ENGFIS FIS

2020/21

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab: CG - Edifício 6 - 3.48, tel: 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url http://w3.math.uminho.pt/~scosentino

25 de Maio de 2021

Resumo

This is not a book! These are notes written for personal use while preparing lectures on "Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica" for students of FIS and MIENGFIS during the a.y.'s 2013/14, 2014/15, 2017/18, 2018/19, 2019/20 and now 2020/21. They are rather informal and certainly contain mistakes (indeed, they are constantly actualised). I tried to be as synthetic as I could, without missing the observations that I consider important.

Most probably I will not lecture all I wrote, and did not write all I plan to lecture. So, I included sketched paragraphs or whole chapters (those marked with an *), about material that I think should/could be lectured within the same course, given enough time. Some chapters, on first order differential equations and on basic linear algebra, are included for completeness, being lectured in Calculus or in Linear Algebra during the previous semester.

References contain some introductory manuals that I like, some classics, books where I have learnt things in the past century, recent books which I find interesting. Almost all material can be found in [Ap69].

Everything about the course may be found in my web pages

http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/salteaching.html

The notation is as follows:

e.g. means EXEMPLI GRATIA, that is, "for example".

ex: means "exercise", to be solved at home or in the classroom.

ref: means "references", places where you can find and study what follows inside each section.

Black paragraphs form the main text.

Blue paragraphs deal with examples, applications and ideas relevant in physics, engineering or other sciences. They are the real reason why all this maths is worth studying.

Red paragraphs (mostly written in english) are more advanced or non trivial facts and results which may be skipped in a first (and also second) reading.

□ indicates the end of a proof.

Pictures were made with *Grapher* or *Paintbrush* on my MacBook, or taken from Wikipedia, or produced with Python and Matlab .

This work is licensed under a
Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License.

Conteúdo

1 Equações diferenciais ordinárias* 5

2 Existência, unicidade e simulações* 12

3 EDOs simples, autónomas e separáveis* 18

4 Sistemas conservativos* 27

5 EDOs lineares de primeira ordem* 32

6 Simetrias e EDOs homogéneas* 35

7 Números complexos e oscilações 38

8 EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes 47

9 EDOs lineares não homogéneas 56

10 Espaços lineares* 66

11 Formas lineares* 72

12 Espaços euclidianos 77

13 Transformações lineares* 85

14 Transformações lineares e matrizes* 91

15 Valores e vetores próprios* 101

16 Operadores hermíticos e unitários 108

17 Teorema espectral 116

18 Formas quadráticas e pequenas oscilações 130

19 Simetrias, grupos e grupos de matrizes 153

20 Exponencial e álgebras de Lie 168

21 Sistemas lineares 184

Notações

Conjuntos. $a \in A$ quer dizer que a é um elemento do conjunto A. $A \subset B$ quer dizer que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B. $A \cap B$ é a interseção dos conjuntos A e B, e $A \cup B$ é a reunião dos conjuntos A e B. $A \times B$ é o produto cartesiano dos conjuntos A e B, o conjunto dos pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

Números. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais. $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ denota o anel dos números inteiros. $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q, \in \mathbb{Z}\,,\ q \neq 0\}$ denota o corpo dos números racionais. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

Funções. Uma *função* $f : X \to Y$, com *domíno* o conjunto X e *conjunto de chegada* o conjunto Y, é um subconjunto $R \subset X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe um único $y := f(x) \in Y$, dito *imagem* de x, tal que $(x, y) \in R$. Quando domínio e contradomínio são claros, uma função pode ser denotada apenas por $x \mapsto f(x)$, ou seja, identificada com a "regra" que determina $y = f(x)$ a partir de x. A *imagem* do subconjunto $A \subset X$ é o conjunto $f(A) := \{f(a) \text{ com } a \in A\} \subset Y$. Em particular, a *imagem/contradomínio* da função $f : X \to Y$ é o conjunto $f(X) := \{f(x) \text{ com } x \in X\} \subset Y$ dos valores da função. O *gráfico* da função $f : X \to Y$ é o subconjunto

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.q. } y = f(x)\} \subset X \times Y$$

do produto cartesiano do domínio e o conjunto de chegada. A função *identidade* $I_X : X \to X$ é definida por $I_X(x) = x$, e o seu gráfico é a *diagonal* $\{(x, x) \text{ com } x \in X\} \subset X \times X$.

A *restrição* da função $f : X \to Y$ ao subconjunto $A \subset X$ é a função $f|_A : A \to Y$ definida por $f|_A(a) := f(a)$.

A *composição* das funções $f : X \to Y$ e $g : f(X) \subset Y \to Z$ é a função $g \circ f : X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, ou seja,

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$$

Uma função $f : X \to Y$ é *injetiva* se $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$, e portato a imagem $f(X)$ é uma "cópia" de X. Uma função $f : X \to Y$ é *sobrejetiva* se todo $y \in Y$ é imagem $y = f(x)$ de algum $x \in X$, ou seja, se $Y = f(X)$. Uma função $f : X \to Y$ é *bijetiva/invertível* se é injetiva e sobrejetiva, e portanto admite uma função *inversa* $f^{-1} : Y \to X$, que verifica $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todos os $x \in X$ e $y \in Y$.

Espaço euclidiano. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço euclidiano de dimensão n. Fixada a base canónica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são os vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

de coordenadas $x^i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

O *produto interno Euclidiano/canónico* é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{ij} \delta_{ij} x_i x_j\,.$$

(onde (δ_{ij}) é a matriz/símbolo de Kronecker igual a $\delta_{ii} = 1$ na diagonal e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq i$). O produto interno Euclidiano realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico) $(\mathbb{R}^n)^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e o próprio $\mathbb{R}^n$: o valor da forma linear (ou co-vetor) $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ no vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$.

A norma Euclidiana do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. A distância Euclidiana entre os pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo teorema de Pitágoras

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

A bola aberta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto $B_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ se cada seu ponto $\mathbf{a} \in A$ é o centro de uma bola $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Os pontos e as relativas coordenadas no plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço Euclidiano 3-dimensional $\mathbb{R}^3$ (ou seja, as posições dos pontos materiais da física) são também denotados, conforme a tradição, pelas letras $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então $r := \|\mathbf{r}\|$ denota o comprimento do vetor $\mathbf{r}$, ou seja, a distância do ponto $\mathbf{r}$ da origem do referencial.

Caminhos. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável do "tempo" $t \in I \subset \mathbb{R}$, ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$ com valores no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}\,, \qquad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\,, \qquad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}\,, \qquad \ldots$$

Em particular, a primeira derivada $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ é dita *velocidade*, e a sua norma $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$ é dita *velocidade escalar* (*speed*, em inglês). A segunda derivada $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$ é dita *aceleração*.

Campos. Um *campo escalar* é uma função real $u : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* é uma função $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \ldots, F_k(\mathbf{x}))$, cujas coordenadas $F^i(\mathbf{x})$ são k campos escalares.

A derivada do campo diferenciável $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a aplicação linear $\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma $\|\mathbf{v}\|$ suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana $\mathrm{Jac}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \left(\partial F^i/\partial x^j(\mathbf{x})\right) \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{R})$. Em particular, o *diferencial* do campo escalar $u : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a forma linear $\mathrm{d}u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}u(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x})\,dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x})\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x})\,dx_n$$

(onde $\mathrm{d}x_k$, o diferencial da função coordenada $\mathbf{x} \mapsto x_k$, é a forma linear que envia o vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ na sua k-ésima coordenada $\mathrm{d}x_k(\mathbf{v}) := v_k$). A derivada do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na direção do vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicado) no ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\pounds_{\mathbf{v}} u)(\mathbf{x}) := \left.\frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\right|_{t=0} = \mathrm{d}u(\mathbf{x})\,\mathbf{v}\,.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \to$ é o campo vetorial $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathrm{d}u(\mathbf{x})\,\mathbf{v} = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

para todo os vetores (tangentes) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicados no ponto $\mathbf{x} \in X$).

1 Equações diferenciais ordinárias*

ref: [Ap69] *Vol. 1*, **8.1-7**

As equações diferenciais ordinárias (ODEs) são a linguagem da física Newtoniana. Formalizam a nossa ideia do "determinsimo", de que o presente de um sistema físico determina, através de algumas "leis da natureza", o seu futuro. Estas leis têm a forma de equações diferenciais.

Equação de Newton. A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma partícula de massa própria m num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}}$$

onde $\mathbf{p}$ é o *momento linear*, definido por

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,$$

sendo $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ a *velocidade*, $v = \|\mathbf{v}\|$ a *velocidade escalar* (em inglês, *speed*), e $c \simeq 299\,792\,458$ m/s a velocidade da luz, e onde $\mathbf{F}$ é o *campo de forças* que age sobre a partícula. Em geral, a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ depende da posição $\mathbf{r}$ da partícula, da sua velocidade $\mathbf{v}$, e, possivelmente, também explicitamente do tempo t.

No regime não relativístico, quando $v \ll c$, o momento linear é $\mathbf{p} \simeq m\mathbf{v}$, e portanto, se a massa m é constante (isto não acontece com um foguetão que queima combustível ou um corredor que transpira!), a equação de Newton assume a forma mais conhecida

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ denota a *aceleração* da partícula. Este é o arquétipo de uma "equação diferencial", que físicos e engenheiros querem aprender a resolver, analiticamente ou numericamente, para calcular trajetórias e fazer previsões.

Partícula livre. A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma partícula livre (não relativística) de massa m num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\dot{\mathbf{p}} = 0 \qquad \text{ou seja,} \qquad m\,\mathbf{a} = 0\,, \tag{1.1}$$

Em particular, o *momento linear* $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ é uma constante do movimento, de acordo com o princípio de inércia de Galileo[1] ou a primeira lei de Newton[2]. As soluções da equação de Newton (1.1) da partícula livre, ou seja, as trajetórias com aceleração nula, são as retas afins

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{v}t\,,$$

onde $\mathbf{s} = \mathbf{r}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a posição inicial e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade (inicial).

ex: Determine a trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $\mathbf{r}(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2, 3)$.

ex: Determine a velocidade inicial da trajetória de uma partícula livre que passa pela posição $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 2)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $\mathbf{r}(2) = (3, 4, 5)$ no instante $t_1 = 2$.

[1] "... il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, né erta né china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo" [Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1623.]

[2] "Lex prima: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare" [Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

Queda livre. A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = -mg \tag{1.2}$$

onde $q(t) \in \mathbb{R}$ denota a altura da partícula no instante t, m é a massa da partícula, e $g \simeq 980$ cm/s^2 é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre. É um fato experimental que a "massa inercial" (o factor de $\ddot{q}$ na (1.2)) e a "massa gravitacional" (o fator de g na (1.2)) são iguais. Consequentemente, a equação de Newton reduz-se a $\ddot{q} = -g$, ou seja, a lei horária da queda livre não depende da massa da partícula! As soluções da equação de Newton (1.2) da queda livre, ou seja, as trajetórias com aceleração constante, são as parábolas

$$q(t) = s + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \,,$$

onde $s = q(0) \in \mathbb{R}$ é a altura inicial e $v_0 = \dot{q}(0) \in \mathbb{R}$ é a velocidade inicial.

ex: Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.

ex: Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?

ex: Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?

ex: Determine soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = 1 \,.$$

O exponencial. O *exponencial*, de acordo com Rudin [Ru87] "the most important function in mathematics", é a função definida pela série de potências

$$\boxed{\begin{aligned} \exp(t) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots \end{aligned}} \tag{1.3}$$

O raio de convergência é ∞, portanto a série converge uniformemente em cada intervalo limitado da reta real.

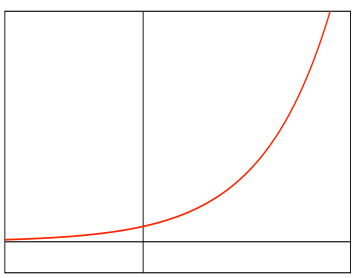


Gráfico do exponencial.

É imediato verificar que $\exp(0) = 1$. A derivada do exponencial é o próprio exponencial, como se pode ver derivando a série de potências

$$\frac{d}{dt}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots\right) = 0 + 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots$$

(e usando resultados sobre a derivação de séries convergentes). Em outras palavras, a função exponencial $x(t) = \exp(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$. Também, o exponencial "transforma somas em produtos" (ou seja, define um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+^\times$ dos números reais positivos). De fato, a derivada da função $f(t) = \exp(t)\exp(a-t)$ é nula, e portanto, pelo teorema do valor médio, a função $f(t)$ é constante, logo igual ao seu valor em $t = 0$, que é $\exp(a)$. Chamando $s = a - t$, temos portanto a identidade

$$\exp(t+s) = \exp(t)\exp(s)$$

para todos os $t, s \in \mathbb{R}$. Em particular, $\exp(-t) = \exp(t)^{-1}$ e portanto $\exp(t) \neq 0$ para todos os $t \in \mathbb{R}$. Também, $\exp(nt) = \exp(t)^n$, para todo n inteiro, ou também racional. Isto justifica a notação usual $\exp(t) =: e^t$, onde

$$e := \exp(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \simeq 2.71828\ldots$$

é o *número de Euler*.

Mais em geral, seja D o operador linear $f \mapsto Df := f'$, definido, por exemplo, no espaço linear $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ da funções infinitamente diferenciáveis na reta real. Então o exponencial $x(t) = e^{\lambda t}$ é um vetor próprio do operador D com valor próprio λ, pois satisfaz $Df = \lambda f$. Na linguagem das equações diferenciais,

Teorema 1.1. *A função $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, com x_0 constante, é a única solução da equação diferencial*

$$\dot{x} = \lambda x \tag{1.4}$$

(i.e. a única função diferenciável cuja derivada é igual a λ vezes a própria função) com condição inicial $x(0) = x_0$ (i.e. tal que o seu valor quando $t = 0$ é igual a x_0).

Demonstração. Se $y(t)$ é uma (outra?) solução de (1.4) com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $q(t) = y(t)/e^{\lambda t}$ tem derivada $\dot{q} = (\dot{y} - \lambda y)e^{-\lambda t} = 0$. Pelo teorema do valor médio, $q(t)$ é constante e, em particular, igual ao seu valor em $t = 0$, que é x_0. Consequentemente, $y(t) = x_0 e^{\lambda t}$. □

ex: Determine as soluções de

$$\dot{x} = 3x \qquad \text{ou} \qquad \dot{x} = -7x$$

com condição inicial $x(0) = 1/e$ ou $x(2) = e$.

Decaimento radioativo. A taxa de decaimento de matéria radioativa é proporcional à quantidade de matéria existente, desde que a amostra seja suficientemente grande. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioativa existente no instante t satisfaz a lei

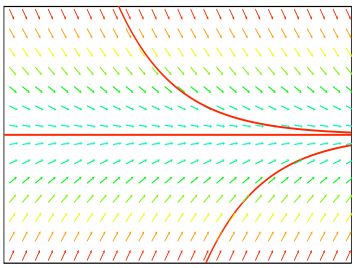
$$\dot{N} = -\beta N\,, \tag{1.5}$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a "vida média" dos núcleos[3]. A solução de (1.5) com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0\, e^{-\beta t}\,,$$

e "decai" para o equilíbrio $\overline{N} = 0$ quando $t \to \infty$.

[3] O tempo de vida de cada núcleo é modelado por uma variável aleatória exponencial X, com lei $\text{Prob}(X \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$ se $t \geq 0$, e 0 se $t < 0$, e média $\mathbf{E}X := \int_0^\infty t\, d\text{Prob}(X \leq t) = 1/\beta$. A equação diferencial, quando a quantidade N de núcleos é grande, é uma consequência da lei dos grandes números.



Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante $\alpha > 0$, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei (decaimento com reposição)

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha\,. \tag{1.6}$$

A solução de equilíbrio de (1.6) é $\overline{N} = \alpha/\beta$. A diferença $x(t) := N(t) - \overline{N}$ satisfaz a equação diferencial $\dot{x} = -\beta x$ (ou seja, a (1.5)), e portanto a solução de (1.6) é

$$N(t) = (N(0) - \overline{N})e^{-\beta t} + \overline{N}\,.$$

Observe que $N(t) \to \overline{N}$ quando $t \to \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (por exemplo no instante da criação do Universo!).

ex: O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioativa é o tempo τ necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial (ou seja, $N(\tau) = \frac{1}{2}N(0)$). Mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$, e determine a relação entre o tempo de meia-vida τ e o parâmetro β.

ex: O radiocarbono ^{14}C tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, assumindo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é conhecida[4].

Crescimento exponencial. Um modelo do crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N\,, \tag{1.7}$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t, e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$). A solução estacionária é a solução trivial $N(t) = 0$ (população ausente). A solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0\, e^{\lambda t}$$

e diverge quanto $t \to \infty$ (explosão demográfica!).

ex: Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?

ex: Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\gamma > 0$, então a população segue a lei

$$\dot{N} = \lambda N - \gamma\,.$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assimptótico das outras soluções (veja a solução do problema do decaimento com reposição).

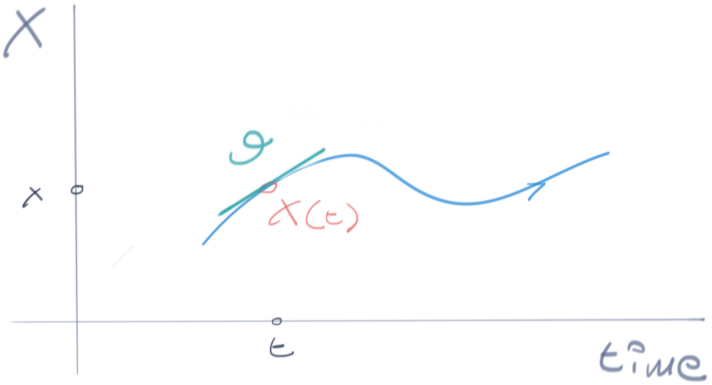
[4] J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

Equações diferenciais ordinárias. Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de primeira ordem (resolúvel para a derivada) é uma lei

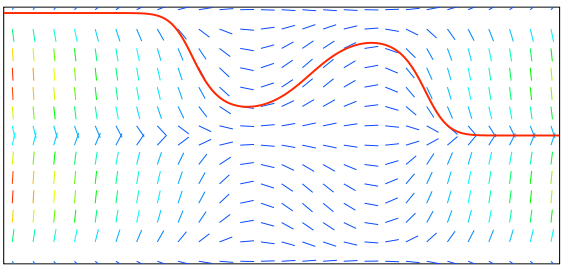
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \tag{1.8}$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ de um sistema com *espaço de fases* $X \subset \mathbb{R}^n$, onde $\mathbf{x}(t) \in X$ denota o *estado* do sistema no instante $t \in T \subset \mathbb{R}$, $\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ denota a derivada de $\mathbf{x}$ em ordem ao tempo t, e $\mathbf{v} : T \times X \to \mathbb{R}^n$ é um *campo de direções* dado, que depende de $\mathbf{x}$ e, em geral, também esplicitamente do tempo t.

Uma *solução (local)* da EDO (1.8) é um caminho diferenciável $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ cuja velocidade satisfaz $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$ para cada tempo t num intervalo $I \subset T$, ou seja, uma função $\mathbf{x} : I \to X$ cujo gráfico $\Gamma := \{(t, \mathbf{x}(t)) \in I \times X \text{ com } t \in I\}$, dito *curva integral* de (1.8), é tangente ao campo de direções $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ em cada ponto $(t, \mathbf{x}(t)) \in \Gamma$. Duas soluções definidas em intervalos $I, J \subset T$ que coincidem na interseção $I \cap J$ definem uma solução no intervalo de tempos $I \cup J$. Uma solução $\mathbf{x} : I \to X$ é dita *maximal* se não pode ser extendida a um intervalo maior $J \supset I$. Se $T = \mathbb{R}$, ma solução definida para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é dita *solução global*.



Dados um tempo $t_0 \in T$ e um ponto $\mathbf{x}_0 \in X$, uma solução da EDO (1.8) com *condição inicial* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (ou solução do "Problema de Valores Iniciais", P.V.I., ou solução do "problema de Cauchy") é uma solução definida numa vizinhança de t_0 cujo gráfico contém o ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$.



Campo de direções e uma solução de $\dot{x} = \sin(x)(1 - t^2)$.

O *teorema de Peano* [5] [6] afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo, então existem sempre soluções locais, i.e. definidas em vizinhanças suficientemente pequenas do tempo inicial, do problema de Cauchy. Por outro lado, a continuidade do campo de direções não é suficiente para garantir a unicidade das soluções. O *teorema de Picard-Lindelöf* [7] afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo

[5] G. Peano, Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine, *Atti Accad. Sci. Torino* **21** (1886), 677-685.

[6] G. Peano, Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Mathematische Annalen* **37** (1890) 182-228.

[7] M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

e localmente Lipschitziano [8] (por exemplo, diferenciável e com derivada contínua) na variável $\mathbf{x}$, então para cada ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$ passa uma única solução com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

A forma mais geral de uma EDO de primeira ordem é

$$F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0\,.$$

Então também existem EDOs que não têm solução por razões triviais, como por exemplo a equação $(\dot{x})^2 + 1 = 0$ (pelo menos no espaço das funções com valores reais!).

ex: Esboce o campo de direções das EDOs

$$\dot{x} = t \qquad \dot{x} = -x + t \qquad\qquad \dot{x} = \sin(t)$$

e conjeture sobre o comportamento qualitativo das soluções.

ex: A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$? E a função $x(t) = 0$?

ex: Determine umas EDOs de primeira ordem e de segunda ordem que admitam como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

Quase todas as EDOs têm ordem um! A forma tradicional de escrever a equação de Newton de uma partícula não relativística é

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

onde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ é a posição. No entanto, é conveniente e útil ler a definição do momento linear $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$ ao contrário, de direita para a esquerda, como uma equação diferencial para $\mathbf{q}$. Desta forma, a equação de Newton resulta equivalente ao par de equações de ordem um

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{p}/m \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}/m, t) \end{aligned}$$

ou seja, uma equação de ordem um para uma variável $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ que vive no espaço de fases $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Mais em geral, uma EDO de ordem $n \geq 2$ resolúvel para a n-ésima derivada é uma lei do género

$$y^{(n)} = F\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, ..., y^{(n-1)}\right)$$

para o observável $y(t) \in \mathbb{R}$. É equivalente à EDO (ou sistema de EDOs) de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}\,(t, \mathbf{x})$$

para o observável $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$x_1 := y \qquad x_2 := \dot{y} \qquad x_3 := \ddot{y} \qquad ... \qquad x_n := y^{(n-1)}\,,$$

se o campo de direções é definido por $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) := (x_2, ..., x_{n-1}, F\,(t, x_1, x_2, ..., x_n))$.

ex: Determine os sistemas de ODEs de ordem 1 que traduzem as seguintes ODEs de ordem > 1

$$\ddot{x} = -x \qquad \ddot{x} + \dot{x} = 0 \qquad \ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

$$\ddot{x} = t - x \qquad \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \qquad \dddot{x} = x$$

ex: Determine uma EDO de segunda ordem que admita como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

[8] A função $f : U \to \mathbb{R}^m$ é *Lipschitziana* no domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ se

$$\exists\, L > 0 \quad \text{t.q.} \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in U\,.$$

ex: Mostre que soluções da EDO $x^{(n)} = 0$ são os polinómios de grau $n-1$.

Soluções de Chandrasekhar da equação de Lane-Emden. Um modelo do perfil de equilíbrio hidrostático de uma estrela é a *equação de Lane-Emden*

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^p\,, \tag{1.9}$$

onde ξ é uma "distância adimensional" do centro da estrela, $\theta(\xi)$ é proporcional à densidade, e p é um parâmetro que depende da equação de estado $P = K\rho^{1+1/p}$ do gás que forma a estrela. O problema físico é determinare a solução com condições iniciais $\theta(0) = 1$ e $d\theta/d\xi(0) = 0$, e o menor zero de $\theta(\xi)$ com $\xi > 0$ é interpretado como sendo o raio da estrela.

ex: Verifique que

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2\,, \qquad \theta(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi} \qquad \text{e} \qquad \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}\xi^2}}$$

são soluções da equação de Lane-Emden (1.9) quando $p = 0$, 1 e 5, respetivamente. [9]

Movimento uniformemente acelerado relativístico. Por fim, podem querer saber como aparece o movimento uniformemente acelerado na relatividade especial. A equação de Newton relativística (por exemplo ao longo do eixo x de um referencial inercial) com aceleração própria constante g é

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = g\,.$$

A solução com velocidade e posição iniciais nulas é

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2/c^2}} \qquad \text{e portanto, ao integrar,} \qquad x(t) = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+g^2t^2/c^2} - 1\right)$$

Observem que para tempos pequenos (logo velocidades pequenas) $x(t) \simeq gt^2/2$, como esperado. Este é chamado "movimento hiperbólico", pois as trajetórias vivem num ramo da hipérbole

$$\left(\frac{gx}{c^2}+1\right)^2 - \left(\frac{gt}{c}\right)^2 = 1$$

no espaço-tempo, cujas assímptotas são as retas $x + c^2/g = \pm ct$, com velocidades $\pm c$.[10]

ex: Verifique as fórmulas acima.

[9] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, 1958.
[10] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.

2 Existência, unicidade e simulações*

É natural colocar a questão de decidir se as equações deferenciais, que usamos como modelos de fenómenos físicos, realizam as nossas espectativas sobre o determinismo. Ou seja, se realmente as condições iniciais determinam, e univocamente, o futuro de um sistema (e eventualmente também o passado, sendo muitas leis fundamentais indiferentes à direção do tempo). Do ponto de vista matemático, isto significa provar teoremas de existência e unicidade para as soluções.

Ainda mais importante, para físicos e engenheiros, é a possibilidade de simular, ou seja aproximar, soluções, na impossibilidade praticamente certa de encontrar as soluções exatas das equações diferenciais que descrevem os fenómenos interessantes do mundo real. Naturalmente, as simulações são credíveis se conseguimos controlar os erros introduzidos.

Iterações de Picard. Uma função diferenciável $t \mapsto \varphi(t)$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e com valores num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t,x)$ com condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$ se e só se

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\left(s, \varphi(s)\right) ds\,,$$

ou seja, se $\varphi(t)$ é um ponto fixo do *mapa de Picard* $\mathcal{P} : C(I,X) \to C(I,X)$, que envia uma função $\phi(t)$ na função

$$\boxed{\left(\mathcal{P}\phi\right)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} v\left(s, \phi(s)\right) ds\,.} \tag{2.1}$$

Se a sucessão de funções ϕ, $\mathcal{P}\phi$, $\mathcal{P}^2\phi := \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\phi\right)$, ..., $\mathcal{P}^n\phi := \mathcal{P}\left(\mathcal{P}^{n-1}\phi\right)$, ..., obtidas iterando o mapa de Picard a partir de uma função inicial ϕ, é convergente (numa topologia apropriada definida num subespaço $\mathcal{C} \subset C(I,X) := \{\ \phi : I \to X\ \text{ contínua}\}$ tal que $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ seja contínua), então o limite $x(t) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathcal{P}^n\phi\right)(t)$ é um ponto fixo do mapa de Picard, e portanto uma solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t,x)$ com a condição inicial dada $x(t_0) = x_0$.

e.g. Se o campo de velocidades apenas depende do tempo, ou seja o problema é a EDO simples $\dot{x} = v(t)$, então o mapa de Picard envia toda função inicial $\phi(t)$ na solução

$$\left(\mathcal{P}\phi\right)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\left(s\right) ds$$

com $x(t_0) = x_0$.

e.g. Queremos resolver $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Começamos pela conjetura $\phi(t) = 1$, e depois calculamos

$$\left(\mathcal{P}\phi\right)(t) = 1 + t \qquad \left(\mathcal{P}^2\phi\right)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} \qquad \left(\mathcal{P}^3\phi\right)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \qquad \dots$$

Então a sucessão converge (uniformemente em intervalos limitados) para a série de Taylor da função exponencial

$$\left(\mathcal{P}^n\phi\right)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} \quad \to \quad e^t\,,$$

que é a solução que já conhecemos.

Contrações e teorema de ponto fixo de Banach. Seja (X, d) um espaço métrico. Uma transformação $f : X \to X$ é dita *contração* se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz inferior a um, ou seja, se existe $0 \le \lambda < 1$ tal que para todos $x, x' \in X$

$$\mathrm{d}(f(x), f(x')) \le \lambda \cdot \mathrm{d}(x, x')\,.$$

As *trajetórias* da transformação $f : X \to X$ são as sucessões (x_n) definidas recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$, se $n \ge 0$, a partir de uma condição inicial $x_0 \in X$. Os *pontos fixos* de f são os pontos $p \in X$ tais que $f(p) = p$.

Um espaço métrico é *completo* se toda sucessão fundamental é convergente.

Teorema 2.1 (princípio das contrações, teorema de ponto fixo de Banach)**.** *As trajetórias de uma contração $f : X \to X$ são sucesssões de Cauchy, e a distância entre cada duas trajetórias decai exponencialmente no tempo. Se X é completo, então f admite um único ponto fixo p, e a trajetória de todo ponto converge exponencialmente para o ponto fixo.*

Demonstração. Seja $f : X \to X$ uma λ-contração. Seja $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, e seja (x_n) a sua trajetória, a sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$. Usando k-vezes a contratividade ve-se que $\mathrm{d}\,(x_{k+1}, x_k) \leq \lambda\,\mathrm{d}(x_1, x_0)^k$, e portanto que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{d}(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq \mathrm{d}(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\leq \mathrm{d}(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot \mathrm{d}(x_1, x_0)\,. \end{aligned}$$

Em particular, (x_n) é uma sucessão de Cauchy, pois para todo $\varepsilon > 0$ existe $\overline{n}$ tão grande que se $n \geq \overline{n}$ então $\lambda^n/(1-\lambda) < \varepsilon$.

Se (y_n) é a trajetória de um outro ponto $y_0 \in Y$, a contratividade também implica que

$$\mathrm{d}(x_n, y_n) \leq \lambda^n \cdot \mathrm{d}(x_0, y_0)\,,$$

ou seja que que a distância entre duas trajetórias decai exponencialmente.

O limite $p = \lim_{n\to\infty} x_n$, que existe se X é completo, é um ponto fixo de f, porque f é contínua, e

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p\,.$$

Se p e p' são pontos fixos, então $d(p, p') = d(f(p), f(p')) \leq \lambda\, d(p, p')$ com $\lambda < 1$ implica que $d(p, p') = 0$, o que mostra que o ponto fixo é único. Comparando a trajetória de x_0 e do ponto fixo p (que é a sucessão constante), ve-se que

$$\mathrm{d}(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot \mathrm{d}(x_0, p)\,,$$

ou seja, que a convergência $x_n \to p$ é exponencial. □

ex: Utilize o teorema do valor médio para mostrar que uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ é uma contração sse existe $\lambda < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

ex: Mostre que uma transformação $f : X \to X$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$ distintos pode não ter pontos fixos, mesmo se o espaço métrico X for completo.

Teorema de Picard-Lindelöf. [11] O teorema de existência e unicidade básico para equações diferenciais ordinárias é o seguinte.

Teorema 2.2 (Picard-Lindelöf)**.** *Seja $v(t, x)$ um campo de velocidades contínuo definido num domínio D do espaço de fases extendido $\mathbb{R} \times X$. Se v é localmente Lipschitziana (por exemplo, diferenciável com continuidade) com respeito a segunda variável $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma e uma única solução local da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ que passa por cada ponto $(t_0, x_0) \in D$.*

[11] M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

Demonstração. Seja $I \times B = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_\delta(x_0)$ uma vizinhança sufiientemente pequena de (t_0, x_0), onde $B = \overline{B}_\delta(x_0)$ denota o disco fechado de centro x_0 e raio δ in X. Pela continuidsde do campo de velocidades $v(t.x)$ existe $K > 0$ tal que $|v(t,x)| \leq K$ se $(t,x) \in I \times B$. Pela condição de Lipschitz, existe $M > 0$ tal que $|v(t,x) - v(t,y)| \leq M|x-y|$ se $t \in I$ e $x, y \in B$. Podemos reduzir, se necessário, o raio ε de I de maneira tal que $K\varepsilon \leq \delta$ e $M\varepsilon < 1$. Seja $\mathcal{C} = C^0(I, B)$ o espaço das funções contínuas $t \mapsto \phi(t)$ que enviam I em B. Munido da norma do supremo, $\|\phi - \varphi\|_\infty := \sup_{t\in I} |\phi(t) - \varphi(t)|$ este é um espaço métrico completo (de fato, um espaço de Banach). O mapa de Picard (2.1) envia $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$, pois

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |v(s, \phi(s))|\, ds \leq K\varepsilon \leq \delta\,.$$

Finalmente, dadas duas funções $\phi, \varphi \in \mathcal{C}$, acontece que

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}\phi)(t) - (\mathcal{P}\varphi)(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |v(s, \phi(s)) - v(s, \varphi(s))|\, ds \\ &\leq M\varepsilon \cdot \sup_{t\in I} |\phi(t) - \varphi(t)|\,, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|\mathcal{P}\phi - \mathcal{P}\varphi\|_\infty < M\varepsilon \cdot \|\phi - \varphi\|_\infty\,.$$

Sendo $M\varepsilon < 1$, o mapa de Picard é uma contração. O teorema segue do princípio das contrações 2.1. □

Soluções exatas e simulações. Exceto poucos casos importantes, resolvidos por matemáticos e físicos famosos (como a queda livre, a lei de Hooke/oscillador harmónico, o problema de Kepler, ...), não há nenhuma esperança de resolver "analiticamente" as equações diferenciais que descrevem fenómenos interessantes do mundo real (leis da física, problemas de engenharia, ...). É necessário fazer "simulações", ou seja, calcular valores aproximados das soluções.

Método de Euler/diferênças finitas. Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t,x) \tag{2.2}$$

O *método de Euler* consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) \simeq x(t) + v(t,x) \cdot dt\,,$$

dado um "passo" $dt = \tau$ suficientemente pequeno. A solução $x(t_n)$, nos tempos $t_n = t_0 + n\tau$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é estimada pela sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot \tau\,.}$$

Numa linguagem como `c++` ou `Java`, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) =$ `x`, é

```
while (time < t)
  {
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
  }
```

Se a solução verdadeira admite segunda derivada, é natural esperar, pela fórmula de Taylor com resto, que o erro

$$\varepsilon_n := x(t_n) - x_n$$

introduzido em cada passo seja da ordem de τ^2. Num intervalo de tempo fixado $[t_0, t_0 + T]$, dividido em N subintervalos de comprimento τ (assim que $T = N\tau$), o erro acumulado deve ser então da ordem de $N\,\tau^2 \sim T\tau$, que converge para zero quando $\tau \to 0$.

Estimação dos erros no método de Euler. Este argumento pode ser feito riguroso, com algumas hipóteses a priori sobre a solução.

Usa o seguinte lema, de interesse independente, que descreve um crescimento quase-exponencial. Observe que a equação recursiva $y_{n+1} = \lambda y_n + \beta$, com λ positivo mas $\neq 1$, descreve um crescimento/decaimento (dependendo se λ é superior ou inferior a 1) exponencial com reposição/recolha (dependendo se β é positivo ou negativo), e a sua solução é $y_n = \lambda^n(y_0 - \overline{y}) + \overline{y}$, sendo $\overline{y} = \beta/(1-\lambda)$ o equilíbrio.

Teorema 2.3. *Seja (y_n) uma sucessão de números não negativos que verifica*

$$y_{n+1} \leq \lambda y_n + \beta$$

com $\lambda, \beta > 0$ e $\lambda \neq 1$. Então

$$y_n \leq \lambda^n y_0 + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\,\beta\,.$$

A demostração é simples, por indução.

Assumimos então que exista e seja única a solução de $\dot{x} = v(t,x)$ no intervalo $I = [t_0, t_0+T]$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Assumimos também que a sua segunda derivada seja uniformemente limitada, i.e.

$$|\ddot{x}(t)| \leq M \tag{2.3}$$

e que o campo de velocidades seja Lipschitziano na segunda variável, i.e.

$$|v(t,x) - v(t,y)| \leq K\,|x-y|\,, \tag{2.4}$$

também uniformemente em $t \in I$.

Teorema 2.4. *Seja $x(t)$ a única solução de $\dot{x} = v(t,x)$ no intervalo $[t_0, t_0+T]$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se o campo satisfaz (2.4) e a solução satisfaz (2.3), então a diferença entre os $x(t_n)$, com $t_n = t_0 + n\tau$ e $0 \leq n \leq N$, e os termos da sucessão $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$, obtida usando o método de Euler com passo $\tau = T/N$, é limitada por*

$$|x(t_n) - x_n| \leq M\,\frac{(1+K\tau)^n}{2K}\,\tau\,.$$

Demonstração. Usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange e a própria equação diferencial $\dot{x}(t_n) = v(t_n, x(t_n))$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|x(t_{n+1}) - x_{n+1}| &= |x(t_n+\tau) - x_n - v(t_n,x_n)\,\tau| \\
&= \left|x(t_n) + \dot{x}(t_n)\,\tau + \tfrac{1}{2}\ddot{x}(t_n+\delta)\,\tau^2 - x_n - v(t_n,x_n)\tau\right| \\
&= \left|x(t_n) - x_n + (v(t_n,x(t_n)) - v(t_n,x_n))\,\tau + \tfrac{1}{2}\ddot{x}(t_n+\delta)\,\tau^2\right|
\end{aligned}$$

onde $0 < \delta < \tau$. Pela deigualdade do triângulo e as hipóteses (2.3) sobre a segunda derivada da solução e (2.4) sobre o campo vetorial,

$$\begin{aligned}
|x(t_{n+1}) - x_{n+1}| &\leq |x(t_n) - x_n| + |v(t_n,x(t_n)) - v(t_n,x_n)|\;\tau + \left|\tfrac{1}{2}\ddot{x}(t_n+\delta)\,\tau^2\right| \\
&\leq |x(t_n) - x_n| + K\tau\;|x(t_n) - x_n| + M\tau^2/2\,.
\end{aligned}$$

Portanto, a sucessão dos erros $\varepsilon_n = x(t_n) - x_n$ satisfaz

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1+K\tau)\,|\varepsilon_n| + \frac{M\tau^2}{2}$$

Pelo teorema 2.3, com $\varepsilon_0 = 0$, $\lambda = (1+K\tau)$ e $\beta = M\tau^2/2$, temos

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{(1+K\tau)^n - 1}{K\tau}\,M\tau^2/2$$

e portanto o resultado. □

Convergência do método de Euler. Como natural esperar, a cota superior aos erros no teorema 2.4 é máxima quando $n = N$, o número total de passos no intervalo $[t_0, t_0 + T]$. Quando o passo $\tau \to 0$, o número de passos $N = T/\tau$ tende para o ∞. Mas

$$M\,\frac{(1+K\tau)^N}{2K} = M\,\frac{\left(1+\frac{KT}{N}\right)^N}{2K} \to M\,\frac{e^{KT}}{2K}$$

quando $N \to \infty$. Consequentemente, nas hipóteses do teorema 2.4, os erros são uniformemente limitados por

$$|\varepsilon_n| \leq M\,\frac{e^{KT}}{2K}\,\tau\,,$$

logo convergem para zero uniformemente quando $\tau \to 0$.

e.g. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$, que define o exponencial. Se o passo é $\tau > 0$ e o tempo final é $t = n\tau$ com $n \in \mathbb{N}$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq x_n = (1+\tau)^n$$

onde $n = t/\tau$ é o número de passos. No limite quando o passo $\tau \to 0$, as aproximações convergem para a solução $x(t) = e^t$, pois

$$\lim_{\tau\to 0}(1+\tau)^{t/\tau} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = e^t\,.$$

ex: Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1-2t)\,x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...

ex: Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

Método RK-4. O *método de Runge-Kutta* (de ordem) *4* para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t,x) \qquad \text{com condição inicial} \qquad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um "passo" dt, e aproximar $x(t_0 + n\cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \tfrac{dt}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

onde $t_n = t_0 + n\cdot dt$, e os coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$\boxed{k_1 = v(t_n, x_n) \qquad k_2 = v\left(t_n + \tfrac{dt}{2}, x_n + \tfrac{dt}{2}\cdot k_1\right)}$$

$$\boxed{k_3 = v\left(t_n + \tfrac{dt}{2}, x_n + \tfrac{dt}{2}\cdot k_2\right) \qquad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt\cdot k_3)}$$

ex: Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

Simulações com software proprietário. Existem software proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinarias e parciais. Por exemplo, a função `ode45` do MATLAB, ou a função `NDSolve` do Mathematica, calculam soluções aproximadas de EDOs $\dot{x} = v(t,x)$ utilizando variações do método de Runge-Kutta.

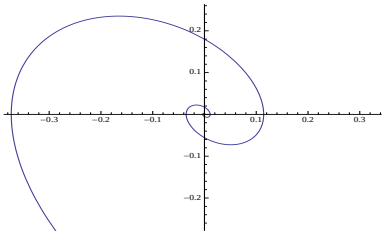
ex: Verifique se os PC do seu Departamento/da sua Universidade têm accesso a um dos software proprietários MATLAB ou Mathematica.

ex: Em caso afirmativo, aprenda a usar as funções `ode45` ou `NDSolve`.

Por exemplo, o pêndulo com atrito pode ser simulado, no Mathematica, usando as instruções

```
s = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -Sin[x[t]] - 0.7 y[t],
   x[0] == y[0] == 1}, {x, y}, {t, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 20}]
```

O resultado é

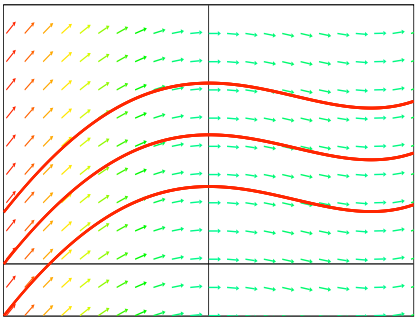


3 EDOs simples, autónomas e separáveis*

Integração de EDOs simples. A equação diferencial mais simples é do género

$$\dot{x} = v(t) \tag{3.1}$$

onde o campo de direções $v(t)$ depende apenas do tempo t, e não da própria função incógnita x. Se $x(t)$ é solução de (3.1) então também $x(t) + c$ é solução, para todas as constantes $c \in \mathbb{R}$. Consequentemente, as soluções diferem por uma constante aditiva, determinada pela condição inicial.



Três soluções da EDO simples $\dot{x} = t^3 \sin(t)$ que diferem por uma constante aditiva.

O *teorema (fundamental do cálculo) de Newton e Leibniz*[12] afirma que a derivada do integral indefinido $F(t) := \int_a^t f(s)\,ds$ de uma função contínua $f(t)$ existe e é igual a $F'(t) = f(t)$. Portanto,

Teorema 3.1. *Se $v(t)$ é um campo de direções contínuo definido num intervalo de tempos, então a solução da EDO simples (3.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja, é dada por*

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} \tag{3.2}$$

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo, a derivada da (3.2) é $\dot{x}(t) = v(t)$, e o seu valor no instante t_0 é $x(t_0) = x_0$, pois o integral $\int_{t_0}^{t_0} v(s)\,ds$ é nulo. A unicidade é um exercício. □

Por causa deste teorema, as equações diferencias simples são ditas *integráveis*, e "integrar" (uma equação diferencial) é usado como sinónimo de "resolver".

ex: Integre (ou seja, determine a solução geral) as seguintes EDOs, definidas em oportunos intervalos de tempo

$$\dot{x} = 2 - t + 3t^2 + 5t^6 \qquad \dot{x} = e^{-t} \qquad \dot{x} = \cos(3t) \qquad \dot{x} = 1/t$$

ex: Determine $x(t)$ sabendo que

$$\dot{x} = e^{2t} \quad \text{e} \quad x(0) = 6$$

$$\dot{x} = \sin(t) \quad \text{e} \quad x(\pi) = 0$$

ex: Mostre que a solução do teorema 3.2 é única (considere duas soluções, calcule a derivada da diferença, e utilize o teorema do valor médio ...)

[12] A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é "*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*".

Foguetão. Se um foguetão de massa $m(t)$ no espaço vazio (ou seja, sem forças gravitacionais!) expulsa combustível a uma velocidade relativa constante $-V$ e a uma taxa constante $\dot{m} = -\alpha$, (com $\alpha > 0$) então a sua trajetória num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = \dot{m}(v - V)\,, \qquad \text{e portanto} \quad , \qquad m\dot{v} = -\alpha V\,.$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$ é a velocidade e $q(t)$ a posição.

ex: Resolva a EDO $\dot{m} = -\alpha$ para a massa do foguetão, com massa inicial $m(0) = m_0$, e substitua o resultado na equação de Newton, obtendo

$$\dot{v} \;= \frac{\alpha V}{m_0 - \alpha t}$$

(desde que $0 \le t < m_c/\alpha$, onde $m_c < m_0$ é a massa inicial do carburante). Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = 0$ e posição inicial $q(0) = 0$, válida para tempos t inferiores ao tempo necessário para acabar o combustível.

ex: Se $q(t)$ representa a altura e o foguetão está sujeito à forção gravitacional próximo da superfície da Terra, então a equação de movimento fica

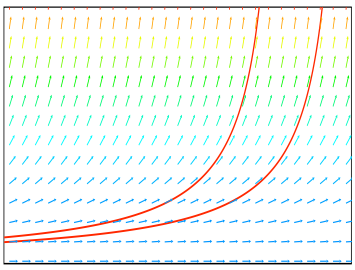
$$m\dot{v} = -\alpha V - mg$$

Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = 0$ e posição inicial $q(0) = 0$, e determone a alura atingida no instante $\bar{t} = m_c/\alpha$ em que o combustível acaba.

Campos de vetores e EDOs autónomas na reta. Um campo de vetores $v : X \to \mathbb{R}$, definido num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, define uma EDO *autónoma*

$$\dot{x} = v(x)\,. \tag{3.3}$$

A palavra "autónoma" indica que o campo $v(x)$, portanto a dinâmica modelada pela equação diferencial, não depende explicitamente do tempo. Se $x(t)$ é solução de (3.3), então também $x(t - c)$ é solução, para todos os tempos $c \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a física modelada por uma EDO autónoma é invariante para translações no tempo.

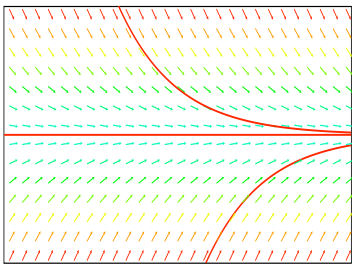


Duas soluções da EDO autónoma $\dot{x} = x^2$ que diferem por uma translação no tempo.

Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. um ponto onde $v(x_0) = 0$, então a trajetória constante

$$\boxed{x(t) = x_0}$$

para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução *estacionária*, ou *de equilíbrio*, da equação diferencial autónoma (3.3).



Equilíbrio e outras duas soluções da EDO autónoma $\dot{x} = -x$.

Se x_0 é um ponto não singular do campo contínuo $v(x)$, i.e. se $v(x_0) \neq 0$ (e portanto, pela continuidade, $v(x)$ continua diferente de zero numa vizinhança de x_0), então uma solução local de (3.3) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinanda "separando as variáveis", ou seja, fazendo formalmente

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{v(x)} = dt$$

e integrando os dois membros,

$$\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$$

entre limites de integração apropriados. Ou seja,

Teorema 3.2. *Se x_0 é um ponto regular do campo contínuo $v(x)$, então uma solução da EDO autónoma (3.3) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é dada implicitamente por*

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{v(y)} = t - t_0} \tag{3.4}$$

Se o campo $v(x)$ é diferenciável, esta solução é única.

Demonstração. Assumimos que o campo de velocidades v é contínuo, e seja $J = (x_-, x_+)$ o intervalo maximal contendo x_0 onde v é diferente de zero. Definimos a função n $H : \mathbb{R} \times J \to \mathbb{R}$ como

$$H(t, x) = t - t_0 - \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{v(y)} .$$

Se $t \mapsto \varphi(t)$ é uma solução do problema de Cauchy, então um cálculo mostra que $\frac{d}{dt} H\left(t, \varphi(t)\right) = 0$ para todo tempo t. Consequentemente H é constante ao longo das soluções do problema de Cauchy. Sendo $H(t_0, x_0) = 0$, concluimos que o gráfico de toda solução pertence ao conjunto de nível $\Sigma = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times J \text{ s.t. } H(t, x) = 0\}$. A função H é derivável, e o seu diferencial $dH = dt + dx/v(x)$ não é nulo. De fato, as duas derivadas parciais $\partial H/\partial t$ e $\partial H/\partial x$ são sempre diferentes de zero. Pelo teorema da função implícita o conjunto de nível Σ é, numa vizinhança $I \times J$ do ponto (t_0, x_0), o gráfico de uma função diferenciável $x \mapsto t(x)$, assim como o gráfico de uma função diferenciável $t \mapsto x(t)$, a função iversa de $t(x)$, que é uma solução do problema de Cauchy. De fato, a sua derivada é, pelo teorema da função inversa,

$$\dot{x}(t) = 1/\left(\frac{dt}{dx}(x(t))\right) = v(x)$$

e a condição inicial é $x(t_0) = x_0$. □

Observe que a função $t(x) - t_0$ tem a interpretação do "tempo necessário para ir de x_0 até x".

ex: Considere as seguintes EDOs autónomas

$$\dot{x} = -3x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = x^2 \qquad \dot{x} = \sqrt{x}$$

$$\dot{x} = (x-1)(x-2) \qquad \dot{x} = e^x \qquad \dot{x} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

definidas em intervalos convenientes. Encontre, caso existam, as soluções estacionárias. Desenhe os respectivos campos de vetores e conjeture sobre o comportamento das soluções. Integre, quando possível, as equações e calcule soluções. Determine, quando possível, umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy comcondição inicial $x(0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

Atrito e tempo de relaxamento. O atrito pode ser modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. Portanto, a equação de Newton (em dimensão 1) de uma partícula livre de massa m em presença de atrito é

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$$

onde $\gamma > 0$ é o "coeficiente de atrito". A velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v$$

onde $\tau = m/\gamma > 0$. A solução é $v(t) = e^{-t/\tau}v(0)$, assim que τ é um "tempo de relaxamento", o tempo necessário para reduzir a velocidade de um fator $1/e$. A energia cinética $T := \frac{1}{2}mv^2$ da partícula satisfaz

$$\dot{T} = -\frac{2}{\tau}T\,,$$

e portanto decresce exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau/2$, ou seja, mais rapidamente.

ex: Calcule a trajetória de $m\ddot{q} = -\gamma q$ com posição inicial $q(0) = q_0$ e velocidade inicial $\dot{q}(0) = v_0$.

Paraquedista. Um modelo da queda de um paraquedista é

$$m\dot{v} = -\alpha v|v| - mg\,,$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$, $q(t) \in \mathbb{R}$ é a altura no instante t, $m > 0$ é a massa, $g \simeq 9.80$ m/s^2 é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\alpha > 0$ é uma constante que depende da atmosfera e do paraqueda (um valor realístico é $\alpha \simeq 30$ kg/m).

ex: Mostre que a velocidade $v(t)$ do paraquedista converge para o valor estacionário $\overline{v} = \sqrt{mg/\alpha}$ quando $t \to \infty$.

Circuito/filtro RC. A tensão sobre o capacitor num filtro/circuito RC é modelada pela lei de Kirchoff

$$C\dot{V} + \frac{1}{R}V = 0$$

ex: Verifique que a solução com tensão inicial $V(0) = V_0$ é

$$V(t) = V_0\, e^{-t/\tau}$$

onde o tempo caraterístico do filtro é $\tau = 1/(RC)$.

Logística. Um modelo mais realista da dinâmica de uma população $N(t)$ num meio ambiente limitado é dado pela *equação logística*[13]

$$\dot{N} = \lambda\, N\,(1 - N/M)$$

onde a constante positiva M é a população máxima permitida e $\lambda > 0$. Observe que $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll M$, e que $\dot{N} \to 0$ quando $N \to M$. A "população relativa" $x(t) := N(t)/M$ satisfaz a equação logística "adimensional"

$$\dot{x} = \lambda\, x\,(1 - x)\,. \tag{3.5}$$

As soluções de equilíbrio são $\overline{x} = 0$ (população ausente) e $\overline{x} = 1$ (ou seja, $\overline{N} = M$, população máxima). A solução de (3.5) com condição inicial $x(0) = x_0 \neq 0, 1$ pode ser determinada separando as variáveis e integrando, e é dada em forma implícita por

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y(1-y)} = \int_0^t \lambda\, ds$$

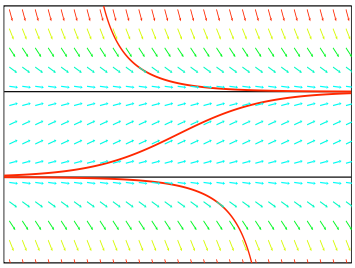
ex: Use a identidade

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

e deduza que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ (fora deste intervalo o modelo não faz sentido físico) é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}\,.$$

ex: Discuta o comportamento assimptótico das soluções da equação logística.



