução de calor num condutor isolado de comprimento $\ell = \pi$, com condição inicial

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases},$$

onde $0 < \beta < \pi$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

3. (corda vibrante) A solução formal do problema da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \ell], \quad \text{com } u(0, t) = u(\ell, t) = 0$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n \frac{\pi}{\ell} x\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{\ell} x\right)$$

é

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi c n}{\ell} t\right) + b_n \frac{\ell}{\pi c n} \sin\left(\frac{\pi c n}{\ell} t\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante de comprimento $\ell = \pi$ com condições iniciais

$$u(x, 0) = \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(4x) - \sin(5x).$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante de comprimento $\ell = \pi$ com condições iniciais (deslocamento inicial “triangular”)

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante de comprimento $\ell = \pi$ com condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1.$$

- Use as séries de Fourier para determinar soluções formais do problema da corda vibrante de comprimento $\ell = \pi$ com condições iniciais (impulso inicial concentrado no ponto médio)

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sim \delta(x - \pi/2).$$

4. (timbres) Considere uma corda de um instrumento musical, de comprimento ℓ , densidade linear ρ e afinada com tensão k , modelada pela EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, \ell], \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t,$$

onde $c = \sqrt{k/\rho}$.

Ao tocar um cavaquinho, a corda é excitada com velocidade inicial desprezável e deslocamento inicial aproximadamente triangular, ou seja, da forma

$$u(x, 0) \simeq \begin{cases} h \frac{x}{\alpha} & \text{se } 0 \leq x < \alpha \\ \frac{h}{\ell - \alpha} (\ell - x) & \text{se } \alpha \leq x < \ell \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < \ell$ é o ponto onde dedilhamos a corda, e h é o máximo do deslocamento inicial.

Ao tocar um piano, a corda é excitada utilizando um martelo. Numa primeira aproximação, podemos imaginar que o deslocamento inicial é desprezável e que o martelo transmite à corda apenas um impulso instantâneo localizado num intervalo de comprimento pequeno $2\varepsilon \ll \ell$ (a volta de um ponto) $0 < \beta < \ell$ da corda, e portando a velocidade inicial da corda é

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \simeq \begin{cases} v & \text{se } |x - \beta| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x - \beta| > \varepsilon \end{cases}$$

- Determine as vibrações, ou seja, as amplitudes das harmónicas excitadas, da corda do cavaquinho e da corda do piano.
- Calcule o limite das amplitudes da corda do piano quando $\varepsilon \rightarrow 0$ mantendo constante o impulso transferido $p = v\varepsilon$.
- Determine as energias E_n das n -ésimas harmónicas nos dois casos. Explique porque o som do piano é mais “cheio” do que o som do cavaquinho.

5. (vibrações amortecidas) Considere a equação da corda vibrante “amortecida”

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

em $0 \leq x \leq \ell$, onde $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

- Mostre que a conjectura $u_n(x, t) = q_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$ implica que $q_n(t)$ satisfaz a EDO

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\alpha \dot{q}_n = 0,$$

com frequência $\omega_n^2 = (\pi cn/\ell)^2$.

- Deduza as soluções separáveis do problema.

Referências

- [Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, 1969 [*Cálculo*, Editorial Reverté, 1999].
- [Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR, 1985.
- [Ar89] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, 1989.
- [Ar04] V.I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer - PHASIS, 2004.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Be62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics*, McGraw-Hill 1962.
- [Bi80] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, Mir, 1980.
- [GdF87] D. Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA 1987.
- [Fo92] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, American Mathematica Society, 1992.
- [HC89] D. Hilbert and R. Courant, *Methoden der Mathematischen Physik*, Verlag 1924 [*Methods of mathematical physics*, Wiley-VCH, 1989].
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [KF83] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Elementos de Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR, 1983.
- [Io05] V. Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [LL78] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.
- [MF05] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953 [Feshbach Publishing, 2005].
- [O'N99] Peter V. O'Neil, *Beginning Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1999.
- [Pi91] Mark A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, 1991.
- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Third Edition, Cambridge University Press, 2006.
- [Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 2004.
- [Ros84] S.L. Ross, *Differential equations*, John Wiley & Sons, 1984.
- [Si91] G.F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill, 1991.
- [SS03] E.M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton Lectures in Analysis I, Princeton University Press, 2003.