18/6/2021 recurso	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica	☐ ENGFIS ☐ FIS

Nome e nº: ____________________

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nos espaços apropriados.

1. *(2 valores)* Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$ da equação diferencial linear homogénea
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0\,.$$

$$x(t) = e^{-t}\left(\cos(2t) + \sin(2t)\right)\,.$$

2. *(2 valores)* Determine a solução geral da equação diferencial linear não homogénea
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 10\cos(t)\,,$$
e discuta o que acontece quando o tempo t é grande.

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}\left(a\cos(2t) + b\sin(2t)\right) + \left(2\cos(t) + \sin(t)\right) \\ &\simeq 2\cos(t) + \sin(t) \qquad \text{se } t \gg 1\,. \end{aligned}$$

3. *(2 valores)* Seja $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre a reta $y = -3x$. Determine a matriz que representa P na base canónica.

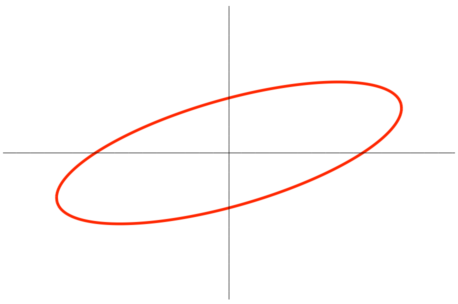
$$\begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ -3/10 & 9/10 \end{pmatrix}$$

4. *(2 valores)* Seja $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o operador linear definido por $S(x, y) = (iy, -ix)$. Determine uma base ortonormal formada por vetores próprios de S, e a matriz diagonal que representa o operador nesta base.

O operador é representado pela matriz diagonal
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
na base formada por $(i, 1)$ e $(1, i)$.

5. *(2 valores)* Calcule os comprimentos dos semi-eixos e esboce o elipsóide definido pela equação
$$2x^2 - 4xy + 5y^2 \leq 1$$

Os semi-eixos são 1 e $1/\sqrt{6}$.

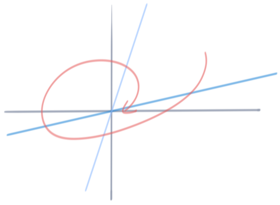


6. *(2 valores)* Determine a solução do sistema

$$\begin{aligned} \dot q &= -q + 2p \\ \dot p &= -2q - p \end{aligned}$$

com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (1, 2)$, e esboce a órbita no plano q-p.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



7. *(2 valores)* Considere o sistema não homogéneo

$$\begin{aligned} \dot q &= p + \sin(2t) \\ \dot p &= -q \end{aligned}$$

Determine a solução com condições iniciais nulas $(q(0), p(0)) = (0, 0)$.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(2\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau$$

8. *(0.5 valores)* As funções $e^{-2t}\sin(t)$ e $e^{-2t}\cos(t)$ são soluções da equação diferencial
○ $\ddot x + 4\dot x + 5x = 0$ ○ $\ddot x + 2\dot x + x = 0$ ○ $\ddot x - 4\dot x + 5x = 0$ ○ $\ddot x - 2\dot x + x = 0$

9. *(0.5 valores)* O operador linear N, definido no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^N$, é normal se
○ $N^* + N = 0$ ○ $N^*N - NN^* = 0$ ○ $N^* - N = 0$

10. *(0.5 valores)* Se A é uma matriz complexa quadrada, então AA^* é hermítica.
○ Verdadeiro ○ Falso

11. *(0.5 valores)* Se A e B são duas matrizes diagonalizáveis, então também AB é diagonalizável.
○ Verdadeiro ○ Falso

12. *(0.5 valores)* Se A e B são duas matrizes ortogonais, então também $AB^\top$ é ortogonal.
○ Verdadeiro ○ Falso

13. *(0.5 valores)* Se A é uma matriz ortogonal, então os seus valores próprios são reais.
○ Verdadeiro ○ Falso

14. *(0.5 valores)* Se A é uma matriz auto-adjunta então e^{iA} é unitária.
○ Verdadeiro ○ Falso

15. *(0.5 valores)* Se $\det A = 0$ então $\operatorname{tr} e^A = 1$.
○ Verdadeiro ○ Falso

16. *(0.5 valores)* Existe uma matriz quadrada real tal que $A^3 = -I$.

◯ Verdadeiro ◯ Falso

17. *(0.5 valores)* O grupo a um parâmetro gerado pela matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ é

◯ $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$ ◯ $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$ ◯ $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

18. *(0.5 valores)* A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo unitário $\mathbf{U}(n)$ é

◯ o espaço linear das matrizes $n \times n$ hermíticas.

◯ o espaço linear das matrizes $n \times n$ com traço nulo.

◯ o espaço linear das matrizes $n \times n$ anti-hermíticas.

19. *(0.5 valores)* Considere o sistema linear definido por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 4y \\ \dot{y} &= 3x - 3y \end{aligned}$$

A origem é

◯ um nodo instável. ◯ um ponto de sela. ◯ um foco estável. ◯ um foco instável.