Epidemias. Num surto epidémico, a taxa de crescimento do número $I(t)$ de indivíduos infetados, dentro de uma população total constante N, é proporcional ao produto do número de indivíduos infetados e o número $S(t) = N - I(t)$ de indivíduos saudáveis (e portanto susceptíveis de serem infetados), ou seja,

$$\dot{I} = \lambda\, I\,(N - I)$$

com $\lambda > 0$.

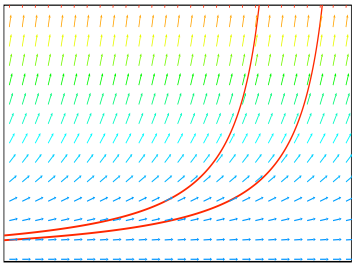
ex: Determine a lei de crescimento da população infectada relativa $x(t) := I(t)/N$, e discuta o comportamento assimptótico de $x(t)$.

[13] Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

Crescimento super-exponencial/explosão. Um outro modelo de dinâmica de uma população em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda\, N^2\,,$$

ou seja, a taxa de crescimento é proporcional aos pares de indivíduos contidos na população. A solução estacionária é a solução trivial $N(t) = 0$.



ex: Mostre que a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = \frac{1}{N_0^{-1} - \lambda t}\,,$$

definida para tempos $t < 1/\lambda N_0$. Este modelo prevê uma catástrofe (população infinita, explosão) após um intervalo de tempo finito!

Fazer modelos. Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

ex: A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá é proporcional à diferença entre a temperatura do quarto, suposta constante, e a temperatura do chá.

ex: A velocidade vertical de um foguetão é inversamente proporcional à altura atingida.

ex: A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.

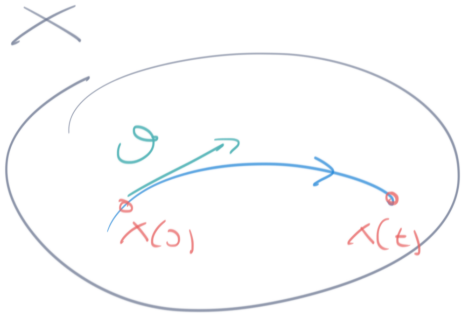
ex: Uma esfera de gelo derrete a uma taxa proporcional à sua superfície.

ex: A taxa de crescimento de uma população de marcianos é proporcional ao número de trios que é possível formar com a dada população.

Campos de vetores e EDOs autónomas. Um *campo de vetores* $\mathbf{v} : X \to \mathbb{R}^n$ no espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$ define uma equação diferencial ordinária *autónoma* (que não depende explicitamente do tempo, como todas as leis fundamentais da física)

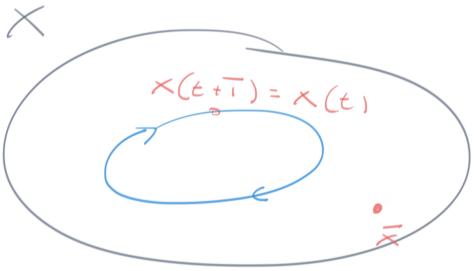
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})\,. \tag{3.6}$$

As imagens $\mathbf{x}(I) = \{\mathbf{x}(t) \text{ com } t \in I\} \subset X$ das soluções/trajetórias $\mathbf{x} : I \to X$ (com $I \subset \mathbb{R}$ intervalos) no espaço de fases são ditas *órbitas*, ou *curvas de fases*, do sistema autónomo.



Se $\overline{\mathbf{x}} \in X$ é um *ponto singular* do campo de vetores, ou seja, um ponto onde $\mathbf{v}(\overline{\mathbf{x}}) = 0$, então o caminho constante $\mathbf{x}(t) = \overline{\mathbf{x}}$ para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução da EDO autónoma (3.6). As soluções constantes são chamadas soluções de *equilíbrio*, ou *estacionárias*.

Soluções periódicas são soluções globais tais que $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$ para todo t e algum $T > 0$ minimal, dito *período*. As órbitas correspondentes são curvas fechadas.



Se a EDO (3.6) satisfaz um teorema de existência e unicidade (pelo teorema de Picard-Lindelöf 2.1, é suficiente que o campo seja Lipschitziano, por exemplo diferenciável com continuidade), então para cada ponto do espaço de fases passa uma e uma única órbita (que pode ser o próprio ponto no caso de uma solução estacionária). Em particular, órbitas diferentes não têm interseções, e portanto as órbitas definem uma "partição" do espaço de fases.

ex: Esboce o campo de direções e o campo de vetores das EDOs autónomas

$$\dot{x} = -x \qquad \dot{x} = x - 1 \qquad \dot{x} = x(1-x)$$

$$\dot{x} = (x-1)(x-2)(x-3) \qquad \dot{x} = (x-1)^2(x-2)^2$$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{q} = 2q \\ \dot{p} = -p/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{q} = q - p \\ \dot{p} = p - q \end{cases}$$

determine as soluções de equilíbrio, e conjeture sobre o comportamento qualitativo das (outras) soluções.

Campos completos e fluxos de fases. Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou numa variedade diferenciável). Se por cada ponto do espaço de fases passa uma e uma única solução global (i.e. definida para todos os tempos), então o campo de vetores é dito *completo*. Seja $\Phi_t(\mathbf{x}_0) := \varphi(t)$ é o estado no tempo t da solução que passa por $\mathbf{x}_0$ no instante 0. Um campo completo define/gera portanto um *fluxo de fases*, um grupo de transformações $\Phi_t : X \to X$, com $t \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \qquad \text{e} \qquad \Phi_0 = \mathrm{id}_X \qquad \forall\, t, s, \in \mathbb{R}\,.$$

Vice-versa, um fluxo de fases diferenciável define um campo de vetores

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{t}\,,$$

dito "gerador infinitesimal" do grupo de transformações. As curvas $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$ são as soluções de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

ex: Determine os campos de vetores que geram os seguintes fluxos no plano $\mathbb{R}^2$

$$\Phi_t(x,y) = (e^{\lambda t}x\,,\, e^{\mu t}y)$$

$$\Phi_t(x,y) = (\cos(t)\,x - \sin(t)\,y\,,\, \sin(t)\,x + \cos(t)\,y)$$

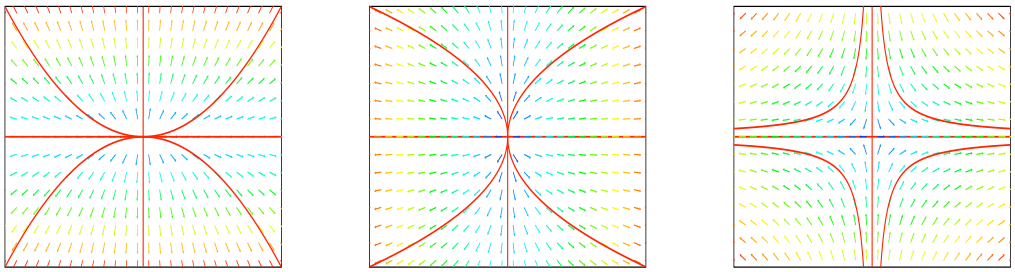
$$\Phi_t(x,y) = (x + ty\,,\, y)$$

Produto direto de EDOs. O *produto directo* das EDOs autónomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$ é o sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ \dot{y} = w(y) \end{cases}$$

As soluções do sistema são os caminhos $t \mapsto (x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são as soluções das EDOs autónomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$, respetivamente. A curva de fases que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, onde $v(x_0) \neq 0$ (ou onde $w(y_0) \neq 0$), é (localmente) o gráfico de uma função $x \mapsto y(x)$ (ou $y \mapsto x(y)$) que satisfaz a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)} \qquad \left(\text{ ou } \quad \frac{dx}{dy} = \frac{v(y)}{w(x)} \right).$$



ex: Determine as soluções e as curvas de fases do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

quando $\lambda = 0, \pm 1, 2, \ldots$ e quando $\lambda = 1/2, 1/3, \ldots$.

EDOs separáveis. A solução da uma EDO *separável*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)} \tag{3.7}$$

com condição inicial $y(x_0) = y_0$ tal que $v(x_0) \neq 0$ e $w(y_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{v(\xi)} = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{w(\eta)}}$$

ex: Resolva as seguintes EDOs separáveis definidas em oportunos domínios.

$$\frac{dy}{dx} = -x/y \qquad \frac{dy}{dx} = x/y \qquad \frac{dy}{dx} = kx^{\alpha}y^{\beta} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}$$

$$\dot{x} = tx^3 \qquad t\dot{x} + t = t^2 \qquad \dot{x} = t^3/x^2 \qquad x\dot{x} = e^{x+3t^2}t \qquad \dot{x} = e^{t-x}$$

$$\dot{x} = \frac{t-1}{x^2} \qquad \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 \qquad \left(t^2+1\right)\dot{x} = 2tx \qquad \dot{x} = t\left(x^2 - x\right)$$

Allometric laws. If two organs/tissues/components of a living body/organism/community grow with different (but both constant!) relative growth rates α and β, say

$$\dot{x} = \alpha x \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = \beta y$$

(the independent variable t may be time, or a linear dimension, or something else), then they satisfy the relation

$$\frac{1}{\beta y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha x}\frac{dx}{dt}$$

Eliminating "dt", we get the linear/separable/homogeneous ODE

$$\frac{dy}{dx} = (\beta/\alpha)\,\frac{y}{x}\,,$$

Its solution is the *allometric law* [14] [15]

$$y = c \cdot x^{\gamma} \qquad \text{or, equivalently,} \qquad \log y = \gamma \cdot \log x + \log c\,,$$

with "scaling exponent" $\gamma = \beta/\alpha$, and some constant $c = x_0/y_0$ related to the initial conditions $x(t_0) = x_0$ and $y(t_0) = y_0$.

A famous example is *Kleiber's law* [16] (*mouse-to-elephant curve*)

$$\text{BMR} = c \cdot M^{3/4}$$

which relates the basal metabolic rate BMR to the mass M of an animal.

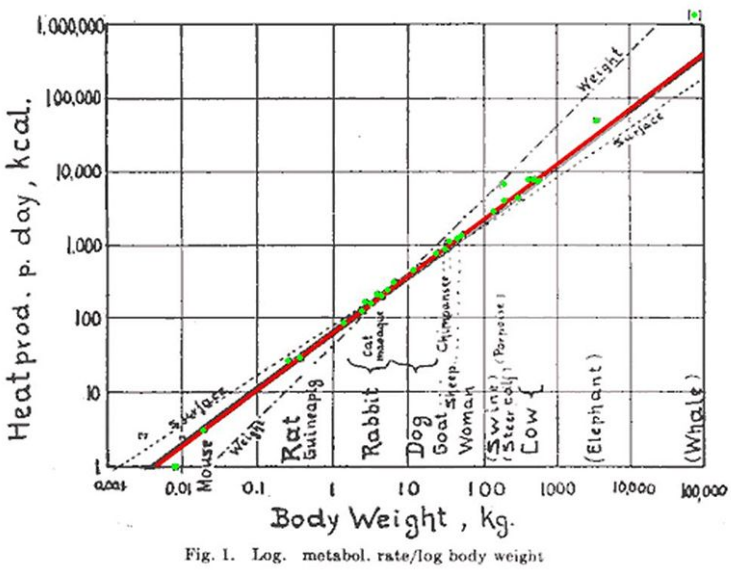


Fig. 1. Log. metabol. rate/log body weight

Original graph of body size versus metabolic rate hand-drawn by Max Kleiber (source Wikipedia)

.

The heart rate T and the mass M of an animal are related by the allometric law

$$T = c \cdot M^{1/4}$$

[14] W. D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 1917, 2nd ed. 1942 [Cambridge University Press, 1992].
[15] Julian S. Huxley, *Problems of Relative Growth (2nd ed.)*, Dover, 1972.
[16] M. Kleiber, Body size and metabolism, *Hilgardia* **6** (1932), 315-351. M. Kleiber, Body size and metabolic rate, *Physiological Reviews* **27** (1947), 511-541.

4 Sistemas conservativos*

Constantes do movimento. Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com coordenadas $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$, um campo de vetores que define a EDO autónoma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

num espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$. Os *observáveis* são as funções $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Os observáveis que assumem valores $\varphi(\mathbf{x}(t))$ constantes ao longo das soluções $\mathbf{x}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ são ditos *constantes do movimento*, ou *integrais primeiros*. Pela regra da cadeia, o observável diferenciável $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é uma constante do movimento se e só se a *derivada de Lie* de φ ao longo do campo $\mathbf{v}$ é igual a zero, ou seja,

$$\left(\pounds_{\mathbf{v}}\varphi\right)(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \cdot v_k(\mathbf{x}) = 0\,.$$

para todos os pontos $\mathbf{x} \in X$.

As órbitas/curvas de fases estão contidas nas hiperfícies de nível $\Sigma_c := \{\mathbf{x} \in X \text{ t.q. } \varphi(\mathbf{x}) = c\}$ das constantes do movimento. Se o sistema admite k constantes do movimento independentes φ_1, φ_2, $\dots$, φ_k (ou seja, tais que os diferenciais $d\varphi_i(\mathbf{x})$ são linearmente independentes em cada ponto $\mathbf{x}$), então as órbitas do sistema estão contidas nas interseções das k hiperfícies de nível, umas sub-variedades de co-dimensão k. Em particular, a existência de $n-1$ constantes do movimento independentes permite determinar as órbitas.

ex: Verifique que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz diagonal com $\mathrm{Det}A \neq 0$ (ou seja, todos os valores próprios são $\neq 0$) não admite constantes do movimento não triviais (i.e. constantes).

Sistemas conservativos. [LL78] A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula de massa $m > 0$ (suposta constante!) num campo de forças conservativo é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

onde a força é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$, e $U(\mathbf{r})$ é um(a energia) *potencial*. Um sistema isolado de N pontos materiais, com posições $\mathbf{r}_\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e massas $m_\alpha > 0$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, é modelado pelas equações de Newton

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \qquad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

onde a força que atua sobre o α-ésimo ponto material é

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} U := -\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\right),$$

i.e. o oposto do gradiente, com respeito às coordenadas $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, de uma energia potencial $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$. A *energia cinética* é

$$K := \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2$$

onde $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$ é a velocidade do α-ésimo ponto material.

ex: Verifique que a *energia* (energia cinética + energia potencial)

$$E := K + U = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2 + U\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\right)$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E = 0$ ao longo das trajetórias.

Mecânica lagrangiana e hamiltoniana. Um sistema mecânico é descrito por um espaço das configurações M, tipicamente um aberto de $\mathbb{R}^n$ ou, em geral, uma variedade diferenciável, com coordenadas locais $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, e uma *lagrangiana* $L : TM \to \mathbb{R}$, uma função $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ que depende das coordenadas e das velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q_1}, \dot{q_2}, \ldots, \dot{q_n})$. Por exemplo, o espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_\alpha \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, representa a posição do α-ésimo ponto. A lagrangiana é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_\alpha\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_\alpha)\,.$$

A *ação* de uma trajetória $[t_0, t_1] \mapsto \mathbf{q}(t) \in M$ entre a posição $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ e a posição $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ é o integral

$$S[t \mapsto \mathbf{q}(t)] := \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\, dt\,.$$

O *princípio de mínima ação (de Hamilton)* afirma que as trajetórias físicas são os pontos críticos da ação, mantend fixas as posições inicial e final. A variação δS, dada uma variações infinitésimas $\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$ da trajetória com $\delta\mathbf{q}(t_0) = \delta\mathbf{q}(t_1) = 0$, é dada por

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t)\, dt \end{aligned}$$

(integrando por partes a segunda soma e usando as condições de fronteira). Portanto, os pontos críticos da ação são as soluções das *equações de Euler-Lagrange*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.} \tag{4.1}$$

A forma linear $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \ldots, \mathbf{p}_N) = p^1 dq_1 + p^2 dq_2 + \cdots + p^n dq_n \in T^*_{\mathbf{q}} M$, de coordenadas $p^i := \partial L / \partial \dot{q}_i(\mathbf{q})$, é dito *momento*. O espaço $X = T^*M \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, com coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, é dito *espaço de fases* do sistema mecânico. As equações de Euler-Lagrange são equivalentes às *equações de Hamilton*

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,} \tag{4.2}$$

onde a *hamiltoniana* do sistema, $H : X \to \mathbb{R}$, é a "transformada de Legendre" da lagrangiana, definida por

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &:= \sup_v \left(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\right) \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}_\alpha\|^2 + U(\mathbf{q})\,. \end{aligned}$$

ex: O espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_\alpha \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, representa a posição do α-ésimo ponto. A lagrangiana é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_\alpha\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_\alpha)\,,$$

onde U é a energia potencial da interação. Verifique que as equações de Euler-Lagrange são equivalentes às equações de Newton $m_\alpha \ddot{\mathbf{r}_\alpha} = \mathbf{F}_\alpha$.

ex: Mostre que a hamiltoniana é uma constante do movimento, ou seja, que

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t))=0$$

ao longo das soluções das equações de Hamilton. Deduza que as órbitas do sistema no espaço de fases X estão contidas nas curvas/superfícies de nível $\{\ H(\mathbf{q},\mathbf{p})=c\}$ da hamiltoniana.

One-dimensional Newtonian motion in a time independent force field. The one-dimensional motion of a particle of mass m subject to a force $F(x)$ that does not depend on time is described by the Newton equation

$$m\ddot{x}=-\frac{dU}{dx}(x)\,,$$

where the potential $U(x)=-\int F(x)dx$ is some primitive of the force. The total energy

$$E\,(x,\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)$$

(which of course is defined up to an arbitrary additive constant) of the system is a constant of the motion, i.e. is constant along solutions of the Newton equation. In particular, once a value E of the energy is given (depending on the initial conditions), the motion takes place in the region where $U(x)\le E$, since the kinetic energy $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ is non-negative. Conservation of energy allows to reduce the problem to the first order ODE

$$\dot{x}^2=\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)\,,$$

which has the unpleasant feature to be quadratic in the velocity $\dot{x}$. Meanwhile, if we are interested in a one-way trajectory going from some x_0 to x, say with $x>x_0$, we may solve for $\dot{x}$ and find the first order autonomous ODE

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}\,.$$

There follows that the time needed to go from x_0 to x is

$$t(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(y)\right)}}\,.$$

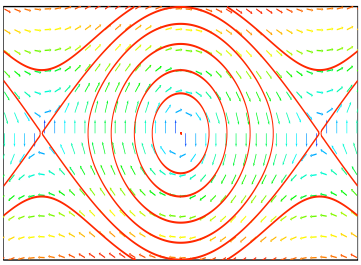
The inverse function of the above $t(x)$ will give the trajectory $x(t)$ with initial position $x(0)=x_0$ and initial positive velocity $\dot{x}(0)=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x_0)\right)}$, at least for sufficiently small times t.

Pêndulo matemático. A equação de Newton que modela as oscilações de um *pêndulo* é

$$\ddot{\theta}=-\omega^2\sin(\theta)\,,$$

onde $\omega=\sqrt{g/\ell}$, $g\simeq 980$ cm s^{-2} é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo e θ é o angulo que o pêndulo forma com a vertical. No espaço de fases, de coordenadas θ e $p:=\dot{\theta}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases}\dot{\theta}=p\\ \dot{p}=-\omega^2\sin(\theta)\end{cases}\,.$$



ex: Verifique que a energia

$$H(\theta, p) := \frac{1}{2}p^2 + \omega^2(1 - \cos(\theta))$$

é uma constante do movimento.

ex: Esboce as curvas de energia constante e o campo de velocidades, e conjeture sobre as trajetórias.

ex: Show that the motion with energy E is given by

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - \cos(\theta))}}$$

ex: Define the new variable $x := \sqrt{\frac{2}{E+1}}\sin(\theta/2)$ and the square energy $K := \sqrt{\frac{E+1}{2}}$, and show that the motion reads

$$\dot{x} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - K^2x^2)}$$

Deduce that time is given by the so called *Jacobi's elliptic integral of the first kind*

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - K^2x^2)}}$$

whose solution (i.e. x as a function of time t) is "defined" as the *elliptic function* $x(t) = \mathrm{sn}(t, K)$ (see [**?**]).

Oscilador harmónico/lei de Hooke. As pequenas oscilações de um péndulo à volta da posição de equilíbrio $\theta = 0$, ou as oscilações de uma partícula sujeita à *lei de Hooke*, são modeladas pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q\,.$$

No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}$$

ex: Verifique que a energia

$$H(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento.

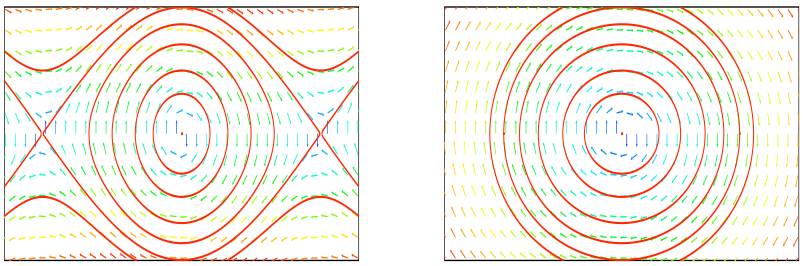
ex: Esboce as curvas de energia constante e o campo de velocidades, e conjeture sobre as trajetórias.

ex: Fixada uma energia positiva$E$, o movimento acontece no intervalo (x_-, x_+) com $x_\pm = \pm\sqrt{2E}/\omega$, e a velocidade satisfaz a equação quadrática

$$\dot{x}^2 = \omega\sqrt{(|x_\pm|^2 - x^2)}\,.$$

Determine a trajetória de x_- até $x \le x_+$.

ex: Calcule o tempo necessário para deslocar o oscilador de x_- até x_+, e mostre que não depende da energia E.



Retratos de fases do pêndulo matemático e do oscilador harmónico.

Gravidade real e velocidade de escape. A distância r de uma partícula de massa m do centro da Terra satisfaz a equação de Newton

$$m\,\ddot{r} = -m\,g\,\frac{R^2}{r^2}\,,$$

onde $R \simeq 6.3710 \times 10^6$ m é o raio (médio) da Terra (assim que, naturalmente, $r \geq R$) e $g = GM/R \simeq 9.80665$ m·s^{-2} a aceleração gravitacional próxima da superfície da Terra, sendo $G \simeq 6.674{\times}10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2} a constante gravitacional e $M \simeq 5.9736{\times}10^{24}$ kg a massa da Terra. Nesta aproximação, consideramos o verdadeiro campo gravitacional gerado pela Terra, cujo potencial é $U(r) = mgR^2/r$, mas desprezamos a influência da Lua assim como dos outros planetas. Se o movimento da partícula é radial, então a energia total, que é conservada, é dada por

$$E = \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + m\,g\,\frac{R^2}{r}$$

assim que

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}E - g\frac{R^2}{r}}$$

ex: Escreva o integral que representa o tempo necessário para deslocar a partícula da superfície da Terra, ou seja, $r_0 = R$, até uma altura $h = r - R > 0$ acima da superfície, dada uma energia inicial $E > mgR$ (ou seja, uma velocidade inicial positiva).

ex: Determine a menor velocidade inicial necessária para fugir do campo gravitacional da Terra, ou seja, para atingir uma altura infinita (chamada *velocidade de escape*).

5 EDOs lineares de primeira ordem*

[Ap69] *Vol. 1*, **8.1-7**

EDOs lineares de primeira ordem. Uma EDO *linear de primeira ordem* é uma lei

$$\dot{x} + p(t)\, x = q(t) \tag{5.1}$$

para o observável $x(t)$, onde os "coeficientes" $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas definidas num intervalo de tempos (por exemplo, em toda a reta real).

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções da EDO linear de primeira ordem (5.1), então a diferença $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução da *equação homogénea associada*

$$\dot{y} + p(t)\, y = 0 \tag{5.2}$$

O espaço das soluções da equação homogénea (5.2) é um espaço vetorial de dimensão 1, uma reta $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}$ gerada, por exemplo, pela solução

$$\boxed{y_1(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}} \tag{5.3}$$

que vale $y_1(t_0) = 1$ no instante inicial t_0. Portanto, o espaço das soluções da equação linear (5.1) é uma reta afim $z + \mathcal{H}$, onde $z(t)$ é uma solução particular de (5.1).

A solução da EDO linear (5.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada usando o método da "variação das constantes/dos parâmetros". O primeiro passo consiste em determinar uma solução não-trivial $y(t)$ da equação homogénea (5.2) (por exemplo, a solução (5.3), que tem valor 1 no instante inicial). O segundo passo consiste em substituir a "conjetura"

$$x(t) = \lambda(t)\, y(t)$$

(o fator λ é o parâmetro que varia!) na equação não-homogénea (5.1), deduzir a EDO simples

$$\dot{\lambda} y + \lambda \dot{y} + p\lambda y = q \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\lambda} y = q$$

(porque $\lambda \dot{y} + p\lambda y = 0$, sendo y uma solução da homogénea) para o parâmetro $\lambda(t)$, e integrar

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{q(s)}{y(s)}\, ds\,,$$

usando a condição inicial $x_0 = \lambda(t_0)\, y(t_0)$. Observe que se $y(t_0) = 1$, como sugerido, então $x_0 = \lambda(t_0)$. O resultado é a seguinte receita (mas é mais fácil lembrar o método!).

Teorema 5.1. *A solução da (5.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é*

$$\boxed{x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(u)\, du} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} p(u)\, du} q(s) ds \right).}$$

ex: Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \qquad \dot{x} + 2x = t \qquad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \qquad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

ex: Resolva os seguintes problemas de Cauchy nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan\theta = \cos\theta \qquad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

Queda livre com atrito. Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência pode ser modelada como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade, assim que a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - mg$$

onde $\gamma > 0$ é um coeficiente de atrito. Portanto, a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$m\dot{v} = -\gamma v - mg\,.$$

ex: Resolva o problema com condição inicial $v(0) = 0$.

ex: Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para um valor assimptótico $\overline{v}$ quando $t \to \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.

ex: Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $q(t)$ com condição inicial $q(0) = q_0 > 0$.

Circuito RL. A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L, é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V(t)$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

As soluções da equação homogénea, ou seja, com $V(t) = 0$ (circuito desligado), são proporcionais a $e^{-(R/L)t}$, e portanto decrescem exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau = L/R$. Se o circuito é alimentado com tensão constante $V(t) = E$, então a solução estacionária é a $\overline{I} = E/R$ (lei de Ohm). A diferença $x(t) = I(t) - \overline{I}$ é solução de $\dot{x} = -(R/L)x$, e portanto a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = \overline{I} + e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0 - \overline{I}\right)\,,$$

assimptótica à lei de Ohm.

Quando a tensão que alimenta o circuito é variável, então a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0 + \tfrac{1}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\,V(\tau)\,d\tau\right)\,.$$

ex: Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E\sin(\omega t)$. Verifique que a solução com $I(0) = 0$ é

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\sin\left(\omega t - \phi\right) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde ϕ é uma fase que depende de ω, L e R.

Lei do arrefecimento de Newton. Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ pode ser modelada pela *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k\left(T - M(t)\right)$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva (que depende do material do corpo). A solução com condição inicial $T(0) = T_0$ é

$$T(t) = e^{-kt}\left(T_0 + k\int_0^t e^{k\tau}M(\tau)\,d\tau\right)\,.$$

ex: Se a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$, então a diferença $x(t) := T(t) - M$ satisfaz a EDO

$$\dot{x} = -kx\,.$$

Determine $T(t)$ e diga o que acontece quando $t \to \infty$

ex: Determine a solução assimptótica (ou seja, quando t é grande) quando a temperatura do meio ambiente é a função periódica $M(t) = M\sin(\omega t)$.

ex: Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100^oC, é colocada numa sala cuja temperatura é de 20^oC. Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60^oC em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40^oC.

Equações de Bernoulli. Uma EDO da forma

$$\dot{x} + p(t)\,x = q(t)\,x^n,$$

onde p e q são funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $n \neq 0,\ 1$ (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita *equação de Bernoulli*.

ex: Verifique que $x(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio da equação de Bernoulli.

ex: Seja $k = 1-n$. Mostre que $x(t)$ é uma solução positiva da equação de Bernoulli com condição inicial $x(t_0) = x_0 > 0$ se e só se a função $y(t) = x(t)^k$ é uma solução da EDO linear

$$\dot{y} + k\,p(t)\,y = k\,q(t)$$

com condição inicial $y(t_0) = (x_0)^{1/k}$.

ex: Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$\dot{x} + x = x^2\,(\cos t - \sin t) \qquad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} + e^{t^2}\,x = x^2 \log t \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$\dot{x} - x/t = t\sqrt{x} \qquad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

6 Simetrias e EDOs homogéneas*

ref: [Ar89] **I.1**

Simetrias de uma equação diferencial. Seja $\mathbf{v} : X \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores que define a EDO autónoma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{6.1}$$

num espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou, em geral, numa variedade diferenciável). Uma *simetria* do campo $\mathbf{v}$, ou da EDO autónoma (6.1), é um difeomorfismo $g : X \to X$ que deixa invariante o campo de vetores, ou seja, tal que

$$\mathbf{v}(g(\mathbf{x})) = Dg_{\mathbf{x}}\,\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

para todo ponto $\mathbf{x} \in X$, onde $Dg_{\mathbf{x}}$ denota a derivada de g no ponto $\mathbf{x}$. Se o vetor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é a velocidade $\dot{\varphi}(0)$ de uma curva $t \mapsto \varphi(t)$ que passa por $\mathbf{x}$ no instante $t = 0$, então, por definição, o vetor $Dg_{\mathbf{x}}\,\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é a velocidade $\dot{\psi}(0)$ da curva $t \mapsto \psi(t) := g(\varphi(t))$, que passa por $g(\mathbf{x})$ no instante $t = 0$. Consequentemente, se $\varphi(t)$ é uma solução de (6.1) e g é uma sua simetria, então também $g \circ \varphi$ é uma solução.

Mais em geral, uma *simetria* da equação diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \tag{6.2}$$

é uma simetria do campo de direções $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, ou seja, uma simetria do campo de vetores $(1, \mathbf{v}(t, \mathbf{x}))$, definido no espaço de fases ampliado $\mathbb{R} \times X$. A cada curva integral da EDO (6.2) corresponde uma solução da EDO autónoma $(\dot{t}, \dot{\mathbf{x}}) = (1, \mathbf{v}(t, \mathbf{x}))$, e vice-versa. Consequentemente,

Teorema 6.1. *As simetrias de uma equação diferencial,* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ *ou* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$*, enviam soluções/curvas integrais em soluções/curvas integrais.*

É claro que as simetrias de uma equação diferencial formam um grupo (de difeomorfismos do espaço de fases ou do espaço de fases ampliado).

ex: Uma equação simples $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t)$, definida em $X \subset \mathbb{R}^n$, é invariante para translações $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$, com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. O grupo das suas simetrias contém portanto o grupo aditivo $\mathbb{R}^n$.

ex: Uma equação autónoma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ é invariante para translações no eixo dos tempos $t \mapsto t + \tau$, com $\tau \in \mathbb{R}$ (que são simetrias do espaço de fases ampliado). O grupo das suas simetrias contém portanto o grupo aditivo $\mathbb{R}$.

Homotetias e funções homogéneas. As *homotetias (positivas)* do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ são as transformações $\mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}$, com $\lambda > 0$. As regiões $D \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ invariantes por homotetias são chamadas regiões homogéneas.

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ (ou um campo vetorial), definida num domínio homogéneo, é dita *homogénea de grau* k se

$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \forall\, \mathbf{x} \in D\,,$$

Em particular, é dita *homogénea* (de grau 0) se é invariante para homotetias, ou seja, se

$$f(\lambda\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \forall\, \mathbf{x} \in D\,.$$

Teorema 6.2 (Euler)**.** *Uma função diferenciável* $f : D \to \mathbb{R}$ *é homogénea de grau* k *sse*

$$\langle \mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = k\, f(\mathbf{x})$$

para todos os pontos $\mathbf{x} \in D$*.*

ex: Prove o teorema de Euler (calcule as derivadas em ordem a λ dos dois termos $f(\lambda\mathbf{x})$ e $\lambda^k f(\mathbf{x})$ quando $\lambda = 1$).

ex: Determine os polinómios homogéneos de grau 1, de grau 2 e de grau 3 no plano $\mathbb{R}^2$.

ex: Mostre que as únicas funções homogéneas e contínuas definida em todo o espaço $\mathbb{R}^n$ são as constantes (observe que as funções homogéneas são constantes ao longo das semi-retas que saem da origem, logo, se a origem está no domínio da função ...).

ex: Determine o grau de homogeneidade dos campos de forças elástico e gravitacional/elétrico, definidos por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\,,$$

respetivamente (o segundo definido para $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\,0\}$).

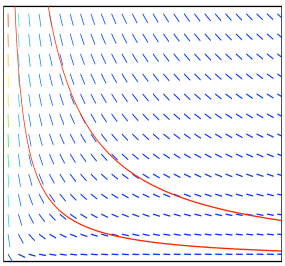
ex: Diga se as seguintes funções $f(x, y)$, definidas em oportunos domínios do plano, são homogéneas:

$$x/y \qquad e^{x-y} \qquad \frac{x^2 - xy}{xy + 3y^2} \qquad \sin(y)\cos(x)$$

EDOs homogéneas. Uma EDO *homogénea* é uma equação diferencial

$$\dot{x} = v(t, x)$$

definida, num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ do plano de coordenadas (t, x), por um campo de direções homogéneo, ou seja, tal que $v(\lambda t, \lambda x) = v(t, x)$ para todos os $\lambda > 0$. As homotetias $(t, x) \mapsto (\lambda t, \lambda x)$, com $\lambda \in \mathbb{R}_+$, enviam curvas integrais de uma EDO homogénea em curvas integrais.



A mudança de variável $y(t) := x(t)/t$, num domínio onde $t > 0$ ou $t < 0$, transforma uma EDO homogénea $\dot{x} = v(t, x)$ numa EDO separável $y + t\dot{y} = v(1, y)$. Ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(1, x/t) \qquad \Rightarrow \qquad y + t\dot{y} = v(1, y) \qquad \text{se } \; y = x/t}$$

ex: Seja $\dot{x} = v(t, x)$ uma EDO homogénea. Mostre que, se $\varphi(t)$ é uma solução e $\lambda > 0$, então também $\phi(t) := \lambda \cdot \varphi\,(t/\lambda)$ é uma solução.

ex: Seja $\varphi(t)$ uma solução da EDO homogénea $\dot{x} = v(t, x)$ tal que $\varphi(1) = 5$ e $\varphi(2) = 7$. Se $\phi(t)$ é uma outra solução tal que $\phi(3) = 15$, quanto vale $\phi(6)$?

ex: Resolva as seguintes EDOs homogéneas

$$\dot{x} = -t/x \qquad \dot{x} = \frac{x - t}{x + t} \qquad \dot{x} = 1 + x/t$$

$$\dot{x} = x/t \qquad \dot{x} = 2\frac{t}{x}e^{x/t} + \frac{x}{t} \qquad \frac{dy}{dx} = y/x + \sin(y/x)\,,$$

definidas em oportunos domínios, e esboce a representação gráfica de algumas das soluções.

Equação de Newton com forças homogéneas. Considere a equação de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula sujeita a una força homogénea de grau k, ou seja, tal que

$$\mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^k \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

para todos os $\lambda > 0$ e todo os pontos $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. As "quase-homotetias"

$$(t, \mathbf{r}) \mapsto (T, \mathbf{R}) = (\lambda^\alpha t, \lambda^\beta \mathbf{r}),$$

com $\lambda > 0$, enviam curvas integrais em curvas integrais se os "pesos" α e β satisfazem a relação

$$\beta(1-k) = 2\alpha.$$

De fato, se $\mathbf{r}(t)$ é uma solução, então

$$m\frac{d^2\mathbf{R}}{dT^2} = m\,\lambda^{\beta-2\alpha}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \lambda^{\beta-2\alpha}\;\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lambda^{\beta-2\alpha}\;\lambda^{-\beta k}\;\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{R})$$

sendo $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \lambda^{\beta k}\,\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Em particular, uma órbita fechada de dimensão linear L e período de revolução T é enviada numa órbita fechada de dimensão linear $L' = \lambda^\beta L$ e período de revolução $T' = \lambda^\alpha T$, e portanto o quociente T^β/L^α é constante.

ex: Considere uma força constante (e.g. a gravidade próximo da superfície da terra)

$$F(x) \propto 1,$$

e determine a relação entre espaço percorrido e tempo necessário.

ex: Considere a forçã elástica (e.g. lei de Hooke, oscilador harmónico)

$$F(x) \propto -x,$$

e deduza que os períodos das órbitas fechadas não dependem das amplitudes das oscilações.

ex: Considere uma força elástica "fraca"

$$F(x) \propto -x^3,$$

Determine o período das pequenas oscilações em quanto função da amplitude.

ex: Considere a força gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \propto -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

e deduza a *terceira lei de Kepler*[17]: "os quadrados dos períodos de revolução T são proporcionais aos cubos das distâncias médias L do Sol aos planetas, ou seja, T^2/L^3 é uma constante".

[17] Johannes Kepler, *Harmonices mundi*, 1619.

7 Números complexos e oscilações

ref: [Ap69] *Vol. 1*, **9.1-10** ; [MW85] *Vol. 2*, **12.6.**

23 fev 2021

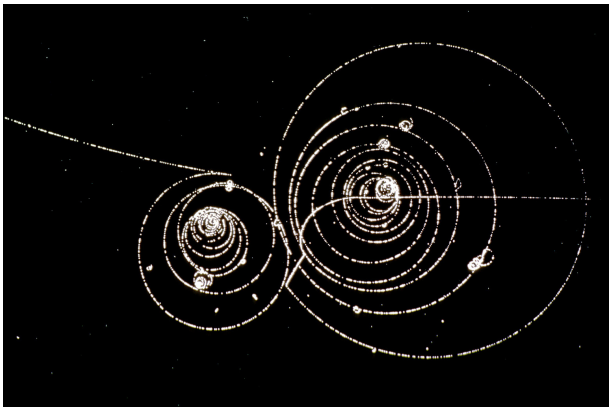
História muito breve. Os números complexos foram inventados/descobertos no século XVI como un truque "sofístico" para resolver polinómios do género $x^3 + px + q = 0$. Hoje em dia, fazem parte da formulação das leis fundamentais da Natureza, como, por exemplo, a *equação de Schrödinger*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

da mecânica quântica, ou os *integrais de Feynman*

$$\int_{\text{paths}} e^{i\mathcal{S}[x]/\hbar}\,\mathcal{D}x$$

da teoria quântica dos campos.



Nas palavras de Roger Penrose [Pe05],

> `... complex numbers, as much as reals, and perhaps even more, find a unity with nature that is truly remarkable. It is as though Nature herself is as impressed by the scope and consistency of the complex-number system as we are ourselves, and has entrusted to these numbers the precise operations of her world at its minutest scales.`

Exponencial e funções trigonométricas. A função exponencial, definida pela série de potências

$$e^t := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \dots,$$

é a (única) solução da equação diferencial $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = 1$. As funções $e^{\alpha t}$, obtidas com uma reparametrização do tempo, descrevem um decaimento ou um crescimentos exponencial, dependendo do sinal do parâmetro real α.

As séries de potências das funções trigomométricas,

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots \qquad \text{e} \qquad \sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots$$

parecem ser formadas pelas partes par e ímpar do exponencial, respetivamente, mas têm sinais alternados. Uma maneira, aparentemente artificial, de obter os sinais alternados consiste em considerar uma reparametrização do tempo do género $t \mapsto it$, onde i é um "número imaginário" que satisfaz $i^2 = -1$ (este truque, chamado "rotação de Wick", resulta ser uma arma poderosa nas mãos dos físicos teóricos modernos). Se definimos $z(t) := e^{it}$ e calculamos a sua derivada de acordo com as regras algébricas usuais, observamos que esta função é solução da equação diferencial $\dot{z} = iz$

(que não tem significado físico, pois contêm o número imaginário i). No entanto, ao derivar uma segunda vez, chegamos a

$$\ddot{z} = -z\,,$$

que é a equação diferencial do oscilador harmónico, cuja soluções são as funções trigonométricas! De fato, a substituição do tempo real t pelo tempo imaginário it na série de potências que define o exponencial, mostra que formalmente

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}it^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}it^5 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots\right) + i\left(t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots\right), \end{aligned}$$

Esta é a famosa *fórmula de Euler*,

$$\boxed{e^{\,it} = \cos t + i \sin t}$$

O corpo dos números complexos. Do ponto de vista algébrico, o corpo dos *números complexos* é $\mathbb{C} := \mathbb{R}(i)$, onde $i^2 = -1$. Ou seja, é o conjunto $\mathbb{C}$ das expressões formais $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, que chamamos "números complexos", munido das operações binárias "soma", definida por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) \tag{7.1}$$

e "multiplicação", definida por

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)\,. \tag{7.2}$$

É subentendido que dois números complexos $x_1 + iy_2$ e $x_2 + iy_2$ são iguais sse $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. É também conveniente denotar simplesmente $x + i0 = x$ e $0 + iy = iy$. Em particular, $x \mapsto x + i0$ define uma inclusão $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, e as operações definidas acima são as usuais operações no corpo dos reais.

Se $i := 0 + i \cdot 1 \in \mathbb{C}$, então $i \cdot i = -1$, ou seja, $\pm i$ são (as únicas) "raízes quadradas de -1". De fato (e esta é a origem das fórmulas acima), somas e multiplicações entre números complexos podem ser manipuladas como as correspondentes operações entre números reais (ou seja, usando as propriedades associativas, comutativas e distributivas), e depois substituindo $i \cdot i$ por -1.

É natural identificar os números complexos $z = (x + iy)$ com os pontos/vetores (x, y) do plano $\mathbb{R}^2$, e denotar a correspondência com $x + iy \approx (x, y)$. Então a soma $z_1 + z_2$ corresponde à soma dos vetores $z_1 \approx (x_1, y_1)$ e $z_2 \approx (x_2, y_2)$ do plano. A reta real $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é naturalmente identificada com o eixo dos x's em $\mathbb{R}^2$, e a reta "imaginária" $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é naturalmente identificada com o eixo dos y's.

O conjunto $\mathbb{C}$, munido da operação $+$ definida em (7.1), é um grupo abeliano aditivo, cujo elemento neutro é $0 := 0 + i0$. O oposto do número complexo $z = x + iy$ é o número complexo $-z = (-x) + i(-y)$ (denotado simplesmente por $-z = -x - iy$), que verifica $z + (-z) = 0$. Somar um número complexo z, i.e. fazer $w \mapsto w + z$, corresponde a uma translação no plano complexo $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$.

Todo $z = x + iy \neq 0$ admite um único inverso multiplicativo, um número complexo $1/z$ tal que $z \cdot (1/z) = (1/z) \cdot z = 1$, dado por

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\,,$$

como é fácil verificar (observe que se $z \neq 0$ então $x^2 + y^2 > 0$). Consequentemente, o conjunto $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C}\backslash\{0\}$, munido da operação $\cdot$ definida em (7.2), é um grupo abeliano, o grupo multiplicativo dos números complexos invertíveis, cujo elemento neutro é $1 := 1 + i0$. As potências inteiras de um número complexo são definidas por recorrência: $z^{n+1} := z \cdot z^n$, se $n \geq 1$, sendo $z^0 := 1$. Se $z \in \mathbb{C}^\times$, então as potências negativas são definidas por $z^{-n} := (1/z)^n$. Por exemplo, $i^2 = -1$, e $i^{-1} = 1/i = -i$.

A propriedadde distributiva $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$, que implicitamente foi usada na definição da multiplicação, mostra que $\mathbb{C}$ é um corpo. Contém, como subcorpos, o corpo dos reais $\mathbb{R}$, que a sua vez contém o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais. No entanto, não é possível extender a ordem de $\mathbb{R}$ a uma ordem de $\mathbb{C}$ compatível com as operações, ou seja, o corpo dos números complexos não é um corpo ordenado.

ex: Calcule

$$(2+i3)+(3-i2) \qquad (1-i)\cdot(2-i) \qquad (1+i)+(1-i)\cdot(2-i5)$$

ex: Na identificação $\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$ definida por $x+iy\approx(x,y)$, o produto $(a+ib)(x+iy)$ é dado por

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Em particular, se $a+ib\neq 0$, então o produto é

$$\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde $\tan\theta = b/a$ se $a\neq 0$, ou $\theta=\pi/2$ se $a=0$. Esta fórmula revela o significado geométrico da multiplicação: a multiplicação por um número complexo $a+ib$ diferente de zero corresponde a uma rotação de um âgulo θ e uma homotetia de razão $\sqrt{a^2+b^2}$.

ex: Represente na forma $x+iy$ os seguintes números complexo

$$i^3 \qquad \frac{1}{1+i} \qquad \frac{2-i}{1+i} \qquad \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{i}{2+i} \qquad (1-i3)^2 \qquad i^{17} \qquad (2\pm i)^3$$

Conjugação. O *conjugado* de $z=x+iy$ é

$$\boxed{\overline{z} := x-iy\,,}$$

ou seja, a imagem do ponto $x+iy\approx(x,y)$ pela reflexão na reta $y=0$ do plano $\mathbb{R}^2\approx\mathbb{C}$. A conjugação respeita soma e produtos, ou seja, verifica

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2} \qquad \text{e} \qquad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

(a segunda identidade não é óbvia, mas um "milagre" que relaciona multiplicação e geometria euclidiana do plano). Observe também que a conjugação é uma involução, ou seja, $\overline{\overline{z}}=z$.

Os números reais

$$x=\Re(z):=\frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{e} \qquad y=\Im(z):=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z=x+iy$, respetivamente. Observe que $z=\overline{z}$ sse z é real, i.e. sse $\Im(z)=0$.

Módulo. A conjugação permite definir $N(z):=z\overline{z}=x^2+y^2$, que é um número real não-negativo (o "módulo" de z no sentido da teoria de números), e portanto o *módulo*, ou *valor absoluto*, de $z=x+iy$,

$$\boxed{|z|:=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}}$$

que é a norma euclidiana do vetor $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Em particular, $|z|=0$ sse $z=0$. O valor absoluto é multiplicativo, ou seja,

$$|zw|=|z|\,|w|$$

e, consequentemente, $|z/w|=|z|/|w|$ se $w\neq 0$. O inverso multiplicativo de um número complexo $z\neq 0$ é então

$$1/z=\overline{z}/|z|^2\,.$$

Os números complexos de norma um definem a *circunferência unitária* $\mathbf{S}:=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|=1\}\subset\mathbb{C}$, que é um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$, isomorfo ao grupo $U(1)$ das transformações unitárias do espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}$.

ex: Verifique que $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Números complexos e matrizes reais 2×2. A cada número complexo $z = x + iy$ é possível associar uma matriz real 2×2 definida por

$$M(z) := xI + yJ = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},$$

onde I denota a matriz identidade e

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfaz $J^2 = -I$ (que lembra a identidade $i^2 = -1$). Observem que a imagem desta aplicação $M : \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é um subconjunto próprio do espaço linear de todas as matrizes reais $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, o plano definido pelas equações $a - d = 0$ e $b + c = 0$.

É imediato verificar que este é um isomorfismo entre as duas estrututras algébricas. Ou seja, a soma $z+w$ entre os números complexos z e w corresponde à soma $M(z)+M(w)$ entre as matrizes, e o produto zw entre os números complexos z e w corresponde ao produto $M(z)M(w)$ entre as matrizes (que é portanto comutativo para estas classe de matrizes). O determinante da matriz correspondente ao número complexo z é

$$\mathrm{Det}\, M(z) = x^2 + y^2 = |z|^2 ,$$

o quadrado do valor absoluto de z. Em particular, se $z \neq 0$ então $M(z)$ é invertível, e a sua inversa é $M(z)^{-1} = M(1/z)$. Também interessante é observar que $M(\overline{z}) = M(z)^\top$.

ex: Interprete, e prove, a seguinte identidade entre números reais:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 .$$

(quando a, b, c, e d são inteiros, esta é a *identidade de Diofanto*, ou de *Brahmagupta-Fibonacci*, que diz que "um produto de duas somas de dois quadrados é também uma soma de dois quadrados")

Raízes de polinómios reais de grau dois. Um polinómio de grau dois com coeficiente reais é uma função do género $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Para calcular as suas raízes, ou seja, os pontos onde $f(x) = 0$, podemos dividir por a, e considerar o polinómio mónico (ou seja, tal que o termo de grau maior tem coeficiente um)

$$f(z) = z^2 + 2\alpha z + \beta$$

(o fator 2 está para simplificar as contas). Ao "completar o quadrado" temos que

$$\begin{aligned} z^2 + 2\alpha z + \beta &= z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 - \alpha^2 + \beta \\ &= (z + \alpha)^2 + (\beta - \alpha^2) \end{aligned}$$

e portanto as raízes são soluções de

$$(z + \alpha)^2 = \alpha^2 - \beta .$$

O número $\delta := \alpha^2 - \beta$ é chamado "discriminante" do polinómio. Se $\delta \geq 0$, temos duas raízes reais $z_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\delta}$, eventualmente coincidentes quando $\delta = 0$. Em termos dos coeficientes originais a, b, c, esta é a famosa "fórmula resolvente"

$$\boxed{z_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Se $\delta < 0$, e portanto $\delta = -\omega^2$ para algum $\omega > 0$, o polinómio não admite raízes reais. No entanto, podemos observar que $(\pm i\omega)^2 = \delta$. Então temos duas raízes complexas e conjugadas

$$\boxed{z_\pm = -\alpha \pm i\omega .}$$

Nos dois casos, o polinómio mónico fatoriza como produto

$$f(z) = (z - z_+)(z - z_-)$$

de duas raízes, simétricas em relação ao eixo real.

ex: Resolva as seguintes equações

$$z^2 + 5 = 0 \qquad z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad z^2 + z + 1 = 0$$

Representação polar. A *representação polar* do número complexo $z = x + iy \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$\boxed{z = \rho\, e^{i\theta}}$$

onde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ é o módulo de z, $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é um *argumento* de z, ou seja, um ângulo tal que $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\sin(\theta)$ (logo definido a menos de múltiplos inteiros de 2π), e o número complexo unitário $e^{i\theta} \in \mathbf{S}$ é (provisoriamente) definido pela *fórmula de Euler*

$$\boxed{e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)\,.} \tag{7.3}$$

à custa, portanto, das funções trigonométricas cos e sin, supostas definidas anteriormente (e.g. num curso de cálculo). Pode ser útil escolher um valor do argumento, e chamar *argumento principal* de um número z o único argumento que satisfaz $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.

É imediato verificar que o conjugado de $z = \rho e^{i\theta}$ é

$$\overline{\rho e^{\,i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$$

ou seja, a conjugação apenas muda o sinal do argumento. Por exemplo, $\bar{i} = -i = 1/i$.

Produto em representação polar. Se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, então as fórmulas de adição para seno e coseno mostram que

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \tag{7.4}$$

Por exemplo, o quadrado de um número complexo $z = \rho e^{\,i\theta}$ é $z^2 = \rho^2\, e^{\,i2\theta}$. Também, se $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}\,.$$

Estas fórmulas revelam, mais uma vez, o significado geométrico da multiplicação entre números complexos. Uma primeira consequência é que o inverso do número complexo $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho > 0$, é $z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$. Outra é que a multiplicação por $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$, no plano $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, ou seja, a transformação $w \mapsto zw$, corresponde a uma homotetia $w \mapsto \rho w$ de razão $|z| = \rho > 0$ (uma dilatação ou contração se $\rho \neq 1$) e uma rotação $w \mapsto e^{i\theta}\, w$ de um ângulo θ.

