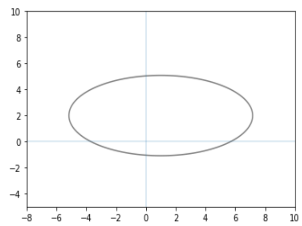
| 24/3/2025<br>1º teste | Cálculo Vetorial | FIS<br>ENGFIS |
|---|---|---|

**Nome** ........................................................................................**Nº**................  ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções:  responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(2 valores)* Identifique e esboce a cónica definida por $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y = 21$.

   Elipse definida por $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$, com $a = \sqrt{38}$ e $b = a/2$.




2. *(2 valores)* Considere a curva $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 3\sin t, t)$. Calcule a velocidade $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ e a aceleração $\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ para todo tempo $t$, e uma equação paramétrica da reta tangente no instante $t = \pi$.

$$\mathbf{v}(t) = (-2\sin t, 3\cos t, 1) \qquad \mathbf{a}(t) = (-2\cos t, -3\sin t, 0)$$

   Uma equação paramétrica da reta tangente é

$$(-2, 0, \pi) + s(0, -3, 1) \qquad s \in \mathbb{R}$$

3. *(2 valores)* Considere o campo escalar $f(x, y, z) = \cos\left(xy^2\right) + e^{3xyz}$. Determine as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ no ponto genérico do espaço, e calcule os seus valores no ponto $(\pi, 1, 1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y^2\sin(xy^2) + 3yze^{3xyz} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy\sin(xy^2) + 3xze^{3xyz} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 3xye^{3xyz}$$

   Os valores no ponto $(\pi, 1, 1)$ são $3e^{3\pi}$, $3\pi e^{3\pi}$ e $3\pi e^{3\pi}$, respetivamente.

4. *(2 valores)* Considere o campo escalar $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$, e a soma $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -6y \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -6x \qquad \Delta g = 0$$

5. *(2 valores)* Calcule as matrizes das derivadas parciais $\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}$ e $\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}$ se

$$x = t + s \quad , \quad y = t - s \qquad \text{e} \qquad u = \sin(x + y) \quad , \quad v = \cos(x - y)\,.$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)} = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) & 0 \\ 0 & -2\sin(2s) \end{pmatrix}$$

6. *(2 valores)* Calcule o gradiente $\nabla f(x,y)$ do campo escalar $f(x,y) = \sin(x^2 y)$ no ponto genérico do plano, e a derivada direcional do campo $f(x,y)$ no ponto $(-1,\pi)$ e na direção do vetor unitário $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

$$\nabla f(x,y) = (2xy\cos(x^2y), x^2\cos(x^2y)) \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,\pi) = \pi - \sqrt{3}/2$$

7. *(2 valores)* Determine uma equação do plano tangente à superfície $xyz = 6$ no ponto $(3,2,1)$.

$$2x + 3y + 6z = 18$$

8. *(2 valores)* A relação $\cos(xy) = 1/2$ define implicitamente uma função $y = f(x)$ numa vizinhança de $x = \pi/3$ e $y = 1$. Calcule a derivada $dy/dx$ no ponto $x = \pi/3$.

$$\frac{dy}{dx}(\pi/3) = -3/\pi$$

9. *(2 valores)* Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2 - 14x - 10y + 17$, e diga se são máximos, mínimos ou pontos de sela.

   O único ponto crítico é $(1,2)$, e é um ponto de sela.

10. *(2 valores)* Determine máximos e mínimos da função $f(x,y) = x + 2y$ na circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

    Um máximo em $\mathbf{p}_+ = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, onde $f(\mathbf{p}_+) = \sqrt{5}$, e um mínimo em $\mathbf{p}_- = -\mathbf{p}_+$, onde $f(\mathbf{p}_-) = -\sqrt{5}$.

| 26/5/2025<br>2$^o$ teste | Cálculo Vetorial | FIS<br>ENGFIS |
|---|---|---|

**Nome** ..........................................................................................**Nº**................  ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(2 valores)* Considere o retângulo $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Calcule o integral duplo
$$\iint_R (x + y)\, dx\, dy$$

$$\iint_R (x + y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{-1}^1 (x + y)\, dx\, dy = 1$$

2. *(2 valores)* Seja $A$ a região do primeiro quadrante limitada entre as retas $x = 0$ e $y = 1$ e a curva $y = \sqrt{x}$. Calcule
$$\iint_A xy\, dx\, dy$$

$$\iint_A xy\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{y^2} xy\, dx\, dy \;= \frac{1}{12}$$

3. *(2 valores)* Considere o cubo unitário $K = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Calcule o integral triplo
$$\iiint_K e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz$$

$$\iiint_K e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz = \left(\int_0^1 e^x\, dx\right)^3 = (e - 1)^3$$

4. *(2 valores)* Calcule (o elemento de área em coordenadas polares é $dxdy \simeq r\, drd\theta$)
$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos\left(x^2 + y^2\right)\, dy\, dx$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos\left(x^2 + y^2\right)\, dy\, dx \;= \int_0^\pi \int_0^1 \cos\left(r^2\right)\, r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}\,\pi\, \sin(1)$$

5. *(2 valores)* Seja $B = \{\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ o disco unitário. Calcule (o elemento de volume em coordenadas esféricas é $dx\, dy\, dz \simeq \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$)
$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$$
$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^3 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \pi$$

6. *(2 valores)* Calcule o integral de linha
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ao longo do caminho $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, com $0 \le t \le \pi$.

O campo $\mathbf{F}$ é o gradiente de $U(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$, portanto
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(-1, 0, \pi) - U(1, 0, 0) = \frac{1}{2}\,\pi^2$$

7. *(2 valores)* O campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = (2xy)\mathbf{i} + (x^2 + \cos y)\mathbf{j}$ é conservativo? Se sim, calcule um potencial.

É conservativo, pois está definido em todo o plano e as componentes, $P(x, y) = 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 + \cos y$, satisfazem $\partial Q/\partial x = \partial Q/\partial y$. Um potencial $U(x, y)$, tal que $\mathbf{F} = \nabla U$, é

$$U(x, y) = \int_0^x P(t, 0)\, dt + \int_0^y Q(x, t)\, dt = x^2 y + \sin y$$

8. *(2 valores)* Calcule o rotacional e a divergência do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$.

$$\nabla \times \mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + y\mathbf{k} \qquad\qquad \nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + x + xy$$

9. *(2 valores)* Calcule a circulação

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ ao longo da circunferência unitária $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$, orientada positivamente.

A circunferência unitária é a fronteira do disco unitário $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, e o rotacional escalar do campo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ é igual a $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = -2$. Pelo teorema de Green/Stokes

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (-2)\, dx\, dy \; = -2\pi$$

10. *(2 valores)* Calcule o fluxo

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$$

do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ através da superfície $S = \partial K$, fronteira do cubo unitário $K = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

A divergência do campo $\mathbf{F}$ é igual a $\nabla \cdot \mathbf{F} = 6$. Pelo teorema de Gauss

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = 6$$