14/4/2021 1º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica	☐ ENGFIS ☐ FIS

`Nome e nº:` ____

Instruções: `responda e justifique brevemente as suas respostas nos espaços apropriados.`

1. *(2 valores)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea
$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = 0\,.$$

$$x(t) = e^{-3t}\,(a\cos t + b\sin t) \qquad \text{com} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

2. *(2 valores)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea
$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = 0$$
com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$.

$$x(t) = e^{-3t}\,(\cos t + 4\sin t)$$

3. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea
$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = \cos(t)\,.$$

$$x(t) = \frac{1}{39}\,(3\cos t + 2\sin t)$$

4. *(2 valores)* Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por
$$T(x, y) = (x, 2x + y)\,.$$
Determine valores e vetores próprios de T.

O único valor próprio é $\lambda = 1$, e o espaço próprio é a reta gerada pelo vetor $(0, 1)$.

5. *(2 valores)* Seja $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre a reta $y = -2x$ do plano euclidiano. Determine a matriz que representa P na base canónica.

$$\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

6. *(2 valores)* Diagonalize a matriz complexa
$$C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
ou seja, determine uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível U tais que $\Lambda = U^{-1}CU$.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. *(2 valores)* Seja $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear, definido no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$. Mostre que os valores próprios do operador hermítico $P = A^*A$, que são reais, são não negativos (se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de P, com valor próprio λ, calcule $\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle \dots$).

   Se $P\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, com $\mathbf{v}$ não nulo, então

   $$\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle = \lambda \|\mathbf{v}\|^2 ,$$

   mas também

   $$\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^*A\mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \|A\mathbf{v}\|^2 ,$$

   assim que $\lambda = \|A\mathbf{v}\|^2 / \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$.

8. *(1 valor)* As funções $e^{2t}\sin(t)$ e $e^{2t}\cos(t)$ são soluções da equação diferencial

   ○ $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ ○ $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$ ○ $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$ ○ $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$

9. *(1 valor)* A matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{smallmatrix}\right)$ representa, na base canónica do plano euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$, um operador

   ○ hermítico ○ anti-hermítico ○ unitário

10. *(1 valor)* Se A é uma matriz complexa $n \times n$ arbitrária, então $A - A^*$ é hermítica.

    ○ Verdadeiro ○ Falso

11. *(1 valor)* Se A e B são duas matrizes hermíticas $n \times n$, então também AB é hermítica.

    ○ Verdadeiro ○ Falso

12. *(1 valor)* Se A e B são duas matrizes unitárias $n \times n$, então também AB é unitária.

    ○ Verdadeiro ○ Falso

13. *(1 valor)* Se todos os valores próprios de uma matriz real $n \times n$ são iguais a 1 ou -1, então a matriz é ortogonal.

    ○ Verdadeiro ○ Falso

2/6/2021 2º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica	☐ ENGFIS ☐ FIS

Nome e nº: ______________________________

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nos espaços apropriados.

1. *(2 valores)* Identifique a matriz simétrica que define a forma quadrática

$$Q(x,y) = 2x^2 - 4xy - y^2 \,,$$

determine os seus valores próprios e uma matriz ortogonal diagonalizadora.

A matriz simétrica que define a forma quadrática é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Os seus valores próprios são 3 e -2, e uma matriz ortogonal diagonalizadora, tal que

$$A = U \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} U^\top$$

é

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

2. *(2 valores)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0 \,.$$

É uma hipérbole, pois nas variáveis $X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y - 3)$ e $Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 4)$ a equação é

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{6} = 1$$

3. *(2 valores)* Calcule os comprimentos dos semi-eixos e esboce o elipsóide definido pela equação

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 \leq 1$$

Os semi-eixos são 1 e 1/3.

4. *(2 valores)* Calcule o grupo a um parâmetro e^{tA} gerado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

5. *(2 valores)* Determine a solução do sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -q + p \\ \dot{p} &= -p \end{aligned}$$

com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (1, 2)$.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

6. *(2 valores)* Considere o sistema não homogéneo

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \quad -q + p \\ \dot{p} &= \quad -p + e^{-t} \end{aligned}$$

Determine a solução com condições iniciais nulas $(q(0), p(0)) = (0, 0)$.

$$\left(\begin{array}{c} q(t) \\ p(t) \end{array} \right) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \left(\begin{array}{cc} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ e^{-\tau} \end{array} \right) d\tau = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}t^2 e^{-t} \\ te^{-t} \end{array} \right)$$

7. *(2 valores)* Dê um exemplo de um grupo de matrizes comutativo e um exemplo de um grupo de matrizes não comutativo. Justifique.

O grupo $\mathbf{SO}(2)$ das rotações do plano é comutativo, o grupo $\mathbf{SO}(3)$ das rotações do espaço não é comutativo ...

8. *(1 valor)* Se A é uma matriz quadrada auto-adjunta então e^A é unitária.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

9. *(1 valor)* Se $\mathrm{tr}A = 0$ então $\det e^A = 1$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

10. *(1 valor)* Existe uma matriz quadrada real tal que $A^2 = -I$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

11. *(1 valor)* Existe uma matriz quadrada real tal que $A^\top A = -I$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

12. *(1 valor)* A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é

◯ o espaço linear das matrizes $n \times n$ simétricas.

◯ o espaço linear das matrizes $n \times n$ com traço nulo.

◯ o espaço linear das matrizes $n \times n$ anti-simétricas.

13. *(1 valor)* Considere o sistema linear definido por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad 7x - 8y \\ \dot{y} &= \quad 4x - 5y \end{aligned}$$

A origem é

◯ um nodo instável. ◯ um ponto de sela. ◯ um foco estável.