Em particular, a multiplicação por um número complexo de módulo um, ou seja, da forma $e^{i\theta}$ com θ real, corresponde a uma rotação anti-horária de um ângulo θ. Por exemplo, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$ é uma "raiz quadrada" da rotação $z \mapsto e^{i\pi} z = -z$ de um ângulo π, i.e. uma rotação de um ângulo $\pi/2$.

ex: Represente na forma polar os seguintes números complexos:

$$-i \qquad i - 1 \qquad 1 + i \qquad 3 - 4i$$

ex: Calcule

$$e^{i\pi} \qquad e^{-i\pi/2}$$

Potências e raízes. As potências do número complexo z são definidas recursivamente por

$$z^0 = 1 \qquad z^{n+1} = z \cdot z^n \qquad \text{se } n \geq 1$$

Observe que

$$\left(\rho e^{\,i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta} \tag{7.5}$$

Em particular, $z^n \neq 0$ se $z \neq 0$. Consequentemente, é possível definir potências negativas se $z \neq 0$, por meio de $z^{\,-n} := 1/z^n$. Os pontos $\{\, z^n\,,\, n \in \mathbb{Z}\}$ desenham uma espiral no plano

complexo, se $|z| \neq 1$. Por outro lado, as diferentes potências de um número complexo unitário $e^{i\theta}$ pertencem à circunferênci unitária, e formam um conjunto finito se θ é um múltiplo racional de π.

Se $n = 1, 2, 3, \ldots$, então cada número complexo $w \neq 0$ possui n *raízes n-ésimas*, i.e. n números complexos z que resolvem

$$z^n = w\,.$$

De fato, as raízes n-ésimas de $w = \rho e^{i\theta}$, com $\rho \neq 0$, são os números

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+2\pi k)/n}$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Os pontos z_k formam os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$ e centro 0. Em particular, os números complexos

$$\zeta_k := e^{i2\pi k/n}\,,$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, que resolvem $(\zeta_k)^n = 1$ e portanto pertencem a circunferência unitária, são chamados *raízes n-ésimas da unidade*. Observe que $\zeta_k = (\zeta_1)^k$, onde $\zeta_1 = e^{i2\pi/n}$ é uma raiz "primitiva".

ex: Calcule

$$\sqrt{i} \qquad \sqrt{-i} \qquad \sqrt{1+i} \qquad \sqrt[4]{i}$$

ex: Resolva as equações

$$z^3 = -1 \qquad z^5 = 1 \qquad z^3 = 81\,.$$

Raízes de polinómios. Um polinómio de grau n é uma expressão (função complexa de uma variável complexa)

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{7.6}$$

onde os coeficientes a_k's são números complexos e o primeiro é $a_n \neq 0$. Um número complexo p é uma *raiz* do polinómio $f(z)$ se $f(p) = 0$. As raízes de $f(z)$ são também as raízes do polinómio mónico $f(z)/a_n = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$, que é chamado polinómio *mónico*, e vice-versa. Gauss provou em 1799 o que hoje é chamado *teorema fundamental da álgebra*.

Teorema 7.1 (Gauss)**.** *Todo polinómio de grau $n \geq 1$ admite (pelo menos) uma raiz em $\mathbb{C}$.*

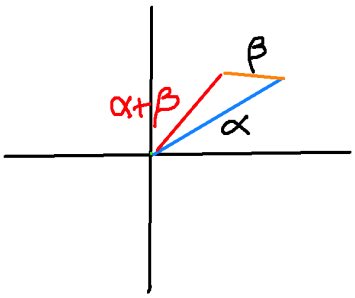
Demonstração. É claro que, a menos de dividir pelo coeficiente de grau máximo, basta provar o teorema para um polinómio mónico $f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ com $n \geq 1$. É também claro que se $|z| = R$ é suficientemente grande então também $|f(z)| \simeq R^n$ é grande, por exemplo superior ao valor de $|f(0)| = |a_0|$. Pelo teorema de Weierstrass, a função contínua $z \mapsto |f(z)|$ atinge um mínimo no disco fechado $|z| \leq R$, e, pela observação anterior, este mínimo é atingido num ponto p com $|p| < R$, e é também um mínimo absoluto de $|f(z)|$ no plano complexo. A menos de uma translação (ou seja de considerar o polinómo $f(z-p)$) podemos assumir que o mínimo é atingido na origem, e portanto que o polinómio tem a forma

$$f(z) = \alpha + z^m (b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k)$$

com $b_0 \neq 0$, $m \geq 1$, e que o seu mínimo módulo é $|f(0)| = |\alpha|$. Queremos provar que $\alpha = 0$, ou seja, que a origem é uma raiz do polinómio $f(z)$. Seja então $\alpha = \rho e^{i\theta} \neq 0$. O polinómio é da forma $\alpha + \beta(z)$, onde $\beta(z)$ é um polinómio de grau $m \geq 1$ que se anula na origem. Se o módulo de z é muito pequeno, então

$$\beta(z) = z^m (b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k) \simeq z^m b_0\,.$$

Ao variar z numa circunferência suficientemente pequena à volta da origem, $\beta(z)$ dá pelo menos uma volta (de fato, m voltas) em torno da origem, e portanto necessariamente o seu argumento assume valores próximos do oposto do argumento de α. Então, se $\alpha \neq 0$ e β é pequeno, é claro que $|\alpha + \beta| < |\alpha|$, como mostra a figura seguinte.



Mais precisamente, num ponto onde $\beta(z) \simeq \varepsilon e^{\,-i\theta}$ com $\varepsilon \ll \rho$,

$$|f(z) = |\alpha + \beta(z)| \simeq |\rho e^{\,i\theta} \; + \varepsilon e^{\,-i\theta}| = \rho - \varepsilon < |\alpha|\,,$$

o que contradiz o fato de $|\alpha|$ ser o mínimo absoluto de $|f(z)|$. □

Se p uma raiz do polinómio (7.6) de grau $n \geq 1$, então

$$f(z) = f(z) - f(p) = a_n(z^n - p^n) + \cdots + a_1(z - p)\,.$$

Então a identidade

$$z^k - p^k = (z - p)\,\left(z^{k-1} + z^{k-2}p + \cdots + zp^{k-2} + p^{k-1}\right)$$

implica que o polinómio fatoriza como $f(z) = (z - p)\,g(z)$, onde g é um polinómio de grau $n - 1$. Consequentemente,

Teorema 7.2. *Um polinómio mónico de grau $n \geq 1$ fatoriza no produto*

$$f(z) = (z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n)$$

onde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as suas n raízes, não necessariamente distintas.

A fatorização é única, a menos de permutações dos fatores. Vice-versa, é evidente que existe um único polinómio mónico de grau n cujas raízes são n números complexos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Se p é uma raiz do polinómio $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, então $\overline{p}$ é uma raiz do polinómio $\overline{f}(z) := \overline{a_n}\, z^n + \cdots + \overline{a_1}\, z + \overline{a_0}$, obtido de $f(z)$ trocando cada coeficiente pelo seu conjugado. Se os coeficientes de $f(z)$ são reais (i.e. $a_k = \overline{a_k}$), então $\overline{f} = f$. Consequentemente,

Teorema 7.3. *As raízes não reais de um polinómio com coeficientes reais ocorrem em pares de números complexos conjugados, p e $\overline{p}$.*

ex: Verifique que $(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$, e portanto, se $z \neq 1$,

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Considere $z = e^{i\theta}$ com $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$ e real, calcule a parte real e deduza

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n + 1/2)\theta)}{2\,\sin(\theta/2)}$$

ex: Mostre que se ω é uma raiz n-ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} = 0\,.$$

Fórmula de de Moivre. A fórmula de Euler (7.3) e a (7.5) implicam a *fórmula de de Moivre*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,. \tag{7.7}$$

Ao calcular as potências a esquerda usando a fórmula do binómio, é então possível deduzir fórmulas para $\cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta)$ enquanto polinómios em $\cos\theta$ e $\sin\theta$, com expoentes $\leq n$. Por exemplo,

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \text{e} \qquad \sin(2\theta) = 2\,\cos\theta\,\sin\theta\,.$$

Consequentemente, existem polinómios algébricos $T_n(x)$ de grau $n \geq 0$, (chamados *polinómios de Chebyshev*) tais que

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

(observe que as potências pares de $\sin\theta$ podem ser substituidas por potências pares de $\cos\theta$ usando a identidade trigonométrica).

ex: Calcule os polinómios de Chebyshev para valores pequenos de n, por exemplo T_2, T_3 e T_4.

ex: Calcule

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^{13} \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)^{17}$$

Exponencial complexo. A fórmula de Euler (7.3) e a propriedade (7.4) permitem definir o *exponencial* de um número complexo arbitrário $z = x + iy$ como

$$\boxed{e^z := e^x\,e^{iy} = e^x\,(\cos y + i\sin y)} \tag{7.8}$$

Assim, o módulo de e^z é igual ao número real e^x, que é estritamente positivo, e um argumento de e^z é igual a y, a parte imaginária de z. Em particular, $e^z \neq 0$. É imediato então verificar que o exonencial complexo satisfaz a regra do produto

$$e^{z+w} = e^z\,e^w$$

ou seja, define um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{C}$ no grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Em particular, o exponencial de um número complexo não é nulo, e o inverso multiplicativo de e^z é

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}\,.$$

Oscilações. Uma curva $t \mapsto (x(t), y(t))$ no plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ pode ser representada, usando a notação complexa, como a função (complexa de uma variável real) $z(t) = x(t) + i\,y(t)$. A sua velocidade, o campo vetorial $v(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ (pensado aplicado no ponto $z(t)$), é então $\dot{z}(t) := \dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t)$.

Dado ω real e positivo, a função

$$z(t) = e^{i\omega t}$$

descreve um ponto que percorre a circunferência unitária do plano complexo no sentido anti-horário com "frequência angular" ω, i.e. uma rotação cada período $T = 2\pi/\omega$, e portanto frequência $\nu = \omega/(2\pi)$ (medida em Hertz, rotações por segundo).

Mais em geral, a função

$$z(t) = c\,e^{i\omega t}\,,$$

onde $c = \rho e^{\,i\varphi}$ é um parâmetro complexo, descreve um ponto que percorre a circunferência de raio $|c| = \rho$ no sentido anti-horário. Um cálculo elementar mostra que a velocidade desta curva é $\dot{z}(t) = i\omega\,ce^{i\omega t}$. Ou seja, $z(t)$ satisfaz as equações diferenciais lineares

$$\dot{z} = i\omega z \qquad \text{e} \qquad \ddot{z} = -\omega^2 z\,.$$

com condições iniciais $z(0) = c$ e $\dot{z}(0) = i\omega c$. Consequentemente, a parte real (e também a parte imaginária) de $z(t)$,

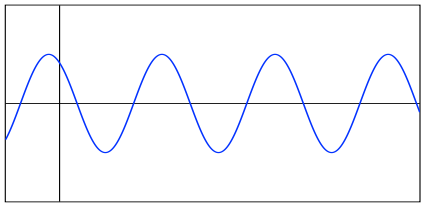
$$q(t) := \Re\,[z(t)] \;= \rho\cos(\omega t + \varphi)$$

é uma solução (real) do oscilador harmónico $\ddot{q} = -\omega^2 q$. De fato, as duas curvas $e^{\pm\omega t}$ são soluções de $\ddot{z} = -\omega^2 z$, e as soluções trigonométricas pode ser obtidas ao fazer combinações lineares complexas

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{\,-\omega t}\right) \qquad \text{e} \qquad \cos(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-\omega t}\right)$$

ex: Identifique as condições iniciais $q(0)$ e $\dot{q}(0)$ enquanto funções de $z(0) = \rho e^{i\varphi}$.

ex: Determine as constantes complexas c e d tais que a curva $z(t) = ce^{\,i\omega t} + de^{-\omega t}$ seja solução de $\ddot{z} = -\omega^2 z$ com condições iniciais $z(0) = a$ e $\dot{z}(0) = b$.



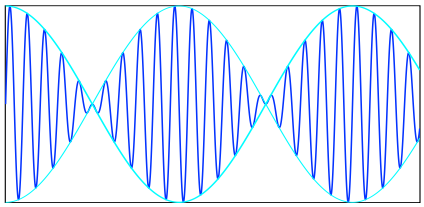
Oscilação $q(t) = \rho\cos(\omega t + \varphi)$.

Sobreposições. Se $\omega_1 = \omega + \varepsilon$ e $\omega_2 = \omega - \varepsilon$, a sobreposição das duas oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$ pode ser representada como

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} \\ &= e^{i\omega t}\left(e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t}\right) = 2\,e^{i\omega t}\cos(\varepsilon t) \end{aligned}$$

O seu valor absoluto $|z(t)|$ é máximo quando $\omega_1 t = \omega_2 t$ (módulo 2π), e mínimo quando $\omega_1 t - \omega_2 t = \pi$ (módulo 2π).

Em particular, se $\varepsilon \ll \omega$, então a sobreposição consiste numa modulação lenta (com período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) da frequência fundamental $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$.



Sobreposição $q(t) = \sin(0.95 \cdot t) + \sin(1.05 \cdot t)$.

Oscilações amortecidas. A curva definida pela função $z(t) = e^{(\alpha+i\omega)t}$ descreve um ponto no plano complexo que percorre uma espiral centrada na origem. Se $\alpha < 0$, então sua parte real (ou a sua parte imaginára),

$$q(t) = e^{\alpha t}\cos(\omega t)$$

descreve uma oscilação amortecida.

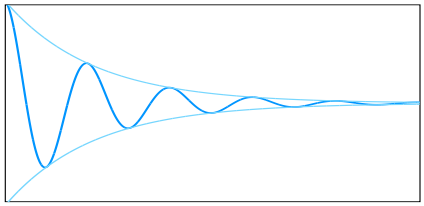


Gráfico de $q(t) = e^{-t}\,\sin(6t)$.

8 EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes

ref: [Ap69] *Vol. 1*, **8.8-14** ; [MW85] *Vol. 2*, **12.6-7**

2 mar 2021

Equação de Newton num potencial quadrático. A equação de Newton

$$\ddot{q} = -\beta q \tag{8.1}$$

determina a trajetória de uma partícula (de massa unitária) no campo de forças gerado por um potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$. Uma solução de equilíbrio é a solução trivial $q(t) = 0$ para todo tempo t, e é a única se $\beta \neq 0$.

Se $\beta = 0$, é evidente que as soluções da equação de Newton

$$\boxed{\ddot{q} = 0}$$

que neste caso é a equação da partícula livre, são

$$q(t) = a + bt$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias, que descrevem movimentos retilíneos uniformes.

Se $\beta = \omega^2 > 0$, um cálculo elementar mostra que duas soluções da equação de Newton

$$\boxed{\ddot{q} = -\omega^2 q}$$

chamada *oscilador harmónico*, são $\varphi_+(t) = \cos(\omega t)$ e $\varphi_-(t) = \sin(\omega t)$. Por linearidade, uma solução é também uma sobreposição

$$q(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias, que descrevem oscilações de frequência angular ω, logo período $T = 2\pi/\omega$, em torno da posição de equilíbrio.

Se $\beta = -k^2 < 0$, um cálculo elementar mostra que duas soluções da equação de Newton

$$\boxed{\ddot{q} = k^2 q}$$

chamada *oscilador invertido*, são $q_\pm(t) = e^{\pm kt}$, ou também, ao fazer uma mudanza de base, $\varphi_+(t) = \cosh(kt) = (e^{kt} + e^{-kt})/2$ e $\varphi_-(t) = \sinh(kt) = (e^{kt} - e^{-kt})/2$. Por linearidade, uma solução é também uma sobreposição

$$q(t) = ae^{kt} + be^{-kt} = c\cosh(kt) + d\sinh(kt)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias. As soluções genéricas se afastam do equilíbrio, e de fato divergem, quando $t \to \pm\infty$.

Partícula num potencial quadrático com atrito. O atrito é modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. A equação de Newton de uma partícula num potencial quadrático com atrito é portanto da forma

$$\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - \beta q\,, \tag{8.2}$$

onde $\gamma = 2\alpha$ é um coeficiente de atrito (positivo ou nulo no mundo real, também negativo nos manuais de matemática). Um cálculo elementar mostra que a função $q(t) = e^{-\alpha t}y(t)$ é uma solução da equação de Newton (8.2) sse $y(t)$ é uma solução da equação de Newton sem atrito

$$\ddot{y} = -\delta\, y$$

com $\delta = \beta - \alpha^2$, que já sabemos resolver. Consequentemente, soluções de (8.2) são

$$q(t) = e^{-\alpha t}(a + bt)$$

se $\alpha^2 = \beta$ (um caso muito particular), ou

$$q(t) = e^{-\alpha t}(ae^{kt} + be^{-kt}\ )$$

se $0 < \alpha^2 - \beta = k^2$ (atrito grande), ou

$$q(t) = e^{-\alpha t}(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t))$$

se $0 < \beta - \alpha^2 = \omega^2$ (atrito pequeno).

Problema com valores iniciais. A intuição física, ou melhor, a nossa ideia de "determinismo" implícita na física newtoniana, diz que uma equação de Newton $m\ddot{q} = F$ determina univocamente o futuro e o passado se são dadas a posição $q(0) = q_0$ e a velocidade $\dot{q}(0) = v_0$ iniciais da partícula. No caso da partícula num potencial quadrático com atrito, ou seja, das equações lineares homógeneas (8.2), encontramos espaços de soluções dependendo de dois parâmetros, ou seja, pares de soluções. Duas soluções, $q_+(t)$ e $q_-(t)$, são suficientes se conseguimos representar toda solução como combinação linear $q(t) = a\, q_+(t) + b\, q_-(t)$. Mas isto significa que o sistema linear

$$\begin{aligned} a\, q_+(0) + b\, q_-(0) &= q_0 \\ a\, \dot{q_+}(0) + b\, \dot{q_-}(0) &= v_0 \end{aligned}$$

admite uma única solução para todo vetor (q_0, v_0) de condições iniciais, e portanto que o determinante $q_+(0)\, \dot{q_-}(0) - \dot{q_+}(0)\, q_-(0)$ é diferente de zero. É imediato verificar que este é o caso dos pares de soluções encontradas no parágrafo anterior. É claro também que o tempo inicial $t_0 = 0$ pode ser substituído por qualquer outro tempo, sendo a equação de Newton invariante por translações no tempo.

Independência linear e Wronskiano. Fixado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, consideramos o espaço linear $\mathcal{C}^1(I)$ das funções reais $f : I \to \mathbb{R}$ com derivadas contínuas. O *(determinante) Wronskiano* entre duas funções $f(t)$ and $g(t)$ deste espaço é a função

$$\boxed{W_{f,g}(t) := \mathrm{Det} \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ \dot{f}(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix} = f(t)\dot{g}(t) - \dot{f}(t)g(t)}$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente dependentes ou seja, se existem constantes $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tais que $\alpha f(t) + \beta g(t) = 0$ para todos os tempos $t \in I$, e, derivando, também $\alpha \dot{f}(t) + \beta \dot{g}(t) = 0$, então $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos, pois o sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ \dot{f}(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admite uma solução não trivial. Consequentemente,

Teorema 8.1. *Se $W_{f,g}(t_0) \neq 0$ em algum ponto $t_0 \in I$ então $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes.*

Num intervalo onde $g(t) \neq 0$, o determinante Wronskiano é o "numerador" da derivada do quociente $f(t)/g(t)$, sendo o "denominador" $g(t)^2 \neq 0$. Consequentemente, é nulo sse o quociente é constante, logo se $f(t)$ é proporcional a $g(t)$.

No entanto, duas funções podem ser independentes e ter determinante Wronskiano nulo em algum ponto, ou até em todos os pontos!, como mostra o exemplo de Peano[18] das funções $f(t) = t^2$ e $g(t) = t\,|t|$. O problema é que duas funções podem ser independentes num intervalo I mas linearmente dependentes se pensadas apenas em sub-intervalos $J \subset I$ (é o caso do exemplo). Isto pode acontecer quando pelo menos uma das funções não é analítica, assim que a informação local, os valores num subintervalo (arbitrariamente pequeno), não determina o comportamento global, os valores em intervalos grandes.

No caso das soluções de uma equação diferencial linear as coisas são mais simples. Se ϕ_+ e ϕ_- são duas soluções da mesma EDO linear

$$\ddot{x} + p(t)\, \dot{x} + q(t)\, x = 0$$

(com coeficientes não necessariamente constantes!), definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então um cálculo elementar mostra que o Wronskiano satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} W_{\phi_+,\phi_-}(t) = -p(t)\, W_{\phi_+,\phi_-}(t)\,,$$

[18] G. Peano, Sur le déterminant Wronskien, *Mathesis* **9** (1889), 75-76.

Ao integrar, obtemos a *identidade de Abel*

$$W_{\phi_+,\phi_-}(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\, W_{\phi_+,\phi_-}(t_0)\,.$$

onde $t_0 \in I$ é um tempo inicial arbitrário. Em particular, o determinante Wronskiano é ou identicamente nulo ou sempre diferente de zero.

ex: Calcule os determinantes Wronskianos

$$W_{e^{-\alpha t},te^{-\alpha t}}\,, \quad W_{e^{-\alpha t}e^{kt},e^{-\alpha t}e^{-kt}} \quad \text{e} \quad W_{e^{-\alpha t}\sin(\omega t),e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}\,,$$

quando $k \neq 0$ e $\omega \neq 0$, e verifique que as soluções encontradas no parágrafo anterior são pares de soluções independentes da equação linear homogénea com coeficientes constantes genérica $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$.

ex: Verifique que as funções $f(t) = t^2$ e $g(t) = t\,|t|$ não são linearmente independentes enquanto funções definidas na reta real (mas são idênticas na semi-reta positiva, e proporcionais, logo linearmente dependentes, na semi-reta negativa). No entanto (ou melhor, de consequência), o Wronskiano é $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos t .

Unicidade das soluções. Uma *equação diferencial ordinária linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes* genérica é uma equação

$$a\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + c\,x = 0$$

onde os coeficientes a, b e c são números reais (e, nos casos físicos, positivos!). Sendo $a \neq 0$ (caso contrário trata-se de uma equação de ordem um), é claro que a equaĉcão é equivalente a

$$\ddot{x} + 2\alpha\,\dot{x} + \beta\,x = 0 \tag{8.3}$$

com $2\alpha = b/a$ e $\beta = c/a$, que depende de apenas dois parâmetros. Os exemplos anteriores mostram que admite sempre um par de soluções independentes, e portanto uma solução para cada condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Esta solução é única, como segue do teorema de Picard.

No entanto, é interessante provar a unicidade usando uma ideia no mesmo tempo mais elementar e mais profunda. Já vimos que $x(t) = e^{-\alpha t}y(t)$ é solução de (8.3) sse $y(t)$ é solução de $\ddot{y} = \lambda y$, com $\lambda = \alpha^2 - \beta$. Portanto, é suficiente provar o teorema de unicidade para esta equação.

O operador *laplaciano* em dimensão um é o operador $\Delta := D^2$, onde $D = d/dt$ denota o operador *derivação*, que envia $f(t)$ em $(Df)(t) := f'(t)$. A equação $f'' = \lambda f$ pode portanto ser escrita

$$\Delta f = \lambda\, f\ ,$$

e diz que $f(t)$ é um vetor próprio do laplaciano, com valor próprio λ. O teorema de unicidade é uma consequência imediata do seguinte resultado, caso particular de um teorema profundo sobre os operadores diferenciais "elípticos".

Uma função $f(t)$ é dita *analítica* se a sua série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$, centrada em um ponto arbitrário t_0 do seu domínio e definida pelos coeficientes $c_n = f^{(n)}(t_0)/n!$, tem raio de convergência positivo, e converge para a própria função dentro do disco de convergência.

O ingrediente essencial da prova é a seguinte observação, caso particular de um fenómeno chamado "bootstrap". A identidade $f'' = \lambda f$ implica que $f(t)$ admite derivadas de todas as ordens, e que podemos calcular enquanto funções apenas das primeiras duas. De fato, a terceira derivada é $f''' = (f'')' = \lambda f'$, a quarta derivada é $f'''' = (f''')' = (\lambda f')' = \lambda f'' = \lambda^2 f$, ... e, por indução, as derivadas de ordens par ou ímpar são

$$f^{(2n)} = \lambda^n\, f \quad \text{e} \quad f^{(2n+1)} = \lambda^n\, f'\,, \tag{8.4}$$

respetivamente.

Teorema 8.2. *As funções próprias do laplaciano na reta real são funções analíticas.*

Demonstração. Seja $f(t)$ uma função própria do operador laplaciano com valor próprio λ, ou seja, uma função duas vezes derivável, definida na reta real, que satisfaz a equação diferencial $f'' = \lambda f$. As identidades (8.4) implicam que os coeficientes $c_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ da série de Taylor de f centrada em 0 são limitados por

$$|c_n| \leq C\frac{|\lambda|^n}{n!}$$

se C denota o máximo entre $|f(0)|$ e $|f'(0)|$. Pela fórmula de Hadamard (ou seja, pelo critério da raiz/razão), o raio de convergência da série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ é ∞. Consequentemente, a série de Taylor converge em toda a reta real. Falta então provar que converge para a própria função f.

Fixado um intervalo limitado $[-R, R]$, seja K o máximo de $|f(t)|$ e $|f'(t)|$ quando $|t| \leq R$ (que existe porque f e f' são contínuas). Então, pelas (8.4), as derivadas de f são limitadas por

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leq K|\lambda|^n$$

quando $|t| \leq R$. Seja $P_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, t^k$ o polinómio de Taylor de grau $n-1$. Pela fórmula de Taylor com resto

$$f(t) - P_{n-1}(t) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\, t^n$$

onde c é um ponto entre 0 e t. Consequentemente, quando $|t| \leq R$ o erro é limitado por

$$|f(t) - P_{n-1}(t)| \leq K\, \frac{|\lambda|^n\, R^n}{n!}$$

que tende para 0 quando $n \to \infty$. Isto prova que a série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ converge para $f(t)$ para todo t, e uniformemente em cada intervalo compacto. □

Teorema 8.3. *O espaço das soluções de uma equação linear homogénea de ordem* 2 *com coeficientes constantes* (8.3) *é um espaço linear de dimensão* 2.

Demonstração. Como visto, é suficiente provar o resultado para a equação $\ddot{x} = \lambda x$. Usando a linearidade, é suficiente provar que a única solução com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ é a solução trivial $x(t) = 0$. As fórmulas (8.4) implicam então que todas as derivadas de $x(t)$ em $t = 0$ são nulas. Isto quer dizer que todos os coeficientes da série de Taylor de $x(t)$ centrada em 0 são nulos. Pela analiticidade, o teorema 8.2, a função $x(t)$ é identicamente nula. □

EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes, polinómio caraterístico. O uso dos exponenciais complexos permite uma leitura unificada e conceptualmente mais elegante dos três casos tratados acima, que estende de forma natural às equações homogéneas de ordem superior.

Consideramos uma equação linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0 \tag{8.5}$$

onde α e β são coeficientes reais (mas também é possível considerar coeficientes complexos). A ideia, de Euler [19], é que

as suas soluções são (sobreposições de) exponenciais complexos $x(t) = e^{zt}$

[19] L. Euler, De integratione aequationum differentialium altiorum gradurn, *Miscellanea Berolinensia* **7** (1743).

pelo menos no caso genérico. Isto acontece porque as derivadas de um exponencial são proporcionais ao próprio exponencial, e consequentemente uma equação homogénea com coeficientes constantes para um exponencial e^{zt} é uma equação algébrica para a sua "frequência" z. De fato, ao substituir a conjetura $x(t) = e^{zt}$ na (8.5) temos que

$$z^2 e^{zt} + 2\alpha z\, e^{zt} + \beta\, e^{zt} = (z^2 + 2\alpha z + \beta)\, e^{zt} = 0\,.$$

Observando que os exponenciais são diferentes de zero, temos que $x(t) = e^{zt}$ é uma solução (complexa) de (8.5) se z é igual a uma das raízes $z_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ do *polinómio caratéristico*

$$\boxed{P(z) := z^2 + 2\alpha z + \beta\,.}$$

A equação $P(z) = 0$, que determina as raízes, é também chamada *equação caraterística*.

Se $\alpha^2 - \beta = k^2 > 0$ as duas raízes são reais, e portanto duas soluções independentes são os exponenciais reais $x_\pm(t) = e^{-(\alpha \pm k)t}$. A solução geral é portanto uma combinação linear

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(a\, e^{kt} + b\, e^{\,-t}\right)\,.$$

Se $\alpha^2 - \beta = -\omega^2 < 0$, as duas raízes não são reais (mas são complexas conjugadas), e duas soluções independentes são os exponenciais complexos $x_\pm(t) = e^{-(\alpha \pm i\omega)t}$. Neste caso, duas soluções reais, logo a solução geral com significado físico, podem ser obtidas usando a fórmula de Euler e a paridade das funções trigonométricas, pois

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t}\left(a\, e^{\,i\omega t} + b\, e^{\,-i\omega t}\right) \\ &= e^{-\alpha t}\left(a\,\cos(\omega t) + ia\,\sin(\omega t) + b\,\cos(\omega t) - ib\,\sin(\omega t)\right) \\ &= e^{\,-\alpha t}\left(c\,\cos(\omega t) + d\,\sin(\omega t)\right) \end{aligned}$$

se $c = a + b$ e $d = i(a - b)$. Estas soluções são reais se c e d são coeficientes reais.

Quando $\alpha^2 = \beta$, o polinómio caraterístico tem uma raiz dupla $z = -\alpha$, que é real, e o método fornece apenas a solução $x(t) = e^{-\alpha t}$. Para encontrar uma segunda solução independente temos que compreender o limite de um plano gerado por $x_z(t) = e^{zt}$ e $x_{z+\varepsilon} = e^{(z+\varepsilon)t}$ quando $\varepsilon \to 0$. Se $\varepsilon \neq 0$, o plano contém a sobreposição $(e^{(z+\varepsilon)t} - e^{zt})/\varepsilon$, que no limite quando $\varepsilon \to 0$ é a derivada em ordem a z da nossa primeira solução, ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{(z+\varepsilon)t} - e^{zt}}{\varepsilon} = t\, e^{zt}$$

A posteriori, podemos verificar que esta também é solução da equação diferencial, que neste caso pode ser escrita $(D - \alpha)^2 x = 0$ (sendo $D = d/dt$ o operador derivação). Assim, o espaço das soluções é um plano gerado pelas duas soluções independentes $e^{-\alpha t}$ e $t\, e^{-\alpha t}$, e a solução geral é uma sobreposição

$$x(t) = e^{-\alpha t}\,(a + bt)\,.$$

Resumindo, temos portanto a seguinte receita: o espaço das soluções de (8.5) é um espaço linear $\mathcal{H}$ de dimensão 2 gerado por

$e^{(-\alpha+k)t}$	e	$e^{(-\alpha-k)t}$	se $z_\pm = -\alpha \pm k$, com $k > 0$ (raízes reais e distintas)
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	e	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	se $z_\pm = -\alpha \pm i\omega$, com $\omega > 0$ (raízes complexas conjugadas)
$e^{-\alpha t}$	e	$t\, e^{-\alpha t}$	se $z_\pm = -\alpha$ (raiz dupla)

Se $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ formam uma base de $\mathcal{H}$, então a "solução geral" é

$$x(t) = c_+\phi_+(t) + c_-\phi_-(t)$$

onde $c_\pm \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Sendo as $\phi_\pm$ independentes, estas constantes são univocamente determinadas pelas condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, ao resolver um sistema linear determinado. É claro que o tempo inicial $t = 0$ pode ser substituído por qualquer outro tempo t_0.

ex: Determine a solução geral das seguintes EDOs homogéneas:

$$\ddot{x} - 2x = 0 \qquad \ddot{x} + \pi^2 x = 0 \qquad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 \qquad \ddot{x} - \dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 \qquad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \qquad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0\,.$$

ex: Resolva os seguintes problemas com condições iniciais (ou problemas de Cauchy).

$$\ddot{x} + 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1$$

$$\ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1\,.$$

ex: Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:

$$e^{2t} \quad \text{e} \quad e^{-2t}\,, \qquad e^{-t}\sin(2\pi t) \quad \text{e} \quad e^{-t}\cos(2\pi t)\,, \qquad \sinh(t) \quad \text{e} \quad \cosh(t)\,,$$

$$e^{-3t} \quad \text{e} \quad te^{-3t}\,, \qquad \sin(2t+1) \quad \text{e} \quad \cos(2t+2)\,, \qquad 3 \quad \text{e} \quad 5t\,.$$

Oscilador harmónico. As pequenas oscilações de um pêndulo $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta)$ em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descritas pela equação de Newton do *oscilador harmónico*

$$\boxed{\ddot{q} = -\omega^2 q} \tag{8.6}$$

onde $\omega > 0$ é a "frequência (angular) característica". Esta é uma equação universal, pois descreve as pequenas oscilações de qualquer sistema Newtoniano unidimensional numa vizinhança de um equilíbrio estável genérico.[20] No espaço de fases $\mathbb{R}^2$, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}\,. \tag{8.7}$$

A solução com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)\,.$$

As trajectórias $q(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ podem ser escritas como

$$q(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad A\cos(\omega t + \phi)\,,$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos coeficientes a e b, ou seja, dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ (usando as fórmulas $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$).

[20] "The harmonic oscillator, which we are about to study, has close analogs in many other fields; although we start with a mechanical example of a weight on a spring, or a pendulum with a small swing, or certain other mechanical devices, we are really studying a certain *differential equation*. This equation appears again and again in physics and other sciences, and in fact is a part of so many phenomena that its close study is well worth our while. Some of the phenomena involving this equation are the oscillations of a mass on a spring; the oscillations of charge flowing back and forth in an electrical circuit; the vibrations of a tuning fork which is generating sound waves; the analogous vibrations of the electrons in an atom, which generate light waves; the equations for the operation of a servosystem, such as a thermostat trying to adjust a temperature; complicated interactions in chemical reactions; the growth of a colony of bacteria in interaction with the food supply and the poison the bacteria produce; foxes eating rabbits eating grass, and so on; . . . "

Richard P. Feynman [Fe63]

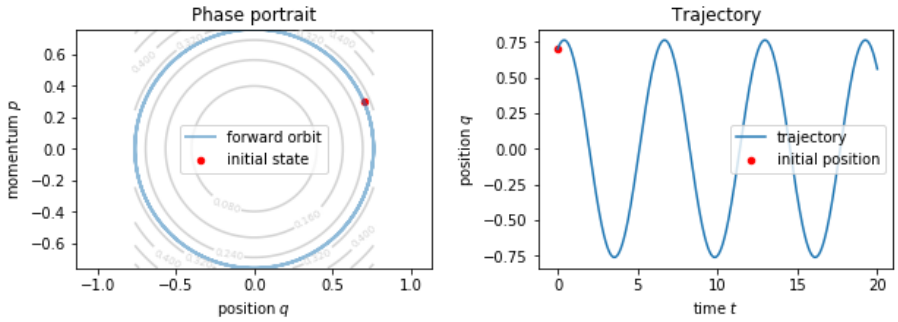
A energia

$$E(q,p) := \frac{1}{2}\,p^2 + \frac{1}{2}\,\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento. Ou seja, se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico, então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E\,(q(t),p(t)) &= \frac{\partial E}{\partial q}\,\dot q + \frac{\partial E}{\partial p}\,\dot p = p\,\dot p + \omega^2 q\,\dot q \\ &= p\,(\dot p + \omega^2 p) = 0\end{aligned}$$

para todo o tempo t. Consequentemente, as órbitas do oscilador harmónico estão contidas (de fato, são iguais!) nas curvas de nível da energia E, que são elipses.



A variável complexa $z := p + i\omega q$ satisfaz a EDO de primeira ordem

$$\dot z = i\omega z\,,$$

cuja solução é $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$. A energia do oscilador é dada por $E = \frac{1}{2}|z|^2$.

ex: Determine a energia em quanto função da amplitude e da frequência das oscilações.

ex: "Elimine" dt no sistema (8.7), e mostre que as curvas de fases são soluções da EDO exacta

$$p\,dp + \omega^2 q\,dq = 0\,,$$

equivalente a $dE = 0$, cujas soluções implícitas são as curvas de nível de E.

Oscilações amortecidas. Consideramos a equação das *oscilações amortecidas*

$$\boxed{\ddot q = -\beta\dot q - \omega^2 q} \tag{8.8}$$

onde ω é a *frequência própria* do oscilador (em ausência de atrito) e $\beta > 0$ é um coeficiente de atrito (com as dimensões do inverso de um tempo).

Por exemplo, a corrente $I(t)$ que circula num circuito RLC satisfaz a equação $L\ddot I + R\dot I + I/C = 0$. Assim, a frequência própria do circuito é $\omega = 1/\sqrt{LC}$ e o coeficiente de atrito é $\beta = R/L$.

Outro exemplo são as oscilações de um objeto de massa m sujeito a uma força de Hooke de constante elástica k e a uma força de atrito proporcional e contrária à velocidade por um fator γ. A equação de Newton que determina o deslocamento x da posição de equilíbrio é $m\ddot x = -\gamma\dot x - kx$. Neste caso, a frequência própria é $\omega = \sqrt{k/m}$ e o coeficiente de atrito é $\beta = \gamma/m$.

No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot q$, a equação (8.8) assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot q = p \\ \dot p = -\omega^2 q - \beta p \end{cases}.$$

A energia

$$E(q,p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

não é uma constante do movimento, mas decresce, ou seja, é "dissipada", a uma taxa proporcional à energia cinética, pois

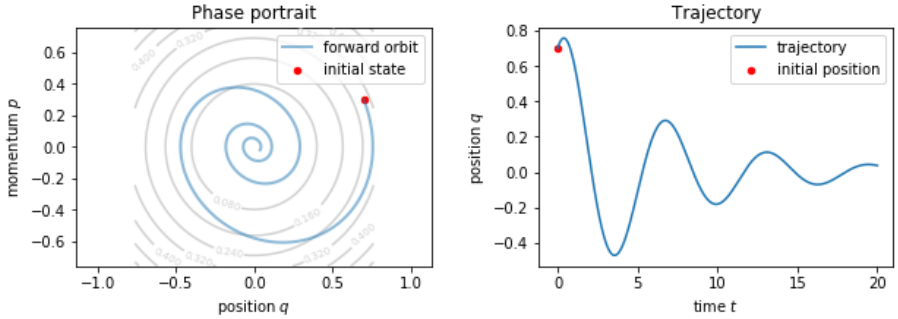
$$\frac{d}{dt}E = \frac{\partial E}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial E}{\partial p}\,\dot{p} = p\,(\dot{p} + \omega^2 q) = -\beta\,p^2 \leq 0\,.$$

É conveniente definir $\alpha = \beta/2$. A equação caraterística da (8.8) é $(z+\alpha)^2 = -(\omega^2 - \alpha^2)$, e portanto a natureza das suas raízes dependem do sinal de $\omega^2 - \alpha^2$.

O sistema é dito *sub-crítico* se $\alpha^2 < \omega^2$, ou seja, se o atrito é pequeno (quando comparado com a frequência própria). Neste caso, as soluções são

$$q(t) = A\,e^{-\alpha t}\sin(\Omega\,t + \varphi) \tag{8.9}$$

oscilações de frequência $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ cuja amplitude decai com tempo caraterístico $\tau = 1/\alpha$. Sendo $\Omega < \omega$, o período $2\pi/\Omega$ das oscilações é superior ao período próprio $2\pi/\omega$. Se o atrito é muito pequeno, ou seja, $\alpha \ll \omega$, então em primeira aproximação a frequência é $\Omega \simeq \omega - \alpha^2/2\omega^2 + \ldots$. Por outro lado, a frequência Ω tende para zero (e, consequentemente, o período das oscilações tende para o ∞) quando $\alpha \to \omega^-$.



Quando $\alpha \ll \omega$, e portanto $\Omega \simeq \omega$, é útil quantificar a perda de energia $\Delta E = E(t) - E(t+T)$ ao longo de um período $T \simeq 2\pi/\omega$. Um cálculo mostra que a energia total é aproximadamente $E(t) \simeq \frac{1}{2}A^2\omega^2 e^{-\beta t}$ (se desprezamos termos com média nula ao longo de um período e termos de ordem α^2 comparados com termos da ordem ω^2). Então a perda relativa de energia ao longo de um período é

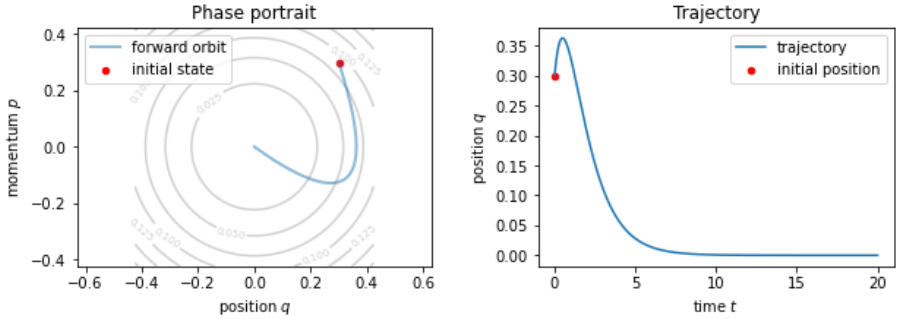
$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{2\pi}{Q}$$

onde o *Q-factor* é definido por $Q := \omega/\beta$.

O sistema é dito *super-crítico* se $\alpha^2 > \omega^2$, ou seja, se o atrito é grande. Neste caso, as soluções são

$$q(t) = A\,e^{-\alpha t}\sinh(k\,t + \varphi)$$

onde $k = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Observe que $k < \alpha$, e portanto $q(t) \to 0$ exponencialmente, e sem oscilar, quando $t \to \infty$.



O caso intermédio é o caso *crítico*, quando $\alpha^2 = \omega^2$ (uma condição muito difícil de observar!). A equação caraterística admite uma única raiz, $-\alpha$, e as soluções são

$$q(t) = (a + bt)e^{-\alpha t}\,.$$

Também neste caso, as trajetórias decaem sem oscilar.

Equação de Schrödinger estacionária. Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.262... \times 10^{-34}$ J·s.

ex: Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

EDOs equidimensionais. Uma equação diferencial da forma

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

é dita *equidimensional* (é invariante pela transformação $x \mapsto \lambda x$ com $\lambda > 0$). A substituição $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) := y(x(t))$.

ex: Resolva a equação

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0\,,$$

na semireta $x > 0$.

9 EDOs lineares não homogéneas

ref: [Ap69] *Vol. 1*, **8.15-19** ; [MW85] *Vol. 2*, **12.6-7**

9 mar 2021

EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes. Uma *EDO de segunda ordem linear com coeficientes constantes* é uma lei

$$\boxed{\ddot{x} + 2\alpha\,\dot{x} + \beta x = f(t)} \tag{9.1}$$

para a trajetória $x(t)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são coeficientes constantes, e $f(t)$ é uma função dada, uma *força externa* dependente do tempo, definida num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções de (9.1), então a diferença $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ é uma solução da *EDO homogénea associada*

$$\boxed{\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0} \tag{9.2}$$

obtida de (9.1) ao fazer $f(t) = 0$ (i.e. força nula). Portanto, a solução geral de (9.1) pode ser representada como uma soma

$$x(t) = z(t) + y(t)\,,$$

onde $z(t)$ é uma (apenas uma!) "solução particular" de (9.1) e $y(t) = c_+\phi_+(t) + c_-\phi_-(t)$ é a solução geral da EDO homogénea associada (9.2), combinação linear de duas soluções independentes $\phi_\pm(t)$ com coeficientes arbitrários $c_\pm \in \mathbb{R}$. Em particular,

Teorema 9.1. *O espaço das soluções de uma equação diferencial linera de segunda ordem com coeficientes constantes é um plano afim $z + \mathcal{H}$, modelado sobre o espaço linear $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}^2$ das soluções da equação homogénea associada.*

Portanto, o problema de resolver uma equação diferencial linear com coeficientes constantes é reduzido ao problema de determinar apenas uma solução, por exemplo, a solução com condições iniciais triviais, dita "resposta do sistema" a força $f(t)$.

Adivnhar. O método mais simples e mais utilizado é "adivinhar" soluções, ou melhor, conjeturar soluções particulares, seguindo o instinto, a experiência, ou exemplos importantes e recorrentes (os ingleses dizem "educated guess").

Partícula num campo de forças dependente do tempo. Considere a equação de Newton

$$\ddot{q} = f(t)$$

de uma partícula de massa unitária sujeita a uma força dependendo do tempo $f(t)$.

A partícula livre tem trajetórias $q(t) = a + bt$. Estas são as soluções da equação homogénea, que descreve o movimento inercial, ou movimento retilíneo uniforme. Como esperado, formam um espaço linear de dimensão dois, gerado pelas soluções 1 e t.

Se a força é constante, por exemplo $f(t) = g$ (a aceleração gravitacional próximo da superfície da terra), as soluções são as parábolas

$$q(t) = \frac{1}{2}gt^2 + a + bt\,,$$

obtidas somando ao movimento inercial a solução particular $gt^2/2$.

Outro caso interessante é uma força periódica como $f(t) = F_0\cos(\omega t)$. É claro que uma solução paticular é também periódica, do mesmo período (pois a segunda derivada de um coseno ou de um seno é proporcional à própria função), e de fato é imediato verificar que uma solução é

$$q(t) = -\frac{F_0}{\omega^2}\cos(\omega t) + a + bt\,.$$

Moral, conseguimos encontrar soluções particulares, e portanto gerais, quando conseguimos determinar uma primitiva da primitiva da força.

ex: Considere a equação de Newton

$$\ddot{q} = -\gamma\dot{q} + f(t)$$

onde $\gamma := 1/\tau \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, determine a trajetória quando a força é constante $f(t) = g$, linear $f(t) = ct$, ou periódica $f(t) = F_0\cos(\omega t)$.

Princípio de sobreposição. A procura de uma solução particular de (9.1) pode ser simplificada usando o *princípio de sobreposição*, consequência da linearidade do problema. Se $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ são soluções das EDOs lineares

$$\ddot{x_k} + 2\alpha\dot{x_k} + \beta x_k = f_k(t) \qquad \text{com} \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

(observe que α e β são sempre os mesmos!) então a "sobreposição"

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t)$$

é solução da EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)\,.$$

A ideia é utilizar a estratégia dor romanos (ou dos macedónios?), DIVIDE ET IMPERA. Ao dividir a força $f(t)$ em parcelas simples $f_k(t)$, podemos esperar resolver o problema aparentemente difícil juntando as soluções $x_k(t)$ dos problemas mais simples.

ex: Determine a solução geral de

$$\ddot{x} = \sin(t) \qquad \ddot{x} + \dot{x} = t \qquad \ddot{x} + x = e^{-t}$$

ex: Determine uma solução particular de

$$\ddot{x} = 1 + t + t^2 \qquad \ddot{x} + \dot{x} = e^{-t} - e^{-2t}$$

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares.

$$\ddot{x} + x = t \qquad \ddot{x} - \dot{x} = t^2 \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = t^2 - 1 \qquad \ddot{x} - 4x = e^{-2t}$$

Quase-polinómios e coeficientes indeterminados. Um *quase-polinómio* é um produto $\varphi(t) = p(t)e^{\lambda t}$ de um polinómio $p(t) = p_0 + p_1 t + \cdots + p_k t^k$ vezes um exponencial $e^{\lambda t}$ (real ou complexo, ou seja, um produto de um exponencial real $e^{\rho t}$ e funções trigonométricas, $\cos(\omega t)$ e/ou $\sin(\omega t)$, se $\lambda = \rho \pm i\omega$). O grau do quase-polinómio é o grau de $p(t)$, e o seu exponente é λ. Os polinómios são quase-polinómios com expoente nulo.

Ao aplicar o operador diferencial $D = d/dt$ a um quase-polinómio $\varphi(t) = p(t)e^{\lambda t}$ de grau g o resultado é

$$(D\varphi)(t) = (p'(t) + \lambda)e^{\lambda t}\,,$$

que é também um quase-polinómio com o mesmo expoente λ e grau $\leq g - 1$. Mais em geral, um operador diferencial linear com coeficientes constantes $L = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$ envia um quase-polinómio $\varphi(t) = P(t)e^{\lambda t}$, com expoente λ e grau g, num quase-polinómio

$$(L\varphi)(t) = p(t)\, e^{\lambda t}$$

com o mesmo expoente λ e grau $\leq g$ (mas pode produzir senos e cosenos a partir de apenas um seno ou um coseno).

Consideramos uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes, por exemplo de segunda ordem,

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \tag{9.3}$$

(mas as mesmas considerações permitem tratar o caso de ordem n arbitrária), que pode ser escrita $(Lx)(t) = f(t)$, se definimos o operador diferencial $L = aD^2 + bD + cI$. Se o segundo membro, que representa uma força externa, é um quase-polinómio

$$f(t) = e^{\rho t}\left(p(t)\cos(\omega t) + q(t)\sin(\omega t)\right) ,$$

com expoente $\lambda = \rho + i\omega$ e onde $p(t)$ e $q(t)$ são polinómios de grau $\leq k$ (usando o princípio de sobreposição, é suficiente considerar os casos dos monómios t^k, naturalmente), então é claro que a equação (9.3) admite uma solução particular da forma

$$z(t) = e^{\rho t}\left(P(t)\cos(\omega t) + Q(t)\sin(\omega t)\right) ,$$

onde $Q(t)$ e $P(t)$ são polinómios de grau $\leq k + 2$.

De fato, é possível provar que, se λ é uma raiz do polinómio característico az^2+bz+c da equação homogénea com multiplicidade $n \leq 2$, é suficiente considerar polinómios da forma $Q(t) = t^n\,\tilde{Q}(t)$ e $P(t) = t^n\,\tilde{P}(t)$, onde $\tilde{Q}(t)$ e $\tilde{P}(t)$ são polinómios de grau $\leq k$. Em particular, no caso genérico (não ressonante) em que λ não é uma raiz do polinómio caraterístico, basta considerar polinómios $Q(t)$ e $P(t)$ de grau $\leq k$.

Os "coeficientes indeterminados" dos polinómios $P(t)$ e $Q(t)$ são obtidos ao igualar os termos de mesmo grau na (9.3), e portanto ao resolver um sistema linear de $2(k+1)$ equações em $2(k+1)$ incógnitas (no caso geral em que $\omega \neq 0$, ou a metade se $\omega = 0$). Por esta razão, este método é chamado *método dos coeficientes indeterminados*.

Usando o princípio de sobreposição, é possível determinar soluções particulares quando o segundo membro $f(t)$ é uma combinação linear de quase-polinómios.

e.g. Por exemplo, uma solução particular da equação

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = F_0 e^{-t}$$

pode ser determinada da forma $x(t) = ae^{-t}$. De fato, ao substituir esta conjetura obtemos $(a+3a+2a)e^{-t} = F_0e^{-t}$, e portanto $a = F_0/6$. Uma solução particular é portanto $x(t) = \frac{1}{6}F_0e^{-t}$.

Por outro lado, se consideramos a equação diferencial

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = F_0 e^{t}$$

e experimentamos a conjetura $x(t) = be^t$, obtemos $(b - 3b + 2b)e^{-t} = e^{-t}$, o que é impossível. Isto acontece porque $\lambda = 1$ é uma raiz do polinómio caraterístico $z^2 - 3z + 2$, e portanto e^t é uma solução da equação homogénea associada (e, como tal, anula o primeiro membro da equação). Uma segunda tentativa pode ser $x(t) = cte^t$. Ao substituir esta conjetura, e com alguma paciência, obtemos $(c(2 + t) - 3c(1 + t) + 2ct)e^t = F_0e^t$, ou seja, $-ce^t = F_0e^t$, e portanto $c = -F_0$. Uma solução particular é portanto $x(t) = -F_0e^t$.

O caso pior é quando o expoente da força corresponde a uma raiz dupla do polinómio caraterístico. Um exemplo é a equação diferencial

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = F_0 e^{t}$$

A única raiz do polinómio caraterístico é $\lambda = 1$, e a solução geral da equação homogénea é portanto $(a + bt)e^t$. Neste caso, as tentativas $x(t) = ae^t$ e $x(t) = bte^t$ falham (justamente porque resolvem a equação homogénea!). No entanto, se substituímos a conjetura $x(t) = ct^2e^t$ obtemos finalmente $2ce^t = F_0e^t$, e portanto $c = F_0/2$. Uma solução particular é portanto $x(t) = \frac{1}{2}F_0t^2e^t$.

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t^3e^{-t} + e^t \qquad \ddot{x} + x = \sin(t) \qquad \ddot{x} + 4x = 2t\cos(t)$$

$$\ddot{x} + 9x = \sin(\pi t) \qquad \ddot{x} + 4x = \cos(2t) \qquad \ddot{x} - 4x = te^{-2t} \qquad \ddot{x} + 4x = te^{-t}\cos(2t)$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 10\sin t \qquad \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \cos(2t) \qquad \ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = e^{-t} \qquad \ddot{x} - \dot{x} = e^t$$

Oscilações forçadas, batimentos e ressonância. Consideramos a equação das *oscilações forçadas*

$$\boxed{\ddot{q} + \omega^2 q = F_0 \cos(\gamma t)} \tag{9.4}$$

onde ω é a frequência própria do oscilador e γ é a frequência de uma força periódica.

O sistema homogéneo é um oscilador harmónico, e portanto as suas soluções são oscilações $A\cos(\omega t + \phi)$, onde A e ϕ são constantes arbitrárias. A intuição sugere que o efeito da força seja uma oscilação adicional de frequência γ.

Quando $\gamma^2 \neq \omega^2$, uma solução pode ser determinada usando a conjetura $x(t) = a\,\cos(\gamma t)$, e um cálculo elementar mostra que a solução geral é

$$q(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\cos(\gamma t)$$

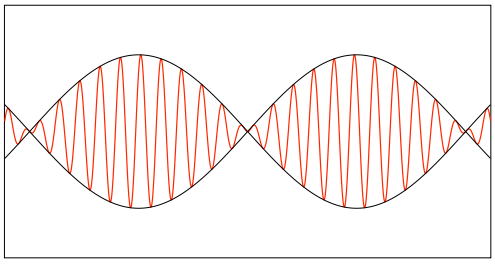
Em particular, a solução com condições iniciais triviais pode ser escrita

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\left(\cos(\gamma t) - \cos(\omega t)\right) \\ &= \frac{F_0}{2\,\Omega\,\varepsilon}\,\sin\left(\varepsilon t\right)\,\sin\left(\Omega t\right) \end{aligned}$$

onde $\Omega = (\omega+\gamma)/2$ é a média das frequências, e $\varepsilon = (\omega-\gamma)/2$ a semi-diferença (usando as fórmulas de adição trigonométricas). Em particular, quando $|\varepsilon| \ll |\omega|$, e portanto $\Omega \simeq \omega$, podemos estimar

$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\,\omega\,\varepsilon}\sin(\varepsilon t)\,\sin(\omega t)\,.$$

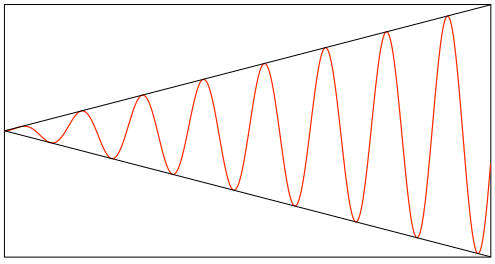
Portanto, a resposta do oscilador à força externa de frequência γ próxima (mas diferente) da frequência própria ω é uma "modulação" lenta (de período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) de uma oscilação com frequência própria ω. Este fenómeno é chamado *batimentos* (em inglês, *beats*).



Para compreender o caso ressonante $\gamma = \omega$ podemos fazer o limite quando $\varepsilon \to 0$. Este limite é

$$q(t) = \frac{F_0}{2\,\omega}\,t\,\sin(\omega t)\,.$$

Ou seja, quando $\gamma \to \omega$, a frequência dos batimento decresce para zero, o que significa que o período dos batimentos tende para o infinito, e apenas vemos a "parte inicial" do seno $\sin(\varepsilon t)/\varepsilon$, que é essencialmente uma reta t. Este fenómeno, uma resposta cuja amplitude cresce linearmente no tempo, é chamado *ressonância*.



ex: Deduza a fórmula da ressonância usando a conjetura $x(t) = b\,t\,\sin(\omega t)$ e o método dos coeficientes indeterminados.

Oscilações forçadas em notação complexa. Consideramos a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t)\,.$$

A variável complexa $z := p + i\omega q$, onde $p := \dot{q}$ é o momento linear, satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$\dot{z} - i\omega z = f(t)\,.$$

Uma solução não trivial da EDO homogénea associada $\dot{y} - i\omega y = 0$ é $y(t) = e^{i\omega t}$. Por outro lado, o produto $z(t) = \lambda(t)\,e^{i\omega t}$ é uma solução de $\dot{z} - i\omega z = f(t)$ se λ é solução de $\dot{\lambda} = f(t)\,e^{-i\omega t}$. Consequentemente, uma solução com condição inicial $z(0) = z_0$ é

$$z(t) = e^{i\omega t}\left(z_0 + \int_0^t f(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right).$$

A energia do oscilador,

$$E = \frac{1}{2}\,\left(p^2 + \omega^2 q^2\right) = \frac{1}{2}\,|z|^2\,,$$

é conservada se a força é nula. Uma força $f(t)$, atuando do tempo $t = -\infty$ até ao tempo $t = \infty$, fornece ao oscilador (inicialmente em repouso) uma energia [LL78]

$$E(\infty) - E(-\infty) = \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right|^2,$$

proporcional ao quadrado do módulo da "transformada de Fourier" de $f(t)$ calculada na frequência ω.

Oscilações forçadas amortecidas. Consideramos a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\boxed{\ddot{q} + \beta\dot{q} + \omega^2 q = F_0\cos(\gamma t)} \tag{9.5}$$

onde ω é a frequência própria do oscilador, $\beta = 2\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, e a força também oscila, com frequência γ. Um exemplo é um circuito RLC sujeito a uma força eletromotriz periódica.

A solução geral da homogénea é chamada solução *transiente*, porque decai exponencialmente e portanto é desprezável para grandes valores do tempo. Por exemplo, se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), então a solução transiente é $x_0(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\Omega\,t + \varphi)$. Representa uma oscilação com frequência $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ que decai exponencialmente com tempo caraterístico $\tau = 1/\alpha$ (logo é desprezável quando $t \gg \tau$).

Sendo a força um quase-polinómio, uma solução particular da (9.5) pode ser determinada usando o método dos coeficientes indeterminados, e é claro que é da forma $a\cos(\gamma t) + b\sin(\gamma t)$ (pois $\pm i\gamma$ não são raízes do polinómio caraterístico da equação homogénea). Um cálculo mostra que os coeficientes a e b são soluções do sistema linear determinado

$$\begin{aligned}(\omega^2 - \gamma^2)\,a + \beta\gamma\,b &= F_0\\ -\beta\gamma\,a + (\omega^2 - \gamma^2)\,b &= 0\end{aligned}$$

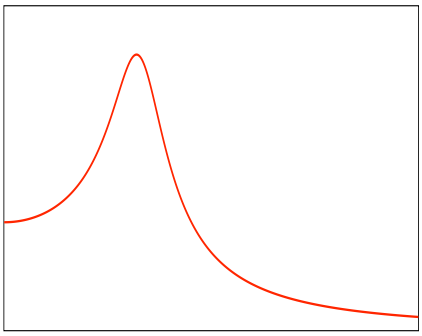
Consequentemente, uma solução particular é

$$x_\infty(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + (\beta\gamma)^2}}\,\cos(\gamma t - \phi)$$

onde a fase ϕ satisfaz $\tan\phi = (\beta\gamma)/(\omega^2 - \gamma^2)$. É chamada solução *estacionária*, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função

$$\boxed{R(\gamma) := \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + (\beta\gamma)^2}}}$$

o fator de proporcionalidade entre a amplitude da força e da resposta, é dita *curva de ressonância* do sistema, e o seu gráfico é do género



A curva de ressonância atinge um máximo para o valor $\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - \beta^2/2}$ da frequência, chamada *frequência de ressonância*. Se o atrito é pequeno, ou seja, se $\alpha \ll \omega$, então a frequência de ressonância é $\gamma_r \simeq \omega - (\alpha/\omega)^2 + \dots$, muito próxima da frequência própria do oscilador.

ex: Discuta também o caso crítico $\alpha^2 = \omega^2$ e super-crítico $\alpha^2 > \omega^2$.

ex: [LL78] **V.26**

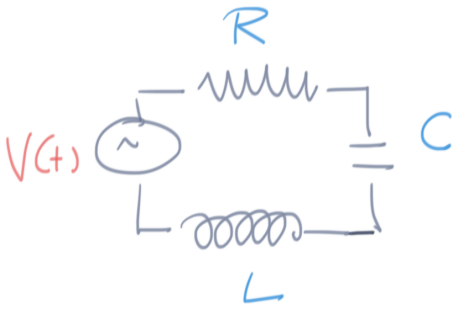
Circuito RLC. Os elementos de um circuito elétrico são definidos pelas leis empíricas $V_R = IR$, a lei de Ohm que define a *resistência* de um resistor, $V_C = Q/C$, que define a *capacitância* de um condensador, e $V_L = L\dot{I}$, que define a *indutância* de um indutor/bobina. Nas fórmulas, as V's representam as diferenças de potencial aplicadas aos elementos, Q é a carga elétrica, e $I = \dot{Q}$ a corrente. De acordo com a lei de Kirkhoff, a força eletromotriz, ou voltagem, $V(t)$ aplicada a um circuito com os três elementos em série é igual a soma dos $V_L + V_R + V_C$, o que produz a equação diferencial

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

para a carga elétrica. Derivando, deduzimos a equação

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V}$$

para a corrente que circula no circuito.



ex: Verifique que a frequência própria de um circuito ideal com resistência nula é $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Estime a frequência própria quando a resistência é pequena.

ex: Verifique que o tempo caraterístico de decaimento da corrente transiente (a solução geral da equação homogénea, ou seja, a corrente do circuito alimentado com voltagem nula) num circuito RLC é $\tau = 2L/R$.

ex: Determine a corrente estacionária num circuito RLC alimentado com uma voltagem constante $V(t) = V_0$ (compare com a equação das oscilações amortecidas).

ex: Determine a corrente estacionára num circuito RLC alimentado com uma voltagem alternada $V(t) = V_0 \cos(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas, mas observe que a intensidade F_0 da força também depende da frequência γ).

ex: Determine a frequência de ressonância do circuito RLC.

Impedância complexa. A análise dos circuitos elétricos é imensamente simplificada se idealizamos correntes e voltagens usando exponenciais complexos. Consideramos um circuito elétrico alimentado por uma força eletromotriz (voltagem) "harmónica" com intensidade V_0 e frequência ω, por exemplo $V_0 \cos(\omega t)$. A ideia é substituir esta expressão por um exponencial complexo $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$, assim que a voltagem física é a sua parte real. É claro (por exemplo, de acordo com o método dos coeficientes indeterminados) que a resposta estacionária (ou seja, assimptótica) do circuito é uma corrente também harmónica e do mesmo período, mas possivelmente desfasada, ou seja, da forma $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$. O quociente

$$Z := \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0}\, e^{i\varphi}$$

que não depende do tempo mas pode depender da frequência ω, é chamado *impedância (complexa)* do circuito. Assim, a resposta estacionária do circuito, por quanto "complexo" mas linear!, é descrita por uma "lei de Ohm"

$$\boxed{V(t) = Z \cdot I(t)}$$

e é determinada apenas por um número complexo $Z = |Z|e^{i\varphi}$, ou seja, por um valor absoluto $|Z| = V_0/I_0$, chamado *reatância*, e uma *fase* φ.

Se o circuito é formado por apenas uma resistência R, então a lei de Ohm $V = RI$ diz que a sua impedância é real e igual a

$$Z_R = R$$

Se o circuito é formado por apenas uma bobina de indutância L, então a lei $V = L\dot{I}$ implica que $V_0 e^{i\omega t} = i\omega L I_0 e^{\,i\omega t}$, e portanto a sua impedância é

$$Z_L = i\omega\, L$$

um número imaginário puro com fase $\varphi_L = \pi/2$. Finalmente, se o circuito é formado por apenas um condensador de capacitância C, então a carga acumulada $Q = \int I dt$ satisfaz a lei $Q = CV$. Ao derivar em ordem ao tempo, temos $I = C\dot{V}$, e portanto $I_0 e^{i\omega t} = i\omega C V_0 e^{i\omega t}$. Assim, a impedância de um condensador é

$$Z_C = \frac{1}{i\omega\, C}$$

um número imaginário puro com fase $\varphi_C = -\pi/2$. Pela lei de Kirkhoff, a impedância de um circuito em série RLC é uma soma

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Em particular, a reatância é mínima, logo a resposta é máxima, quando a parte imaginária da impedância é nula, ou seja, quando $\omega = 1/\sqrt{LC}$, a frequência de ressonância do circuito.

Mais em geral, se uns circuitos de impedância Z_1, Z_2, Z_3, ... estão em séries, então a tensão total é uma soma $V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots = Z_1 I + Z_2 I + Z_3 I + \ldots$, pois a corrente I é a mesma. Assim, o circuito resultante tem impedância

$$\boxed{Z_{\text{série}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots}$$

Por outro lado, se uns circuitos de impedância Z_1, Z_2, Z_3, ... estão em paralelo, então a corrente é uma soma $I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$ e a tensão $V = Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = Z_3 I_3 = \ldots$ é a mesma. Consequentemente, a impedância total do circuito $Z_{\text{paralelo}} = V/I$ é a média harmónica entre as impedâncias dos elementos, ou seja,

$$\boxed{1/Z_{\text{paralelo}} = 1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + \ldots}$$

Também interessante é a potência $P = VI$ dissipada pelo circuito, ou, melhor, a sua média $\langle P \rangle$ calculada ao longo de um período $T = 2\pi/\omega$. Neste cálculo é necessário usar as quantidades físicas, ou seja, as partes reais dos exponenciais complexos, os cosenos. Então a potência instantánea é $P(t) = (V_0^2/|Z|)\cos(\omega t)\cos(\omega t - \varphi)$, e a sua média ao longo de um período T é

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\,\frac{V_0^2}{|Z|}\cos\varphi$$

inversamente proporcional à reatância do circuito e proporcional ao coseno da fase. Em particular, a potência dissipada é máxima quando $\varphi = 0$ (por exemplo, apenas uma resistência), e é nula quando $\varphi = \pm\pi/2$ (por exemplo, apenas uma bobina ou una capacidade).

ex: Calcule a impedância complexa de um circuito RLC e a sua frequência de ressonância.

Representação integral da resposta de um oscilador. Uma solução particular (com condições iniciais triviais) da equação do oscilador harmónico forçado $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$, com uma força $f(t)$ arbitrária, é

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\,\sin\left(\omega(t-\tau)\right)\,d\tau\,, \tag{9.6}$$

uma "convolução" da função $\sin(\omega t)$ com a força $f(t)$.

Esta fórmula pode ser verificada com um cálculo elementar (cuidado, o tempo t aparece nos limite de integração mas também na função dentro do integral!). No entanto, a técnica importante, que permite obter fórmulas integrais que resolvem "todas" as equações lineares com coeficientes constantes, é a *transformada de Laplace*, que, infelizmente, não faz parte do programa de esta unidade curricular. A ideia subjacente é representar uma força arbitrária como sobreposição de exponenciais ...

ex: Calcule o limite da solução (9.6) quando $\omega \to 0$, e conjeture que uma solução particular da equação de Newton $\ddot{x} = f(t)$ é

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Verifique esta conjetura.

ex: Verifique e que uma solução particular da equação $\ddot{x} - k^2 x = f(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\,\sinh\left(k(t-\tau)\right)\,d\tau\,.$$

Variação das constantes. Um método aparentemente elegante para resolver EDOs lineares é o seguinte. Uma solução particular da EDO linear não homogénea

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t) \tag{9.7}$$

pode ser determinada usando a conjetura

$$z(t) = \lambda_+(t)\,\phi_+(t) + \lambda_-(t)\,\phi_-(t) \tag{9.8}$$

onde $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ são duas soluções independentes da equação homogénea $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0$, e $\lambda_\pm(t)$ são "coeficientes/parâmetros/constantes" variáveis. Um cálculo (e muita paciência) mostra que

$$\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \beta z = \frac{d}{dt}\left(\dot{\lambda_+}\phi_+ + \dot{\lambda_-}\phi_-\right) + \alpha\left(\dot{\lambda_+}\phi_+ + \dot{\lambda_-}\phi_-\right) + \left(\dot{\lambda_+}\dot{\phi_+} + \dot{\lambda_-}\dot{\phi_-}\right)$$

Em particular, (9.8) é solução de (9.7) se (mas não só se!) as derivadas $\dot{\lambda_\pm}$ dos coeficientes satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{\lambda_+}\,\phi_+ + \dot{\lambda_-}\,\phi_- &= 0 \\ \dot{\lambda_+}\,\dot{\phi_+} + \dot{\lambda_-}\,\dot{\phi_-} &= f \end{cases}$$

O determinante da matriz 2×2 que define o sistema é o Wronskiano

$$W_{\phi_+,\phi_-}(t) = \phi_+(t)\,\dot{\phi}_-(t) - \dot{\phi}_+(t)\,\phi_-(t)\,,$$

que é diferente de zero porque as $\phi_\pm$ são independentes. A única solução do sistema é

$$\dot{\lambda_+} = -\frac{\phi_-\, f}{W_{\phi_+\,,\phi_-}} \qquad \dot{\lambda_-} = \frac{\phi_+\, f}{W_{\phi_+\,,\phi_-}}\,,$$

e portanto os coeficientes podem ser umas primitivas

$$\boxed{\lambda_+(t) = -\int \phi_-(t)\frac{f(t)}{W_{\phi_+,\phi_-}(t)}dt\,, \qquad \lambda_-(t) = \int \phi_+(t)\frac{f(t)}{W_{\phi_+,\phi_-}(t)}dt\,,}$$

definidas a menos de constantes aditivas arbitrárias (que correspondem, em (9.8), a somar soluções da equação linear homogénea).

Como podem observar nos exercícios seguintes, é difícil arranjar exemplos de equações diferenciais "interessantes/realísticas" cuja solução possa ser obtida por este método de forma razoável. Infelizmente, pelo menos de acordo com Gian-Carlo Rota[21], "the much-trumpeted method of variation of parameters is pathetically useless".

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em intervalos de tempo convenientes, utilizando o método de variação dos parâmetros.

$$\ddot{x} + x = 1/\sin(t) \qquad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t} \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}\log t\,.$$

$$\ddot{x} + x = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \qquad \ddot{x} + x = \tan(t) \qquad \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x = \frac{e^{2t}}{\cos(2t)} \qquad .$$

EDOs lineares de ordem superior. Pode existir um universo paralelo ao nosso, onde a equação de Newton (se calhar um senhor com 3 cabeças) assume a forma

$$m\dddot{x} = F\,,$$

sendo a força uma função $F(x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x},t)$ da posição x, da velocidade $\dot{x}$, da aceleração $\ddot{x}$ e da "arrancada" (em inglês, *jerk*) $\dddot{x}$ da partícula, e, possivelmente, do tempo t. O espaço de fases tem, neste universo, dimensão 4. Engenheiros, físicos e matemáticos deste universo teriam, justamente, interesse em resolver equações diferenciais lineares de ordem 4, do género

$$\ddddot{x} + \alpha\dddot{x} + \beta\ddot{x} \; + \gamma\dot{x} + \delta x = f(t)\,.$$

A boa notícia é que engenheiros, físicos e matemáticos do nosso planeta já conhecem as técnicas para resolver este tipo de equações, pois são as mesmas que usamos no planeta Terra: conjetura e^{zt} para resolver a equação homogénea (e agora o polinómio caraterístico terá grau 4), e método dos coeficientes indeterminados para determinar uma solução particular quando a força é um quase-polinómio.

Isto vale, naturalmente, para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes de ordem arbitrário.

[21] G.-C. Rota, *Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations*, MAA meeting at Simons College, april 24, 1997. https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Rota.pdf

Oscilador harmónico tralfamadoriano. Por exemplo, o oscilador harmónico no planeta Tralfamador[22] deste universo paralelo pode ser do género

$$\ddddot{x} = -4\omega^4 x\,.$$

As quatro raízes do polinómio caraterístico são $\pm(\omega \pm i\omega)$. A solução geral é portanto uma sobreposição

$$x(t) = A_+\, e^{+\omega t}\, \cos(\omega t + \phi_+) \; + A_-\, e^{-\omega t} \cos(\omega t + \phi_-)\,,$$

onde os parámetros $A_\pm$ e $\phi_\pm$ dependem das condições iniciais. A origem é um equilíbrio hiperbólico: as soluções genéricas (com $A_+ \neq 0$) divergem exponencialmente, quando $t \to \infty$. Não há como fazer relógios de pêndulo no planeta Tralfamador.

`So it goes.`

ex: Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares homogéneas:

$$\dddot{x} = 0 \qquad \ddddot{x} = 0 \qquad \ddddot{x} + x = 0 \qquad \ddddot{x} + \ddot{x} = 0 \qquad \dddot{x} + 2\ddot{x} + x = 0$$

ex: Determine umas soluções particulares das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\ddddot{x} - 2\dddot{x} + 3\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t - 1 \qquad \ddddot{x} + x = \sin(t) \qquad \ddddot{x} + 4\ddot{x} = e^{\,-t}$$

[22] Kurt Vonnegut, *Slaughterhouse-Five, or The Children's Crusade*, Delacorte, 1969.

10 Espaços lineares*

ref: [Ap69] *Vol. 2*, **1.1-10** ; [La97] *Ch. III*

Espaços lineares/vetoriais. Um *espaço linear/vetorial real* (ou seja, sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais) é um conjunto $\mathbf{V}$, formado por objetos $\mathbf{v}$ chamados *vetores*, munido de duas operações: a "adição" : $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$

$$\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w} \mapsto \mathbf{v}+\mathbf{w}\,,$$

que satisfaz os axiomas

EL1 *(propriedade associativa)* $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$,

EL2 *(propriedade comutativa)* $\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}$,

EL3 *(existência do elemento neutro)* existe $\mathbf{0}\in\mathbf{V}$, tal que $\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}$

EL4 *(existência do simétrico)* $\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ existe $-\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ tal que $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$.

e a "multiplicação por escalares/números" : $\mathbb{R}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$

$$\lambda\,,\,\mathbf{v}\mapsto\lambda\mathbf{v}\in\mathbf{V}$$

que satisfaz os axiomas

EL5 *(propriedade associativa)* $(\lambda\mu)\mathbf{v}=\lambda(\mu\mathbf{v})$,

EL6 *(propriedade distributiva para a adição em $\mathbb{R}$)* $(\lambda+\mu)\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{v}$,

EL7 *(propriedade distributiva para a adição em $\mathbf{V}$)* $\lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\lambda\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w}$,

EL8 *(existência do elemento neutro)* $1\mathbf{v}=\mathbf{v}$,

Se substituí mos o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais pelo corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, obtemos a definição de *espaço linear/vetorial complexo*.

Os próprios $\mathbb{R}$, munidos das operações usuais "+" e "×", é um espaço vetorial real, o mais simples. Da mesma forma, o plano complexo $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial complexo.

O arquétipo de um espaço vetorial real é, naturalmente, o espaço $\mathbb{R}^n$ das n-úplas de números reais $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, munido das operações "adição" e "produto por um escalar" usuais (objeto da UC de "Álgebra Linear e ..." que tiveram no primeiro semestre). Em particular, são espaços vetoriais o "plano" $\mathbb{R}^2$ e o "espaço" $\mathbb{R}^3$ da mecânica Newtoniana

Os axiomas EL1-8 implicam uma série de propriedades naturais, que costumamos usar quase sem pensar, e cujas provas podem ser exercícios úteis. O elemento neutro é único. O simétrico de cada vetor é único. Os produtos $0\mathbf{v}$ e $\lambda\mathbf{0}$ de um vetor arbitrário por 0 ou de um escalar arbitrário pelo vetor nulo $\mathbf{0}$ são iguai ao vetor nulo $\mathbf{0}$ (e, por esta razão, o escalar 0 é por vezes confundido com o vetor nulo $\mathbf{0}$, sem perigo de ambiguidade). Mais importantes são as leis do corte seguintes. Se $\lambda\mathbf{v}=\mathbf{0}$, então $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ou $\lambda=0$. Consequentemente, se $\lambda\mathbf{v}=\mu\mathbf{v}$ então $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ou $\lambda=\mu$, ou também, se $\lambda\mathbf{v}=\lambda\mathbf{w}$, então $\mathbf{v}=\mathbf{w}$ ou $\lambda=0$.

É importante observar que as propriedades dos espaços vetoriais não dependem da "natureza" dos seus elementos. A noção natural de equivalência é a seguinte. Um *isomorfismo* entre os espaços lineares $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ (sobre o mesmo corpo, real ou complexo) é uma aplicação bijectiva $\phi:\mathbf{V}\to\mathbf{V}'$, $\mathbf{v}\mapsto\phi(\mathbf{v})=\mathbf{v}'$, que respeita as operações, ou seja, tal que se $\mathbf{v}\mapsto\phi(\mathbf{v})=\mathbf{v}'$ e $\mathbf{w}\mapsto\phi(\mathbf{w})=\mathbf{w}'$, então

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}\mapsto\phi(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{v}'+\mathbf{w}' \qquad \text{e} \qquad \lambda\mathbf{v}\mapsto\phi(\lambda\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}' \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}\,.$$

É imediato verificar que um isomorfismo envia o elemento neutro no elemento neutro, e o oposto de um vetor no oposto da sua imagem. Dois espaços vetoriais isomorfos são indistinguíveis enquanto espaços lineares.

ex: [Ap69] **15.5**.

O espaço linear complexo $\mathbb{C}^n$. O *espaço vetorial complexo* de *dimensão* n é o espaço

$$\mathbb{C}^n := \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \text{ vezes}}$$

das n-uplas $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de números complexos, munido das operações *adição*, definida por

$$\boxed{\mathbf{z}, \mathbf{w} \mapsto \mathbf{z} + \mathbf{w} := (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots, z_n + w_n)}$$

e *multiplicação por um escalar*, definida por

$$\boxed{\lambda, \mathbf{z} \mapsto \lambda\mathbf{z} := (\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_n)}$$

Espaço afim. Um *espaço afim* modelado sobre o espaço vetorial $\mathbf{V}$ é um conjunto $\mathcal{A}$ munido de uma aplicação $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}$

$$P, Q \mapsto \vec{PQ}$$

que satisfaz os axiomas

EA1 para cada $P \in \mathcal{A}$ e cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existe um único $Q \in \mathcal{A}$ tal que $\vec{PQ} = \mathbf{v}$

EA2 para quaisquer $P, Q, R \in \mathcal{A}$,

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

ex: Verifique que o conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da aplicação $P, Q \mapsto Q - P$ é um espaço afim modelado sobre o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$.

Subespaços e geradores. Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial, real ou complexo. Um subconjunto não vazio $W \subset \mathbf{V}$ que é também um espaço vetorial (ou seja, tal que $w + w' \in W$ e $\lambda w \in W$ para todos os $w, w' \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$) é dito *subespaço (linear/vetorial)* de $\mathbf{V}$. Se $S \subset \mathbf{V}$ é um subconjunto de $\mathbf{V}$, o conjunto $\mathrm{Span}(S)$ das combinações lineares finitas

$$\lambda_1\mathbf{s}_1 + \lambda_2\mathbf{s}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{s}_m \qquad \mathbf{s}_i \in S\,,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

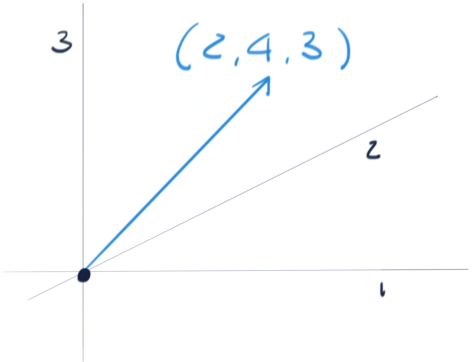
é um subsespaço de $\mathbf{V}$, dito subespaço *gerado* por S. O espaço linear $\mathbf{V}$ tem "dimensão finita" se admite um conjunto finito de geradores.

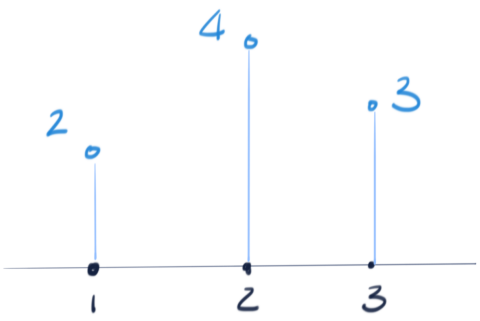
Somas e somas diretas. Se X e Y são subespaços de $\mathbf{V}$, então a "soma"

$$X + Y := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \text{ com } \mathbf{x} \in X,\, \mathbf{y} \in Y\}$$

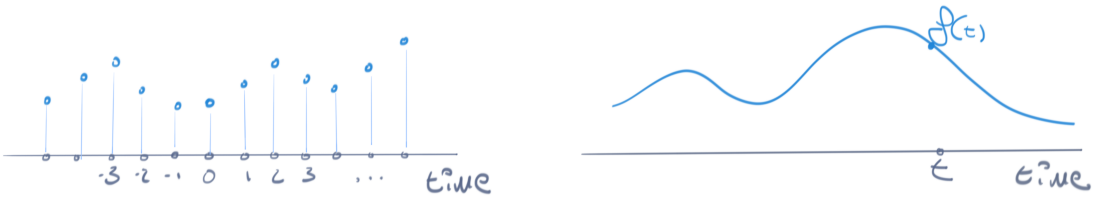
é um subespaço de $\mathbf{V}$. Se cada vetor $\mathbf{v} \in X + Y$ admite uma única representação $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ com $\mathbf{x} \in X$ e $\mathbf{y} \in Y$, então a soma é chamada *soma direta*, e denotada por $X \oplus Y$.

Vetores & funções. Os espaços vetoriais arquétipos na nossa cabeça são, naturalmente, o plano e o espaço da geometria de Euclides. Consequentemente, visualizamos vetores como setas saindo da origem. No entanto, as coordenadas do vetor $(2, 4, 3)$ podem representar os valores da temperatura medida em três diferentes dias, por exemplo, segunda, terça e quarta-feira. Uma visualização mais natural deste vetor, sendo que o nosso tempo tem uma orientação natural, é então a segunda, mostrada no desenho.





Se observamos temperaturas durante muitos dias, a imagem natural do vetor resultante é a seguinte. Vista de muito longe, ou seja, idealizando o tempo como um contínuo, esta parece o gráfico de uma função ...



Amostragem. Vice-versa, um sinal contínuo $f(t)$ podes ser observado apenas em múltiplos inteiros de um tempo de amostragem $\tau > 0$, e transformado num sinal discreto $x[n] := f(n\tau)$, com $n \in \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, que é uma sequência. Um problema natural é tentar "reconstruir" o sinal contínuo a partir da sua amostragem ...

Espaços de funções. Os espaços interessantes em análise, em física e em engenharia, são espaços de funções, chamados "espaços funcionais".

Sejam X um conjunto e $\mathbb{R}^X = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{C}^X = \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ os espaços das funções reais ou complexas definidas em X, cujos elementos são denotados por $x \mapsto f(x)$. Os espaços $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, munidos das operações "adição" e "produto por um escalar" definidas por

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{e} \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)\,,$$

são espaços vetoriais reais e complexos, respetivamente. O elemento neutro é a função identicamente nula. Também interessantes são os "campos vetoriais", funções com valores num espaço vetorial como $\mathbb{R}^m$ (campos de força, de velocidade, campo eletro-magnético, ...). Mais em geral, se $\mathbf{V}$ é um espaço vetorial, então o espaço $\mathbf{V}^X = \mathcal{F}(X, \mathbf{V})$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial (real ou complexo, dependendo de $\mathbf{V}$).

Engenheiros e físicos estão por exemplo interessados em "sinais" $f(t)$ (a intensidade de uma onda de som, onde t é o tempo), ou "funções de onda" $\psi(\mathbf{r}, t)$ (em mecânica quântica), ou outros "campos" $u(\mathbf{r}, t)$ (um deslocamento, um campo de velocidades, o campo eletro-magnético, ...) que resolvem certas equações diferenciais parciais como a equação de onda, de calor, de Laplace, de Schrödinger, ...

Polinómios. Sejam $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}) := \mathbb{R}[t]$ o espaço dos polinómios $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ com coeficientes reais na variável t, e $\mathrm{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$ o subespaço dos polinómios reais de grau $\leq n$. $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$ são espaços lineares. Por outro lado, o conjunto dos polinómios de grau n não é um espaço linear (porque?).

Funções contínuas e diferenciáveis. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo, como por exemplo $X = (0, 1)$ ou o própria reta real $X = \mathbb{R}$. São espaços vetoriais, reais ou complexos, o espaço $\mathcal{C}^0(X)$ das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, os espaços $\mathcal{C}^k(X)$ das funções com k derivadas contínuas, o espaço $\mathcal{C}^\infty(X)$ das funções infinitamente deriváveis. As inclusões são

$$\mathcal{C}^\infty(X) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{k+1}(X) \subset \mathcal{C}^k(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^0(X) \subset \mathbb{R}^X$$

Sucessões. O espaço $\mathbb{R}^\infty := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ é o espaço das sucessões reais, cujos elementos podem ser pensados como "vetores infinitos" $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, com $x_n \in \mathbb{R}$. Subespaços naturais são o espaço b das sucessões limitadas, o espaço c das sucessões convergentes, o espaço c_0 das sucessões que convergem para 0, e o espaço ℓ das sucessões com suporte compacto (i.e. tais que $x_n = 0$ se n é suficientemente grande) são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^\infty$. As inclusões são

$$\ell \subset c_0 \subset c \subset b \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,.$$

Da mesma forma, é possível considerar o espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ das sucessões "bi-infinitas", cujos elementos são $\mathbf{x} = (\dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, e os seus subespaços naturais.

ex: [Ap69] **15.5**.

Superposition principle in quantum mechanics. If a physical system can be prepared in each of the states $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, ..., for example corresponding to certain values $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ of a certain observable L, then the most general state is a *superposition* [23]

$$|\psi\rangle = \psi_1 |1\rangle + \psi_2 |2\rangle + \psi_3 |3\rangle + \dots$$

with complex coefficients $\psi_n \in \mathbb{C}$. The observation of the observable L in the state $|\psi\rangle$ will then give one of the value λ_n (and not a value in between!) with relative frequency (if the experience is repeated a large number of times) proportional to $|\psi_n|^2$. States of a quantum system therefore live in a complex linear space $\mathbf{H}$ (which typically is infinite dimensional). Actually, proportional states must be considered as equal, which amounts to say that we may only consider normalized states, those with $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + \dots = 1$, and do not distinguish between those which differ by a multiplicative phase $e^{i\phi}$ (although this ambiguity is then central in quantum field theory). Therefore the state space of a quantum system is a projective space $\mathbb{P}\mathbf{H}$ of a complex linear space $\mathbf{H}$.

ex: O espaço $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau (exatamente) n é um suberspaço vetorial de $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$?

ex: O espaço das funções não negativas, i.e. tais que $f(t) \geq 0 \ \forall t$, é um subespaço do espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

ex: Os conjuntos das funções pares e ímpares, definidos por

$$\mathcal{F}_{\pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{t.q.} \quad f(t) = \pm f(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\}\,,$$

respetivamente, são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Mostre que cada $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma soma $f = f_+ + f_-$ com $f_{\pm} \in \mathcal{F}_{\pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ex: [Ap69] **15.9**.

Conjuntos livres/linearmente independentes. Seja $\mathbf{V}$ um espaço linear. O conjunto $S \subset \mathbf{V}$ é *livre/(linearmente) independente* se gera cada vetor de $\mathrm{Span}(S)$ duma única maneira, ou seja, se gera o vetor nulo $\mathbf{0}$ duma única maneira, ou seja, se quaisquer que sejam os elementos distintos $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m \in S$,

$$\boxed{\lambda_1 \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{s}_m = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m}$$

Caso contrário, o conjunto é dito *(linearmente) dependente*.

[23] "Any state may be considered as the result of a superposition of two or more other states, and indeed in an infinite number of ways. Conversely any two or more states may be superposed to give a new state ... The non-classical nature of the superposition process is brought out clearly if we consider the superposition of two states, A and B, such that there exists an observation which, when made on the system in state A, is certain to lead to one particular result, a say, and when made on the system in state B is certain to lead to some different result, b say. What will be the result of the observation when made on the system in the superposed state? The answer is that the result will be sometimes a and sometimes b, according to a probability law depending on the relative weights of A and B in the superposition process. It will never be different from both a and b [i.e, either a or b]. The intermediate character of the state formed by superposition thus expresses itself through the probability of a particular result for an observation being intermediate between the corresponding probabilities for the original states, not through the result itself being intermediate between the corresponding results for the original states."

P.A.M. Dirac [Di47]

ex: Verifique se os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes

$$(1,2) \qquad (-1,2) \qquad \text{em } \mathbb{R}^2$$

$$(1,1,0) \qquad (0,1,1) \qquad (1,0,1) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$

$$(1,2,3) \qquad (2,3,4) \qquad (3,4,5) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$

$$(1,0,0,0) \qquad (1,1,0,0) \qquad (1,1,1,0) \qquad (1,1,1,1) \qquad \text{em } \mathbb{R}^4$$

$$\cos t \qquad \sin t \qquad \text{em } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$\cos^2 t \qquad \sin^2 t \qquad 1/2 \qquad \text{em } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$1 \qquad t \qquad t^2 \qquad \text{em Pol}(\mathbb{R})$$

$$(1,-1,1,-1,1,-1,\dots) \qquad (1,1,1,1,1,1,\dots) \qquad \text{em } \mathbb{R}^\infty$$

Bases e dimensão. Seja $\mathbf{V}$ um espaço linear de dimensão finita, real ou complexo. Uma *base* de $\mathbf{V}$ é um conjunto livre de geradores de $\mathbf{V}$, ou seja, um conjunto ordenado $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ de vetores tal que cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ admite uma e uma única representação

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \cdots + v_n\mathbf{b}_n$$

Os números v_i são as *componentes* do vetor $\mathbf{v}$ relativamente à base $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$. Se o espaço linear $\mathbf{V}$ admite uma base finita, então a sua *dimensão* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}$ é o número de elementos de uma base. Se $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ é uma base ordenada do espaço linear $\mathbf{V}$, então a aplicação

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \cdots + v_n\mathbf{b}_n \mapsto (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

define um isomorfismo $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (dependendo se o espaço linear é real ou complexo).

ex: Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x = y\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y = 0 \text{ e } y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0 \text{ e } z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

ex: Verifique que

$$1 \qquad t \qquad t^2 \qquad t^3 \qquad \dots \qquad t^n$$

é uma base do espaço $\text{Pol}_n(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau $\leq n$. Qual a dimensão de $\text{Pol}_n(\mathbb{R})$?

ex: Determine as coordenadas do polinómio $f(t) = (1-t)^2$ relativamente à base ordenada $(1, t, t^2)$ de $\text{Pol}_2(\mathbb{R})$.

ex: [Ap69] **15.9**.

Dimensão infinita. Um espaço linear que não admite uma base finita (ou seja, que admite um conjunto independente e não finito) é dito espaço de *dimensão infinita*. Por exemplo, os espaços $\text{Pol}(\mathbb{R})$ ou $\text{Pol}(\mathbb{C})$ dos polinómios, com coeficientes reais ou complexos, têm dimensão infinita. De fato, o conjunto infinito e numerável dos monómios $\mathbf{e}_n(t) = t^n$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ é um conjunto independente (dois polinómios são iguais sse todos os coeficientes são iguais). A fortiori, têm dimensão infinita os espaços $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ das funções com k derivadas contínuas definidas na reta real (ou num intervalo, ...), onde $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Da mesma forma, têm dimensão infinita os espaços $\ell \subset c_0, \subset c \subset b \subset \mathbb{R}^\infty$ ou $\mathbb{C}^\infty$ das sucessões, reais ou complexas.

Rational linear independence on the line. The real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are said *linear independent over the field of rationals* if the only solution of

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = 0$$

with $k_i \in \mathbb{Z}$ is the trivial solution $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.

ex: Show that (any finite subset of) the sequence

$$\log 2\,, \quad \log 3\,, \quad \log 5\,, \quad \log 7\,, \quad \ldots \quad \log p\,, \quad \ldots$$

of natural logarithms of prime numbers is linear independent over the rationals (use the unique factorization of an integer into prime factors) [24].

[24] H. Bohr, 1910.

11 Formas lineares*

ref: [La87] *Ch. III*

Linearidade. Se cada kilo de ♡ custa A euros e cada kilo de ♠ custa B euros, então a kilos de ♡ e b kilos de ♠ custam $aA + bB$ euros. Ou seja, a função "preço" P satisfaz

$$P(a\heartsuit + b\spadesuit) = a \cdot P(\heartsuit) + b \cdot P(\spadesuit)$$

Esta propriedade é chamada *linearidade*.

Por outro lado, a superfície e o volume de um cubo de lado 2ℓ são 4 e 8 vezes a superfície e o volume de um cubo de lado ℓ, respetivamente (e esta é uma das razões pela existência de dimensões típicas de animais e plantas, como explicado por D'Arcy Thompson[25]). São funções não lineares.

ex: Dê exemplos de funções lineares e de funções não lineares.

Formas lineares, espaço dual. Seja $\mathbf{V}$ um espaço linear real (ou complexo). Uma função real $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ (ou complexa $f : \mathbf{V} \to \mathbb{C}$) é dita *aditiva* se $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$

$$\boxed{f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})}$$

e é dita *homogénea* se $\forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$)

$$\boxed{f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})}$$

Uma função real $\boldsymbol{\xi} : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ (ou complexa $\boldsymbol{\xi} : \mathbf{V} \to \mathbb{C}$) aditiva e homogénea, ou seja, tal que

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda\, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) + \mu\, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{w})}$$

é dita *forma linear*, ou *covetor* (ou *funcional linear* quando $\mathbf{V}$ é um espaço de funções). Uma notação simétrica para o valor da forma linear $\boldsymbol{\xi}$ sobre o vetor $\mathbf{v}$ é

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle := \boldsymbol{\xi}(\mathbf{v})\,.$$

O espaço $\mathbf{V}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ (ou $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}, \mathbb{C})$) das formas lineares, dito *espaço dual (algébrico)* de $\mathbf{V}$, é um espaço linear real (ou complexo) se a adição e o produto por um escalar são definidos por

$$\langle \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} \rangle := \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle + \langle \boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} \rangle \qquad \text{e} \qquad \langle \lambda \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle := \langle \boldsymbol{\xi}, \lambda \mathbf{v} \rangle$$

respetivamente, e a forma nula $\mathbf{0}^* \in \mathbf{V}^*$ é definida por $\langle \mathbf{0}^*, \mathbf{v} \rangle = 0\ \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Se o espaço vetorial $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ é uma base de $\mathbf{V}$ (por exemplo a base canónica de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$), então cada forma linear $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$ é determinada pelos seus valores $\xi_i := \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_i \rangle$ nos vetores da base, pois

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}, v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + v_n \mathbf{e}_n \rangle = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_n v_n\,.$$

Portanto, também $\mathbf{V}^*$ tem dimensão finita, e uma base de $\mathbf{V}^*$, dita *base dual*, é o conjunto ordenado dos covetores $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ definidos por [26]

$$\langle \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

As coordenadas da forma linear $\boldsymbol{\xi} = \xi_1 \mathbf{e}_1^* + \xi_2 \mathbf{e}_2^* + \cdots + \xi_n \mathbf{e}_n^*$ relativamente à base dual são os números $\xi_i = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_i \rangle$, assim que $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle = \sum_i \xi_i v_i$.

Para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, a função $\boldsymbol{\xi} \mapsto \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle$ é uma forma linear em $\mathbf{V}^*$, e portanto existe um homomorfismo injetivo de $\mathbf{V}$ em $(\mathbf{V}^*)^*$. Se $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, então todas as formas lineares $g \in (\mathbf{V}^*)^*$ podem ser representadas como $g(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle$ para algum $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ (basta definir $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ com $v_i = g(\mathbf{e}_i)$), e portanto o espaço dual do espaço dual é isomorfo a $(\mathbf{V}^*)^* \approx \mathbf{V}$ (mas o isomorfismo não é canónico, depende da escolha de uma base!).

[25] D'Arcy Wentworth Thompson, *On growth and form*, 1917 and 1942.

[26] O *símbolo de Kronecker* é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

ex: Mostre que uma função homogénea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $f(x) = \lambda x$, com $\lambda = f(1) \in \mathbb{R}$. Deduza que uma função homogénea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é também aditiva, e portanto linear.

ex: Diga se as seguintes funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são ou não lineares.

$$x \mapsto 3x \qquad x \mapsto 2x - 1 \qquad x \mapsto \sin(2\pi x)$$
$$(x, y) \mapsto 3x - 5y \qquad (x, y) \mapsto x^2 - xy$$
$$(x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z \qquad (x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z + 8$$
$$(x, y, z) \mapsto 0 \qquad (x, y, z) \mapsto \sqrt{3}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto 0 \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto 66$$

ex: Mostre que, dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, a aplicação

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

é uma forma linear em $\mathbb{R}^n$.

Formas lineares no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Uma forma linear $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^*$ é determinada pelos seus valores nos vetores de uma base de $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$, e $\xi_i := \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_i \rangle$, com $i = 1, 2, \ldots, n$, então o valor da forma $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^*$ sobre o vetor genérico $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ é

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle &= \langle \boldsymbol{\xi}, x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \rangle \\ &= x_1 \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_1 \rangle + x_2 \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_2 \rangle + \cdots + x_n \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_n \rangle \\ &= x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n \,. \end{aligned}$$

Portanto, se $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$$

A correspondência que associa a forma $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$ ao vetor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo $\mathbb{R}^n \approx (\mathbb{R}^n)^*$ entre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e o seu dual $(\mathbb{R}^n)^*$ (que depende da estrutura euclidiana, ou seja, do produto escalar euclidiano!).

Uma outra maneira de representar a forma linear é usando o "produto linhas por colunas"

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \Xi X = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

do vetor linha

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix}$$

pelo vetor coluna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ex: Determine o vetor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ que define as seguintes formas lineares

$$x \mapsto 3x \qquad (x, y) \mapsto 0$$
$$(x, y) \mapsto 5x + 9y \qquad (x, y, z) \mapsto -3x + 7y - z$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto 3x_k \qquad \text{com } 0 \leq k \leq n$$

ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função linear tal que $f(\mathbf{i}) = 5$ e $f(\mathbf{j}) = -2$. Determine $f(x, y)$.

ex: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função linear tal que $f(\mathbf{i}) = -3$, $f(\mathbf{j}) = 1$ e $f(\mathbf{k}) = 7$. Determine $f(x, y, z)$.

Núcleo e hiperplanos. O *núcleo/espaço nulo* (em inglês *kernel*) da forma linear $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$ é o subespaço vetorial

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\xi}) := \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = 0\} \subset \mathbf{V}\,.}$$

Se $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}'$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \backslash \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\xi})$ (i.e. um vetor tal que $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$), então cada vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ pode ser representado de uma única maneira como

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(\xi)$. De fato, a condição $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\xi)$, ou seja, $\langle \xi, \mathbf{x} - \lambda \mathbf{v} \rangle = 0$, obriga a escolher $\lambda = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle \,/\, \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle$. Portanto, o núcleo $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\xi})$ de uma forma $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}'$ é um *hiperplano* do espaço linear $\mathbf{V}$, ou seja, um subespaço linear di "co-dimensão" 1. Em particular, se $\mathbf{V}$ tem dimensão finita,

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\xi}) + 1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}}$$

O *hiperplano afim* que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ e é paralelo ao hiperplano $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\xi})$ é

$$\mathbf{a} + \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle = \lambda\} \qquad \text{onde } \lambda = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{a} \rangle\ .$$

ex: Mostre que o núcleo de uma forma linear $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$ é um subespaço linear de $\mathbf{V}$.

ex: Uma "equação linear"

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

define um hiperplano afim em $\mathbb{R}^n$. Mostre que o hiperplano afim é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ sse $b = 0$.

Interseções de hiperplanos/sistemas homogéneos. Se $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m \in \mathbf{V}^*$ são m formas lineares independentes num espaço linear de dimensão finita $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ (em particular, $m \leq n$), então a interseção dos núcleos $\mathbf{W} = \cap_{k=1}^m \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\xi}_k)$, ou seja o conjunto dos vetores $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ que resolvem o "sistema homogéneo"

$$\langle \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x} \rangle = 0\,, \quad \langle \boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{x} \rangle = 0\,, \qquad \ldots \qquad \langle \boldsymbol{\xi}_m, \mathbf{x} \rangle = 0\,,$$

é um subespaço vetorial de co-dimensão m, e portanto de dimensão $n-m$. De fato, se completamos o sistema de formas independentes até obter uma base $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\xi}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ de $\mathbf{V}^*$, e se $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ denota a base dual de $\mathbf{V}$ (assim que $\langle \boldsymbol{\xi}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij}$), então nas coordenadas relativas a esta base o sistema homogéneo é

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 0\,, \qquad \ldots \qquad x_m = 0\,,$$

e as soluções são todos os vetores $\mathbf{x} = \sum_{k=m+1}^n x_k \mathbf{b}_k \in \mathbf{W} \approx \mathbb{R}^{n-m}$.

Integral. O integral

$$f \mapsto I(f) := \int_a^b f(t)\, dt$$

é uma forma linear no espaço $\mathcal{C}^0([a, b])$ das funções contínuas no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. O seu núcleo é o hiperplano das funções com média nula no intervalo. Toda função contínua pode ser representada de forma única como soma $f(x) = c + g(x)$ onde $c = I(f)$ é uma constante (a média de f vezes o comprimento do intervalo) e $g(x) = f(x) - I(f)$ é uma função com média nula.

Delta de Dirac. A *delta de Dirac* (no ponto 0), definida por

$$f \mapsto \delta(f) := \text{“ } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt \text{ ”} \quad = f(0)\,,$$

é uma forma linear no espaço $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se pensamos, informalmente, que os valores $f(t)$ são as “coordinadas” do vetor f, uma para cada t, então a delta de Dirac é o vetor da base dual que corresponde a coordenada $t = 0$.

O núcleo de δ é o conjunto das funções (contínuas) tais que $f(0) = 0$, que é um hiperplano do espaço $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Conjuntos convexos. Um subconjunto $C \subset \mathbf{V}$ de um espaço vetorial real é *convexo* se contém o segmento entre cada par de seus pontos, i.e. se

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C \qquad \Rightarrow \qquad (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in C \quad \forall t \in [0,1]$$

O menor convexo que contém (ou seja, a interseção de todos os convexos que contêm) um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado *envoltória/invólucro/fecho convexa/o* de A, e denotado por $\mathrm{Conv}(A)$. Em particular, o menor convexo que contém o conjunto finito de pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$ é

$$\mathrm{Conv}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}) := \{t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_m\mathbf{x}_m \quad \text{com} \quad t_i \geq 0 \text{ e } \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_m = 1\}$$

ex: As bolas $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}$ e $\overline{B_r(\mathbf{x})} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\}$ são convexas.

ex: Dados um vetor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $b \in \mathbb{R}$, os semi-espaços $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \geq b\}$ são convexos.

ex: Dada uma forma $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$ e um escalar $b \in \mathbb{R}$, os semiespaços $\{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle \geq b\}$ são convexos.

ex: A envoltória convexa de três pontos, A, B e C do plano $\mathbb{R}^2$ é o triângulo de vértices A, B e C.

ex: Translações e homotetias preservam os convexos, i.e. se $C \subset \mathbf{V}$ é convexo, então também $T_{\mathbf{a}}(C) = C + \mathbf{a}$ e $H_\lambda(C) = \lambda C$ são convexos, $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

ex: Se $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$, então $\{\ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) < 0\}$ é convexo.

Medidas de probabilidades. Uma *(medida de) probabilidade* num “espaço dos acontecimentos” finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ é uma função $\mathbb{P} : 2^\Omega := \{\text{subconjuntos } A \subset \Omega\} \to [0,1]$ aditiva, i.e. tal que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \qquad \text{se } A \cap B = \emptyset\,,$$

(a probabilidade do evento “A ou B” é igual à probabilidade do evento A mais a probabilidade do evento B se A e B são eventos mutuamente exclusivos) que verifica $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (a probabilidade do “evento impossível” é nula) e $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (a probabilidade do “evento certo” é um).

Cada vetor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas estão limitadas por $0 \leq p_i \leq 1$ e tal que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ define uma probabilidade $\mathbb{P}$, por meio de

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

ou seja, $p_i = \mathbb{P}(\{\ \omega_i\}$. Portanto, o espaço das medidas de probabilidades em Ω é o *simplexo (unitário)*

$$\Delta^{n-1} := \{\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \text{ com } \ 0 \leq p_i \leq 1 \text{ e } \ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1\} \ \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Observe que o simplexo unitário é o fecho convexo dos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, i.. $\Delta^{n-1} = \mathrm{Conv}(\{\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\})$.

Wild additive functions in the real line. For real valued functions of a real variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, homogeneity implies additivity, since $x + y = (1 + y/x)\, x$ (if $x \neq 0$, of course), and therefore an homogeneous function satisfies

$$f(x + y) = f((1 + y/x)\, x) = (1 + y/x) f(x) = f(x) + (y/x) f(x) = f(x) + f(y)\,.$$

Surprisingly, there exist additive functions which are not homogeneous (hence not linear), at least if we accept the axiom of choice. Indeed, additivity only implies linearity on "rational lines" $\mathbb{Q}x \subset \mathbb{R}$, i.e.

$$f(rx) = rf(x) \qquad \forall\, r = p/q \in \mathbb{Q} \text{ and } \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Therefore, if we could choose a different slope $\lambda_{\mathbb{Q}x}$, hence a different homogeneous function $rx \mapsto \lambda_{\mathbb{Q}x} rx$, for any orbit $\mathbb{Q}x$ of the quotient space $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{R}$, the resulting function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ would be additive but not homogeneous. Any such wild additive but not homogeneous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cannot be continuous, and indeed has a dense graph.

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be an homogeneous function, and $x \in \mathbb{R}$. For $r = p/q \in \mathbb{Q}$ with $p, q \in \mathbb{Z}$ and $q \neq 0$, show that $f(rx) = f(px/q) = pf(x/q)$ and also $f(x) = f(qx/q) = qf(x/q)$. Deduce that $f(rx) = rf(x)$ for all $r \in \mathbb{Q}$. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be an additive but not homogeneous function, so that there exists two points $a, b \in \mathbb{R}$ where $f(a)/a \neq f(b)/b$. This implies that $\mathbf{v} = (a, f(a))$ and $\mathbf{w} = (b, f(b))$ are linearly independent vectors, hence a basis, of $\mathbb{R}^2$. From $\mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w} = \mathbb{R}^2$, deduce that the "rational plane" $\mathbb{Q}\mathbf{v} + \mathbb{Q}\mathbf{w}$ is dense in $\mathbb{R}^2$, i.e. ant point $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ may be approximated with arbitrary precision by a point in $\mathbb{Q}\mathbf{v} + \mathbb{Q}\mathbf{w}$, i.e. for any $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ and any $\varepsilon > 0$ there exist rationals $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}$ such that $\|\mathbf{r} - (\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{w})\| < \varepsilon$. Use again the additivity of f to show that this implies the existence of a point $c \in \mathbb{R}$ such that $\|\mathbf{r} - (c, f(c))\| < \varepsilon$.

12 Espaços euclidianos

ref: [Ap69] *Vol. 2*, **1.11-17** ; [La87] *Ch. V*

16 mar 2021

Espaços euclidianos. Um *espaço euclidiano* é um espaço vetorial $\mathbf{E}$, real ou complexo, munido de um *produto interno* (também dito *hermítico* se o espaço é complexo), uma aplicação que associa a cada par de vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$ um escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, satisfazendo os axiomas

E1 *(simetria hermítica)* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$, $\qquad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$

E2 *(linearidade)* $\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{E}$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E3 *(positividade)* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Se o espaço é real o axioma E1 diz simplesmente que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$. O axioma E2 diz que o produto interno é linear na segunda variável, e o axioma E1 então implica que é "anti-linear" na primeira variável, ou seja, que $\langle \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \overline{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \overline{\mu} \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ (mas há textos, em particular de matemática, onde acontece o contrário). Esta propriedade é também chamada "sesquilinearidade". Pela E1, o produto escalar de um vetor com si próprio é um número real, e a E3 diz que este número é não negativo, ou seja, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, e que é nulo apenas quando $\mathbf{x}$ é o vetor nulo. O axioma E3 também implica que o único vetor $\mathbf{x}$ tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$ é o vetor nulo $\mathbf{0}$.

Os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Os arquétipos de espaços euclidianos de dimensão finita são os seguintes. O espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$, munido do produto interno "usual"

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

(se representamos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como vetores colunas). O espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$, munido do produto interno "usual"

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \cdots + \overline{x_n} y_n = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$$

onde o asterisco denota o "transposto conjugado", ou seja, $\mathbf{x}^* := \overline{\mathbf{x}}^\top$ e seguimos a tradição de físicos e engenheiros de usar produtos internos lineares na segunda variável e anti-lineares na primeira (os matemáticos fazem o contrário).

Em particular, os espaços euclidianos mais simples são os próprios corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Matriz de Gram. Seja $\mathbf{E}$ um espaço euclidiano de dimensão finita n, e seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ uma sua base. Pela linearidade, o produto interno entre dois vetores arbitrários $\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$ e $\mathbf{y} = \sum_k y_k \mathbf{e}_k$ é determinado pelos produtos internos

$$g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$$

entre os vetores da base, que formam uma matriz $G = (g_{ij})$, chamada *matriz de Gram*, ou *matriz da métrica*. De fato, a E2 implica que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{ij} \overline{x_i} g_{ij} y_j = \overline{\mathbf{x}}^\top G \mathbf{y}\,.$$

Pelo axioma E1 esta matriz satisfaz $G^\top = G$ no caso real, e $\overline{G}^\top = G$ no caso complexo. O axioma E3 implica que a matriz G é "definida positiva", no sentido em que $\overline{\mathbf{x}}^\top G \mathbf{x} > 0$ para todo vetor não nulo $\mathbf{x}$. Em particular, as entradas diagonais são positivas, ou seja, $g_{ii} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle > 0$.

Norma euclidiana. A *norma (euclidiana)* do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ é a raiz quadrada não negativa

$$\boxed{\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}}$$

ou seja, o quadrado da norma de $\mathbf{x}$ é $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ (é mais fácil "calcular" o quadrado da norma, que é apenas uma soma de produtos, do que a própria norma, que involve uma raiz quadrada). É

claro que $\|\mathbf{x}\| \geq 0$. Pelas E2 e E3, o único vetor com norma 0 é o vetor nulo $\mathbf{0}$. Pelas propriedades E1 e E2, $\langle \lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}\rangle = \lambda\overline{\lambda}\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$. Isto significa que a noma é "positivamente homogénea", ou seja, satisfaz

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$$

É importante observar que o produto escalar pode ser reconstruido a partir da norma euclidiana que define, de acordo com a *identidade de polarização*

$$4\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + i\,\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2 - i\,\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2\,. \tag{12.1}$$

cuja prova é um cálculo elementar. Se o espaço euclidiano é real, logo os valores dos produtos escalares são reais (e a multiplicação por i não faz sentido), a identidade de polarização é mais simples, apenas

$$4\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \;= \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\,. \tag{12.2}$$

Um vetor é dito *unitário* se a sua norma é igual a um. Todo vetor não nulo $\mathbf{x}$ é proporcional a um vetor unitário, por exemplo $\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Este processo é chamado "normalização". O vetor unitário $\mathbf{u}$ proporcional a um vetor não nulo $\mathbf{x}$ não é único. Se o espaço é real, sempre podemos multiplicar $\mathbf{u}$ por ± 1. Se o espaço é complexo, temos ainda a liberdade de multiplicar $\mathbf{u}$ por uma fase arbitrária $e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

Um cálculo elementar mostra que a norma euclidiana, num espaço euclidiano real ou complexo, satisfaz a *identidade do paralelogramo*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\,\|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{y}\|^2$$

Ortogonalidade e projeções. Os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{E}$ são ditos *ortogonais/perpendiculares* quando $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$, e uma notação é $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Esta relação é claramente simétrica. Pela E3, o único vetor $\mathbf{x}$ ortogonal a todos os vetores de um espaço euclidiano, ou seja, tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$ para todos os $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$, é o vetor nulo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Um cálulo elementar mostra que $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2$ é igual ao dobro da parte real de $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$. Vale então o *teorema de Pitágoras*: se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais então

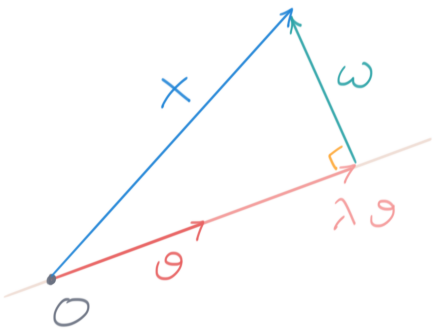
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\,.$$

Seja $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ um vetor não nulo. Todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ pode ser representado de maneira única como soma

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{w}$$

de um vetor $\lambda\mathbf{v}$ proporcional a $\mathbf{v}$ e um vetor $\mathbf{w}$ ortogonal a $\mathbf{v}$. De fato, a condição de ortogonalidade $\langle \mathbf{x} - \lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$ obriga a escolher

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\,.$$



O vetor $\lambda\mathbf{v}$ é dito *projeção (ortogonal)* do vetor $\mathbf{x}$ sobre (a reta definida pel)o vetor $\mathbf{v}$, e o coeficiente λ é dito *componente* de $\mathbf{x}$ ao longo de $\mathbf{v}$. Em particular, a componente de $\mathbf{x}$ ao longo de um vetor unitário $\mathbf{u}$ é o produto escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle$.

Se $\mathbf{x}$ não é proporcional ao vetor não nulo $\mathbf{y}$ (e, em particular, não é nulo), então a norma da diferença $\mathbf{x} - \lambda\mathbf{v}$ entre o vetor $\mathbf{x}$ e a sua projeção $\lambda\mathbf{y}$ sobre $\mathbf{y}$ é estritamente positiva. Um cálculo mostra que

$$0 < \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

Consequentemente,

Teorema 12.1 (desigualdade de Schwarz)**.** *O módulo do produto escalar entre dois vetores* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$ *é limitado por*

$$\boxed{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$

e a igualdade verifica-se sse os vetores $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *são linearmente dependentes.*

Se o espaço euclidiano é real, é então possível definir o *ângulo* θ entre dois vetores não nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pela identidade

$$\cos\theta := \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}\,,$$

sendo o último um número real entre -1 e 1.

Métrica euclidiana. Consequência importante da desigualdade de Schwarz é que a norma satisfaz a *desigualdade do triângulo* (ou seja, é subaditiva),

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\,.$$

A *distância/métrica (euclidiana)* entre os vetores/pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{E}$ é definida por

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$$

É imediato verificar que d é uma distância, ou seja, que é simétrica, não negativa e nula apenas quando os vetores são iguais, e que satisfaz a desigualdade do triângulo

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathrm{d}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\,.$$

Dual de um espaço euclidiano. O axioma E2 implica que, fixado $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$, a função

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{y}} : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

é uma forma linear, e, pela desigualdade de Schwarz 12.1, a sua norma é $\|\mathbf{y}\|$. Em particular, a correspondência $\mathbf{y} \mapsto \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{y}} := \langle \cdot, \mathbf{y}\rangle$ define uma inclusão $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}^*$, que é anti-linear (ou seja, $\xi_{\lambda\mathbf{y}} = \overline{\lambda}\xi_{\mathbf{y}}$).

Se o espaço euclidiano tem dimensão finita, esta inclusão é claramente uma bijeção.

ex: Verifique a identidade de polarização.

ex: Mostre que num espaço euclidiano real a identidade de polarização é

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 4\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

e deduza que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ sse $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$.

ex: Mostre que num espaço euclidiano real vale a *lei dos cosenos*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\,\cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

ex: Mostre que a norma, e portanto a distância, satisfazem a *desigualdade do triângulo* (calcule $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$ e use a desigualdade de Schwarz ...).

ex: [Ap69] **15.12**.

Sistemas ortonormados. Num espaço euclidiano, há uma relação simples entre ortogonalidade e independência. Uma família (finita ou infinita) de vetores não nulos $\mathbf{v}_k$'s dois a dois ortogonais, i.e. tais que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$ se $i \neq j$, é dita *família ortogonal*.

Teorema 12.2. *Uma família ortogonal de elementos não nulos de um espaço euclidiano* $\mathbf{E}$ *é independente.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores não nulos e (dois a dois) ortogonais, i.e. tais que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\|\mathbf{v}_k\| \neq 0$ para todo k. Se $\lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n = 0$, então, ao calcular os produtos internos com os vetores $\mathbf{v}_k$, obtemos $\lambda_k\|\mathbf{v}_k\|^2 = 0$ para todos os k. Sendo os $\|\mathbf{v}_k\| > 0$, todos os λ_k são nulos. □

Em particular, todo o conjunto ortogonal de n vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ não nulos num espaço euclidiano $\mathbf{E}$ de dimensão n é uma base. Os vetores $\mathbf{u}_k := \mathbf{v}_k/\|\mathbf{v}_k\|$ formam então uma *base ortonormada*, ou seja, uma base formada por vetores unitários ortogonais.

Conjuntos independentes, não necesariamente finitos, podem ser feitos ortogonais, de acordo com o seguinte algoritmo.

Teorema 12.3 (ortogonalização de Gram-Schmidt)**.** *Seja* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots,$ *um conjunto independente de vetores do espaço euclidiano* $\mathbf{E}$*. Então existe um conjunto ortogonal* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ *tal que, para todos* $n = 1, 2, \ldots,$ *o espaço* $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *gerados pelo primeiros* n *vetores* $\mathbf{v}$*'s coincide com o espaço* $\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *gerado pelos primeiros* n *vetores* $\mathbf{u}$*'s.*

Demonstração. Basta definir o conjunto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n, \ldots$ recursivamente por

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 \qquad \ldots$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1} - \left(\frac{\langle \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_n\rangle}{\|\mathbf{u}_n\|^2}\mathbf{u}_n\right) \qquad \ldots$$

Ou seja, $\mathbf{u}_{n+1}$ é obtido retirando de $\mathbf{v}_{n+1}$ a soma das suas projeções sobre os $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. É imediato verificar que $\mathbf{u}_{n+1}$ não é nulo (caso contrário $\mathbf{v}_{n+1}$ seria uma combinação linear dos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$) e é ortogonal ao subespaço $\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, e portanto a todos os $\mathbf{u}_k$ com $k \leq n$. □

Em particular,

Teorema 12.4. *Todo espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormada.*

Isometrias. Uma transformação linear $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ de um espaço euclidiano $\mathbf{E}$ num espaço euclidiano $\mathbf{F}$, reais ou complexos, é uma *isometria (linear)* se preserva os produtos internos, i.e. se

$$\langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y}\rangle_{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbf{E}}$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$. É evidente que uma isometria preserva a ortogonalidade (i.e. se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ então também $T\mathbf{x} \perp T\mathbf{y}$), preserva as normas (i..e. $\|T\mathbf{x}\|_{\mathbf{F}} = \|x\|_{\mathbf{E}}$ para todos $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$), e consequentemente as distâncias. Em particular, envia sistemas ortonormados em sistemas ortonormados.

Toda isometria é injetiva (pois preserva as normas), logo invertível na sua imagem, e a sua inversa $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to \mathbf{E}$ é também uma isometria.

Se existir uma isometria bijetiva $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ (observe que a inversa $T^{-1} : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ é também uma isometria), os espaços euclidianos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ são ditos *isomorfos*.

Sejam $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ duas bases ortonormadas dos espaços euclidianos de dimensão finita $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$, respetivamente, e seja $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$. É imediato verificar que T é uma isometria bijetiva. O teorema 12.4 então implica

Teorema 12.5. *Todo espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormada, e, consequentemente, é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, dependendo se real ou complexo, munidos do produto interno usual.*

ex: Uma "inclusão" $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ é uma isometria de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, que não é sobrejetiva.

ex: Uma projeção ortogonal $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ não é uma isometria de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.

ℓ^2 spaces. The simplest infinite dimensional Euclidean space is the space ℓ^2 of those infinite sequences $\mathbf{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ of complex numbers $x_k \in \mathbb{C}$ with finite norm $\|\mathbf{x}\|^2 := \sum_k |x_k|^2 < \infty$, equipped with the inner product

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k}\, y_k$$

(convergence of the inner product comes from Cauchy-Schwarz inequality applied to finite sums and convergence of the infinite sums defining the norms of the two vectors). The infinite system $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, ...is made of pairwise orthogonal unitary vectors. Any vector $\mathbf{x} \in \ell^2$ may be interpreted as a formal sum $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{x} \rangle\, \mathbf{e}_n$.

In some precise sense, any reasonable (complete and separable) infinite dimensional complex Euclidean space is isomorphic to ℓ^2.

Also useful are spaces of two-sided sequences $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, equipped with the obvious inner product.

L^2 spaces. Typical Euclidean spaces of interest in analysis of PDEs (and in physics) are spaces $\mathbf{E}$ made of continuous (or at least integrable) functions $f : X \to \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, defined in some domain X which may be an interval like $[-\pi, \pi]$, the whole real line $\mathbb{R}$, some open region $X \subset \mathbb{R}^n$ (or more sophisticated objects called "manifolds", and so on), equipped with the L^2 *inner product* defined as

$$\langle f, g \rangle := \int_X \overline{f(t)}\, g(t)\, dt\,.$$

For this to make sense we must require finiteness of the norm, i.e.

$$\|f\|^2 = \int_X |f(t)|^2\, dt \;< \infty\,.$$

In some sense, this space is too small, and one should "complete" it in order to include the limits of its fundamental sequences. Lebesgue theory of integration permits this step. It is also too large, since it includes non-zero functions with zero norm (for example, any function which differs from zero only in a countable set). So, one should restore positivity identifying functions which differ by something that has zero norm. The result is a complete Euclidean space called $L^2(X)$. In some other sense, this space is still too large, since interesting linear operators, such as differential operators, may only be defined in strict subspaces made of those functions which admit a sufficient number of derivatives. For example, one may consider the subspace $\mathcal{C}_c^\infty(X) \subset L^2(X)$ of infinitely differentiable functions with compact support. It turns out that this subspace is "dense" in $L^2(X)$ (this means that for any $f \in L^2(X)$ and any precision $\varepsilon > 0$ we may find a smooth function with compact support $g \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ such that $\|f - g\| < \varepsilon$).

When $f(t)$ is a time-dependent "signal", as for example an electric current or the amplitude of a sound wave, then its squared modulus $|f(t)|^2$ is a "power", hence its time integral $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt$ has the meaning of an "energy".

If a continuous-time signal $f(t)$ is "sampled" at integer multiples of some sampling time $\tau > 0$, we get a discrete-time signal $x_n := f(n\tau)$, with $n \in \mathbb{N}$ or $\mathbb{Z}$, which is a sequence. The L^2 inner product is then approximated/replaced by the ℓ^2 inner product.

Polinómios de Legendre. Seja $\mathbf{E}$ o espaço euclidiano das funções contínuas $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} x(t)\, y(t)\, dt\,.$$

Os polinómios homogéneos $v_0(t) = 1$, $v_1(t) = t$, $v_2(t) = t^2$, ..., $v_n(t) = t^n$, ...formam uma família independente de $\mathbf{E}$. A ortogonalização de Gram-Schmidt produz a família dos *polinómios de Legendre*,

$$\ell_0(t) = 1\,, \quad \ell_1(t) = t\,, \quad \ell_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}\,, \quad \ell_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}\,t\,, \quad \ldots$$

Complemento ortogonal, projeção ortogonal. Seja $\mathbf{E}$ um espaço euclidiano, real ou complexo. O complemento ortogonal do subconjunto $X \subset \mathbf{E}$ (não necesariamente um subespaço) é o subespaço linear

$$\boxed{X^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbf{E} \;\text{ t.q. }\; \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = 0 \;\; \forall \mathbf{x} \in X\}}$$

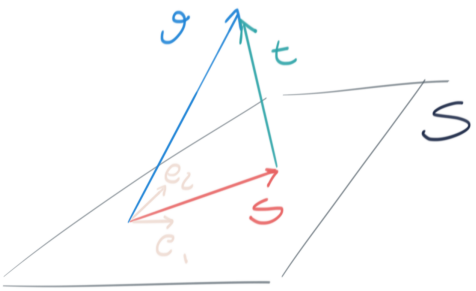
Seja $S \subset \mathbf{E}$ um subespaço de dimensão finita do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Então cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ pode ser representado de maneira única como soma

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$$

de um vetor $\mathbf{s} \in S$ e um vetor $\mathbf{t} \in S^\perp$, ou seja, o espaço $\mathbf{E}$ é uma soma direta $\mathbf{E} = S \oplus S^\perp$. De facto, se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada de S (que existe pelo teorema de Gram-Schmidt), basta escolher

$$\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v}\rangle \;\; \mathbf{e}_k$$

e verificar que $\mathbf{t} := \mathbf{v} - \mathbf{s}$ é ortogonal a todos os vetores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, e portanto a todos os vetores de S. O vetor $\mathbf{s}$ é dito *projeção (ortogonal)* de $\mathbf{v}$ sobre S, e o operador $P_S : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, definido por $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{s}$, é dito *projeção ortogonal* sobre o subespaço S.



Teorema 12.6 (teorema de aproximação)**.** *Seja $S \subset \mathbf{E}$ um subespaço de dimensão finita do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. A projecção ortogonal realiza a distância entre $\mathbf{v}$ e S, ou seja, para todo $\mathbf{s}' \in S$,*

$$\|\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v})\| \le \|\mathbf{v} - \mathbf{s}'\|\,.$$

Demonstração. O vetor $\mathbf{s}' - \mathbf{s}$, que pertence ao subespaço S, é ortogonal ao vetor $\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{s}$, e portanto, pelo teorema de Pitágoras, $\|\mathbf{v} - \mathbf{s}'\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{s}' - \mathbf{s}\|^2 \ge \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2$. □

Em dimensão infinita, este resultado é falso em geral. Projeções ortogonais, e portanto decomposições como somas diretas $\mathbf{E} = S \oplus S^\perp$ são possíveis apenas quando o subespaço S é fechado.

ex: Mostre que $X^\perp$ é um subespaço linear de $\mathbf{E}$.

ex: Verifique que $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{t}\|^2$.

ex: Verifique que $P_S(\mathbf{E}) = S$, e que $P_S P_S = P_S$.

Bases ortonormadas e coeficientes de Fourier. Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$ um conjunto/sistema ortonormado do espaço euclidiano $\mathbf{E}$ (ou seja, $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, e $\|\mathbf{e}_i\| = 1$). Os *coeficientes de Fourier* do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ (relativamente ao conjunto ortonormado $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$) são os escalares

$$\boxed{x_k := \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}$$

Fixado um inteiro positivo N, seja $\mathbf{E}_N \subset \mathbf{E}$ o subespaço de dimensão finita de $\mathbf{E}$, gerado pelos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$. A projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{E}_N$ é o vetor $\mathbf{x}_N = \sum_{k=1}^N x_k \mathbf{e}_k$. Da desigualdade $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N\|^2 \geq 0$ segue que $\sum_{k=1}^N |x_k|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$. Em particular, a série de termos não-negativos $\sum_k |x^k|^2$ é convergente. No limite quando $N \to \infty$, segue a

Teorema 12.7 (desigualdadde de Bessel)**.** *Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$ um sistema ortonormado do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ e $x_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle$ são os seus coeficientes de Fourier, então*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2}$$

Se $\mathbf{E}$ tem dimensão finita, e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada, então cada vetor $\mathbf{x}$ pode ser representado de maneira única como $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k$, sendo as coordenadas $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$. Então a desigualdade de Bessel é de fato uma igualdade, o teorema de Pitágoras

$$\boxed{\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_k|^2}$$

e o produto escalar entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é dado pela *identidade de Parseval*

$$\boxed{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_k}\, y_k}$$

(que implica o teorema de Pitágoras, se tomamos $\mathbf{x} = \mathbf{y}$).

ex: [Ap69] **15.12**.

Séries de Fourier. O produto interno L^2 no espaço $\mathbf{H}$ das funções contínuas (ou simplesmente integráveis) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ é

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt\,.$$

Não é difícil verificar que $1, \cos(t), \cos(2t), \dots, \sin(t), \sin(2t), \dots$ é um conjunto ortogonal. Mais fácil é verificar que a família $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ das "harmónicas"

$$\mathbf{e}_n(t) := e^{int}\,,$$

com $n \in \mathbb{Z}$, é um conjunto ortonormado.

Uma combinação linear $\sum_{-N}^{N} c_n e^{int}$ é chamada "polinómio trigonométrico" de grau N, e o espaço $\mathbf{E}_N$ dos polinómios trigonométricos de grau N é um subespaço de dimensão finita de $\mathbf{E}$, gerado pelas harmónicas $\mathbf{e}_n$ com $|n| \leq N$.

Seja $f(t)$ uma função integrável (por exemplo, seccionalmente contínua) no intervalo $[-\pi, \pi]$. A sua projeção ortogonal sobre $\mathbf{E}_N$ é o polinómio trigonométrico

$$S_N f(t) := \sum_{-N}^{N} \widehat{f}(n)\, e^{int}\,,$$

onde os *coeficientes de Fourier* de f são definidos por

$$\boxed{\widehat{f}(n) := \langle \mathbf{e}_n, f\rangle \;= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\; dt\,.}$$

A *série de Fourier* de $f(t)$ é a série formal

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

(a segunda é obtida da primeira usando a fórmula de Euler, e os coeficientes a_n e b_n são combinações lineares dos $\widehat{f}(\pm n)$). Se a função $f(t)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável com continuidade), a série de Fourier converge para a própria função.

Hilbert spaces and Dirac's notation. Physicists are interested in certain (typically infinite dimensional) complex Euclidean spaces $\mathbf{H}$ called *Hilbert spaces*. They are characterized by a "completeness condition" and by the fact of having an "infinite countable basis" $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots$ Each vector may be written as an infinite sum $\mathbf{x} = \sum_k x_k\, \mathbf{e}_k$, with Fourier coefficients $x_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k\rangle$, and (the square of) its norm is the sum of the series $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_k |x_k|^2$. It happens that the inner product induces an isomorphism between $\mathbf{H}$ and its dual $\mathbf{H}^*$. Paul Dirac, one of the fathers os quantum mechanics, invented the following notation[27]: a generic vector is denoted by $|\psi\rangle$ and called *ket*, while a generic co-vector is denoted by $\langle\phi|$ and called *bra*, so that their pairing $\langle\phi|\psi\rangle$, the inner product, is a *bra-ket*.

Polarized photons and qubits. The smallest non-trivial quantum system has a two-dimensional state space $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. A physical example is polarization of light. A photon may be left or right polarized, hence may be in one of the orthogonal states $|\circlearrowleft\rangle$ or $|\circlearrowright\rangle$. A vector in $\mathcal{H}$ is also called *qubit*, beeing the building block of quantum computation.

We may change basis, and consider horizontally or vertically polarized photons,

$$|\leftrightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\circlearrowleft\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\;|\circlearrowright\rangle \qquad \text{and} \qquad |\updownarrow\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\,|\circlearrowleft\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\,|\circlearrowright\rangle\;,$$

or else left-diagonal or right-diagonal polarized photons,

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\leftrightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\updownarrow\rangle \qquad \text{and} \qquad |\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\leftrightarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\updownarrow\rangle\;.$$

[27] P.A.M. Dirac, A new notation for quantum mechanics, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **35** (3) (1939), 416-418.
P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1930.

13 Transformações lineares*

ref: [Ap69] *Vol 2*, **2.1-9** ; [La87] *Ch. III*

Transformações lineares. Uma *transformação/aplicação/operador linear* entre os espaços vetoriais reais (ou complexos) $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ é uma função $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ aditiva e homogénea, ou seja, tal que

$$L(\mathbf{v}+\mathbf{v}') = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{v}') \qquad \text{e} \qquad L(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\, L(\mathbf{v})$$

ou seja, tal que

$$\boxed{L(\lambda\mathbf{v}+\lambda'\mathbf{v}') = \lambda L(\mathbf{v}) + \lambda' L(\mathbf{v}')}$$

$\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ e $\forall \lambda,\, \lambda' \in \mathbb{R}$ (ou $\in \mathbb{C}$). É usual omitir as parêntesis, e denotar a imagem do vetor $\mathbf{v}$ simplesmente por $L\mathbf{v}$.

O espaço $\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ (ou $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$) das transformações lineares de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{W}$ é um espaço linear real (ou complexo) se a adição e a multiplicação por um escalar são definidas por

$$(L+M)(\mathbf{v}) := L(\mathbf{v}) + M(\mathbf{v}) \qquad\qquad (\lambda L)(\mathbf{v}) := \lambda L(\mathbf{v})$$

O elemento neutro é a transformação nula, que envia todo vetor no vetor nulo. Em particular, é um espaço linear o espaço $\mathrm{End}(\mathbf{V}) := \mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V})$ dos *endomorfismos* de $\mathbf{V}$. Uma transformação linear bijetiva $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é dita *isomorfismo (linear)* entre os espaços lineares $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$.

Se o espaço linear é uma soma direta $\mathbf{V} = X \oplus Y$ de dois subespaços, e $L \in \mathrm{End}(X)$ e $M \in \mathrm{End}(Y)$ são dois endomrfismos, é definido o endomorfismo "soma direta" $L \oplus M$ de acordo com

$$(L \oplus M)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) := L(\mathbf{x}) + M(\mathbf{y})$$

ex: A transformação *identidade* $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ é linear.

ex: Se $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é uma transformação linear, então $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $L(-\mathbf{v}) = -L(\mathbf{v})$.

ex: Uma transformação linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ envia retas afins $\mathbf{a}+\mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbf{V}$ em retas afins $\mathbf{b}+\mathbb{R}\mathbf{w} \subset \mathbf{W}$, se $\mathbf{b} = L(\mathbf{a})$ e $\mathbf{w} = L(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, ou em pontos $\mathbf{b}$, se $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Em particular, envia retas $\mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbf{V}$ passando pela origem em retas $\mathbb{R}\mathbf{w} \subset \mathbf{W}$ passando pela origem.

ex: A inversa de uma transformação linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bijetiva é uma transformação linear $L^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$.

ex: Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, T_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

é linear sse todas as suas "coordenadas" $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \ldots, m$, são lineares.

ex: Diga se as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são lineares.

$$(x,y) \mapsto (3x-5y, x-y) \qquad (x,y) \mapsto (x^2, xy)$$

$$(x,y,z) \mapsto (x, y+z, 2) \qquad (x,y,z) \mapsto (x, y+z, 0)$$

$$(x,y,z) \mapsto (x-y, z+y, 3x+2y-z) \qquad (x,y,z) \mapsto (1,2,3)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (0,0,1) \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^m$$

ex: Diga se as seguintes aplicações de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são lineares.

T transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $y = 0$

T transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $y = x$

T transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares$(2r, \theta)$

T transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares $(r, \theta + \pi/2)$

ex: Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $L(1, 1) = (1, 4)$ e $L(2, -1) = (-2, 3)$. Determine $L(5, -1)$ (observe que $1 + 2 \cdot 2 = 5$ e $1 + 2 \cdot (-1) = -1$).

ex: Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(\mathbf{i}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad T(\mathbf{j}) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

ex: Se $X \subset \mathbf{V}$ é um subespaço linear de $\mathbf{V}$ e $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é uma transformação linear, então a imagem $L(X)$ é um subespaço linear de $\mathbf{W}$.

ex: As translações de $\mathbb{R}^n$, as transformações $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{a}$ com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, são transformações lineares?

ex: As homotetias de $\mathbb{R}^n$, as transformações $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, são transformações lineares?

ex: [Ap69] **16.4**.

Núcleo e imagem. Seja $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ uma transformação linear. O *núcleo/espaço nulo* (em inglês, *kernel*) de L é o subespaço vetorial

$$\boxed{\operatorname{Ker}(L) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \subset \mathbf{V}}$$

A *imagem* de L é o subespaço vetorial

$$\boxed{\operatorname{Im}(L) := L(\mathbf{V}) = \{L(\mathbf{v}) \text{ com } \mathbf{v} \in \mathbf{V}\} \subset \mathbf{W}}$$

A dimensão do núcleo é dita *nulidade* de L, e a dimensão da imagem é dita *ordem* de L. Acontece que estes dois números satisfazem um "princípio de conservação".

Teorema 13.1. *Seja $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ uma transformação linear. Se $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, então também a imagem $L(\mathbf{V})$ tem dimensão finita e*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}(L) + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}(L) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}}$$

Demonstração. Seja $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}) = n$. Se os vetores $\mathbf{v}_1, , \ldots, \mathbf{v}_k$ formam uma base de $\operatorname{Ker}(L)$, e se juntamente com os vetores $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ formam uma base de $\mathbf{V}$ (se $k < n$, caso contrário o teorema é trivial), então é imediato verificar que os vetores $\mathbf{w}_1 = L(\mathbf{v}_{k+1})$, $\ldots$, $\mathbf{w}_{n-k} = L(\mathbf{v}_n)$ geram $\operatorname{Im}(L)$ e são independentes. □

ex: Mostre que $\operatorname{Ker}(L)$ é um subespaço de $\mathbf{V}$ e que $\operatorname{Im}(L)$ é um subespaço de $\mathbf{W}$.

ex: Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a ordem das seguintes transformações lineares

$$L(x, y) = (x + y, x - y) \qquad L(x, y) = (y, -x) \qquad L(x, y) = (x + y, 3x - 2y)$$

$$L(x, y, z) = (2x, 3y, 0) \qquad L(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$$

$$L(x, y, z) = (0, 0, 0) \qquad L(x, y, z) = (x, y)$$

ex: Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a ordem da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $x = 0$

ex: Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a ordem da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto no seu simétrico em relação à origem.

ex: [Ap69] **16.14**.

Operadores. Seja $\mathbf{V}$ um espaço linear (de dimensão não necessariamente finita!). Um *operador (linear)* em $\mathbf{V}$ é uma transformação linear $A : \mathbf{D} \to \mathbf{V}$ definida num subespaço linear $\mathbf{D} \subset \mathbf{V}$, dito *domínio* do operador A (esta definição é importante em análise, quando $\mathbf{V}$ é um espaço de dimensão infinita e o operador apenas pode ser definido num subespaço próprio de $\mathbf{V}$). Um subespaço linear $\mathbf{W} \subset \mathbf{D}$ é *invariante* se $A(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$ (ou seja, se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ implica $A\mathbf{v} \in \mathbf{W}$), e portanto a restrição de A a $\mathbf{W}$ é um endomorfismo $A|_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$.

Operadores derivação, multiplicação e primitivação. O operador *derivação* envia uma função derivável $f(x)$ na função

$$(Df)(x) := f'(x)\,.$$

Pode ser pensado como um operador $D : \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, ou também como un endomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. O operador *multiplicação* envia uma função $f(x)$ na função

$$(Xf)(x) := x \cdot f(x)\,.$$

O operador *primitivação* envia uma função integrável (na reta real ou num intervalo da reta) $f(x)$ na função

$$(Pf)(x) := \int_c^x f(t)\,dt$$

Pode ser pensado como um operador $P : \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$, ou como um endomorfismo de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

ex: Determine o núcleo e a imagem do operador derivação $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,

ex: O subespaço $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómio é um subespaço invariante de $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. O subespaço $\mathrm{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau $\leq n$ é um subespaço invariante do operador derivação $D : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$?

ex: Determine o núcleo $\mathrm{Ker}(P)$ e a imagem $\mathrm{Im}(P) = P(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}))$.

Composição e álgebra dos endomorfismos. A composição de duas transformações lineares $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ e $M : \mathbf{W} \to \mathbf{Z}$, definida por $(ML)(\mathbf{v}) := M(L(\mathbf{v}))$, é uma transformação linear. Em particular, a composição de dois endomorfismos de um espaço vetorial $\mathbf{V}$ é um endomorfismo de $\mathbf{V}$. A n-ésima iterada do endomorfismo $L \in \mathrm{End}(\mathbf{V})$ é o endomorfismo L^n definido indutivamente por

$$L^0 = I_{\mathbf{V}}\,, \qquad L^{n+1} = LL^n \qquad \text{se } n \geq 1\,.$$

A composição de transformações lineares satisfaz as propriedades distributivas

$$(L + M)N = LN + MN \qquad L(M + N) = LM + LN$$

(que justificam a notação "multiplicativa" LM em vez de $L \circ M$).

A composição não é comutativa! Ou seja, em geral, não há razão para que LM seja igual a ML. Os endomorfismos $L, M \in \mathrm{End}(\mathbf{V})$ *comutam entre si/são permutáveis* se $LM = ML$. A obstrução é o *comutador*, definido por

$$[L, M] := LM - ML\,,$$

que é igual a transformação nula sse L e M comutam.

ex: Calcule a composição ML quando

$$L(x,y) = (x+y, x-y) \qquad M(x,y) = 2x - 3y$$

$$L(x,y,z) = (x-y+z, z-y) \qquad M(x,y) = (x,y,x+y)$$

ex: Verifique que cada endomorfismo comuta com si próprio, ou seja, $[L,L] = 0$

ex: Calcule o comutador entre os endomorfismos do plano $E_+(x,y) = (y,0)$ e $E(x,y) = (x,-y)$.

ex: Se $[L,M] = 0$ e $[M,N] = 0$, é verdade que $[L,N] = 0$?

ex: Determine todos os endomorfismos do plano que comutam com $I(x,y) = (x,y)$.

ex: Calcule o comutador $[D,X]$ entre os operadores derivação e multiplicação definidos em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

ex: Seja $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ um endomorfismo de um espaço vetorial de dimensão finita $\mathbf{V}$. Mostre que $\mathrm{Ker}(L^k) \subset \mathrm{Ker}(L^{k+1})$. Sendo a dimensão finita, deduza que existe um inteiro minimal $m \geq 1$ a partir do qual $\mathrm{Ker}(L^m) = \mathrm{Ker}(L^{m+k})$ para todo $k \geq 1$. Deduza que o espaço é uma soma direta $\mathbf{V} = \mathrm{Ker}(L^m) \oplus (\mathrm{Im}L^m)$.

Transformações lineares invertíveis. A transformação linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é *invertível* se é *injetiva* (i.e. $L(\mathbf{x}) \neq L(\mathbf{x}'$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, e portanto a equação $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ admite uma e uma única solução para cada $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(L)$), $\Leftrightarrow$ existe uma transformação linear $L^{-1} : \mathrm{Im}(L) \to \mathbf{V}$ (a *inversa* de L) tal que $L^{-1}L = I_{\mathbf{V}}$ e $LL^{-1} = I_{\mathrm{Im}(L)} \Leftrightarrow$ o núcleo de L é trivial, i.e. $\mathrm{Ker}(L) = \{\,\mathbf{0}\}$.

Em particular, se $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, a transformação linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é invertível $\Leftrightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(L) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V} \Leftrightarrow L$ transforma vetores independentes de $\mathbf{V}$ em vetores independentes de $\mathbf{W} \Leftrightarrow L$ transforma bases de $\mathbf{V}$ em bases de $\mathrm{Im}(L)$.

Os *automorfismos* $\mathrm{Aut}(\mathbf{V})$ de um espaço linear $\mathbf{V}$ são os endomorfismos $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ invertíveis.

ex: Diga se L é injetiva e, caso afirmativo, determine a imagem $\mathrm{Im}(L)$ e a transformação inversa L^{-1}.

$$L(x,y) = (x,x) \qquad L(x,y) = (y,x)$$

$$L(x,y) = (x-y, x+y) \qquad L(x,y) = (0,y)$$

$$L(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x) \qquad L(x,y,z) = (3x, 2y, z)$$

$$L(x,y,z) = (y,z,0) \qquad L(x,y,z) = (x+y+z, y, z)$$

$$L(x,y) = (x,0,y) \qquad L(x,y) = (x-x, x+y, 0)$$

ex: [Ap69] **16.8**.

ex: Mostre que se $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ é invertível então também L^n é invertível e $(L^n)^{-1} = (L^{-1})^n$.

ex: Mostre que se $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ e $M : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ comutam, então também as inversas L^{-1} e M^{-1} comutam, e $(LM)^n = L^n M^n$.

ex: Considere, no espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, o operador *derivação*, definido por $(Df)(t) := f'(t)$, e o operador *primitivação*, definido por $(Pf)(t) := \int_0^t f(s)\,ds$. Mostre que $DP = I$ mas $PD \neq I$. Descreva o núcleo e a imagem de PD.

ex: O operador *multiplicação*, definido por $(Xf)(x) := x\,f(x)$, em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, é invertível?

ex: O operador *deslocamento* $\sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definido por

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots),$$

é invertível?

Laplaciano, equação de Laplace e funções harmónicas. O *Laplaciano* (ou *operador de Laplace*) no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o operador diferencial $\Delta := \mathrm{div} \circ \mathrm{grad}$, definido, em coordenadas cartesianas (ou seja, relativamente à uma base ortonormal), por

$$(\Delta f)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^n)^2}(\mathbf{x})$$

se $f(\mathbf{x}) = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ é uma função real de classe C^2 defnida num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O Laplaciano pode ser pensado como um operador $\Delta : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. A *equação de Laplace* para o campo escalar $f(\mathbf{x})$, definido num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é

$$\Delta f = 0$$

As soluções da equação de Laplace, ou seja, os campos escalares contidos no núcleo do Laplaciano, são ditas *funções harmónicas*.

ex: Quais funções satisfazem a equação de Laplace $f''(x) = 0$ na reta?

ex: Determine as soluções da equação de Laplace $f''(x) = 0$ no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com condições de fronteira $f(a) = A$ e $f(b) = B$.

ex: Verifique que $f(\mathbf{r}) = \log \|\mathbf{r}\|$ é uma solução da equação de Laplace em $\mathbb{R}^2 \backslash \{\, \mathbf{0}\}$.

ex: Verifique que (o potencial elétrico/gravitacional gerado por uma carga/massa unitária colocada na origem do espaço 3-dimensional) $f(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$. é uma solução da equação de Laplace em $\mathbb{R}^3 \backslash \{\, \mathbf{0}\}$.

Álgebra de Weyl-Heisenberg-Schrödinger. A álgebra do grupo de Weyl-Heisenberg[28] (em dimensão um) é gerada pelos operadores *multiplicação* e *derivação*

$$(Qf)(x) := x\, f(x) \qquad \text{e} \qquad (\partial f)(x) := f'(x),$$

definidos, por exemplo, no *espaço de Schwarz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ das funções complexa $f(x)$ infinitamente diferenciáveis tais que todas as derivadas decrescem mais rapidamente do que o inverso de qualquer polinómio[29]. Os operadores Q e $P := -i\hbar\partial$ (onde $\hbar$ é a constante de Planck reduzida) representam a *posição* e o *momento*, respetivamente, de uma partícula quântica livre na "representação de Schrödinger". Os operadores P e Q não comutam, pois

$$[Q, P] = i\hbar$$

e está é a causa do "princípio de incerteza de Heisenberg".

[28] Os físicos dizem "grupo de Weyl", que era um matemático (colega de Einstein em Zurich e depois em Princeton), e os matemático dizem "grupo de Heisenberg", que era um físico, um dos pais da mecânica quântica.

[29] Ou seja, uma função f está no espaço de Schwartz se para todos $n, m \in \mathbb{N}$ existem constantes $C_{n,m}$ tais que $\|Q^n \partial^m f\|_\infty \leq C_{n,m}$. Consequentemente, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então também $Q^n \partial^m f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todos n, m.

Equações diferenciais ordinárias lineares. Uma *equação diferencial ordinária linear* de ordem n é uma lei

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

para a função $x(t)$, onde a_k são coeficientes (não necessariamente constantes) e $f(t)$ é uma função dada (uma força se $n = 2$). Pode ser escrita como

$$Lx = f$$

se $L : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ é o operador diferencial $L := a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$. A equação *homogénea* associada é a equação diferencial $Ly = 0$, ou seja,

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0\,.$$

O espaço das soluções da equação homogénea $Lz = 0$ é um subespaço vetorial de dimensão finita, tipicamente $\mathbf{H} = \mathrm{Ker}(L) \approx \mathbb{R}^n$. Por exemplo, se os coeficientes a_k's são constantes, uma base de $\mathbf{H}$ é formada pelos exponenciais complexos $y_k(t) = e^{z_k t}$, onde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são as raizes (distintas, no caso genérico!) do polinómio caraterístico $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. A "solução geral", ou seja, o ponto genérico de $\mathbf{H}$, é portanto uma combinação linear

$$c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} + \cdots + c_n e^{z_n t}\,.$$

com $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ coeficientes arbitrários (a cada raiz z de multiplicidade m corresponde um "quase-polinómio" $(c_1 + c_2 t + \cdots + c_p t^{m-1}) e^{zt}$, assim que a solução geral no caso não-genérico de raizes múltiplas é uma soma de quase-polinómios). Se $z(t)$ é uma solução (apenas uma!) de $Lz = f$, então o espaço das todas as soluções de $Lx = f$ é o espaço afim $z + \mathbf{H}$, formado pelos pontos

$$z(t) + c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} + \cdots + c_n e^{z_n t}\,.$$

14 Transformações lineares e matrizes*

ref: [Ap69] *Vol 2*, **2.10-16** ; [La87] *Ch. IV*

Matrizes. Uma *matriz* real (ou complexa) $m \times n$ é uma tabela

$$\boxed{A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

de $m \cdot n$ números reais (ou complexos) dispostos em m linhas e n colunas. O número real (ou complexo) a_{ij} é dito *elemento/componente/entrada* ij da matriz A. Os vetores

$$\boxed{A^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m}$$

são ditos *i-ésima linha* e *j-ésima coluna* da matriz A, respetivamente. Em particular, uma matriz com m linhas e apenas uma coluna é um vetor de $\mathbb{R}^m$ representado como um vetor coluna, e uma matriz com n colunas e apenas uma linha é um vetor de $\mathbb{R}^n$ representado como um vetor linha. Se o número de linhas é igual ao número de colunas, i.e. $n = m$, a matriz é dita "quadrada".

Espaço linear das matrizes. O espaço $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$) das matrizes reais (ou complexas) $m \times n$ é um espaço linear real (ou complexo) se a adição e a multiplicação por um escalar são definidas por

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \text{e} \qquad \lambda A := (\lambda a_{ij})$$

se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). O elemento neutro, ou vetor nulo, é a "matriz nula" $0 = (0)$, cujas entradas são todas nulas, e que satisfaz $A + 0 = A$ para toda a matriz A. A matriz "oposta" da matriz A é a matriz $-A := (-1)A$, tal que $A + (-A) = 0$. Então, podemos simplificar a notação e escrever $A - B := A + (-B)$.

É claro que a dimensão do espaço $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é o produto $m \cdot n$, o número de elementos das matrizes. De fato, uma base é o conjunto das matrizes I_{ij}, que têm 1 na entrada ij e 0 nas outras. Então toda matriz é uma combinação linear única $A = \sum_{ij} a_{ij} I_{ij}$, com coordenadas a_{ij}'s, e esta representação define um isomorfismo $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{m\cdot n}$.

e.g. Por exemplo, o conjunto

$$I_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma base do espaço linear $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

ex: [Ap69] **16.16**.

Álgebra das matrizes. Se $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times s}(\mathbb{R})$, o *produto (linhas por colunas)* AB é a matriz $AB = C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times s}(\mathbb{R})$ definida por

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}}$$

Ou seja, o elemento c_{ij} de $C = AB$ é o produto escalar $c_{ij} = A^i \cdot B_j$ da i-ésima linha de A e a j-ésima coluna de B. Observe que o produto AB apenas pode ser definido quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

A *matriz identidade* é a matriz quadrada $I \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$I = (\delta_{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(também denotada por I_n quando é necessário lembrar a dimensão), onde o símbolo de Kronecker é definido por $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. É claro que $IA = A$ e $BI = B$ para todas as matrizes A e B (quando o produto faz sentido). O produto é "associativo",

$$\boxed{A(BC) = (AB)C}$$

e satisfaz as "propriedades distributivas" à esquerda e à direita,

$$\boxed{A(B+C) = AB + AC \qquad \text{e} \qquad (A+B)C = AC + BC}$$

ex: Existem matrizes $A \neq 0$ e $B \neq 0$ tais que $AB = 0$?

ex: [Ap69] **16.16**.

Matriz de uma transformação linear. Uma transformação linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ definida num espaço de dimensão finita $\mathbf{V}$ é determinada pelos seus valores nos vetores de uma base. De fato, se $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ é uma base ordenada de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$, e definimos os vetores $\mathbf{w}_j := L(\mathbf{b}_j) \in \mathbf{W}$, com $j = 1, 2, \dots, n$, então o valor de L sobre o vetor genérico $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$ é

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= L(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n) \\ &= x_1L(\mathbf{b}_1) + x_2L(\mathbf{b}_2) + \cdots + x_nL(\mathbf{b}_n) \\ &= x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n \,. \end{aligned}$$

Em particular, os vetores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ geram $\mathrm{Im}(L) \subset \mathbf{W}$. Se também $\mathbf{W}$ tem dimensão finita, e $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m)$ é uma base ordenada de $\mathbf{W} \approx \mathbb{R}^m$, e definimos os números a_{ij} como sendo as coordenadas dos $\mathbf{w}_j$' s relativamente à base $\mathcal{C}$, i.e.

$$L(\mathbf{b}_j) = \mathbf{w}_j = a_{1j}\,\mathbf{c}_1 + a_{2j}\,\mathbf{c}_2 + \cdots + a_{mj}\,\mathbf{c}_m$$

com $j = 1, 2, \dots, n$, então o valor de L sobre o vetor genérico $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$ é

$$L(\mathbf{x}) = L\left(\sum_j x_j\mathbf{b}_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,x_j\right)\mathbf{c}_i \,,$$

Portanto, as coordenadas do vetor $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ na base escolhida $\mathcal{C}$ são

$$\boxed{y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, m\,.}$$

Os números a_{ij} são os elementos de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, a matriz que representa L nas bases escolhidas.

Transformação linear definida por uma matriz. Em particular, fixadas as bases canónicas dos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ (ou quaisquer outras bases), uma matriz $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ define uma transformação linear $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se X e Y denotam os "vetores coluna" (matrizes com apenas uma coluna)

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

e

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})\,,$$

então a transformação linear $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é representada pela equação matricial

$$\boxed{X \mapsto Y = L_A(X) := AX}$$

ou seja, explicitamente,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Caraterística. Seja $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a transformação linear $X \mapsto AX$ definida pela matriz $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se E_1, E_2, $\dots$ E_n denotam os vetores coluna da base canónica de $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \dots \qquad E_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

então o produto $AE_k = A_k$ é a k-ésima coluna da matriz A, que representa portanto a imagem $L_A(E_k)$ do vetor E_k. A imagem do vetor genérico X é portanto uma combinação linear

$$AX = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$$

das colunas da matriz A. A dimensão de $\mathrm{Im}(L_A) \subset \mathbb{R}^m$, ou seja, o número de colunas linearmente independentes de A, é dita *caraterística* da matriz A, e denotada por $\mathrm{rank}(A) := \dim \mathrm{Im}(L_A)$.

Por outro lado, o vetor $X \in \mathbb{R}^n$ pertence ao espaço nulo $\ker(L_A)$ da transformação linear L_A se $AX = 0$, ou seja, se

$$A^1 \cdot X = 0\,, \quad A^2 \cdot X = 0\,, \qquad \dots\,, \quad A^m \cdot X = 0\,,$$

onde $A^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ é a i-ésima linha da matriz A. O espaço nulo é portanto o espaço ortogonal ao subespaço vetorial $\mathrm{Span}(A^1, A^2, \dots, A^m) \subset \mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A, ou seja,

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Span}(A^1, A^2, \dots, A^m)^\perp\,.$$

A sua dimensão é igual a $n - k$, se k é o número de linhas linearmente independentes de A. Em particular, sendo $\dim \ker(L_A) + \dim \mathrm{Im}(L_A) = n$, a caraterística da matriz $\mathrm{rank}(A)$ é também igual ao número de linhas linearmente independentes de A.

Produto e composição. Se a matriz $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ define a transformaçõa linear $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, e se uma segunda matriz $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{p\times m}(\mathbb{R})$ define a transformação linear $L_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, então a matriz produto $BA \in \mathrm{Mat}_{p\times n}(\mathbb{R})$ define a composição $L_B L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. De fato, se as coordenadas de $Y = L_A(X)$ são $y_k = \sum_j a_{kj}\, x_j$ e as coordenadas de $Z = L_B(Y)$ são $z_i = \sum_k b_{ik}\, y_k$, então

$$z_i = \sum_k \sum_j b_{ik}\, a_{kj}\, x_j = \sum_j \left(\sum_k b_{ik}\, a_{kj} \right) x_j \qquad i = 1, 2, \ldots, p\,,$$

Em notação matricial,

se $Y = AX$ e $Z = BY$ então $Z = BAX$

Ou seja, o produto linhas por colunas representa a composição das transformações lineares.

ex: Determine a matriz que define a transformação

$$L(x,y) = (x - y, 2x - 3y) \qquad L(x,y,z) = (3x + y - z, -x + 2y + z)$$

$$L(x,y,z) = (3x, 3y, 3z) \qquad L(x,y) = (x + y, x - y, 2x - 7y)$$

$$L(x,y,z) = (x,y) \qquad L(x,y,z) = (x,z)$$

ex: Determine a transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Determine a matriz 2×2 que define a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que

transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $x = 0$

transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $y = -x$

transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares$(r/2, \theta)$

transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares $(r, \theta - \pi/2)$

ex: [Ap69] **16.12**.

Einstein's notation. It is often important to take care of the distinction between vectors and co-vectors, and then different types of tensors, as well as to shorten formulas and computations. One possibility is the convention introduced by Einstein. We denote vectors using upper indices as $\mathbf{x} = (x^i) \in \mathbb{R}^n$, and denote co-vectors using lower indices as $\boldsymbol{\xi} = (\xi_j) \in (\mathbb{R}^n)^*$. The pairing between a co-vector $\boldsymbol{\xi}$ and a vector $\mathbf{x}$ reads $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \cdots + \xi_n x^n$, and is shortened as $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \xi_i x^i$, Einstein's convention being that a repeated index which appears once as an upper index and once as a lower index implies summation. Using Einstein's sum convention, the coordinates of the image of a linear transformation represented by the matrix $T = (t^i{}_j)$ are given by $y^i = t^i{}_j\, x^j$. The composition of $T = (t^i{}_j)$ followed by $S = (s^i{}_j)$ is then represented by the matrix $ST = (s^i{}_k\, t^k{}_j)$.

Endomorfismos e matrizes quadradas. Fixada uma base (por exemplo, a base canónica de $\mathbb{R}^n$), o espaço linear $\mathrm{End}(\mathbf{V}) := \mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V})$ dos *endomorfismos* de um espaço linear $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ é isomorfo ao espaço linear $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes "quadradas" $n \times n$, os seus elementos sendo as transformações lineares

$$\boxed{X \mapsto Y = AX}$$

ou seja, $x_i \mapsto y_i = \sum_j a_{ij}\, x_j$, com $X \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. O caso complexo é análogo.

A composição de dois endomorfismos corresponde ao produto de matrizes. Em particular, a k-ésima iterada $L^k = L \circ L \circ \cdots \circ L$ (k vezes) do endomorfismo $L : X \mapsto AX$ é representada pela *potência* k-ésima de A, definida recursivamente por

$$A^0 = I \qquad \text{e} \qquad A^{k+1} = AA^k \qquad \text{se} \;\; k \geq 0\,.$$

A matriz quadrada A (ou o endomorfismo $L : X \mapsto AX$) é *nilpotente* se existe um inteiro k tal que $A^k = 0$. A matriz quadrada A é *unipotente* se $A - I$ é nilpotente, e portanto existe um inteiro k tal que $(A - I)^k = 0$.

A *diagonal* da matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto ordenado dos elementos "diagonais" $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. O *traço* (em inglês, *trace*) de A é a soma dos elementos da diagonal,

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) := \sum_i a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}}$$

É imediato verificar que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Uma matriz quadrada é uma *matriz diagonal* se os elementos que não pertencem à diagonal são nulos, ou seja, se é da forma

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ex: Determine a matriz da transformação "identidade" $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ e da transformação "nula" $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}$.

ex: Determine a matriz da homotetia $\mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e calcule o seu traço.

ex: Mostre que

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

ex: Calcule A^0, A^1, A^2, A^3, ... , A^k , ... quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ex: Determine as matrizes $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = 0$.

ex: Determine as matrizes $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = I$.

ex: Mostre que (a matriz que representa) uma projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sobre um subespaço $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ (por exemplo, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$) é unipotente.

ex: Mostre qua (a matriz que representa) o operador derivação $Df := f'$ no espaço $\mathrm{Pol}_{\leq n} \approx \mathbb{R}^{n+1}$ dos polinómios de grau $\leq n$ é nilpotente.

Comutador. A composição de transformações lineares, e portanto o produto de matrizes, não são comutativos! Ou seja, em geral, $AB \neq BA$. As matrizes quadradas $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (e portanto os endomorfismos que representam), *comutam entre si/são permutáveis* se

$$AB = BA\,.$$

A obstrução é o *comutador*, definido por

$$\boxed{[A,B] := AB - BA}$$

O comutador satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$\boxed{[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0}$$

ex: Mostre que cada matriz quadrada A comuta com si própria, i.e. $[A,A] = 0$.

ex: Mostre que duas matrizes diagonais comutam.

ex: Mostre que um múltiplo λI da matriz identidade comuta com toda matriz.

ex: Considere as matrizes 2×2

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule $[E, E_+]$, $[E, E_-]$ e $[E_+, E_-]$.

Rotações do plano. Uma rotação anti-horária de um ângulo θ envia o ponto do plano de coordenadas polares (ρ, φ) no ponto de coordenadas polares $(\rho, \varphi + \theta)$, e fixa a origem. Então envia o ponto de coordenadas cartesianas $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ no ponto de coordenadas cartesianas $(r\cos(\varphi+\theta), r\sin(\varphi+\theta))$. As fórmulas de adição das funções trigonom' etricas implicam que

$$\begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) \\ r\,(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

e portanto que a rotação é uma transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, nas base canónica, pela matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Em particular, uma rotação de um ângulo nulo, ou múltiplo inteiro de 2π, é a transformação identidade, definida pela matriz $R_0 = I$. As fórmulas de adição também mostram que as potências de uma rotação são rotações, e de fato

$$R_\theta{}^2 = R_{2\theta} \quad R_\theta{}^3 = R_{3\theta} \qquad \ldots \qquad R_\theta{}^n = R_{n\theta}\,.$$

Também é imediato verificar que

$$R_\theta\, R_{-\theta} = R_{-\theta}\; R_\theta = I\,,$$

o seja, as rotações são invertíveis, e a inversa de uma rotação anti-horária de um ângulo θ é uma rotação anti-horária de um ângulo $-\theta$. Em geral, a composição de duas rotações de ângulos θ e ϕ é uma rotação de um ângulo $\theta + \phi$, ou seja,

$$R_\theta\, R_\phi = R_{\theta+\phi}\,.$$

Esta fórmula também mostra que as rotações do plano comutam, i.e. $R_\theta\, R_\phi = R_\phi\, R_\theta$.

Reflexões no plano. Uma reflexão $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ao longo de uma reta passando pela origem satisfaz a identidade $T^2 = I$. Por exemplo, as matrizes $\pm E$, com

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

definem reflexões nos eixos dos x e dos y, respetivamente. A reflexão numa reta genérica de equação cartesiana $y \cos\theta = x \sin\theta$ (ou seja, com declive $\tan\theta$) pode ser obtida como a composição

$$R_\theta \, E \, R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

ou seja, transformando a reta dada no eixo dos x, aplicando a reflexão no eixo dos x, e depois voltando a transformar o eixo dos x na reta dada.

Projeções no plano. Uma projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre um subespaço $V \subset \mathbb{R}^2$ satisfaz $P^2 = P$. Por exemplo, a projeção sobre a reta $y = 0$ é definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em geral, a projeção sobre a reta passando pelo vetor unitário $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ envia $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, e é nula, i.e. $P\mathbf{u} = 0$, sobre o vetor ortogonal $\mathbf{u}^\perp = (-\sin\theta, \cos\theta)$. De fato, o seu valor sobre um vetor genérico $\mathbf{v} = (x, y)$ é dado por

$$P\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{u} = (x \, \cos^2\theta + y \, \cos\theta \sin\theta \, , \; x \, \cos\theta \sin\theta + y \, \sin^2\theta)$$

e portanto a sua matriz na base canónica é

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta \\ \cos\theta \sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Cisalhamentos. Um *cisalhamento* (em inglês, *shear*) horizontal é uma transformação do plano $(x, y) \mapsto (x + \alpha y, y)$, definida pela matriz

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ (fazer um desenho, para observar que o quadrado unitário de lados $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ é enviado no paralelogramo de lados $\mathbf{i}$ e $\alpha\mathbf{i} + \mathbf{j}$). Analogamente é possíve definir cisalhamentos verticais. É evidente que as potências de um cisalhamento são ainda cisalhamentos, e que de fato

$$C_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad C_\alpha^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes transpostas. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz. A *matriz transposta* é a matriz $A^\top = (a_{ij}^\top) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, definida por $a_{ij}^\top = a_{ji}$ (ou seja, as linhas de $A^\top$ são as colunas de A e vice-versa). É imediato verificar que $(A^\top)^\top = A$ e que $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (quando o primeiro produto faz sentido) .

Por exemplo, se X e Y são dois vetores/matrizes coluna de $\mathbb{R}^n$, então $Y^\top$ é um vetor/matriz linha, e o produto linha por coluna $Y^\top X$ é igual ao produto escalar

$$Y^\top X = Y \cdot X \, .$$

Em geral, se X é um vetor coluna de $\mathbb{R}^n$ e Y é um vetor coluna de $\mathbb{R}^m$, e se a matriz $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ define a transformação linear $X \mapsto AX$, então a matriz transposta define a transformação linear $Y \mapsto A^\top Y$ tal que

$$Y \cdot AX = (A^\top Y) \cdot X \, ,$$

pois $Y \cdot AX = Y^\top (AX) = (A^\top Y)^\top X = (A^\top Y) \cdot X$.

Uma matriz quadrada A é dita *simétrica* se $A = A^\top$ e *anti-simétrica* se $A^\top = -A$.

ex: Verifique que $(A^\top)^\top = A$.

ex: Mostre que $\mathrm{Tr}(A^\top) = \mathrm{Tr}(A)$.

ex: Mostre que, se A é uma matriz quadrada, então $A+A^\top$ é simétrica, e $A-A^\top$ é anti-simétrica. Deduza que cada matriz quadrada pode ser decomposta como soma $A = A_+ + A_-$ de uma matriz simétrica $A_+ = (A + A^\top)/2$ com uma matriz anti-simétrica $A_- = (A - A^\top)/2$.

ex: Mostre que o traço de uma matriz (quadrada) anti-simétrica é nulo.

Inversão de transformações do plano. A matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

representa o endomorfismo genérico do plano $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. A transformação L é invertível se para cada vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ é possível encontrar um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $L_A(x, y) = (\alpha, \beta)$, ou seja, resolver o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \alpha \\ cx + dy & = & \beta \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (ad - bc)\, x & = & d\alpha - c\beta \\ (ad - bc)\, y & = & a\beta - c\alpha \end{array} \right.$$

(o segundo sistema é obtido ao retirar b vezes a segunda equação de d vezes a primeira equação, e depois ao retirar c vezes a primeira equação de a vezes a segunda equação). Portanto, a transformação L_A é invertível sse $\mathrm{Det}A := ad - bc \neq 0$, e a sua inversa é a transformação linear

$$L_A^{-1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{ad - bc}(d\alpha - c\beta, a\beta - c\alpha)\,,$$

representada pela matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

ex: Calcule a inversa das transformações lineares do plano definidas pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Automorfismos e matrizes invertíveis. A matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é *invertível* (ou *não-singular*, ou *regular*) se existe uma matriz quadrada $A^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, dita *inversa* de A, tal que

$$\boxed{A^{-1}\, A = A\, A^{-1} = I}$$

A transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, representada pela equação matricial $X \mapsto Y = AX$, é invertível sse a matriz A é invertível, e a sua inversa é a transformação linear $Y \mapsto X = A^{-1}Y$. Se $A = (a_{ij})$, então as entradas da inversa $A^{-1} = (b_{ij})$ satisfazem as n^2 equações lineares

$$\sum_k b_{ik}\, a_{kj} = \delta_{ij}$$

Se A e B são invertíveis, então também AB é invertível e a sua inversa é

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}}$$

Se A é invertível então também $A^\top$ é invertível e

$$\boxed{(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top}$$

Se $AX = B$ é um sistema de n equações com n incógnitas, e se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível, então o sistema admite uma solução única dada por $X = A^{-1}B$. Isto acontece quando o núcleo da transformação linear $X \mapsto AX$ é trivial, e portanto a caraterística da matriz (o número de linhas ou de colunas linearmente independentes) é n.

ex: Mostre que, se $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então $BA = I \Rightarrow AB = I$ (ou seja, uma inversa esquerda é também uma inversa direita, logo uma inversa).

ex: Diga se as seguintes matrizes são invertíveis e, caso afirmativo, calcule a inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: [Ap69] **16.20**.

Mudança de bases/coordenadas. Sejam $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_n)$ duas bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Então existe uma matriz invertível $U = (u_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com inversa $U^{-1} = (v_{ij})$, tal que

$$\mathbf{b}'_j = \sum_i u_{ij}\, \mathbf{b}_i \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b}_j = \sum_i v_{ij}\, \mathbf{b}'_i \,.$$

Se (x_i) são as coordenadas do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ relativamente à base $\mathcal{B}$, então as coordenadas do vetor $\mathbf{x}$ relativamente à base $\mathcal{B}'$ são

$$\boxed{x'_i = \sum_k v_{ij}\, x_j \qquad \text{ou seja} \qquad x_i = \sum_j u_{ij}\, x'_j}$$

pois $\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{b}_j = \sum_{j,k} v_{ij} x_j \mathbf{b}'_i$. A matriz

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

cujas colunas são as coordenadas dos vetores da base $\mathcal{B}'$ relativamente à base $\mathcal{B}$, é a matriz que realiza a mudança de coordenadas. As matrizes U e U^{-1} podem ser pensadas como matrizes das derivadas parciais, pois $u_{ij} = \partial x_i/\partial x'_j$ e $v_{ij} = \partial x'_i/\partial x_j$. Nesta notação, as fórmulas para a mudança de coordenadas parecem tautológicas (o que explica o valor da notação de Leibniz para as derivadas):

$$x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\, x_j \qquad \text{e} \qquad x_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\, x'_j \,.$$

Na notação matricial, se X e X' são os vetores coluna de coordenadas x_i's e x'_i's respetivamente, a mudança de coordenadas assume a forma

$$X = UX' \qquad \text{ou seja,} \qquad X' = U^{-1}X \,.$$

Seja $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz de uma transformação $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ relativamente a certas coordenadas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, dada por $X \mapsto Y = AX$. Sejam $X' = UX$ e $Y' = VY$ umas mudanças de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respetivamente, definidas pelas matrizes invertíveis $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $V \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$. Então a matriz da transformação L relativamente às novas coordenadas é

$$\boxed{A' = V^{-1}AU}$$

De fato, se $y_i = \sum_j a_{ij}\, x_j$, então $y'_i = \sum_k t_{ik}\, y_k = \sum_{k,\ell} t_{ik}\, a_{k\ell}\, x_\ell = \sum_{k,\ell,j} v_{ik}\, a_{k\ell}\, u_{\ell j}\, x'_j$. Em notação matricial,

$$X \mapsto Y = AX \qquad \Rightarrow \qquad X' \mapsto Y' = V^{-1}Y = V^{-1}AX = (V^{-1}AU)X' \,.$$

Em particular, se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz do endomorfismo $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ relativamente à base $\mathcal{B}$, então a matriz de L relativamente à base $\mathcal{B}'$ é

$$\boxed{A' = U^{-1}AU}$$

e, consequentemente,

$$\boxed{A = UA'U^{-1}\,.}$$

Matrizes A e A' relacionadas pelas identidades acima são ditas *semelhantes*. Representam o mesmo endomorfismo em bases possivelmente diferentes.

ex: Verifique que se $A' = U^{-1}AU$ então $A = UA'U^{-1}$.

ex: Use $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ para mostrar que $\mathrm{Tr}(U^{-1}AU) = \mathrm{Tr}\, A$, ou seja, o traço de uma matriz quadrada apena depende da transformação linear definida pela matriz, e não da base usada.

ex: Determine a matriz de $L(x,y) = (3x, 2y)$ relativamente à base $\mathbf{b}_1 = (1,1)$ e $\mathbf{b}_2 = (1,-1)$.

ex: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = x$. Determine a matriz de T relativamente à base canónica e relativamente à base $(1,1)$ e $(1,-1)$.

ex: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = \sqrt{3}\, x$. Determine a matriz de T relativamente à base canónica.

ex: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projecção ortogonal sobre a reta $x + y = 0$. Determine a matriz de T relativamente à base canónica.

ex: Determine a matriz que representa o operador derivação $D : \mathrm{Pol}_{\leq 3}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_{\leq 2}(\mathbb{R})$, definido por $(Df)(t) := f'(t)$, relativamente às bases ordenadas $(1, t, t^2, t^3)$ e $(1, t, t^2)$. Determine umas bases de $\mathrm{Pol}_{\leq 3}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{Pol}_{\leq 3}(\mathbb{R})$ tal que o operador $D : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ seja diagonal.

15 Valores e vetores próprios*

ref: [Ap69] *Vol 2*, **4.1-10** ; [La87] *Ch. VIII*

13 mar 2020

Subespaços invariantes e matrizes em blocos. Seja $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ um operador linear definido no espaço vetorial $\mathbf{V}$, real ou complexo. Um subespaço linear $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ é *invariante*, ou *estável*, (subentendido para o operador L) se $L(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$, ou seja, se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ implica $L\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, i.e. a imagem de um vetor de $\mathbf{W}$ também está em $\mathbf{W}$. Subespaços invariantes triviais são o subespaço nulo $\{\ \mathbf{0}\}$ e o próprio $\mathbf{V}$.

Se $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ é um subespaço invariante não trivial (para que a ideia seja interessante) do operador $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, então é possível definir a retrição $L|_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$ do operador L ao subespaço $\mathbf{W}$, que é naturalmente um operador linear. Se o subespaço invariante tem dimensão finita, por exemplo $\mathbf{W} \approx \mathbb{C}^n$, e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (vetores de $\mathbf{V}$) é uma sua base, então a restrição $L|_{\mathbf{W}}$ é definida, nesta base, por uma matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Se também $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, por exemplo $\mathbf{V} \approx \mathbb{C}^{n+m}$, é então possível completar o sistema a uma base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n+m}$ do próprio $\mathbf{V}$. Nesta base, o operador L é definido por uma matriz em blocos

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{15.1}$$

onde $C \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $B \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{C})$. O espaço quociente $\mathbf{V}/\mathbf{W}$, o espaço das classes de equivalência $[\mathbf{v}] := \mathbf{v} + \mathbf{W}$ (ou seja, dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ estão na mesma classe, e portanto são indentificados, sse diferem por um vetor de $\mathbf{W}$, i.e. se $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ com $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$), admite uma base formada pelas classes $[\mathbf{e}_{n+1}], [\mathbf{e}_{n+2}], \ldots, [\mathbf{e}_{n+m}]$, e é portanto isomorfo a $\mathbf{V}/\mathbf{W} \approx \mathbb{R}^m$. O operador L induz um "operador quociente" $M : \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{V}/\mathbf{W}$, definido por

$$M[\mathbf{v}] := [L\mathbf{v}] \qquad \text{ou seja,} \qquad M(\mathbf{v} + \mathbf{V}) := L\mathbf{v} + \mathbf{W}$$

(a definição é bem posta justamente porque $L(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$, e portanto a imagem de M não depende do representante $\mathbf{v}$ da classe de equivalência). A matriz que representa o operador quociente M na base $[\mathbf{e}_{n+1}], [\mathbf{e}_{n+2}] \ldots, [\mathbf{e}_{n+m}]$ é precisamente a matriz B.

ex: Mostre que o núcleo $\mathrm{Ker}(L)$ e a imagem $\mathrm{Im}(L)$ são subespaços invariantes.

ex: Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à reta $y = x$.

ex: Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação ao plano $z = 0$.

ex: Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua projeção ortogonal sobre a reta $y = x$.

ex: Para quais valores de θ existem subespaços invariantes não triviais de uma rotação do plano de um ângulo θ ?

ex: Determine os subespaços invariantes de um "cisalhamento" (em inglês, *shear*) horizontal, a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, y)$ e induzida pela matriz .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores e vetores próprios. Seja $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ um operador linear definido num espaço vetorial $\mathbf{V}$, real ou complexo. Um *vetor próprio/autovetor* (em inglês *eigenvector*, do alemão *eigen* = próprio) de L é um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ que gera um subespaço invariante $\mathbb{R}\mathbf{v}$ (ou $\mathbb{C}\mathbf{v}$) de dimensão um para L, ou seja, tal que

$$\boxed{L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$) é um escalar, chamado *valor próprio/autovalor* (em inglês *eigenvalue*) do operador L (associado ao vetor próprio $\mathbf{v}$).

Teorema 15.1. *Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são vetores próprios de $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ e se os correspondentes valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são dois a dois distintos (i.e. $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$), então os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente independentes.*

Demonstração. A prova é por indução. O caso $k = 1$ é trivial. Seja $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$. Aplicando o operador L ou multiplicando por λ_{k+1}, e depois calculando a diferença, obtemos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Pela hipótese indutiva todos os coeficientes são nulos, e portanto, sendo os valores próprios distintos, $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Então também $c_{k+1} = 0$ (pois $\mathbf{v}_{k+1} \neq \mathbf{0}$). □

Se λ é um valor próprio de $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, o conjunto

$$\mathbf{V}_\lambda := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\} \ = \mathrm{Ker}(\lambda - L)$$

($\lambda - L$ denota o operador $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v} - L(\mathbf{v})$) é um subespaço invariante não trivial, dito *subespaço próprio* associado ao valor próprio λ. A dimensão de $\mathbf{V}_\lambda$ é chamada *multiplicidade geométrica* do valor próprio λ. A restrição do operador linear L a cada espaço próprio $\mathbf{V}_\lambda$ é uma homotetia $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v}$. Em particular, os vetores próprios associados ao valor próprio λ são as soluções não triviais do sistema homogéneo

$$(\lambda I - A)\mathbf{v} = 0$$

(que é possível e indeterminado, pois vetores próprios existem e são determinados a menos de um fator não nulo).

Em particular, se existe uma decomposição de $\mathbf{V}$ como soma direta finita $\mathbf{V} = \oplus_k \mathbf{V}_k$ de espaços próprios $\mathbf{V}_k$ associados aos valores próprios distintos λ_k de L (ou seja, todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é uma sobreposição única $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$ de vetores $\mathbf{v}_k \in \mathbf{V}_k$ tais que $L\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k$), então o operador é uma soma direta $L = \oplus_k \lambda_k$ de homotetias. Em outras palavras, se $P_k : \mathbf{V} \to \mathbf{V}_k$ denota a projeção sobre $\mathbf{V}_k$ (definida por $P_k(\mathbf{v}) := \mathbf{v}_k$), então $L = \sum_k \lambda_k P_k$. Tais operadores são chamados "diagonalizáveis". De fato, se $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, são representados por matrizes diagonais

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

numas bases formadas por vetores próprios.

ex: Todo vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um vetor própro da trasformação identidade $I_\mathbf{V}\mathbf{v} := \mathbf{v}$, com valor próprio $\lambda = 1$. Todo vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um vetor própro da trasformação nula $0_\mathbf{V}\mathbf{v} := \mathbf{0}$, com valor próprio $\lambda = 0$. Em geral, todo vetor $\mathbf{v} \neq 0$ é um vetor próprio de uma homotetia $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, de valor próprio λ.

ex: Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à reta $y = 2x$.

ex: Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua projeção ortogonal sobre a reta $3y = x$.

ex: Uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ por

$$(x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \ ,$$

não admite vetores próprios se o ângulo θ não é um múltiplo inteiro de π. No entanto, a mesma rotação pode ser pensada como a transformação $z \mapsto e^{i\theta}z$ definida no espaço vetorial complexo $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, onde $z = x + iy \approx (x, y)$. Neste caso, todo vetor $z \neq 0$ é um vetor próprio, de valor próprio $e^{i\theta}$.

ex: Determine os valores e os vetores próprios das transformações

$$L(x,y) = (x,0) \qquad L(x,y) = (x/2, 3y) \qquad L(x,y) = (-y,x)$$
$$L(x,y) = (x, x+y) \qquad L(x,y) = (x+\lambda y, y) \qquad L(x,y) = (x+\alpha y, y)$$
$$L(x,y,z) = (0,y,-z) \qquad L(x,y,z) = (y,z,x)$$

ex: Se λ é um valor próprio do operador L e k é um inteiro positivo, então λ^k é um valor próprio da potência L^k (o vetor próprio é o mesmo). No entanto, L^k pode ter também outros valores próprios, que não são potências dos valores próprios de L. Por exemplo, uma rotação $R_{\pi/2}$ de um ângulo $\pi/2$ no plano não tem valores próprios, mas o seu quadrádo $R^2_{\pi/2} = R_\pi$ admite o valor próprio -1 (cuja raiz quadrada não é um número real!), e a sua quarta potência $R^4_{\pi/2} = I$ admite um valor próprio 1.

ex: Em particular, os valores próprios de um operador nilpotente (um operador tal que alguma potência L^n é o operador nulo) não podem ser diferentes de zero.

ex: Se $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ é um automorfismo (i.e. uma transformação linear invertível) e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é um vetor próprio de L com valor próprio λ, então $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de L^{-1} com valor próprio λ^{-1}. Em particular, um operador invertível não pode ter valores próprios nulos.

Anti-partículas. Seja A uma matriz $n \times n$, e sejam D e P as matrizes $(2n) \times (2n)$ em blocos definidas por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Verifique que $P^2 = I$ e que P e D anti-comutam, i.e. satisfazem $PD + DP = 0$. Mostre que se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de D com valor próprio λ, ou seja, $D\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, então $\mathbf{w} = P\mathbf{v}$ é também um vetor próprio de D com valor próprio $-\lambda$.

ex: [Ap69] **4.4**.

Resolvente e espetro. Se λ é um valor próprio do operador linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, então o operador

$$L_\lambda := \lambda - L$$

não é invertível (pois um autovetor $\mathbf{v}$ associado a λ está no seu núcleo). O *espetro* do operador L é o conjunto

$$\sigma(L) := \{\ \lambda \in \mathbb{C} \ \text{ t.q. } \ \lambda - L \ \text{ não é invertível } \} \subset \mathbb{C}\,,$$

ou seja, o conjunto dos valores complexos de $z \in \mathbb{C}$ fora dos quais existe o operador *resolvente*

$$R_z := (z - L)^{-1}$$

O número $\rho(L) := \sup_{z\in\sigma(L)} |z|$ é dito *raio espectral* do operador L. Em particular, se λ é um valor próprio de L, então o seu módulo é limitado por $|\lambda| \le \rho(L)$.

Quando $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, o espetro $\sigma(L)$ coincide com o conjunto (finito) dos valores próprios. De fato, se L_λ não é invertível, então o seu núcleo $\ker(L_\lambda)$ não é vazio, e um vetor não nulo do núcleo de L_λ é, por definição, um vetor próprio de L com valor próprio λ.

Em geral, em dimensão infinita, o espetro pode conter pontos/números que não são valores próprios.

Deslocamento. O operador *deslocamento à direita* (em ingês, *right shift*)

$$R : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)\,,$$

definido no espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ das sucessões reais $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, não é invertível (não sendo sobrejetivo), portanto $0 \in \sigma(R)$. No entanto, 0 não é um valor próprio de R, pois a única solução de $R\mathbf{x} = 0\,\mathbf{x}$ é a sucessão nula $(0, 0, 0, \dots)$.

Operadores derivação e multiplicação. O operador *derivação* envia uma função derivável $f(x)$ na função

$$(\partial f)(x) := f'(x)\,.$$

Pode ser pensado como un endomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, o espaço linear das funções infinitamente diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}$ com valores reais ou complexos. O produto $P := -i\hbar\,\partial$, onde $\hbar \simeq 1.054\cdots\times 10^{-34}$ J · s é a constante de Planck reduzida, é o *operador momento* na "representação de Schrödinger" da mecânica quântica. O operador *multiplicação* envia $f(x)$ em

$$(Xf)(x) := x\,f(x)\,.$$

Observe que ∂ e X não comutam. De fato, $\partial X - X\partial$ é o operador identidade.

Todo $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio do operador derivação, e o espaço próprio associado ao valor próprio λ é gerado pela função exponencial $e^{\lambda x}$. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são distintos, então as funções $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ são linearmente independentes.

Polinómios. O subespaço $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dos polinómios é um subespaço invariante de ∂. O subespaço $\mathrm{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau $\leq n$ é um subespaço invariante do operador derivação? E do operador multiplicação?

ex: Mostre que os vetores próprios do operador $L = X\partial$, definido em $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, são os monómios $f(x) = x^n$.

Quase-polinómios. Fixada uma "frequência" λ, real ou complexa, o espaço dos *quase-polinómios.* $p(x)e^{\lambda x}$, com $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, é um subespaço invariante para qualquer operador diferencial com coeficientes constantes $L = a_n\partial^n + \cdots + a_1\partial + a_0$. Esta observação justifica o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular de uma EDO linear $Lf = g$ quando a "força" $g(x)$ é um quase-polinómio.

Operador primitivação. O operador *primitivação* envia uma função integrável $f(x)$ numa das suas primitivas $F(x)$, por exemplo a função

$$(\mathcal{P}f)(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

Pode ser pensado como um endomorfismo do espaço linear real $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente diferenciáveis.

ex: Mostre que o operador $\mathcal{P} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ não tem valores próprios (derive a identidade $\mathcal{P}f = \lambda f$ para obter uma equação diferencial para o suposto vetor próprio $f(x)$, e observe que a mesma identidade também implica uma condição inicial $f(0)\ldots$).

ex: Mostre que $\partial\mathcal{P}$ é o operador identidade. Calcule o comutador $\partial\mathcal{P} - \mathcal{P}\partial$.

Operadores diferenciais, translações e ondas planas. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial complexo das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis. Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, de grau $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, o operador diferencial $\partial^\alpha : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ é definido por

$$(\partial^\alpha f)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x})\,.$$

As ondas planas $e_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) := e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$, com $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, são funções próprias dos operadores diferenciais ∂^α, com $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com valores próprios $(i\boldsymbol{\xi})^\alpha := (i\xi_1)^{\alpha_1}(i\xi_2)^{\alpha_2}\ldots(i\xi_n)^{\alpha_n}$, ou seja,

$$\partial^\alpha e_{\boldsymbol{\xi}} = (i\boldsymbol{\xi})^\alpha e_{\boldsymbol{\xi}}\,.$$

O operador de *translação* $T_{\mathbf{a}}$, com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(T_{\mathbf{a}} f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{a})\,.$$

As ondas planas $e_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$ são também funções próprias dos operadores de translação com valores próprios $\lambda_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{a}}$, ou seja,

$$T_{\mathbf{a}} e_{\boldsymbol{\xi}} = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{a}} e_{\boldsymbol{\xi}}\,.$$

O operador de *modulação* $M_{\boldsymbol{\xi}}$, com $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(M_{\boldsymbol{\xi}} f)(\mathbf{x}) := e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\,.$$

É imediato verificar que $T_{\mathbf{a}} M_{\boldsymbol{\xi}} = e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{a}} M_{\boldsymbol{\xi}} T_{\mathbf{a}}$. Os operadores translação e modulação geram o *grupo de Heisenberg*.

Polinómio caraterístico. Se λ é um valor próprio do operador linear $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, então o operador $L_\lambda := \lambda - L$ não é invertível, e os vetores próprios com valor próprio λ são os vetores não triviais do núcleo de L_λ. Se $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ tem dimensão finita, então, fixada uma base, o operador L é $X \mapsto AX$, onde $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é uma matriz quadrada (que depende da base escolhida). O escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é um valor próprio da matriz quadrada A (ou do operador L) sse a matriz $\lambda I - A$ é singular, ou seja, sse

$$\mathrm{Det}\,(\lambda I - A) = 0\,.$$

O *polinómio caraterístico* da matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é o polinómio

$$\boxed{c_A(z) := \mathrm{Det}\,(zI - A)}$$

Consequentemente,

Teorema 15.2. *O escalar λ é um valor próprio da matriz A (ou do operador definido pela matriz A) sse é uma raiz do polinómio caraterístico de A, i.e. se $c_A(\lambda) = 0$.*

O polinómio caraterístico de uma matriz complexa $n \times n$ é um polinómio mónico de grau n. Pelo teorema de Gauss 7.1, admite pelo menos uma raiz. Consequentemente, todo operador de um espaço vetorial complexo de dimensão finita admite pelo menos um valor próprio. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.2, o polinómio caraterístico fatoriza num produto

$$P_A(z) = \prod_k (z - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

onde os λ_k's são as raízes (logo os valores próprios) distintas, e os α_k's são inteiros positivos que somam $\sum_k \alpha_k = n$. O inteiro α_k é chamado *multiplicidade algébrica* do valor próprio λ_k.

ex: Mostre que A e $A^\top$ têm o mesmo polinómio caraterístico.

ex: Verifique que o polinómio caraterístico da matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é $P_A(z) = z^2 - (a+d)z + (ad - bc)$. Verifique que $P_A(A) = 0$, ou seja, que

$$A^2 - (\mathrm{Tr}A)\,A + (\mathrm{Det}A)\,I = 0$$

ex: Os valores próprios de uma matriz nilpotente (uma matriz A tal que alguma potência $A^n = 0$) não podem ser diferentes de zero.

ex: A matriz quadrada A é unipotente (ou seja, $A - I$ é nilpotente) sse o seu polinómio caraterístico é uma potência de $z - 1$, e portanto os seus valores próprio são todos iguais a 1.

ex: Determine valores e vetores próprios dos endomorfismos definidos pela seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: [Ap69] **4.10**.

Matrizes semelhantes e diagonalização. As matrizes quadradas $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são ditas *semelhantes* se existe uma matriz invertível $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$B = U^{-1}AU\,,$$

ou seja, se representam a mesma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em bases que podem ser diferentes. Se A e B são semelhantes então $\mathrm{Det}A = \mathrm{Det}B$. Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio caraterístico, pois

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\left(zI - U^{-1}AU\right) &= \mathrm{Det}\left(zU^{-1}IU - U^{-1}AU\right) \\ &= \mathrm{Det}\left(U^{-1}(zI - A)U\right) = \mathrm{Det}\left(zI - A\right) \end{aligned}$$

e portanto os mesmos valores próprios.

A matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é *diagonalizável* se é semelhante a uma matriz diagonal. Se (o operador linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido na base canónica pel)a matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ admite n vetores próprios linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respetivamente (não necessariamente distintos), e se $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz (invertível, pela independência dos $\mathbf{v}_k$'s) cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_k$, então $U^{-1}AU$ é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são as raizes (em geral, complexas e distintas) do polinómio caraterístico da matriz quadrada $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, então

$$\begin{aligned} c_A(t) &= (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\cdots(z - \lambda_n) \\ &= z^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\, z^{n-1} + \cdots + (-1)^n(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n) \end{aligned}$$

Mas $c_A(0) = \mathrm{Det}A$, e portanto

$$\boxed{\mathrm{Det}A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}$$

Também acontece que

$$\boxed{\mathrm{Tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}$$

(pois $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, e portanto $\mathrm{Tr}(\Lambda) = \mathrm{Tr}(U^{-1}AU) = \mathrm{Tr}(A)$)

Gato de Arnold. Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, na base canónica, pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ou seja, $L(x, y) = (2x + y, x + y)$. O polinómio caraterístico é $P_A(z) = z^2 - 3z - 1$, e portanto os valores próprios são $\lambda_\pm = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Vetores próprios correspondentes, que satisfazem $L(\mathbf{v}_\pm) = \lambda_\pm \mathbf{v}_\pm$, são, por exemplo,

$$\mathbf{v}_+ = (\varphi, 1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v}_- = (1, -\varphi)$$

onde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.6180339887\ldots$ é a "razão" dos gregos (a "divina proportione" de Pacioli e Leonardo da Vinci, a "razão de ouro" de Kepler, ...), a raiz positiva do polinómio $\varphi^2 - \varphi - 1$. Observem que $\lambda_+ > 1$ e $0 < \lambda_- < 1$, e portanto L estica os vetores da reta $\mathbb{R}\mathbf{v}_+$ e contrae os vetores da reta $\mathbb{R}\mathbf{v}_-$. Observem também que $\mathrm{Det}A = \lambda_+ \lambda_- = 1$. Em particular, L preserva as áreas. A matriz A é invertível, e a sua inversa A^{-1} tem também entradas inteira, pois $\mathrm{Det}A = 1$. Observem também que $\mathrm{Tr}A = 3 = \lambda_+ + \lambda_-$. A matriz que representa L na base formada pelos vetores próprios $\mathbf{v}_+$ e $\mathbf{v}_-$ é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = U^{-1} A U$$

onde U é matriz mudança de base, a matriz ortogonal

$$U = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \begin{pmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{pmatrix}$$

cujas colunas são as coordenadas dos vetores próprios normalizados de A na base canónica.

ex: Mostre que se A e B são semelhantes então $\mathrm{Det}A = \mathrm{Det}B$.

ex: As matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são semelhantes?

ex: Diagonalize as seguintes matrizes, ou mostre que não é possível.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16 Operadores hermíticos e unitários

ref: [Ap69] *Vol 2*, **5.1-5**, **5.7-8**, **5.10**, **5.19** ; [La87] *Ch. VII*

23 mar 2021

Representação matricial de operadores em espaços euclidianos de dimensão finita. Seja $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, real ou complexo, de dimensão finita. Fixada uma base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, podemos representar, cada vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ de maneira única como combinação linear $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$, sendo as "coordenadas" de $\mathbf{x}$ os coeficientes de Fourier $x_i = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x} \rangle$.

O produto interno entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ do espaço euclidiano complexo $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ é portanto um produto linha por coluna

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i \overline{x_i} y_i = \overline{\mathbf{x}}^\top \mathbf{y}$$

do transposto conjugado do vetor coluna $\mathbf{x}$ (que é portanto um vetor linha!) vezes o vetor coluna $\mathbf{y}$. Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano real, então o produto interno é simplesmente $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$.

Seja $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ um operador linear. A imagem de cada $\mathbf{e}_j$, com $1 \leq j \leq n$, é uma combinação linear $T\mathbf{e}_j = \sum_i a_{ij}\, \mathbf{e}_i$ dos elementos da base, onde os coeficientes a_{ij} são são os coeficientes de Fourier

$$a_{ij} := \langle \mathbf{e}_i, T\mathbf{e}_j \rangle \tag{16.1}$$

Então a matriz que representa o operador T na base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ é a matriz quadrada

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

De fato, a imagem do vetor $\mathbf{x} = \sum_j x_j\, \mathbf{e}_j$ pelo operador T é o vetor

$$T\mathbf{x} = T\left(\sum_j x_j\, \mathbf{e}_j\right) = \sum_j x_j\, T\mathbf{e}_j = \sum_j x_j \sum_i a_{ij}\, \mathbf{e}_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}\, x_j\right) \mathbf{e}_i$$

Em notação matricial, $T\mathbf{x}$ é representado pelo vetor coluna

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

As colunas da matriz A são as imagens dos vetores da base canónica pela transformação T, ou seja, a i-ésima coluna de A é o vetor coluna $T\mathbf{e}_i$.

Seja agora $\mathbf{y}$ um outro vetor de $\mathbf{H}$. O produto interno $\langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle$, em notação matricial, é o escalar

$$\langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle = \overline{\mathbf{y}}^\top A\mathbf{x}$$

Mas $\overline{\mathbf{y}}^\top A\mathbf{x} = \overline{\left(\overline{A}^\top \mathbf{y}\right)}^\top \mathbf{x}$. Portanto, podemos escrever

$$\langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle = \langle T^*\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

se o operador $T^* : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ é definido, na base ortonormada escolhida, pela matriz "transposta conjugada"

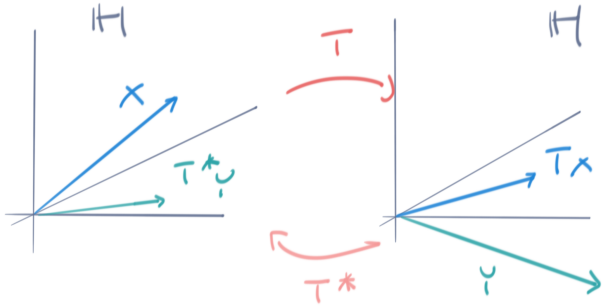
$$\boxed{A^* := \overline{A}^\top}$$

Se o espaço euclidiano $\mathbf{H}$ é real, e portanto A é uma matriz real, então o operador T^* é definido pela matriz transposta $A^\top$.

Operador adjunto. Seja $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, real ou complexo, de dimensão finita. O *adjunto* do operador linear $T \in \mathrm{End}(\mathbf{H})$ é o único operador $T^* \in \mathrm{End}(\mathbf{H})$ (a notação dos físicos é $T^\dagger$) tal que

$$\boxed{\langle \mathbf{y}, T\mathbf{x}\rangle \ = \langle T^*\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle}$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$.



Se o espaço linear é real, fixada uma base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, podemos considerar que $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ munido do produto interno canónico $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_i x_i y_i$. Se $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz que representa o operador T na base escolhida, então a *matriz transposta* $A^\top = (b_{ij})$, definida por $b_{ij} := a_{ji}$ (ou seja, as linhas de $A^\top$ são as colunas de A e vice-versa), define o operador adjunto T^*. Se o espaço linear é complexo, fixada uma base ortonormada, podemos considerar que $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ munido do produto hermítico $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_i \overline{x_i} y_i$. Se $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador T na base escolhida, então a matriz do operador adjunto T^* é a matriz *conjugada transposta* $\overline{A}^\top = (b_{ij})$, definida por $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Isto prova a existência do adjunto. A unicidade é um exercício.

Por outro lado, a existência do adjunto em espaços euclidianos de dimensão infinita é problemática.

É imediato verificar que

$$(T^*)^* = T \qquad (T+S)^* = T^* + S^* \qquad (\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^* \qquad (TS)^* = S^* T^*$$

ex: Mostre que o adjunto de um operador linear é único (lembre que o único vetor ortogonal a todos os vetores de um espaço euclidiano é o vetor nulo). Observe que esta prova não usa a dimensão finita do espaço, mas apenas a existência do adjunto.

ex: Mostre que $\ker T^* = (\mathrm{Im} T)^\perp$ e que $(\mathrm{Ker} T^*)^\perp = \mathrm{Im} T$.

ex: Se T é invertível, então $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

ex: Um subespaço $V \subset \mathbf{H}$ é invariante para o operador T sse o subespaço ortogonal $V^\perp$ é invariante para o operador adjunto T^*.

ex: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x + y, y)$. Calcule T^*.

ex: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x, -y)$. Calcule T^*.

Operadores auto-adjuntos, valores médios e valores próprios. Um operador linear $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, definido num espaço euclidiano $\mathbf{H}$, é dito *auto-adjunto* ou *hermítico* (em inglês, *self-adjoint* ou *hermitian*) se

$$\boxed{\langle \mathbf{x}, T\mathbf{y}\rangle = \langle T\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle} \tag{16.2}$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$, ou seja, se existe o operador adjunto T^* e se $T^* = T$ (mas observe que para definir um operador auto-adjunto não é necessário definir o adjunto de um operador!).

Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, e se $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador T numa base ortonormada, então T é auto-adjuntos sse a matriz é "hermítica", i.e. se $\overline{A}^{\top} = A$, ou seja, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano real $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ é também dito *simétrico*, pois é representado, numa base ortonormada, por uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ que é *simétrica*, ou seja, tal que $A^{\top} = A$, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$.

Um operador (auto-adjunto ou não) $T \in \mathrm{End}(\mathbf{H})$ define uma "forma quadrática"

$$\boxed{\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x}\rangle}$$

pois é imediato verificar que $\mathcal{Q}(\lambda\mathbf{x}) = |\lambda|^2\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ para todo escalar λ. Se $\mathbf{H}$ tem dimensão finita e A é a matriz que representa o operador T numa base ortonormada, então $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{x}}^{\top} A\mathbf{x}$. Se T é auto-adjunto e se o vetor $\mathbf{x}$ é unitário, então o escalar $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x}\rangle$ é também chamado *valor médio* do T sobre $\mathbf{x}$ (na notação de Dirac da mecânica quântica, o valor médio do "observável" T sobre o estado $|\psi\rangle$ é o escalar $\langle\psi|T|\psi\rangle$, a média esperada das observações de T num número grande de experiências repetidas).

Se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio com valor próprio λ do operador T, ou seja, $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, então $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle = \lambda\|\mathbf{v}\|^2$, e portanto o valor próprio é dado pela expressão

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \ . \tag{16.3}$$

Se T é auto-adjunto, também $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle = \langle T\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\lambda}\,\|\mathbf{v}\|^2$, e portanto $\lambda = \overline{\lambda}$. Ou seja,

Teorema 16.1. *Os valores próprios de um operador auto-adjunto são reais.*

De fato, os operadores auto-adjuntos de um espaço euclidiano complexo podem ser caraterizados pela propriedade de ter valores médios, e a fortiori valores próprios, reais.

Teorema 16.2. *O único operador auto-adjunto $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano complexo que tem valores médios nulos $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x}\rangle = 0$ para todos os $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ é o operador trivial $T = 0$.*

Demonstração. Se T é auto-adjunto, aplicando a identidade de polarização

$$\langle T(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle - \langle T(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle = 2\left(\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle T\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle\right)$$

aos pares de vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e depois $\mathbf{x}$, $i\mathbf{y}$, obtemos $\Re\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$ e $\Im\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$, respetivamente, e portanto $T\mathbf{x} = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$. □

Teorema 16.3. *Um operador $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano complexo é auto-adjunto sse o valor médio $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x}\rangle$ é real para todos os $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.*

Demonstração. Se T é auto-adjunto, então $\overline{\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle = \overline{\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$. Vice-versa, se $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ é real para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, então $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle = \langle T^*\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$, ou seja, $\langle (T - T^*)\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$ para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Sendo $i(T - T^*)$ auto-adjunto, o teorema 16.2 então implica que $T = T^*$. □

Em geral, vetores próprios que correspondem a valores próprios distintos são linearmente independentes. No caso de operadores auto-adjuntos é possível dizer mais.

Teorema 16.4. *Vetores próprios com valores próprios distintos de um operador auto-adjunto são ortogonais.*

Demonstração. Se $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e $T\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$, com λ e μ reais e $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ diferentes de zero, então $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{w}\rangle$ implica que $(\lambda - \mu)\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$. Portanto, se $\lambda \neq \mu$ então $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$. □

Operadores anti-hermíticos e normais. Se T é um operador hermítico de um espaço euclidiano complexo, e portanto tem valores médios reais, então o operador $S = iT$ tem valores médios imaginários puros.

Um operador linear $S : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, definido num espaço euclidiano complexo $\mathbf{H}$, é dito *hemi-hermítico* ou *anti-hermítico* (em inglês, *skew-hermitian*) se

$$\boxed{\langle \mathbf{x}, S\mathbf{y}\rangle = -\langle S\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle} \tag{16.4}$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$, ou seja, se $S^* = -S$. Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, e se $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador S numa base ortonormada, então S é hemi-hermítico se $B^* = -B$, ou seja, $b_{ij} = -\overline{b_{ji}}$. Se o espaço é complexo, $S = iT$ é hemi-hermítico sse T é hermítico. Em particular, pelo teorema 16.3, os valores próprios de um operador hemi-hermítico num espaço euclidiano complexo são imaginários puros, i.e. estão no eixo imaginário $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Um operador hemi-hermítico de um espaço euclidiano real é também dito *anti-simétrico*, pois a sua matriz B numa base ortonormada satisfaz $B^\top = -B$, ou seja, $b_{ij} = -b_{ji}$. Um operador anti-simétrico de um espaço euclidiano real não pode ter valores próprios diferentes de zero.

Assim como cada número complexo é uma soma $z = x + iy$ de um número real e de um número imaginário puro, cada operador $T \in \mathrm{End}(\mathbf{H})$ de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita pode ser decomposto, de maneira única, como soma

$$T = X + iY$$

de um operador hermítico X e um operador hemi-hermítico iY (ou seja, i vezes um operador hermítico Y). Basta escolher

$$X = (T + T^*)/2 \qquad \text{e} \qquad Y = (T - T^*)/2i\,.$$

Observe que $T^* = X - iY$ (uma fórmula que lembra o conjugado de um nuḿero complexo, ou seja, X e Y são moralmente a parte real e a parte imaginária do operador T).

O operador T é *normal* se comuta com o próprio adjunto, i.e. se $TT^* = T^*T$. É imediato verificar que $T = X + iY$, com X e Y auto-adjuntos, é normal sse $XY = YX$.

ex: A identidade é um operador auto-adjunto.

ex: Um operador auto-adjunto L num espaço euclidiano de dimensão um $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ é uma homotetia $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

ex: Se T é auto-adjunto, então também αT, com α real, é autoadjunto. Se T e S são auto-adjuntos, então também $\alpha T + \beta S$, com α e β reais, é auto-adjunto.

ex: Se T é auto-adjunto, então também as potências T^n, com $n = 1, 2, \ldots$, são operadores auto-adjuntos. Consequentemente, se $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ é um polinómio com coeficientes reais, então o operador $p(T) := a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0$ é auto-adjunto.

ex: Se T é auto-adjunto e invertível, então o inverso T^{-1} é também auto-adjunto.

ex: Se $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ é auto-adjunto e $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ é um subespaço invariante (por exemplo, o espaço próprio $\mathbf{H}_\lambda$ dos vetores $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ tais que $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$), então também o complemento ortogonal $\mathbf{V}^\perp$ é invariante.

ex: Sejam T e S dois operadores hermíticos de um espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Em geral, a composição TS não é hermítico (dê exemplos). A composição TS é um operador hermítico sse T e S comutam, ou seja, se $TS = ST$.

ex: Se S é um operador anti-simétrico de um espaço vetorial real $\mathbf{E}$, então $\langle \mathbf{x}, S\mathbf{x}\rangle = 0$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.

ex: Dado um operador linear arbitrário $T \in \mathrm{End}(\mathbf{E})$ num espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{E}$, o operador $P = T^*T$ é auto-adjunto. Se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de P com valor próprio λ, que é real, então $\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v}\rangle = \lambda \|\mathbf{v}\|^2$, mas também $\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, T^*T\mathbf{v}\rangle = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle = \|T\mathbf{v}\|^2$. Consequentemente, $\lambda \geq 0$.

ex: Verifique a *identidade de polarização*

$$\langle A(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle - \langle A(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle = 2\left(\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle A\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle\right) \tag{16.5}$$

válida para um operador genérico $A \in \mathrm{End}(\mathbf{H})$.

ex: A inversão $T(x, y, z) = (-x, y, z)$ relativamente ao plano y-z é simétrica? E a inversão relativamente a um plano genérico de $\mathbb{R}^2$ passando pela origem?

ex: [Ap69] *Vol. 2* **5.5**.

Adjuntos operadores auto-adjuntos em dimensão infinita. Quando o espaço euclidiano $\mathbf{H}$ tem dimensão infinita, operadores lineares interessantes podem ser definidos apenas em subespaços próprios $\mathbf{D}(L) \subset \mathbf{H}$ (chamado "domínio" do operador), ou seja, são transformações lineares $L : \mathbf{D}(L) \to \mathbf{H}$. Quando $\mathbf{H}$ é um espaço de Hilbert, um operador é dito *simétrico* ou *hermítico* se $\langle L\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, L\mathbf{y}\rangle$ para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{D}(L)$ (e tipicamente é pedido que o domínio seja denso em $\mathbf{H}$).

O termo *auto-adjunto* é reservado a operadores que estão definidos em todo o espaço de Hilbert, e que satisfazem $\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{y}\rangle$ para todos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$. Acontece que tais operadores são também "limitados", ou seja, satisfazem $\|T\mathbf{v}\| \leq K \|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ e algum número minimal $K := \|T\| < \infty$ chamado "norma" do operador T. De fato, a palavra *operator* é usualmente referida apenas a tais operadores limitados, e o termo *operador ilimitado* é usado nos outros casos.

Vice-versa, todo operador limitado $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ admite um operador adjunto T^*, definido, como no caso de dimensão finita, pela identidade $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ (a sua existência, que não é evidente, segue do teorema de representação de Riesz). Assim, ser auto-adjunto é equivalente a $T = T^*$, como em dimensão finita.

No entanto, operadores diferenciais, assim como praticamente todos os operadores de interesse físico (posição, momento linear, energia, ...), não são limitados! A teoria dos operadores ilimitados auto-adjuntos é muito mais delicada ...

Deslocamentos. Um espaço euclidiano de dimensão infinita importante é o espaço ℓ^2 das sequências complexas (sinais discretos) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ de "energia" finita $\|\mathbf{x}\|^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, munido do produto interno

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} y_k$$

Os deslocamento esquerdo e direito são os operadores limitados

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots) \qquad \text{e} \qquad R(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots),$$

respetivamente. É imediato verificar que $R = L^*$.

Multiplicação e derivadas. Considerar o espaço euclidiano $\mathbf{E}$ das funções contínuas reais ou complexas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, munido do produto interno $\langle f, g\rangle := \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$.

Toda função contínua $m(t)$ induz um *operador multiplicação* $M \in \mathrm{End}(\mathbf{E})$, definido por

$$(Mf)(t) := m(t)\, f(t)$$

(esta fórmula lembra a ação de uma matriz diagonal, que envia o vetor de coordenadas x_k no vetor de coordenadas $m_k x_k$). É claro que $\langle f, Mg\rangle = \langle Mf, g\rangle$ para todo $f, g, \in \mathbf{E}$, ou seja, M é auto-adjunto, se a função $m(t)$ tem valores reais. Num certo sentido preciso, estes são os modelos dos operadores auto-adjuntos.

Operadores diferenciais apenas podem operar em domínios mais restritos, por exemplo nos subespaços $\mathbf{E}^k \subset \mathbf{E}$ das funções que admitem $k = 1, 2, \ldots,$ ou ∞ derivadas contínuas. Nestes domínios, é possível definir o *operador derivada*

$$(\partial f)(t) := f'(t)\,,$$

as suas potências ∂^k, e portanto polinómios $L = \sum_{k=0}^{N} a_k \partial^k$, chamados operadores diferenciais com coeficientes constantes. Uma integração por partes implica a identidade

$$\langle f, \partial g\rangle = f(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g(a)} - \langle \partial f, g\rangle$$

Ao escolher "condições de fronteira" apropriadas, por exemplo ao restringir o operador ∂ ao subespaço $\mathbf{E}_0^\infty \subset \mathbf{E}^\infty$ das funções tais que $f(a) = f(b)$, o operador ∂ é anti-simétrico, e portanto o operador *momento* $P := -i\partial$ é simétrico. Também importante é o *laplaciano* $\Delta := \partial^2$, que é simétrico se defnido em $\mathbf{E}_0^\infty$.

ex: Seja $P : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ o *operador primitivação*, definido por

$$(Pf)(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau\,.$$

Mostre que é anti-simétrico se definido no núcleo $\ker(I)$ da forma linear $I(f) := \int_a^b f(t)\, dt$.

ex: Dada uma função contínua $q(t)$ e uma função derivável $p(t)$, considere, no subespaço $\mathbf{E}_p^2 \subset \mathbf{E}^2$ das funções duas vezes deriváveis que satisfazem a condição de fronteira $p(a)f(a) = p(b)f(b) = 0$, o *operador de Sturm-Liouville* $L : \mathbf{E}_p^2 \to \mathbf{E}$, definido por

$$Lf := (pf')' + qf\,.$$

Por exemplo, se $q = 0$ e $p = 1$, então $L = \Delta$, o laplaciano. Mostre que L é simétrico.

Observáveis e valores médios em mecânica quântica. O espaço dos estados de uma partícula quântica (não relativística) é um espaço de Hilbert $\mathbf{H} \approx \ell^2$, i.e. um espaço euclidiano complexo de dimensão infinita que é completo e que admite um subconjunto denso e numerável, e portanto uma base numerável. Os "observáveis" limitados são operadores auto-adjuntos A (o caso de observáveis não limitados, como "posição", "momento", "energia", ...é mais delicado), cujos vetores próprios $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \ldots$ formam uma base ortonormada de $\mathbf{H}$. Os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ (que são números reais) são os possíveis resultados das observações. Pelo teorema espectral, o operador é uma soma pesada

$$A = \sum_k \lambda_k\, |k\rangle\, \langle k|$$

de projeções. O valor médio esperado, ao repetir a observação do observável A no estado unitário arbitrário $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n\, |n\rangle$ um número grande de vezes, é o valor médio

$$\langle \psi|\, A\, |\psi\rangle = \sum_n \lambda_n |\psi_n|^2\,,$$

sendo $\|\psi\|^2 = \sum_n |\psi_n|^2 = 1$.

Operadores unitários/ortogonais. Seja $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, real ou complexo. Um operador $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ é uma *isometria* se

$$\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$.

Se o operador U admite um adjunto U^* (por exemplo, se $\mathbf{H}$ tem dimensão finita ou se U é limitado), então é imediato ver que U é uma isometria sse $U^*U = I$, e portanto $U^{-1} = U^*$. Um operador $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ é dito *unitário* se

$$\boxed{U^*U = UU^* = I\,,}$$

ou seja, se é uma isometria bijetiva. Um operador unitário de um espaço euclidiano real é também dito *ortogonal*.

Se $\mathbf{H}$ é um espaço euclidiano de dimensão finita, então toda a isometria é unitária, pois envia uma base (finita) ortonormada numa base ortonormada, e portanto é bijetiva. De fato, os operadores unitários de um espaço euclidiano de dimensão finita podem ser caraterizados pelas seguintes condições equivalentes.

Teorema 16.5. *Seja $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ um operador de um espaço euclidiano de dimensão finita. As seguintes condições são equivalentes, e portanto definem um operador unitário:*

i) U preserva os produtos escalares, ou seja, $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ par todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$,

ii) U preserva as normas, ou seja, $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$,

iii) U envia vetores unitários em vetores unitários (ou seja, envia a esfera unitária na esfera unitária), ou seja, se $\|\mathbf{u}\| = 1$ então também $\|U\mathbf{u}\| = 1$.

Demonstração. A equivalência entre ii) e iii) é evidente, basta dividir pela norma do vetor, se diferente do vetor nulo. A implicação i) $\Rightarrow$ ii) é trivial, e a implicação contrária i) $\Leftarrow$ ii) é uma consequência das identidades de polarização (12.1) ou (12.2). □

Se o espaço é complexo, $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, então a matriz $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ que define um operador unitário numa base ortonormada é uma "matriz unitária", ou seja, tal que $A^*A = AA^* = I$. Se o espaço é real, $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$, então a matriz A que define um operador ortogonal numa base ortonormada é uma "matriz ortogonal", ou seja, tal que $A^\top A = AA^\top = I$. Em particular, o determinante de uma matriz que define um operador unitário tem valores na circunferência unitária do plano complexo, e o determinante de uma matriz que define um operador ortogonal é igual a ± 1 (os pontos reais da circunferência unitária).

Teorema 16.6. *Os valores próprios de um operador unitário $U \in \mathrm{End}(\mathbf{H})$ estão na circunferência unitária $\mathbf{S} = \{\, z \in \mathbb{C} \quad t.q. \quad |z| = 1\}$, ou seja, têm valor absoluto $|\lambda| = 1$. Em particular, um operador ortogonal só pode ter valores próprios ± 1.*

Demonstração. Se U é unitário e $U\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, então $|\lambda|^2 \|\mathbf{v}\|^2 = \langle U\mathbf{v}, U\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2$. □

ex: Se T e S são operadores unitários/ortogonais de um espaço euclidiano complexo/real, então também T^{-1} e TS são unitários/ortogonais.

ex: Os operadores unitários de $\mathbb{C}$ são os (operadores multiplicação por) números complexos de módulo um, i.e. $e^{i\theta}$ com θ real. Os operadores ortogonais de $\mathbb{R}$ são os (operadores multiplicação por) números ± 1.

ex: Exemplos de operadores ortogonais de $\mathbb{R}^2$ são reflexões e rotações. Verifique que toda matriz ortogonal $O \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com determinante $\mathrm{Det}O = 1$ é da forma

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

para algum ângulo θ, ou seja, é uma rotação (anti-horária) de um ângulo θ. Verifique que se a matriz ortogonal A tem $\mathrm{Det}A = -1$, então a matriz AJ tem $\mathrm{Det}AJ = 1$, onde

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz que define a reflexão no eixo dos x. Consequentemente, toda matriz ortogonal é da forma R_θ ou $R_\theta J$, dependendo se o seu determinante é ± 1.

ex: Mostre que $\|T\mathbf{x}\| = \|x\|$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ implica $\langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ para todos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$ (aplique a primeira identidade aos vetores $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}+i\mathbf{y}$).

ex: Se $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ é um subespaço invariante para o operador unitário $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, então também o subespaço ortogonal $\mathbf{V}^\perp$ é invariante.

ex: As translações $T_\mathbf{a} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ são "isometrias" do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, no sentido em que preservam as distâncias (pois $\|T_\mathbf{a}(\mathbf{x}) - T_\mathbf{a}(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$), mas não são transformações lineares, se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

ex: Em dimensão infinita existem isometrias $T \in \mathrm{End}(\mathbf{H})$ não sobrejetivas, e portanto não unitárias! Por exemplo, o *deslocamento à direita* $R : \ell^2 \to \ell^2$, que envia

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)\,.$$

ex: Sejam $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ duas bases ortonormadas do espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$, e seja $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ o operador tal que $U(\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$, definido pela matriz cujas colunas são as componentes dos $\mathbf{f}_k$ relativamente à base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Mostre que U é unitário, se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ é um espaço euclidiano complexo, ou ortogonal, se $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano real.

ex: Mostre que um operador $U \in \mathrm{End}(\mathbf{H})$ de um espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$ é unitário sse envia bases ortonormadas em bases ortonormadas.

ex: [Ap69] *Vol. 2* **5.11.**

17 Teorema espectral

ref: [Ap69] *Vol 2*, **5.6**, **5.11**, **5.20** ; [La87] *Ch. VIII*

5 abr 2021

Operadores diagonalizáveis. O operador $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, definido num espaço vetorial de dimensão finita $\mathbf{V}$, real ou complexo, é *diagonalizável* se existir uma base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de $\mathbf{V}$ formada por vetores próprios de L. Isto significa que a matriz que representa o operador nesta base é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{17.1}$$

com valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tais que $L\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$ (que em geral são números reais ou complexos). Se A é a matriz que representa o operador L na base canónica de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (ou em qualquer outa base), então $A = G\ \Lambda G^{-1}$, onde G é a matriz mudança de coordenadas, cujas colunas são os vetores próprios representados na base canónica.

Um operador "genérico" $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é diagonalizável. De fato, pelo teorema fundamental da álgebra 7.1, um polinómio mónico genérico de grau n (como o polinómio caraterístico da matriz que representa L numa base arbitrária) fatoriza como produto $(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \ldots (z - \lambda_n)$ de n raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, e vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes, pelo teorema 15.1.

Semi-simplicidade. A caraterização algébrica do algoritmo indutivo que permite diagonalizar operadores é a seguinte. Um operador $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ é dito *semi-simples* se todo subespaço invariante $\mathbf{E} \subset \mathbf{V}$ admite um complementar invariante, ou seja, um subespaço invariante $\mathbf{F} \subset \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{V} = \mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$.

Teorema 17.1. *Um operador $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ de um espaço vetorial complexo de dimensão finita é diagonalizável sse é semi-simples.*

Demonstração. Fixada uma base, podemos assumir que $\mathbf{V} \approx \mathbb{C}^n$. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.1, o polinómio caraterístico da matriz associada ao operador possui (pelo menos) uma raiz, e consequentemente o operador admite um vetor próprio $\mathbf{v}$, logo um subespaço invariante de dimensão um $\mathbf{E} = \mathbb{C}\mathbf{v}$. Se o operador é semi-simples, então o espaço é uma soma direta $\mathbb{C}^n = \mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$, onde $\mathbf{F} \approx \mathbb{C}^{n-1}$ é um subespaço invariante de dimensão $n - 1$. A implicação $\Rightarrow$ segue portanto por indução, sendo trivial em dimensão um. A implicação contrária $\Leftarrow$ é óbvia, pois subespaços invariantes de operadores diagonalizáveis são gerados por vetores próprios. □

ex: Toda transformação linear $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ entre espaços vetoriais de dimensão finita é "diagonal", se temos a liberdade de escolher as duas bases! Ou seja, é sempre possível escolher uma base de $\mathbf{V}$ e uma base de $\mathbf{W}$ (não necessariamente a mesma se $\mathbf{W} = \mathbf{V}$) tais que T é representado por uma matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{kk} = 1$ ou 0 ([Ap69], *Vol. 2*, **2.11**).

Diagonalização em espaços euclidianos. O teorema espectral, nas suas diferentes versões, aborda um problema mais específico no contexto dos espaços euclidianos. Decidir quais operadores $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano $\mathbf{H}$ admitem uma base ortonormada de vetores próprios, e portanto, se o espaço tem dimensão finita, são representados nesta base ortonormada por uma matriz diagonal (17.1).

A resposta, em dimensão finita, é a classe dos "operadores normais", os operadores que comutam com o próprio adjunto (isto é claramente o caso das matrizes diagonais). Esta classe contém as subclasses importantes dos operadores auto-adjuntos e dos operadores unitários, que têm valores próprios reais ou unitários, respetivamente. O caso dos operadores simétricos, que essencialmente

implica os outros, é devido a Cauchy[30], e foi motivado pelo problema de descrever as pequenas oscilações de sistemas mecânicos em torno de uma posição de equilíbrio.

Além de um argumento indutivo, que usa as propriedades geométricas dos operadores normais ou auto-adjuntos, o ingrediente principal da prova clássica do teorema espectral é a existência de pelo menos um valor próprio. Aqui é onde é preciso utilizar alguma análise, na forma do teorema fundamental da álgebra 7.1, ou na forma aparentemente mais simples do teorema de Weierstrass (uma função contínua definida num compacto atinge o seu máximo) juntamente com mais algum cálculo em várias variáveis.

O caso de dimensão infinita é muito mais sutil, e é importante na análise das equações diferenciais parciais e portanto na física dos campos. Este caso é tratado em manuais mais avançados de análise funcional (por exemplo, Reed e Simon, ...).

Teorema espectral para operadores auto-adjuntos. A semi-simplicidade dos operadores auto-adjuntos é consequência da seguinte observação, cuja prova é elementar.

Teorema 17.2. *Seja $A : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ é um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$. Um subespaço $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ é invariante sse $\mathbf{V}^\perp$ é invariante.*

Demonstração. Se $\mathbf{V}$ é invariante, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^\perp$, então $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$ porque também $A\mathbf{v} \in V$, e portanto $A\mathbf{w} \in \mathbf{V}^\perp$. A implicação contrária é análoga. □

O teorema espectral para operadores auto-adjuntos, ou simétricos no caso real, é o seguinte.

Teorema 17.3 (teorema espectral)**.** *Seja A é um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$. Existe uma base ortonormada de $\mathbf{H}$ formada por vetores próprios de A, com valores próprios reais.*

Demonstração. Seja $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, e seja A a matriz que representa o operador numa base ortonormada. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.1, o polinómio caraterístico $c_A(t) = \mathrm{Det}(tI - A)$ possui (pelo menos) uma raiz λ, e portanto o operador admite um vetor próprio $\mathbf{v}$ com valor próprio λ, que é real pelo teorema 16.3. Pelo teorema 17.2, o espaço ortogonal $\mathbf{v}^\perp \approx \mathbb{C}^{n-1}$ é um subespaço invariante de A, e a restrição de A a este subespaço é ainda um operador auto-adjunto. O teorema espectral segue por indução finita, sendo trivial num espaço de dimensão um $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}$. □

Estrutura dos operadores auto-adjuntos. Seja A um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$. Pelo teorema espectral 17.3 e pelo teorema 16.4, o espaço é uma soma direta ortogonal $\mathbf{H} = \oplus_{\lambda\in\sigma(A)}\mathbf{H}_\lambda$ de espaços próprios $\mathbf{H}_\lambda = \{\ \mathbf{v} \in \mathbf{H} \ :\ A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$, com $\lambda \in \sigma(A)$, o espetro do operador (que em dimensão finita é o conjunto dos valores próprios). Se $P_\lambda : \mathbf{H} \to \mathbf{H}_\lambda$ denota a projeção ortogonal de $\mathbf{H}$ sobre o espaço próprio $\mathbf{H}_\lambda$, então o operador é uma soma direta de homotetias

$$A = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda\, P_\lambda$$

Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ é uma base ortonormada composta por vetores próprios, com valores próprios reais λ_1,λ_2, ..., λ_n (não necessáriamente distintos), então

$$A\mathbf{v} = \sum_k \lambda_k \,\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\rangle\, \mathbf{u}_k\,,$$

[30] A.L. Cauchy, Sur l'équation à l'aide de laquelle on d'etermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes, *Exercices de Mathématiques* **4** (1829), 140-160.

e consequentemente a matriz que representa o operador A nesta base é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Em particular, se a matriz auto-adjunta $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ representa o operador auto-adjunto A numa base ortonormada arbitrária (por exemplo, a base canónica), então existe uma matriz unitária U tal que

$$A = U\,\Lambda\,U^* .$$

onde $\Lambda = U^*\,A\,U$ é uma matriz diagonal $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ cujas entradas são os valores próprios (reais) de A, e as colunas de U são os vetores próprios normalizados $\mathbf{u}_k$ de A representados na base ortonormal inicial. Vice-versa, toda matriz desta forma representa, numa base ortonormada, um operador auto-adjunto ou simétrico. Se o espaço euclidiano é real, então existe uma matriz ortogonal O tal que $A = O\,\Lambda\,O^\top$. Isto mostra que um operador simétrico A é uma composição

$$\xrightarrow{X} \boxed{O^\top} \xrightarrow{O^\top X} \boxed{\Lambda} \xrightarrow{\Lambda O^\top X} \boxed{O} \xrightarrow{O\Lambda O^\top X = AX}$$

de uma rotação $O^\top$, umas homotetias Λ, e uma rotação inversa O.

A projeção ortogonal sobre a reta gerada pelo k-ésimo vetor próprio (normalizado) $\mathbf{u}_k$ é o operador $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x}\rangle\ \mathbf{u}_k$. Em termos de vetores coluna é representada pela matriz $P_k = \mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^*$ (sendo $\mathbf{u}_k$ vetores coluna). A expressão $A = U\Lambda U^*$ então mostra que a matriz A é uma combinação linear

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^*$$

de projeções ortogonais, pesadas com os valores próprios.

O "teorema fundamental da álgebra" (o resultado de análise que diz que um polinómio não constante tem pelo menos uma raiz no plano complexo) foi utilizado, na prova do teorema espectral, para deduzir a existência de pelo menos um valor próprio. Pode ser substituido pelo teorema de Weierstrass, que afirma que uma função contínua num compacto admite um máximo, e um pouco de cálculo vetorial elementar. Esta ideia, e portanto uma prova alternativa do teorema espectral, é utilizada na caraterização dos valores próprios mínimo e máximo de Rayleigh e Ritz.

e.g. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

define, na base canónica, um operador simétrico $L(x, y) = (y, x)$ do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Os valores próprios são $\lambda_\pm = \pm 1$, raízes do polinómio caraterístico $c_A(z) = z^2 - 1$. Vetores próprios normalizados, satisfazendo $A\mathbf{u}_\pm = \pm\mathbf{u}_\pm$ e $\|\mathbf{u}_\pm\| = 1$, são $\mathbf{u}_+ = (1, 1)/\sqrt{2}$ e $\mathbf{u}_- = (-1, 1)/\sqrt{2}$, respetivamente. A mudança de coordenadas que diagonaliza A é portanto a matriz ortogonal (cujas colunas são as coordenadas de $\mathbf{u}_+$ e $\mathbf{u}_-$)

$$R_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

que representa uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/4$. A sua transposta, que é também a sua inversa, é auma rotação horária de um ângulo $\pi/4$, ou seja, $R_{\pi/4}^\top = R_{-\pi/4}$. Então a matriz A é igual ao produto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R_{\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{-\pi/4}\,.$$

Mas a matriz diagonal $\Lambda = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ é a matriz de uma reflexão no eixo horizontal do plano. A diagonalização mostra portanto que o operador L é obtido ao fazer, nesta ordem, uma rotação horária de um ângulo $\pi/4$, uma reflexão no eixo horizontal, e uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/4$. Moral, o operador L, representado na base canónica pela matriz A, é uma reflexão na reta $y = x$.

ex: Seja $\mathbf{v}$ um vetor próprio do operador auto-adjunto L. Mostre que $(\mathbb{C}\mathbf{v})^\perp$ é um subespaço invariante de L.

ex: Observe que um operador $L = iT$ é anti-hermítico sse T é hermítico. Enuncie o correspondente teorema espectral para operadores anti-hermíticos.

ex: Determine valores e vetores próprios e diagonalize as matrizes reais simétricas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Determine valores e vetores próprios e diagonalize as matrizes complexas hermíticas

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

ex: [Ap69] *Vol. 2* **5.11.**

Teorema espectral para operadores normais. Seja $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ um espaço euclidiano complexo de dimensão finita. Um operador $N : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ é *normal* se comuta com o próprio adjunto, ou seja, se

$$\boxed{N^* N = N N^*}$$

Operadores unitários são normais, pois satisfazem $UU^* = U^*U = I$. Operadores hermíticos e anti-hermíticos também são normais, pois o adjunto é proporcional ao próprio operador, $A^* = \pm A$. Um operador $T = X + iY$ é normal sse a sua parte hermítica $X = (T + T^*)/2$ e a sua parte anti-hermítica $iY = (T - T^*)/2$ comutam, pois $[T, T^*] = -2i\,[X, Y]$.

É claro que N é normal sse N^* é normal. Os operadores normais também podem ser caracterizados pela seguinte propriedade geométrica.

Teorema 17.4. *Um operador N é normal sse*

$$\|N\mathbf{v}\| = \|N^*\mathbf{v}\|$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$.

Demonstração. O comutador $A = [N^*, N] = N^*N - NN^*$ é um operador auto-adjunto, e a condição $\|N\mathbf{v}\| = \|N^*\mathbf{v}\|$ é equivalente a $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v}\rangle = 0$ para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. O teorema é portanto consequência do teorema 16.2. □

Ao aplicar este resultado ao operador $N - \lambda$ e ao seu adjunto $N^* - \overline{\lambda}$, concluimos que

Teorema 17.5. *Sea N um operador normal de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita $\mathbf{H}$. Um vetor $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de N com valor próprio λ sse é também um vetor próprio de N^* com valor próprio $\overline{\lambda}$.*

Um operador que admite uma base ortonormada de vetores próprios, com valores próprios arbitrários, é normal. De fato, a adjunta de uma matriz diagonal $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal $\Lambda^* = \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n})$, e duas matrizes diagonais comutam. A afirmação recíproca é a forma mais geral de teorema espectral (em dimensão finita).

Teorema 17.6 (teorema espectral)**.** *Seja $N : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ um operador normal de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita $\mathbf{H}$. Existe uma base ortonormada de vetores próprios de N.*

Consequentemente, um operador normal é uma soma direta $N = \oplus_k \lambda_k$ de homotetias relativamente a uma decomposição ortogonal $\mathbf{H} = \oplus_k \mathbf{H}_k$, onde os $\mathbf{H}_k$ são os espaços próprios com valores próprios λ_k (que em geral são números complexos).

Este teorema é uma consequência do teorema espectral 17.3 (que vale para a parte hermítica X e a parte anti-hermítica iY de $N = X + iY$, que comutam) e do teorema 17.7. Uma prova alternativa e independente é a seguinte.

Demonstração. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.1, o operador N admite um valor próprio λ. Pelo teorema 17.5, o espaço próprio $\mathbf{H}_\lambda$ é também um espaço próprio do operador adjunto N^*, com valor próprio $\overline{\lambda}$. O subespaço ortogonal $(\mathbf{H}_\lambda)^\perp$ é N-invariante (pois, se $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_\lambda$, então $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = 0$ implica $\langle N\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}, N^*\mathbf{v}\rangle = \lambda \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = 0$ também), e tem dimensão estritamente inferior a dimensão de $\mathbf{H}$. O teorema segue por indução, sendo trivial em dimensão um. □

ex: Determine valores e vetores próprios e diagonalize a matriz complexa normal

$$\begin{pmatrix} i & -i \\ -i & i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalização simultânea e comutadores. Sejam L e M são dois operadores lineares definidos num espaço linear $\mathbf{V}$. Se L e M comutam, e se $\mathbf{V}_\lambda$ é um espaço próprio de L associado ao valor próprio λ, então $\mathbf{V}_\lambda$ é invariante para M, i.e. $M(\mathbf{V}_\lambda) \subset \mathbf{V}_\lambda$. De fato, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$, então

$$L(M\mathbf{v}) = M(L\mathbf{v}) = \lambda M\mathbf{v}\,,$$

o que significa que $M\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$. Em particular,

Teorema 17.7. *Sejam L e M são dois operadores normais (por exemplo, auto-adjuntos), definidos num espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$. Existe uma base ortonormada de vetores próprios para os dois operadores sse L e M comutam.*

Demonstração. Seja $\mathbf{H}_\lambda$ um espaço próprio de L. Se L e M comutam, a restrição de M a cada espaço próprio $\mathbf{H}_\lambda$ é um operador auto-adjunto, que, pelo teorema espectral, admite uma base de vetores próprios, que são também vetores próprios de L. Mas o espaço $\mathbf{H}$ é uma soma direta ortogonal de subespaços próprios de L. A outra implicação é trivial, pois duas matrizes diagonais comutam. □

Consequentemente, se as matrizes hermíticas A e B comutam, existe uma matriz unitária U tal que U^*AU e U^*BU são diagonais.

Desigualdade de Heisenberg. Quando dois operadores auto-adjuntos não comutam, não existe uma base ortonormada que os diagonaliza. A obstrução, o comutador, assume em mecânica quântica um significado importante.

Sejam $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, e Q um operador auto-adjunto definido em $\mathbf{H}$. Fixado um vetor unitário $\mathbf{v}$, podemos calcular o valor médio

$$\langle Q\rangle_{\mathbf{v}} := \langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v}\rangle\ ,$$

que é um número real. Se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de Q, com valor próprio real λ, então o valor médio é $\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v}\rangle = \lambda$. Em geral, uma medida da distância entre $Q\mathbf{v}$ e um hipotético vetor próprio associado ao valor médio $\langle Q\rangle_{\mathbf{v}}$ (que pode não existir!) é a *incerteza*

$$\Delta_{\mathbf{v}} Q := \|(Q - \langle Q\rangle_{\mathbf{v}})\mathbf{v}\|\ .$$

Naturalmente, $\Delta_{\mathbf{v}} Q$ é nula sse $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de Q. Na linguagem da mecânica quântica, os vetores unitários (ou melhor, as retas $\mathbb{C}\mathbf{v} \subset \mathbf{H}$) definem os *estados* do sistema, o valor médio

$\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v}\rangle$ é o valore esperado (ou seja, a média de um número grande de observações), e o $\Delta_{\mathbf{v}} Q$ é o desvio padrão do observável Q no estado $\mathbf{v}$.

Consideramos agora dois operadores auto-adjuntos, Q e P. Se não comutam, não são diagonalizáveis simultaneamente (ou seja, na mesma base). O comutador $[Q, P]$ é um operador anti-hermítico, logo $i[Q, P]$ é hermítico, e o seus valore smédios são números reais.

Teorema 17.8 (desigualdade de Heisenberg)**.** *Sejam Q e P são dois operadores auto-adjuntos definidos num espaço euclidiano (de dimensão finita)* $\mathbf{H}$*. Para todo vetor* $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$*,*

$$\Delta_{\mathbf{v}} Q \cdot \Delta_{\mathbf{v}} P \geq \frac{1}{2} \, |\langle i[Q, P]\rangle_{\mathbf{v}}|$$

e a igualdade verifica-se sse existem escalares reais a e b, não simultaneamente nulos, tais que $a(Q - \langle Q\rangle_{\mathbf{v}})\mathbf{v} = ib(P - \langle P\rangle_{\mathbf{v}})\mathbf{v}$.

Demonstração. Para simplificar as notações, chamamos $Q' = Q - \langle Q\rangle_{\mathbf{v}}$ e $P' = P - \langle P\rangle_{\mathbf{v}}$ (o que fisicamente significa fazer translações nas unidades utilizadas para medir os dois observáveis). Pela desigualdade de Schwarz,

$$|\, \langle\, Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v}\rangle \,| \leq \|Q'\mathbf{v}\| \cdot \|P'\mathbf{v}\|$$

e a igualdade se verifica sse os vetores $Q'\mathbf{v}$ e $P'\mathbf{v}$ são linearmente dependentes. O segundo membro desta desigualde é o produto $\Delta_{\mathbf{v}} Q \cdot \Delta_{\mathbf{v}} P$ das incertezas. O primeiro membro é o módulo de $\langle\, Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v}\rangle$, que é superior ou igual ao módulo da parte imaginária

$$\begin{aligned} \Im\left(\langle\, Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v}\rangle\right) &= \frac{1}{2i} \;\left(\langle\, Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v}\rangle - \langle\, P'\mathbf{v}, Q'\mathbf{v}\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2i} \,\langle \mathbf{v}, [Q, P]\mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

ou seja, ao módulo de $\langle\, \mathbf{v}, i[Q, P]\mathbf{v}\rangle$ (que é um número real, porque o comutador entre dois operadores auto-adjuntos é anti-auto-adjunto). Isto prova a desigualdade.

A igualdade verifica-se se a desigualdade de Schwarz é uma igualdade, ou seja, se $Q'\mathbf{v}$ e $P'\mathbf{v}$ são linearmente dependentes, e se a parte real de $\langle Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v}\rangle$ é nula, ou seja, se

$$\langle\, Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v}\rangle + \langle\, P'\mathbf{v}, Q'\mathbf{v}\rangle = 0$$

É imediato verificar que estas condições correspondem a existência de umas constantes reais $a, b \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulas, tais que $a\, Q'\mathbf{v} - ib\, P'\mathbf{v}$. □

O caso em que uma das constantes a ou b é nula corresponde ao caso em que $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de um dos operadores. A desigualdade de Heisenberg é, neste caso, trivial.

ex: Verifique que, fixado um vetor unitário $\mathbf{v}$, então $(\Delta_{\mathbf{v}} Q)^2 = \langle Q^2\rangle_{\mathbf{v}} - \langle Q\rangle_{\mathbf{v}}^2$.

ex: Verifique que o comutador entre dois operadores hermíticos é um operador anti-hermítico.

Laplacian in a bounded interval. Let $\mathbf{E}$ be the space of continuous functions $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, equipped with the inner product $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi \overline{f(x)}\; g(x)\, dx$. Recall that the *Laplacian* is the differential operator $\Delta = \partial^2$, namely

$$(\Delta f)(x) := f''(x)\,.$$

Let $\mathbf{E}_0^\infty \subset \mathbf{E}$ be the subspace of infinitely differentiable functions satisfying the boundary conditions $f(0) = f(\pi) = 0$ (for example, the space of transversal displacements of a vibrating string). As an operator $\Delta : \mathbf{E}_0^\infty \to \mathbf{E}$, the Laplacian is symmetric, i.e. $\langle f, \Delta g\rangle = \langle \Delta f, g\rangle$ for all $f, g, \in \mathbf{E}_0^\infty$. It is a simple exercise in ordinary differential equations to show that the eigenvalues of the Laplacian are $\lambda_n = -n^2$, with $n = 1, 2, 3, \ldots$, and the corresponding eigenfunctions are, for example,

$$\mathbf{v}_n(x) = \sin(nx)\,.$$

Observe that the Laplacian is not bounded! One may actually show that such eigenfunctions form a "basis" of the Hilbert space $\mathbf{H}$ obtained from $\mathbf{E}$ by completion.

ex: Show that the "positive definite" Laplacian $-\Delta$ is positive, namely

$$\langle f, -\Delta f \rangle \ > 0$$

for all non-trivial $f \in \mathbf{E}_0^\infty$. Indeed, integrating by parts and using the boundary conditions, $f(0) = f(\pi) = 0$, show that

$$\langle f, -\Delta f \rangle \ = \langle \nabla f, \nabla f \rangle = \|\nabla f\|^2 .$$

Self-adjoint operators with no eigenvalues and Dirac delta functions. The multiplication operator $(Xf)(x) := x\, f(x)$ is self-adjoint and bounded on the Euclidean space $\mathbf{E}$ as above, but has no eigenvalues. Indeed, the eigenvalue equation reads $x\, f(x) = \lambda\, f(x)$, and says that $f(x) = 0$ for all $x \neq \lambda$, and therefore that $f(x)$ is the zero vector of $\mathbf{E}$.

Indeed, eigenvectors of the multiplication operators are *Dirac delta functions* $\delta(x - \lambda)$, with $0 \leq \lambda \leq \pi$, defined by the paradoxical equation

$$\int_0^\pi \delta(x - \lambda)\, f(x)\, dx := f(\lambda)$$

(saying that $\delta(x - \lambda)$ is equal to zero for all $x \neq \lambda$ and so large at the single point $x = \lambda$ that its integral over the whole interval is equal to one!), and live outside the space $\mathbf{E}$. The theory of distributions, inspired by the intuition of Paul Dirac and developed by Laurent Schwartz (and worth a Fields medal in 1950) will give a precise mathematical meaning to this physicists' idea.

Momentum and Laplacian on the line. Let $\mathbf{H}$ be the complex Euclidean space of square-integrable functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, equipped with the inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\ g(x)\, dx$.

The "momentum operator" (in quantum mechanics) $P = -i\partial$ is symmetric when defined, for example, on the subspace $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}$ of infinitely differentiable functions with compact support (since ∂ is skew-symmetric). Nevertheless, it does not have any eigenvalue. Indeed, functions satisfying $Pf = \lambda f$ are the plane waves $e^{i\lambda x}$, but no such exponential is square-integrable (indeed, they can't even satisfy boundary conditions like $f(0) = f(\pi) = 0$ if we were in a bounded interval). Thus, the candidates to be eigenvectors of the momentum operator are outside the space where the operator is naturally defined.

The "kinetic energy" $P^2 = -\Delta$, the positive-definite Laplacian, is symmetric too, and of course should share its eigenvectors with P, the plane waves $e^{i\lambda x}$, with non-negative eigenvalues $\lambda^2 \geq 0$.

The theory of "Fourier transform" (to be studied next year) will reveal in which sense the Laplacian is unitarily equivalent to a multiplication operator (the prototype of a self-adjoint operator). Functions in $\mathbf{H}$ will be integrals

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)\ e^{i\lambda x}\ d\lambda$$

of "eigenfunctions" of the Laplacian, and the Laplacian $-\Delta$ (or also the derivative operator ∂ as well as any constant coefficients differential operator) will act on their "coefficients/coordinates" $\widehat{f}(\lambda)$ as a multiplication operator $\widehat{f}(\lambda) \mapsto \lambda^2\, \widehat{f}(\lambda)$.

Heisenberg uncertainty principle. The multiplication operator $X : f(x) \mapsto x\, f(x)$ is called "position operator" in quantum mechanics. The maximal subspace of $\mathbf{H}$ where both X and $P = -i\hbar\partial$ can be iterated as operators is the *Schwartz space* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ of infinitely differentiable functions which decay, together with all their derivatives, faster than the inverse of any polynomial. A straightforward computation show that the position operator and the momentum operator do not commute, and indeed their commutator is proportional to the identity operator

$$[X, P] \ = i\hbar$$

This basic fact, together with some Fourier analysis, is responsible for the famous *Heisenberg uncertainty principle*, which says that position and momentum of a quantum particle cannot be

simultaneously measured with arbitrary precision. More precisely, as follows formally from Heisenberg inequality 17.8, the product of the standard deviations of the measurements of the position and the momentum cannot be made smaller than

$$\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$$

Moreover, the sharp bound is achieved iff the state $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ solves the differential equation $ax\,\varphi(x) - b\,\varphi'(x) = 0$, modulo translations and modulations. Solutions are proportional to gaussians $\varphi(x) \sim e^{-\gamma x^2}$, which belong to the Schwartz space provided $\gamma > 0$.

Transformações de Cayley. A *transformação de Cayley*

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

é um automorfismo da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Em particular, envia o semi-plano superior $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \quad \text{t.q. } \Im(z) > 0\}$ no disco unitário $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < 1\}$, e a "circunferência" $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ (a fronteira ideal $\partial\mathbb{H}$ do "plano hiperbólico") na circunferência unitária $\mathbf{S} = \{ z \in \mathbb{C} \quad \text{t.q. } |z| = 1\}$. Esta ideia admite muitas generalizações.

Por exemplo, se S é uma matriz hemi-hermítica (ou hemi-simétrica), e portanto os seus valores próprios são imaginários puros, então $I \pm S$ são invertíveis. Em uma base ortonormada em que S é diagonal, $I \pm S$ são diagonais com valores próprios correspondentes (i.e. associados aos mesmos vetores próprios) da forma $1 \pm it$ com t real, ou seja, complexos conjugados. Mas os quocientes $(1-it)/(1+it)$ são unitários. Consequentemente, a *transformada de Cayley*[31]

$$U := (I - S)(I + S)^{-1}$$

é uma matriz unitária (respetivamente, ortogonal).

ex: Mostre que se U é uma matriz unitária e se $I+U$ é invertível (i.e. se U não tem valor próprio -1) então $S = (I-U)(I+U)^{-1}$ é hemi-hermítica.

ex: Mostre que se A é uma matriz auto-adjunta então $U = (A - iI)^{-1}(A + iI)$ é unitária.

Forma normal de operadores ortogonais. Operadores unitários num espaço euclidiano real de dimensão finita são representados por matrizes ortogonais, matrizes $O \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ satisfazendo $O^\top = O^{-1}$. Um operador ortogonal é unitário, logo normal, mas não é necessariamente diagonalizável, pois os seus valores próprios podem não ser reais. O teorema espectral para operadores normais implica o seguinte resultado sobre a estrutura de uma matriz ortogonal.

Teorema 17.9. *Seja $U : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ um operador ortogonal de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{E} \approx \mathbb{R}^n$, representado numa base ortonormada por uma matriz ortogonal O. Então o espaço é uma soma direta $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{E}_k$ de subespaços invariantes ortogonais de dimensão 1 ou 2, em cada um dos quais U é o operador $\pm 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ do plano de um ângulo $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.*

Existe portanto uma base ortonormada na qual U é representado pela matriz ortogonal

$$O = \begin{pmatrix} O_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & O_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & O_k \end{pmatrix}$$

onde cada bloco não nulo O_i, de dimensão um ou dois, é uma das matrizes

$$(1) \qquad (-1) \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

[31] A. Cayley, Sur quelques propriétés des déterminants gauches, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **32** (1846), 119-123.

Em particular, um operador unitário do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ (ou de um espaço de dimensão ímpar) admite sempre uma reta invariante, ou seja, um "eixo de rotação".

Demonstração. A prova é por indução. Em dimensão um o teorema é trivial, e em dimensão dois é um exercício do capítulo anterior.

Fixada uma base ortonormada, podemos assumir que $\mathbf{E} = \mathbb{R}^n$, munido do produto interno euclidiano, e que o operador é defnido por uma matriz ortogonal O. A matriz real O define também um operador unitário no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$ (a complexificação de $\mathbb{R}^n$), munido do produto interno usual, poi $\overline{O}^\top = O^\top = O^{-1}$. O teorema espectral para operadores normais diz que $\mathbb{C}^n$ admite uma base ortonormada de vetores próprios de O, e os seus valores próprios λ são unitários, ou seja, satisfazem $|\lambda| = 1$.

Seja $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$, com $X, Y \in \mathbb{R}^n$, um vetor próprio com valor próprio $\lambda = e^{i\theta}$, assim que

$$O(X + iY) = e^{i\theta}(X + iY)\,.$$

Se o valor próprio é real, ou seja $\lambda = e^{i\theta} = \pm 1$, então ou X ou Y (pois um dos dois não é nulo) é um vetor próprio real V com valor próprio λ. A restrição de O a reta $\mathbf{E}_1$ gerada por V é então uma multiplicação por ± 1, e o espaço ortogonal a esta reta é um subespaço invariante de dimensão $n - 1$.

Se o valor próprio $\lambda = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ não é real (ou seja, θ não é um múltiplo inteiro de π), então é imediato ver que também $\overline{Z} = X - iY$ é um valor próprio de O, com valor próprio $\overline{\lambda} = e^{-i\theta}$. Sendo $\lambda \neq \overline{\lambda}$, também é imediato ver que X e Y são linearmente independentes (em $\mathbb{R}^n$). Mas a parte real e a parte imaginária da equação $OZ = e^{i\theta}Z$ dizem que

$$\begin{aligned} OX &= \cos\theta\, X - \sin\theta\, Y \\ OY &= \sin\theta\, X + \cos\theta\, Y \end{aligned}$$

A restrição de O ao plano $\mathbf{E}_1 \approx \mathbb{R}^2$ gerado por X e Y é portanto uma rotação de um ângulo θ, e o espaço ortogonal a este plano é um subsespaço invariante de dimensão $n - 2$.

Nos dois casos, a indução pode funcionar. □

Operadores positivos e raízes quadradas. Um operador auto-adjunto $A : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ definido num espaço euclidiano, real ou complexo, de dimensão finita é dito *positivo* ou *não-negativo*, notação $A \succ 0$ ou $A \succeq 0$, respetivamente, se os seus valores médios são positivos ou não-negativos, ou seja, se

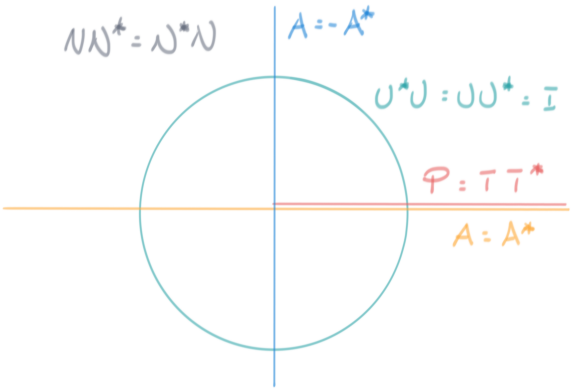
$$\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle > 0 \qquad \text{ou} \qquad \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle \geq 0$$

para todos os vetores não nulos $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ (atenção, esta definição/condição não faz sentido para operadores que não são auto-adjuntos!). Pelo teorema espectral, estas condições são equivalentes ao operador A ter valores próprios $\lambda > 0$ ou $\lambda \geq 0$, respetivamente. É evidente que um operador positivo é invertível.

Se T é um operador arbitrário, então $P = T^*T$ é um operador auto-adjunto cujos valores médios são $\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \|T\mathbf{v}\|^2$. Portanto $P \succeq 0$, e $P \succ 0$ se T é invertível.

De fato, todo operador não-negativo P é desta forma. Numa base ortonormada em que a matriz que representa P é uma matriz diagonal $\mathrm{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ com $p_k \geq 0$, podemos definir um operador $Q := \sqrt{P}$, representado pela matriz diagonal $\mathrm{diag}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, onde $q_k = \sqrt{p_k}$. Então é claro que Q é auto-adjunto, não-negativo, comuta com P, e é uma "raiz quadrada" de P, i.e. satisfaz $Q^2 = P$. De forma análoga, é possível construir raízes quadradas positivas de operadores positivos.

Assim, a analogia entre operadores e números complexos é a seguinte. Os operadores normais são os operadores diagonalizáveis numa base ortonormada, e correspondem ao plano complexo, os possíveis valores próprios. Os operadores unitários correspondem à circunferência unitária. Os operadores hermíticos e anti-hermíticos correspondem à reta real e à reta imaginária, respetivamente. Os operadores positivos correspondem à semi-reta real positiva.



ex: Seja $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ um operador arbitrário. Então $T^*T \succeq 0$ e consequentemente admite uma raiz quadrada $|T| := \sqrt{T^*T}$, que é auto-adjunta. Mostre que

$$\|T\mathbf{v}\|^2 = \| \, |T|\mathbf{v}\|^2$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$.

ex: Mostre que um operador A é (auto-adjunto e) positivo sse é da forma $A = T^*T$ com T invertível.

ex: Mostre que se A é (auto-adjunto e) positivo então A^2 e A^{-1} são também auto-adjuntos e positivos.

ex: A identidade I é uma raiz quadrada da identidade I, mas não é a única. Por exemplo, em dimensão dois, também as *matrizes de Pauli*,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são matrizes hermíticas que satisfazem $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$ (é usual também chamar σ_0 a matriz identidade I). Calcule valores e vetores próprios das matrizes de Pauli.

ex: Também existem raízes quadradas de operadores negativos. Por exemplo,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma raiz quadrada de $-I$, ou seja, $J^2 = -I$. Dê mais exemplos.

ex: Calcule uma raiz quadrada das seguintes matrizes hermíticas e não-negativas

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots$$

ex: Seja $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ um operador positivo de um espaço euclidiano real $\mathbf{E}$. Mostre que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle \mathbf{x}, Ayy \rangle$$

é um produto interno em $\mathbf{E}$. Em particular, se o espaço $\mathbf{E}$ tem dimensão finita, existe uma base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{E}$ (ortonormada para o produto interno $(\cdot, \cdot)$) em que o operador A é representado pela matriz identidade I. Consequentemente, se $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, então

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \, .$$

Corda vibrante e harmónicas. As pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ, tensão k e densidade linear ρ são modeladas pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{17.2}$$

com condições de fronteira $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$, onde $u(x,t)$ denota o deslocamento transversal da corda na posição $x \in [0,\ell]$ e no tempo t, e $c = \sqrt{k/\rho}$.

O produto $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ é uma solução "separável" de (17.2) se $XT'' = c^2 X''T$, e portanto se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$X'' = \lambda X \qquad \text{e} \qquad T'' = \lambda c^2 T$$

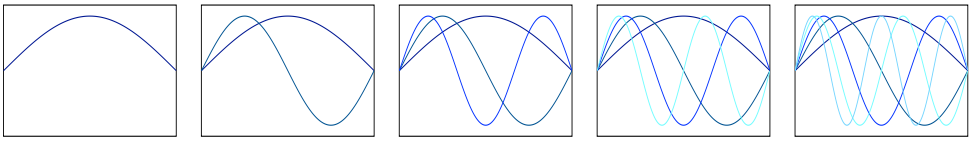
As únicas soluções não triviais da euqção diferencial $X'' = \lambda X$ no intervalo $[0,\ell]$ com condições de fronteira nulas $X(0) = X(\ell) = 0$ são proporcionais a $X_n(x) = \sin(\pi n x/\ell)$ (as funções próprias do laplaciano no espaço das funções que se anulam nos pontos 0 e ℓ) e têm valores próprios $\lambda_n := -\pi^2 n^2/\ell^2$ com $n = 1, 2, 3, \ldots$. Em correspondência de cada n, as soluções de $T'' = \lambda_n c^2 T$ são $T_n(t) = a_n \cos(\pi n c t/\ell) + b_n \sin(\pi n c t/\ell)$. As soluções separáveis do problema da corda vibrante são portanto as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \Big(a_n \cos(2\pi\nu_n t) + b_n \sin(2\pi\nu_n t)\Big) \sin(2\pi x/\ell_n) \\ &= A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n)\,, \qquad \text{com } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

onde os coeficientes a_n e b_n, ou a amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, e a fase $\tau_n = \arctan(a_n/b_n)$ são constantes arbitrárias, e as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

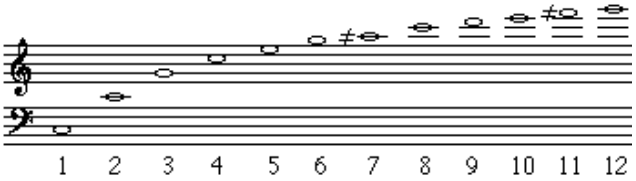
$$\nu_n = \frac{c}{2\ell}\, n \qquad \text{e} \qquad \ell_n = \frac{2\ell}{n}\,, \qquad \text{com } n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

respetivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = c/\ell_1$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = n\nu_1 = c/\ell_n$, com $n = 2, 3, 4, \ldots$, são ditas n-ésimas *harmónicas* (ou *overtones*) da corda.



Primeiras 5 harmónicas de uma corda vibrante.

Por exemplo, se a fundamental é o A_4 de 440 Hz (é o caso da segunda corda de um violino), então a segunda harmónica é o A_5 de 880 Hz, a terceira está próxima do E_6 de 1318.5 Hz, a quarta é o A_6 de 1760 Hz, a quinta está próxima do $C\sharp_7$ de 2217.5 Hz, a sexta está próxima do E_7 de 2637 Hz, a sétima está próxima do G_7 de 3136 Hz, ... Em particular, as primeiras harmónicas contêm a "fundamental" A, a "quinta justa" E a "terça maior" C♯, as três notas ("tríade maior") do "acorde maior"!



Primeiras 12 harmónicas de uma corda cuja fundamental é C.

ex: A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq$ 7.1 Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Onde deve colocar o dedo um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

Equação de Schrödinger estacionária. Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, e $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida ($h \simeq 6.262\cdots \times 10^{-34}$ J·s).

ex: Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

Matrizes densidade e entropia de von Neumann. Seja $\mathbf{H}$ o espaço de Hilbert du um sistema quântico. Um *estado puro* é um vetor unitário $|\psi\rangle \in \mathbf{H}$, ao qual correponde o projetor $P_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$ (que é um operador não-negativo com traço unitário $\mathrm{Tr}P = 1$, e tal que $P^2 = P$). Um "ensemble estatístico" dos estados puros $|\psi_k\rangle$ (não necesariamente ortogonais nem independentes) com probabilidades p_k (i.e. números entre 0 e 1 com soma $\sum_k p_k = 1$) é descrito pela *matriz densidade*

$$\rho = \sum_k p_k\, |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$

É claro que ρ é também um operador não-negativo com traço unitário. O valor médio do observável A no *estado mixto* ρ é

$$\langle A\rangle_\rho = \sum_k p_k\, \langle\psi_k|A|\psi_k\rangle = \mathrm{Tr}(A\rho)$$

A *entropia de von Neumann* (que é a entropia termodinâmica) do ensemble quântico descrito pela matriz densidade ρ é

$$S(\rho) := -\mathrm{Tr}(\rho\log\rho)$$

Pelo teorema espectral, ρ é diagonalizável, ou seja, existe uma base ortonormada $|\varphi_k\rangle$ tal que $\rho = \sum_k \lambda_k\, |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$, onde os valores próprios λ_k são também números não negativos (porque $\rho \succeq 0$) com soma $\sum_k \lambda_k = 1$ (porque $\mathrm{Tr}\rho = 1$). Então, por definição,

$$\rho\log\rho := \sum_k (\lambda_k\log\lambda_k)\, |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

(sendo que $0\log 0 := 0$), assim que

$$S(\rho) = -\sum_k \lambda_k\log\lambda_k$$

Determinant and zeta function. Let A be a positive self-adjoint operator, definied in some euclidean space of finite or infinite dimension, with eigenvalues $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$. The logarithm of its determinant is the sum of the logarithms of its eigenvalues, since

$$\log\mathrm{Det}A = \log(\lambda_1\lambda_2\dots) = \mathrm{Tr}\log A = \log\lambda_1 + \log\lambda_2 + \dots$$

(which of course may be divergent, in infinite dimension!). Define the *zeta function* of the operator as the Dirichlet series

$$\zeta_A(s) = \mathrm{Tr}(A^{-s}) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^s}\,.$$

Here s is a complex variable, and it is understood that the zeta function if defined in a half-plane $\Re(s) > \sigma$ where the above sum is absolutely convergent. This is not an issue if the operator is finite-dimensional, since then $\zeta_A(s)$ is a finite sum, hence an entire function. In this case, a computation shows that

$$\frac{d}{ds}\,\zeta_A(s)\Big|_{s=0} = -\sum_n \log\lambda_n\,,$$

which extends to the remarkable identity

$$\log \mathrm{Det} A = -\zeta_A'(0)\,.$$

Physicists use this identity to "extract" a finite value out of an infinite product that would be otherwise divergent, and call this "zeta function regularization"[32] [33].

Densidade das matrizes diagonalizáveis. Naturalmente, existem matrizes que não são diagonalizáveis. Uma matriz *diagonal superior* é uma matriz quadrada $S = (s_{ij})$ tal que $s_{ij} = 0$ se $i > j$, ou seja, da forma

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & * & \dots & * \\ 0 & s_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Observem que os termos diagonais $\lambda_k = s_{kk}$'s são os valores próprios de S, pois o seu polinómio caraterístico é $P_S(z) = \prod_k (z - s_{kk})$.

Teorema 17.10 (Schur)**.** *Toda matriz quadrada complexa $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é unitariamente semelhante a uma matriz diagonal superior, ou seja, existem uma matriz unitária U e uma matriz diagonal superior S tais que*

$$A = USU^*\,.$$

Demonstração. A prova é por indução. O teorema é trivial em dimensão um. Assumimos o teorema verdadeiro em dimensão n. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{(n+1)\times(n+1)}\ (\mathbb{C})$. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.1, o polinómio caraterístico de A admite uma raiz λ, e portanto A admite um vetor próprio $\mathbf{v}$ unitário correspondente. A reta $\mathbb{C}\mathbf{v}$ é um subespaço invariante, e $\mathbb{C}^{n+1}$ é uma soma direta ortogonal de $\mathbb{C}\mathbf{v}$ e o subespaço ortogonal $\mathbf{v}^\perp$, de dimensão n. Seja $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ uma base ortonormada de $\mathbf{v}^\perp$. A matriz que representa A na base ortonormada $\mathbf{v}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma matriz em blocos

$$\begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Pela hipótese indutiva, existem uma base ortonormada $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ de $\mathbf{v}^\perp$ tal que a matriz que representa B nesta base é diagonal superior. Então é claro que também a matriz que reprsenta A na base ortonormada $\mathbf{v}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ é triangular superior. □

Existem opeadores/matrizes diagonalizáveis que não são normais, pois uma mudança de coordenadas diagonalizadora pode não ser unitária. Por exemplo, pelo teorema 15.1, toda matriz $n \times n$ que admite n valores próprios distintos é diagonalizável. Os valores próprios de uma matriz triangular superior são os elementos da diagonal. Perturbações pequenas $s_{kk} + \varepsilon_k$ das entradas diagonais de uma matriz triangular superior $S = U^*AU$ podem portanto produzir matrizes diagonalizáveis $A' = US'U^*$ arbitrariamente próximas de uma matriz dada A. A decomposição de Schur 17.10. implica então

Teorema 17.11. *O conjunto das matrizes complexas diagonalizáveis é denso em $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, ou seja, para toda matriz A e todo $\varepsilon > 0$ é possível encontrar uma matriz diagonalizável A' tal que $\|A - A'\| < \varepsilon$.*

[32] S.W. Hawking, Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime, *Comm. Math. Phys.* **55**. (1977), 133-148.

[33] N.M. Robles, *Zeta function Regularization*, M.Sc. thesis, Imperial College London, 2009.

Teorema de Cayley-Hamilton. Se $p \in \mathbb{C}[z]$ é um polinómio na variável z, por exemplo $p(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$, e A é uma matriz $n \times n$, real ou complexa, então é possível definir a matriz $p(A)$ como

$$p(A) := a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 I \, .$$

Por exemplo, é possível considerar o polinómio caraterístico $P_A(z)$ da própria matriz A, e tentar calcular $P_A(A)$.

Se $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ é uma matriz diagonal, um cálculo elementar (as potências de Λ são também diagonais, e as entradas são as potências dos valores próprios de Λ) mostra que $c_\Lambda(\Lambda) = 0$. Uma matriz diagonalizável $D = U^{-1}\Lambda U$ tem potências da forma $D^k = U^{-1}\Lambda^k U$, e Consequentemente também satifaz $P_D(D) = U^{-1} P_\Lambda(\Lambda) U = 0$, pois $P_D = P_\Lambda$.

De acordo com o teorema 17.11, para cada matriz A, real ou complexa, é possível encontrar sequências $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de matrizes complexas diagonalizáveis tais que $D_m \to A$. Por continidade,

Teorema 17.12 (Cayley-Hamilton)**.** *Toda matriz quadrada A satisfaz o próprio polinómio caraterístico, i.e.*

$$\boxed{P_A(A) = 0}$$

Se A é uma matriz $n \times n$ invertível, então é possível multiplicar ambo os membros da identidade $P_A(A) = 0$ por A^{-1}, e obter uma fórmula para a matriz inversa A^{-1} em função das potências A^0, A, A^2, …, A^{n-1}.

ex: Por exemplo, mostre que a inversa de uma matriz invertível 2×2 é

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}A} \left((\mathrm{Tr}A) I - A \right) \, .$$

18 Formas quadráticas e pequenas oscilações

ref: [Ap69] *Vol 2*, **5.12-18** ; [La87] *Ch. VIII*

20 abr 2021

Formas quadráticas reais. Uma *forma quadrática* em n variáveis reais é um polinómio homogéneo $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de grau 2 nas coordenadas de $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$, ou seja, um polinómio do género

$$\mathcal{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

com a_{ij}'s coeficientes reais. A homogeneidade implica que $\mathcal{Q}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Os coeficientes a_{ij} formam uma matriz quadrada $n \times n$. Vice-versa, uma matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ define uma forma quadrática

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x}$ denota o vetor coluna $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$.

Existem muitas matrizes A que definem a mesma forma quadrática $\mathcal{Q}$, sendo apenas fixados os elementos diagonais a_{ii}, que são os coeficientes de x_i^2, e as somas $a_{ij} + a_{ji}$, que são os coeficientes dos produtos mistos $x_i x_j = x_j x_i$. Em particular, subtituindo A por $(A + A^\top)/2$, toda forma quadrática é definida por uma única matriz simétrica. O espaço das formas quadráticas em n variáveis reais pode portanto ser identificado com o espaço $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ das matrizes simétricas reais $n \times n$.

e.g. A forma quadrática $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, cujo valor é o quadrado da norma euclidiana do vetor $\mathbf{x}$, é definida pela matriz identidade I.

e.g. A forma quadrática $2x_1x_2$ é definida pela matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Determine a matriz simétrica que define a forma quadrática

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \,.$$

ex: Determine a matriz simétrica que define as seguintes formas quadráticas

$$\mathcal{Q}(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 \qquad \mathcal{Q}(x, y) = 2x^2 + 6xy + 7y^2 \qquad \mathcal{Q}(x, y, z) = 2x^2 - yz$$

ex: Verifique que uma forma quadrática satisfaz

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathcal{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 2\left(\mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \mathcal{Q}(\mathbf{y})\right)$$

(se $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$, esta é a identidade do paralelogramo).

Mudança de coordenadas e congruências. Seja $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$, definida pela matriz simétrica A. A mudança de coordenadas $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = U^{-1}\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ e U é a matriz invertível cujas colunas são as coordenadas dos vetores da nova base, transforma a forma quadrática $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ em

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = (U\mathbf{y})^\top A\,(U\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top\,(U^\top AU)\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top B\mathbf{y}$$

com $B := U^\top AU$. Ou seja, a matriz simétrica que representa a forma quadrática $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ nas coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ matriz

$$\boxed{B = U^\top A\, U}$$

Ou seja, se $B = (b_{ij})$, então $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i,j} b_{ij}y_iy_j$.

Duas matrizes quadradas A e B assim relacionadas são ditas *(linearmente) congruentes*, e representam a mesma forma quadrática em sistemas de coordenadas diferentes. É imediato verificar que "ser congruentes" é uma relação de equivalência no espaço das matrizes quadradas. Outro ponto de vista é pensar que duas formas quadráticas definidas por matrizes simétricas congruentes são *(linearmente) equivalentes*.

ex: Mostre que se A é simétrica então também $U^\top AU$ é simétrica.

ex: Determine a matriz que define a forma quadrática $x^2 - 4xy - 2y^2$ nas coordenadas $x' = 2x + y$ e $y' = x + y$.

ex: Determine a forma quadrática $13x^2 + 16xy + 5y^2$ nas coordenadas $x' = 2x + y$ e $y' = 3x + 2y$.

Diagonalização de Jacobi. O fato fundamental sobre formas quadráticas reais é a possibilidade de reduzir toda forma quadrática a uma "forma normal", e a existência de um número finito de possíveis formas normais.

Teorema 18.1. *Uma forma quadrática em n variáveis reais é linearmente equivalente a uma forma*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 \tag{18.1}$$

com $0 \le p + q \le n$.

Isto significa que toda matriz simétrica $n \times n$ é congruente a uma matriz diagonal do género

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(que define a forma normal (18.1)), onde I_p e I_q são matrizes quadradas identidade em dimensão p e q, respetivamente, e $p + q \le n$ (e os 0's denotam matrizes nulas das dimensões apropriadas).

Este teorema é elementar, pois apenas usa a possibilidade de dividir por 2 e de calcular raízes quadradas de números positivos (e, de fato, generaliza a corpos de caraterística diferente de 2). A prova consiste em "completar recursivamente os quadrados" até eliminar todos os produtos mistos do género $a_{ij}x_ix_j$ com $i \neq j$, e depois normalizar as coordenadas para reduzir todos os coeficientes a_{ii} não nulos dos termos quadráticos $a_{ii}x_i^2$ a unidades, positivas ou negativas (dependendo do sinal de a_{ii}).

O teorema espectral (um resultado mais profundo, que usa a estrutura topológica da reta real) permite enunciar e provar um resultado mais preciso utilizando a estrutura euclidiana do espaço $\mathbb{R}^n$. Alguns exemplos são suficientes.

e.g. Por exemplo, a forma quadrática

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 &= \left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) + 4x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (2x_2)^2 \end{aligned}$$

é equivalente à forma quadrática $y_1^2 + y_2^2$ nas coordenadas $y_1 = x_1 - x_2$ e $y_2 = 2x_2$.

e.g. A forma quadrática

$$\begin{aligned} 4x_1x_2 &= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - \left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) \\ &= (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

é equivalente à forma quadrática $y_1^2 - y_2^2$ nas coordenadas $y_1 = x_1 + x_2$ e $y_2 = x_1 - x_2$.

ex: Determine a forma normal da forma quadrática

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \, .$$

Formas bilineares simétricas & formas quadráticas. Uma matriz simétrica A define uma *forma bilinear simétrica*, ou seja, uma função $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que é linear em cada variável e tal que $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, por meio de

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{y} \, .$$

Em coordenadas, $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$. Ou seja, se $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ denotam os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, então $a_{ij} = \mathcal{B}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Uma forma bilinear simétrica é também chamada *produto escalar*, pois satisfaz os axiomas E1 e E2 de um produto interno, embora não seja necessariamente definida positiva (produtos escalares não positivos aparecem, por exemplo, no espaço-tempo da relatividade especial). A função

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \, ,$$

é então uma forma quadrática. A forma bilinear $\mathcal{B}$ pode ser reconstruida usando uma das duas fórmulas

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}) - \mathcal{Q}(\mathbf{y}) \right) \\ &= \frac{1}{4} \ \left(\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \, , \end{aligned} \tag{18.2}$$

cuja verifica é elementar. O espaço das formas quadráticas em n variáveis reais pode portanto ser identificado também com o espaço dos produtos escalares em $\mathbb{R}^n$.

e.g. O produto escalar definido pela forma quadrática $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ é o produto interno canónico $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ de $\mathbb{R}^n$.

e.g. A forma quadrática $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ define um produto escalar no espaço-tempo de coordenadas $(t, x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ que não é definido positivo.

Forma normal de formas bilineares. Uma prova conceptual do teorema 18.1, ou seja, uma versão geométrica da estratégia que consiste em completar os quadrados, usa a forma bilinear $\mathcal{B}$ associada a uma forma quadrática $\mathcal{Q}$, pensada como produto escalar (não necessariamente positivo) em $\mathbb{R}^n$.

Dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditos *$\mathcal{B}$-ortogonais* se $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Um vetor $\mathbf{x}$ é dito *$\mathcal{B}$-nulo* se é ortogonal a todos os vetores de $\mathbb{R}^n$, i.e. se $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ para todo $\mathbf{y}$. É claro que o conjunto dos vetores $\mathcal{B}$-nulos forma um subespaço $\mathbf{V}_0$ de $\mathbb{R}^n$, chamado *núcleo* de $\mathcal{Q}$, onde a forma bilinear $\mathcal{B}$, e portanto a forma quadrática $\mathcal{Q}$, são identicamente nulas.

O teorema 18.1 é equivalente ao seguinte teorema.

Teorema 18.2. *Uma forma bilinear simétrica em n variáveis reais é linearmente equivalente a uma forma*

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - x_{p+2} y_{p+2} - \cdots - x_{p+q} y_{p+q} \tag{18.3}$$

com $0 \leq p + q \leq n$.

Isto significa que, num sistema de coordenadas conveniente, a foma é definida por uma matriz diagonal $I_{p,q}$.

Demonstração. Se $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x}$, então, pelas (18.2), a forma $\mathcal{B}$ é identicamente nula, e portanto é a forma bilinear associada a matriz $I_{0,0}$ em qualquer base. Caso contrário, existe um vetor $\mathbf{v}_1$ tal que $\mathcal{Q}(\mathbf{v}_1) \neq 0$. Seja $\mathbf{V}_1$ o subespaço dos vetores $\mathcal{B}$-ortogonais a $\mathbf{v}_1$. Sendo definido pela equação homogénea não trivial $\mathcal{B}(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}) = 0$, tem dimensão $n - 1$. Consideramos agora a

restrição da forma quadrática a $\mathbf{V}_1$. Se é identicamente nula, paramos. Caso contrário, existe um vetor $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_1$ tal que $\mathcal{Q}(\mathbf{v}_2) \neq 0$. Os vetores de $\mathbf{V}_1$ que são $\mathcal{B}$-ortogonais a $\mathbf{v}_2$ formam então um subsespaço de dimensão $n-2$. É claro que esta construção pode continuar, e produz uma sequência de vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, com $m \leq n$, sobre os quais a forma quadrática não é nula e que são $\mathcal{B}$-ortogonais dois a dois. É então possível renormalizar os $\mathbf{v}_k$'s (ou seja, dividir por $|\mathcal{Q}(\mathbf{v}_k)|$) e construir vetores $\mathbf{w}_k$'s tais que $\mathcal{Q}(\mathbf{w}_i) = \pm 1$ e $\mathcal{B}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = 0$ se $i \neq j$. Se $m = n$, temos uma base de $\mathbb{R}^n$. Se $m < n$, então a forma quadrática é identicamente nula no subespaço $\mathbf{V}_m$, que tem dimensão $n-m$. É possível então completar uma base $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$ escolhendo uma base arbitrária $\mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$ de $\mathbf{V}_m$. □

Diagonalização de formas quadráticas em espaços euclidianos. Seja $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ uma forma quadrática no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, definida pela matriz simétrica $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ relativamente à base canónica $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ (ou outra base ortonormada), onde $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ e também denota o vetor coluna $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. A matriz simétrica A define um operador simétrico (que denotamos, por simplicidade, com a mesma letra) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e a forma quadrática é dada por

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$$

Pelo teorema espectral 17.3, existe uma base ortonormada $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A, com valores próprios (reais) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Portanto existe uma matriz ortogonal $U = (u_{ij})$, cujas colunas são os vetores próprios (ou seja, $\mathbf{v}_j = \sum_i u_{ij}\mathbf{e}_i$), tal que

$$U^\top A\, U = \Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,.$$

Nesta base, a forma quadrática é "diagonal". De fato, se $\mathbf{x} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$ e portanto o vetor coluna das novas coordenadas é $\mathbf{y} = U^\top\mathbf{x}$, então

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = (U\mathbf{y})^\top A\,(U\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top \Lambda \mathbf{y}$$

Este é o conteúdo da seguinte versão do teorema espectral para formas quadráticas, usualmente atribuída a Lagrange [34].

Teorema 18.3 (Lagrange)**.** *Seja $\mathcal{Q}$ uma forma quadrática no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, definida na base canónica pela matriz simétrica A. Existe uma base ortonormal, e portanto umas coordenadas ortonormadas correspondentes y_k's, tais que a forma quadrática é uma combinação linear de quadrados*

$$\lambda_1\, y_1^2 + \lambda_2\, y_2^2 + \cdots + \lambda_n\, y_n^2\,.$$

com coeficientes reais $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, que são os valores próprios de A.

Uma forma normal mais simples é possível se admitimos a possibilidade de usar bases ortogonais mas não necessariamente ortonormadas. Sejam $d_k = \sqrt{|\lambda_k|}$, se $\lambda_k \neq 0$, ou $d_k = 1$ se $\lambda_k = 0$. A mudança de coordenadas $y_k \mapsto z_k = d_k y_k$, definida por $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} = D^{-1}\,\mathbf{y}$ com $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ matriz diagonal com entradas positivas (que não é ortogonal se pelo menos um dos valores próprios tem módulo $|\lambda_k| \neq 1$), transforma a matriz Λ numa matriz diagonal

$$\Lambda' = D^\top \Lambda D = (UD)^\top A(UD)$$

com valores próprios nulos ou iguais a $\lambda_k/|\lambda_k| = \pm 1$. Nestas coordenadas, a forma quadrática assume portanto a forma $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{z}^\top \Lambda' \mathbf{z}$, que é uma soma de quadrados com coeficientes unitários, positivos ou negativos, ou nulos. Assim, a menos de reordenar os elementos da base, a matriz A é congruente a uma matriz diagonal

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com p valores próprios iguais a 1 (a cardinalidde dos valores próprios positivos de A), q valores próprios iguais a -1 (a cardinalidade dos valores próprios negativos de A), e $n-(p+q)$ valores próprios nulos (a dimensão do núcleo de A). Em particular,

[34] J. Lagrange, Recherches sur la méthode de maximis et minimis. *Miscellanea Taurinensia* **1** (1759), 18-32.

Teorema 18.4 (Gauss-Jacobi-Sylvester)**.** *Seja $\mathcal{Q}$ uma forma quadrática no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Existe uma base ortogonal (não necessariamente ortonormada), e portanto umas coordenadas ortogonais z_k's, tais que a forma quadrática é*

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - \cdots - z_{p+q}^2 \,. \tag{18.4}$$

Lei de inércia de Sylvester. As dimensões p e q na forma normal (18.4) , sujeitas à condição $0 \le p+q \le n$, têm o seguinte significado. Seja $\mathcal{Q}$ a forma quadrática definida por $I_{p,q}$. Então o espaço é uma soma direita $\mathbb{R}^n = \mathbf{V}_+ \oplus \mathbf{V}_- \oplus \mathbf{V}_0$ de um subespaço $\mathbf{V}_+ \approx \mathbb{R}^p$ de dimensão p (gerado pelos primeiros p vetores da base canónica) onde a forma quadrática é positiva, i.e. $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) > 0$, um subespaço $\mathbf{V}_- \approx \mathbb{R}^q$ de dimensão q onde a forma quadrática é negativa, i.e. $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) < 0$, e um subespaço complementar $\mathbf{V}_0 \approx \mathbb{R}^{n-(p+q)}$ onde a forma quadrática é nula, i.e. $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = 0$.

É claro que as dimensões p e q, e consequentemente $n_0 = n - (p+q)$, são invariantes da forma quadrática, ou seja, apenas dependem da classe de congruência da matriz simétrica A que define a forma quadrática, e não do sistema de coordenadas usado, ortogonal ou não. Este é o conteúdo da *lei de inêrcia* de Sylvester [35], Jacobi [36], e do próprio Gauss.

Teorema 18.5 (lei de inêrcia de Sylvester)**.** *Toda matriz real simétrica $n \times n$ é congruente a uma única matriz $I_{p,q}$ com $0 \le p+q \le n$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{Q}$ a forma quadrática definida pela matriz simétrica $I_{p,q}$. Então existe um subespaço $\mathbf{V}_{\le 0} = \mathbf{V}_- \oplus \mathbf{V}_0 \approx \mathbb{R}^{n-p}$, de dimensão $n-p$, onde a forma quadrática é não-positiva, i.e. $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) \le 0$ se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\le 0}$. Assumimos que num outro sistema de coordenadas a forma quadrática é definida pela matriz simérica $I_{p',q'}$, com $p' > p$, e seja $\mathbf{V}'_+ \approx \mathbb{R}^{p'}$ o subespaço gerado pelas primeiras p' coordenadas, onde a forma é positiva. Por razões dimensionais $(p' + (n-p)) > n)$ existe um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\le 0} \cap \mathbf{V}'_+$. Neste vetor, $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) > 0$, o que é uma contradição. □

A cardinalidade dos pares de inteiros não negativos p e q tais que $0 \le p+q \le n$ é portanto o número de classes de equivalências lineares das formas quadráticas em n variáveis. Este número é $(x+1)(n+2)/2$.

ex: Diagonalize as seguintes formas quadráticas no plano euclidiano

$x^2 + 2y^2$ $\qquad$ xy $\qquad$ $x^2 - 2xy + y^2$ $\qquad$ $x^2 + xy + y^2$ $\qquad$ $5x^2 - 6xy + 5y^2$

$5x^2 + 5y^2 - 6xy$ $\qquad$ $2x^2 + 5y^2 - 4xy$ $\qquad$ $5x^2 + 6xy + 5y^2$ $\qquad$ $x^2 + y^2 - 2xy$

$5x^2 - 4xy + 2y^2$ $\qquad$ $2x^2 - 4xy - y^2$ $\qquad$ $2x^2 + xy + 2y^2$ $\qquad$ $11x^2 + 4xy + 14y^2$

ex: Diagonalize as seguintes formas quadrática no espaço euclidiano

$$2x^2 - yz \qquad\qquad x^2 - 2xy + 4yz + 6xz - 3z^2$$

ex: [Ap69] *Vol. 2* **5.15.**

20 abr 2020

Quociente de Rayleigh-Ritz Seha A um operador simétrico de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{H}$. Fixada uma base ortormada, podemos assumir que $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ e que o operador é definido pela matriz simétrica A, que define a forma quadrática $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$.

[35] J. Sylvester, A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitution to the form of a sum of positive and negative squares. *Philosophical Magazine* **IV** (1852), 138-142.

[36] C.G. Jacobi, Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **53** (1857), 275-280.

Sendo números reais, os seus valores próprios podem ser ordenados, por exemplo em ordem crescente

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$$

(valores próprios iguais sendo repetidos de acordo com a mulplicidade geométrica). É também conveniente denotar $\lambda_{\min}(A) := \lambda_1(A)$ e $\lambda_{\max} := \lambda_n(A)$ o menor e o maior valor próprio, respetivamente.

O gradiente da forma quadrática é $\nabla Q(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$. A esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é a superfície de nível 1 da função $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x}$, cujo gradiente é $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$. Os dois gradientes são proporcionais nos pontos da esfera unitária onde $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algum λ. Mas isto significa que λ é um valor próprio, $\mathbf{x}$ é um vetor próprio, e nestes pontos $Q(\mathbf{x}) = \lambda$. De acordo com a teoria dos multiplicadores de Lagrange,

Teorema 18.6. *Os vetores e os valores próprios de A são os pontos e os valores críticos da restrição da forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ na esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1}$.*

Uma prova alternativa, que não usa os multiplicadores de Lagrange, é a seguinte.

Demonstração. Seja $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^{n-1}$ um ponto da esfera unitária. Os "equadores" que passam por $\mathbf{x}$ são os caminhos $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{x} + \sin(t)\,\mathbf{v} \in \mathbf{S}^{n-1}$, onde $\mathbf{v}$ é um vetor unitário do hiperplano $\mathbf{x}^\perp$ (observe que $\mathbf{x} + \mathbf{x}^\perp$ é o plano tangente à esfera unitária no ponto $\mathbf{x}$). Um cálculo elementar, que usa a simetria de A, mostra que a derivada da função $f(t) := \mathcal{Q}(\mathbf{r}(t))$ é $f'(t) = 2\,\langle \dot{\mathbf{r}}(t), A\mathbf{r}(t)\rangle$, onde $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin(t)\mathbf{x} + \cos(t)\,\mathbf{v}$. Em particular, no instante $t = 0$, esta derivada é $f'(0) = 2\,\langle \mathbf{v}, A\mathbf{x}\rangle$. Se $\mathbf{x}$ é um extremo local da restrição de $\mathcal{Q}$ na esfera unitária, então $f'(0)$ é igual a zero para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{x}^\perp$, e isto implica que $A\mathbf{x}$ é proporcional a $\mathbf{x}$. Isto significa que $\mathbf{x}$ é um vetor próprio de A. Mas o valor da forma quadrática num vetor próprio unitário é igual ao valor próprio associado. □

Sendo a esfera unitária compacta, o teorema de Weierstrass garante a existência de um máximo e um mínimo da restrição da forma quadrática, e de conseqência a existência de dois valores próprios, $\lambda_{\max}$ e $\lambda_{\min}$. Este raciocínio ofrece uma prova alternativa do teorema espectral (sempre baseada no teorema de Weierstrass, como a prova que usa o teorema fundamental da álgebra) e também a seguinte caraterização variacional dos valores próprios mínimo e máximo.

Teorema 18.7 (Rayleigh-Ritz)**.** *Seja A um operador simétrico de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{H}$. Para todos $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$*

$$\lambda_{\min}(A)\,\|\mathbf{x}\|^2 \leq \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle \leq \lambda_{\max}(A)\,\|\mathbf{x}\|^2 .$$

Os valores próprios mínimo e máximo de A são

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \qquad e \qquad \lambda_{\max}(A) = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \ .$$

O *quociente de Rayleigh-Ritz* [37] [38] é a função $\mathcal{R}_A : \mathbf{H}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{R}_A(\mathbf{x}) := \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

O quociente de Rayleigh-Ritz calculado num vetor próprio é o valor próprio correspondente, pois, se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ então $\mathcal{R}_A(\mathbf{v}) = \lambda$. O teorema 18.7 então diz que

$$\lambda_{\min}\,(A) \leq \mathcal{R}_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}(A)\,, \tag{18.5}$$

e que o menor e o maior dos valores próprios podem ser calculados minimizando ou maximizando o quociente de Rayleigh-Ritz sobre todos os vetores não nulos.

[37] J.W. Strutt (later Lord Rayleigh), In Finding the Correction for the Open End of an Organ-Pipe, *Phil. Trans.* **161** (1870) 77.

[38] W. Ritz, Uber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. reine angew. Math.* **135** (1908).

ex: Determine máximo e mínimo das seguintes funções na circunferência unitária do plano $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^2 \qquad f(x,y) = x^2 + 2xy \qquad f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2$$

Princípio min-max de Courant-Fischer. Os outros valores próprios também podem ser caraterizados/calculados usando um princípio variacional.

Teorema 18.8 (Courant-Fischer). *Sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ os valores próprios de um operador simétrico A de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$. Então o k-ésimo valor próprio λ_k é igual ao mínimo, sobre todos os subespaços $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k, do maior quociente de Reyleigh $\mathcal{R}_A(\mathbf{x})$ calculado nos vetores não nulos de V, ou seja,*

$$\lambda_k = \min_{\mathbb{R}^k \approx \mathbf{V} \subset \mathbf{H}} \quad \max_{0 \neq \mathbf{x} \in \mathbf{V}} \quad \mathcal{R}_A(\mathbf{x}) \tag{18.6}$$

e também é igual ao máximo, sobre todos os subespaços $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $n-k+1$, do menor quociente de Rayleigh $\mathcal{R}_A(\mathbf{x})$ calculado nos vetores não nulos de $\mathbf{V}$, ou seja,

$$\lambda_k = \max_{\mathbb{R}^{n-k+1} \approx \mathbf{V} \subset \mathbf{H}} \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{V},\, \mathbf{x} \neq 0} \quad \mathcal{R}_A(\mathbf{x})\,. \tag{18.7}$$

Demonstração. De acordo com o teorema espectral 17.3 existe uma base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ de $\mathbf{H}$ formada por vetores próprios de A, i.e. $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$. Por razões dimensionais, todo subespaço $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ de dimensão k contem pelo menos um vetor não trivial do subespaço gerado pelos $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$'s, ou seja, um vetor do género $\mathbf{x} = x_k\mathbf{u}_k + x_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$ com pelo menos um coeficiente $x_i \neq 0$. É claro que o valor do quociente de Rayleigh-Ritz neste vetor é $\mathcal{R}_A(\mathbf{x}) \geq \lambda_k$. Por outro lado, este valor minimal é certamente atingido no ponto $\mathbf{u}_k$, que pertence ao particular subespaço de dimensão k gerado pelos primeiros k vetores próprios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$. Isto prova o princípio variacional (18.6). O princípio dual, (18.7), é obtido ao substituir A com $-A$, e ao observar que $\lambda_k(-A) = \lambda_{n-k+1}(A)$. □

Métodos de Monte Carlo. Estes princípios variacionais são o fundamento teórico dos "algoritmos de Monte Carlo" para calcular/estimar os valores próprios de um operador simétrico. É possível gerar um número grande de pontos aleatórios na esfera unitária, e assim estimar o máximo de $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$, logo o maior valor próprio λ_n e o vetor próprio associado $\mathbf{x}_n$. Depois, é possível fazer a mesma coisa na esfera $\mathbf{x}_n^\perp \cap \mathbf{S}^{n-1} \approx \mathbf{S}^{n-2}$, ortogonal ao vetor próprio $\mathbf{x}_n$, e desta forma estimar λ_{n-1}. E assim a seguir.

Desigualdades de Weyl. O quociente de Reyleigh é uma função linear do operador. Em particular, se A e B são dois operadores auto-adjuntos de um espaço euclidiano, e $\mathbf{v}$ um vetor não nulo, então $\mathcal{R}_{A+B}(\mathbf{v}) = \mathcal{R}_A(\mathbf{v}) + \mathcal{R}_B(\mathbf{v})$. As desigualdades de Rayleigh-Ritz (18.5) implicam então que

$$\mathcal{R}_A(\mathbf{v}) + \lambda_{\min}(B) \leq \mathcal{R}_{A+B}(\mathbf{v}) \leq \mathcal{R}_A(\mathbf{v}) + \lambda_{\max}(B)\,.$$

Consequências imediatas do princípio variacional de Courant-Fischer 18.8, são as *desigualdades de Weyl* (parte de uma família maior de desigualdades) seguintes.

Teorema 18.9 (Weyl). *Se A e B são dois operadores auto-adjuntos de um espaço euclidiano de dimensão finita, então*

$$\lambda_k(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_{\max}(B)\,.$$

Em particular, se observamos que o raio espectral do operador auto-adjunto B é o seu valor próprio de módulo máximo, ou seja, $\rho(B) = \max\{|\lambda_{\min}(B)|, |\lambda_{\max}(B)|\}$, temos também

$$|\lambda_k(A+B) - \lambda_k(A)| \leq \rho(B)\,.$$

O operador $A + B$ pode ser pensado como sendo uma perturbação do operador A, pequena se $\rho(B)$ é pequeno. Então esta desigualdade diz que os valores próprios são estáveis por perturbações pequenas.

Formas quadráticas positivas e elipsoides. Uma forma quadrática $\mathcal{Q}$ é *positiva* se $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) > 0$ para todo vetor $\mathbf{x} \neq 0$.

Sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ os valores próprios da matriz simétrica A que define a forma quadrática $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$. De acordo com o teorema 18.3, nas coordenadas relativas a um sistema ortonormal de vetores próprios, definidas por $\mathbf{y} = U^\top \mathbf{x}$ com U ortogonal, a forma quadrática é uma combinação linear de quadrados

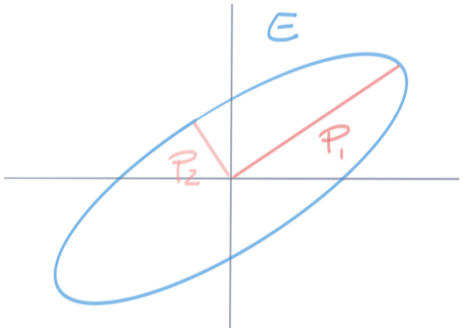
$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \Lambda \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

onde $\Lambda = U^\top AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Mas uma combinação linar de quadrados é positiva sse todos os coeficientes são positivo. Portanto, a forma quadrática definida pela matriz simétrica A é positiva sse todos os valores próprios de A são positivos, i.e. $\lambda_k > 0$ para todos os $k = 1, 2, \ldots, n$, ou seja, sse o operador simétrico definido por A é positivo.

Se $\mathcal{Q}$ é positiva, então a desigualdade $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) \leq 1$, ou seja, $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \leq 1$, define um conjunto limitado do espaço, dito *elipsoide*, cuja fronteira é a superfície quadrática (também chamada elipsoide) de equação cartesiana $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = 1$, ou seja, $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = 1$. Na base ortonormada que diagonaliza A, a equação que define o elipsoide tem a forma

$$\frac{y_1^2}{p_1^2} + \frac{y_2^2}{p_2^2} + \cdots + \frac{y_n^2}{p_n^2} \leq 1$$

onde $p_k := 1/\sqrt{\lambda_k}$. Os números positivos $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$ são chamados *semi-eixos (principais)* do elipsoide, e os vetores próprios de A são chamados direções principais do elipsoide.



É uma consequência imediata do princípio min-max de Courant-Fischer 18.8 que os semi-eixos principais podem ser caraterizados pelos seguintes princípios variacionais.

Teorema 18.10. *Seja $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ uma forma quadrática positiva em $\mathbb{R}^n$, e sejam $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$ os semi-eixos principais do elipsoide $E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ;\ \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \leq 1\}$. Então o semi-eixo p_k é o máximo, sobre todos os subespaços $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k, da menor norma $\|\mathbf{x}\|$ de um vetor $\mathbf{x} \in E \cap V$, ou seja,*

$$p_k = \max_{\mathbb{R}^k \approx V \subset \mathbb{R}^n} \min_{\mathbf{x} \in V \cap E} \|\mathbf{x}\|$$

e.g. Por exemplo, a forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$ é definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

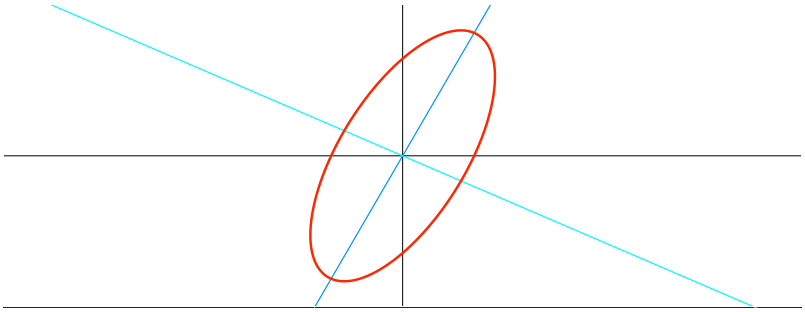
As raízes do polinómio caraterístico $z^2 - 7z + 6$ são os valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$. Em particular, a forma quadrática é positiva. Vetores próprios normalizados, soluções dos sistemas homogéneos $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$, são $\mathbf{u}_1 = (1, 2)/\sqrt{5}$ e $\mathbf{u}_2 = (-2, 1)/\sqrt{5}$. Sejam (x', y') as coordenadas relativas a base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. A mudança de coordenadas $(x, y) \mapsto (x', y')$ é definida por $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = U \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$, onde U é a matriz ortogonal

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

cujas colunas são as coordenadas dos vetores $\mathbf{u}_k$ na base canónica. Então a forma quadrática $\mathcal{Q}$ nas coordenadas x' e y' é definida pela matriz diagonal $U^\top AU$ com valores próprios 1 e 6, e é

$$x'^2 + 6y'^2$$

O elipsoide $\mathcal{Q}(x, y) \leq 1$ tem portanto semi-eixos $p_1 = 1$ e $p_2 = 1/\sqrt{6}$, e tem este aspeto:



ex: Mostre que uma forma quadrática em n variáveis é positiva sse existe uma base ortogonal (mas não necessariamente ortonormada) na qual a forma quadrática assume a forma

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 \,.$$

Em outras palavras, a forma quadrática $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ é positiva sse existe uma matriz invertível C tal que $C^\top AC = I$.

ex: Deduza que a forma bilinear $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}A^\top\mathbf{y}$, associada a uma forma quadrática positiva $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ é um produto escalar.

ex: Calcule os semi-eixos dos elipsoides definidos por

$$3x^2 + 2y^2 \leq 1 \qquad 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 1 \qquad 2x^2 - 4xy + 5y^2 \leq 1$$

Sistemas lineares e minimização de funções quadráticas. Se a é um número positivo e b um número arbitrário, então a única solução da equação linear $ax = b$ (ou seja, b/a) é também o único mínimo do polinómio quadrático $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx$. Esta observação elementar estende em dimensão superior.

Seja $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ uma forma quadrática positiva, definida pela matriz simétrica positiva A. Dado um vetor coluna $\mathbf{b}$, a função quadrática

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top\mathbf{x}$$

atinge um (único) mínimo quando $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ou seja, sendo A invertível, no ponto $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. De fato, o gradiente de f é $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$, e é também claro que $|f(\mathbf{x})|$ é grande quando $\|\mathbf{x}\|$ é grande, assim que o único ponto crítico deve ser um mínimo. Portanto, as soluções de um sistema linear, pelo menos quando a matriz dos coeficientes é uma matriz simétrica positiva, são soluções de um problema de minimização (assim como as equações de Euler-Lagrange!).

Teorema 18.11. *Se $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador positivo e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ um vetor arbitrário, então a solução da equação linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e o único mínimo da função quadrática $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle$, e vice-versa.*

Esta observação "geométrica/analítica" motiva métodos probabilísticos ou iterativos para aproximar as soluções de equações lineares, particularmente úteis em dimensão grande, quando os métodos "algébricos" (como a eliminação de Gauss) são pouco práticos.

Quadrados mínimos e regressão linear. Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. O problema linear

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

para um vetor incógnito $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser inconsistente, se $m > n$ ou se $\mathbf{b}$ não está na imagem de A. Uma *solução de quadrados mínimos* (uma ideia de Gauss) é um vetor $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ que minimiza a soma $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_m^2$ dos quadrados dos "erros" $\varepsilon_i := (\sum_j a_{ij}\, x_j) - b_i$, ou seja, o quadrado da distância eucidiana entre $A\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$. Mas este número é

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^\top (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{x}^\top A^\top A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top A^\top \mathbf{b} + \mathbf{b}^\top \mathbf{b}$$

Portanto, sendo o termo constante $\mathbf{b}^\top\mathbf{b}$ irrelevante, a solução de quadrados mínimos minimiza a função quadrática

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\top A'\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b}'$$

onde $A' = A^\top A$ e $\mathbf{b}' = A^\top \mathbf{b}$. Se as colunas de A são linearmente independentes, então é claro que a matriz $A^\top A$ é invertível e positiva. Consequentemente, pelo teorema 18.11, a única solução de quadrados mínimos é

$$\boxed{\overline{\mathbf{x}} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b}}$$

Observe que se $n = m$ e A é invertível, esta solução é $A^{-1}\mathbf{b}$, como esperado.

ex: Mostre que se $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tem caraterística n então $A^\top A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ também tem caraterística n, e portanto é invertível e positiva.

Integrais gaussianos. Uma forma quadrática positiva $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ em n variáveis define uma *gaussiana*

$$\exp(-\tfrac{1}{2}\mathcal{Q}(\mathbf{x}))\,,$$

que é uma função absolutamente integrável no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. O primeiro passo no cálculo do seu integral impróprio é a fórmula mágica

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\; dx = \sqrt{2\pi}} \tag{18.8}$$

em dimensão um. Pode ser verificada observando que o quadrado do integral da gaussiana $e^{\,-x^2/2}$ na reta real é, pelo teorema de Fubini, igual ao integral da gaussiana $e^{-(x^2+y^2)/2}$ no plano, e o cálculo de este último integral é elementar em coordenadas polares. Os integrais impróprios das outras gaussianas em uma variável são facilmente calculados mudando variáveis: se $\lambda > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}\; dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\,. \tag{18.9}$$

Colocamos então o problema de calcular o integral impóprio da gaussiana generalizada (somar uma função linear à forma quadrática não estraga a integrabiliade)

$$e^{\,-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x}}$$

nas variáveis x_1, x_2, …, x_n, onde A é uma matriz simétrica positiva $n \times n$ que define a forma quadrática, e $\mathbf{b}$ um vetor (coluna) arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Pelo teorema 18.3, ou seja, pelo teorema espectral 17.3, existe uma matriz ortogonal U, e portanto uma mudança de coordenadas ortogonal $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = U^\top \mathbf{x}$, que diagonaliza a forma quadrática. Se $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ são os valores próprios de A, então $U^\top AU$ é a matriz diagonal $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. O determinante jacobiano é $\mathrm{Det}(\partial y_i/\partial x_j) = \mathrm{Det}U^\top = 1$, pois a matriz é ortogonal. Então o integral fatoriza num produto de integrais gaussianos na reta

$$\begin{aligned}\iint\cdots\int e^{\,-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x}}\, dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_n &= \iint\cdots\int e^{\,-\frac{1}{2}\mathbf{y}^\top \Lambda\mathbf{y} + \mathbf{c}^\top \mathbf{y}}\, dy_1\, dy_2\, \ldots\, dy_n \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\int e^{\,-\frac{1}{2}\,\lambda_k y_k^2 + c_k y_k}\; dy_k \right)\end{aligned}$$

onde os c_k's são as coordenadas do vetor $\mathbf{c} = U^\top \mathbf{b}$. Estes integrais podem ser calculados completando os quadrados e usando a (18.9), o que resulta em

$$\int e^{\,-\frac{1}{2}\,\lambda_k y_k^2 + c_k y_k}\; dy_k = e^{\frac{1}{2} c_k^2/\lambda_k} \int e^{\,-\frac{1}{2}\,\lambda_k (y_k + c_k/\lambda_k)^2}\; dy_k = e^{\frac{1}{2} c_k^2/\lambda_k} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_k}}$$

Ao calcular o produto, observamos que $\prod_k \lambda_k = \mathrm{Det} A$ e que $\sum_k c_k^2/\lambda_k = \mathbf{c}^\top \Lambda^{-1} \mathbf{c} = \mathbf{b}^\top A^{-1} \mathbf{b}$. Portanto, o resultado final é a fórmula

$$\boxed{\iint \cdots \int e^{\,-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x}}\, dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\mathrm{Det} A}}\, e^{\frac{1}{2}\mathbf{b}^\top A^{-1} \mathbf{b}}}$$

Decomposição polar e valores singulares. Todo número complexo pode ser decomposto como produto $z = \rho e^{i\theta}$ de um número real não-negativo $\rho = \sqrt{z\bar{z}}$ e uma "fase" $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, de forma única se $z \neq 0$. Esta decomposição estende aos operadores.

Seja $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ um operador linear definido num espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$, real ou complexo. O operador T^*T é não-negativo, e pelo teorema espectral admite n valores próprios não-negativos $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ (não necessariamente distintos). Podemos definir o operador auto-adjunto não-negativo

$$|T| := \sqrt{T^*T}\,.$$

Na base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ que diagonaliza T, que satisfaz $T\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$, este operador é definido por $|T|\mathbf{e}_k = \sqrt{\lambda_k}\;\mathbf{e}_k$. Os valores próprios de $|T|$ são as raízes quadradas $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$ dos valores próprios de T^*T, e são chamados *valores singulares* do operador T.

Sendo

$$\|T\mathbf{v}\|^2 = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, T^*T\,\mathbf{v}\rangle \;= \langle \sqrt{T^*T}\,\mathbf{v}, \sqrt{T^*T}\,\mathbf{v}\rangle \;= \|\sqrt{T^*T}\,\mathbf{v}\|^2$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, temos que $\ker(T) = \ker(|T|)$. Em particular, se T é invertível, também $|T|$ é invertível, e portanto positivo. Neste caso, é imediato verificar que o operador $U := T\,|T|^{-1}$ é unitário, pois

$$\|U\mathbf{v}\|^2 = \langle T\,|T|^{-1}\mathbf{v}, T\,|T|^{-1}\mathbf{v}\rangle = \langle |T|^{-1}\;\mathbf{v}, T^*T\,|T|^{-1}\mathbf{v}\rangle = \langle |T|^{-1}\;\mathbf{v}, |T|\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Consequentemente, o operador T fatoriza como um produto $T = U\,|T|$ de um operador unitário e de um operador positivo (ou também, se definimos o operador unitário $V = |T|^{-1}\,T$, como $T = |T|\,V$). Se T não é invertível, o argumento é menos elementar.

Teorema 18.12 (decomposição polar)**.** *Todo operador $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano de dimensão finita complexo/real, pode ser decomposto num produto*

$$T = U\,|T|$$

de um operador unitário/ortogonal U e um operador não-negativo $|T| = \sqrt{T^*T}$. Se T é invertível, então $|T|$ é positivo.

Demonstração. No caso geral, podemos definir um operador $U' : \mathrm{Im}(|T|) \to \mathrm{Im}(T)$ de acordo com $U'(|T|\mathbf{v}) := T\mathbf{v}$. Então para todo $\mathbf{u} = |T|\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(|T|)$, com $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$,

$$\|U'\mathbf{u}\|^2 = \|T\mathbf{v}\|^2 = \|\sqrt{T^*T}\mathbf{v}\|^2 = \||T|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\,.$$

Logo, U' é uma isometria de $\mathrm{Im}(|T|)$ sobre $\mathrm{Im}(T)$ (pois estes dois espaços têm a mesma dimensão). O operador U' pode ser estendido a um operador unitário $U = U' \oplus U''$ de $\mathbf{H} = \mathrm{Im}(|T|) \oplus \mathrm{Im}(|T|)^\perp$ sobre $\mathbf{H} = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)^\perp$, escolhendo uma isometria arbitrária U'' de $\mathrm{Im}(|T|)^\perp$ sobre $\mathrm{Im}(T)^\perp$ (que existe pelo teorema 12.5, pois estes espaços têm a mesma dimensão). □

Pelo teorema espectral 17.3, existe uma base ortonormada de vetores próprios de $|T|$, com valores próprios os valores singulares $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_n$. Então a matriz que representa o operador $|T|$ na base canónica é igual a $K^{-1}PK$, onde $P = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ é a matriz diagonal com valores próprios iguais aos valores singulares de T, e K é uma matriz unitária. A decomposição polar 18.12, chamando $K' = UK^{-1}$, então implica (e é equivalente) a *decomposição em valores singulares* de uma matriz quadrada arbitrária.

Teorema 18.13 (decomposição em valores singulares)**.** *A matriz que representa um operador $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano de dimensão finita complexo/real, pode ser decomposta como produto*

$$T = K'\,P\,K$$

onde K e K' são matrizes unitárias/ortogonais e $P = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ é uma matriz diagonal não-negativa com valores próprios iguais aos valores singulares de T.

O significado é que existem duas bases ortonormadas, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ (as colunas e as linhas de K e K', respetivamente), relativamente as quais o operador é diagonal, ou seja $T\mathbf{e}_k = \sigma_k \mathbf{f}_k$, com elementos diagonais $\sigma_k \geq 0$. Portanto, um operador arbitrário T é uma composição

$$\xrightarrow{\mathbf{x}} \boxed{K} \xrightarrow{K\mathbf{x}} \boxed{P} \xrightarrow{PK\mathbf{x}} \boxed{K'} \xrightarrow{K'PK\mathbf{x}=T\mathbf{x}}$$

de uma rotação K, umas homotetias reais e não negativas P, e uma rotação K'.

No caso real e invertível, toda matriz $T \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertível pode ser decomposta como o produto

$$T = O\,|T|$$

de uma matriz simétrica e positiva $|T| = \sqrt{T^*T}$ e uma matriz ortogonal $O = A\,|T|^{-1}$, ou como produto

$$T = K'PK$$

de uma matriz diagonal positiva $P = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ e duas matrizes ortogonais K e K'.

Estas decomposições admitem uma interpretação, e uma demonstração, geométricas mais transparentes. Um operador linear/matriz invertível T envia a esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ num elipsoide com semi-eixos iguais ao valores singulares σ_k. De fato, se $\mathbf{x}$ é um vetor unitário e $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$, então

$$1 = \|\mathbf{x}\|^2 = \|T^{-1}\,\mathbf{y}\|^2 = \left\langle T^{-1}\,\mathbf{y}, T^{-1}\mathbf{y}\right\rangle = \left\langle \mathbf{y}, |T|^{-2}\,\mathbf{y}\right\rangle$$

é a equação cartesiana de um elipsoide centrado na origem definido pela forma quadrática associada à matriz positiva $|T|^{-2}$. Portanto, na base que diagonaliza $|T|$, a equação é

$$\frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{z_n^2}{\sigma_n^2} = 1\,.$$

Vice-versa, seja $E = T(\mathbf{S}^{n-1})$ o elipsoide imagem da esfera unitária pelo operador linear invertível T, e sejam $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ os eixos de E (ortogonais dois a dois e unitários). Existe uma única transformação ortogonal K' que envia a base canónica de $\mathbb{R}^n$ nos eixos de E, i.e. $(K')^{-1}(\mathbf{f}_k) = \mathbf{e}_k$. Existe uma única matriz diagonal positiva P^{-1} que envia o elipsoide $(K')^{-1}\,(E)$ na esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1}$. Então a composição $K := P^{-1}(K')^{-1}T$ envia a esfera unitária na esfera unitária, ou seja é uma transformação ortogonal. Consequentemente, $T = K'PK$.

Assim, un operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ou seja, uma matriz $n \times n$ (formada por n^2 números arbitrários) consiste na escolha de duas bases ortonormadas (cada base ortonormada consiste na escolha de $(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$ parâmetros, portanto duas bases equivalem a $n^2 - n$ parâmetros) e n números não-negativos (os semi-eixos do elipsoide imagem da esfera unitára pela transformação).

e.g. O operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido, na base canónica do plano, pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

não é simétrico. Possui apenas o valor próprio $\sqrt{2}$ (escolhi este número para ter fórmulas razoavelmente simples à seguir) e um espaço próprio 1-dimensional, gerado pelo vetor $(1, 0)$. O operador $T^\top T$ é simétrico e positivo (pois T é invertível), e é definido pela matriz

$$T^\top T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Os seus valores próprios são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$, e a matriz ortogonal diagonalizadora é

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

assim que

$$T^\top T = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} V^\top$$

Consequentemente, os valores singulares de T são $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = 2$, e a raiz quadrada de $T^\top T$ é a matriz simétrica e positiva

$$|T| = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} V^\top = \begin{pmatrix} 5/6 & -\sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Se definimos a matriz ortogonal

$$U = T\,|T|^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} V^\top = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

então a representação polar de T resulta ser

$$T = U\,|T| = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/6 & -\sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Consequentemente, a representação em valores singulares é

$$T = K' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

sendo $K' = UV$ e $K = V^\top$.

ex: Verifique que T^*T e TT^* possuem os mesmos valores próprios.

Forma normal de um par de formas quadráticas. Sejam $\mathcal{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top K\mathbf{x}$ e $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top P\mathbf{x}$ duas formas quadráticas em $\mathbb{R}^n$, representadas (por exemplo, na base canónica) pelas matrizes simétricas K e P, respetivamente. Se $\mathcal{K}$ é positiva, então a matriz simétrica K define um produto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{K}} := \mathbf{x}^\top K\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, e portanto existe uma base ortogonal (ortonormada para este produto interno) na qual $\mathcal{K}$ é representada pela matriz identidade. Ou seja, existe uma matriz invertível $C = UD$, igual ao produto de uma matriz diagonal positiva D e uma matriz ortogonal U, tal que $C^\top KC = I$, e portanto, se $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$, então $\mathbf{x}^\top K\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top\mathbf{y}$. Nesta base, a segunda forma quadrática é representada pela matriz simétrica $P' = C^\top PC$, pois $\mathbf{x}^\top P\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top P'\mathbf{y}$. Pelo teorema espectral, existe uma matriz ortogonal O que diagonaliza P', ou seja, tal que $\Lambda = O^\top P'O$ é diagonal. Observe que a primeira forma quadrática continua sendo definida pela matriz identidade, pois $O^\top IO = I$. Portanto, nas coordenadas $\mathbf{z} = (CO)^{-1}\mathbf{x}$, as formas quadráticas $\mathcal{K}$ e $\mathcal{P}$ são $\mathbf{z}^\top\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}^\top\Lambda\mathbf{z}$, respetivamente.

Teorema 18.14 (forma normal de um par de formas quadráticas)**.** *Sejam $\mathcal{K}$ e $\mathcal{Q}$ duas formas quadrática em $\mathbb{R}^n$. Se $\mathcal{K}$ é positiva, então existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ em que as formas são definidas pela matriz identidade e por uma matriz diagonal, respetivamente, ou seja, existem coordenadas ortogonais $z_1, \ldots, z_n$ nas quais as formas quadráticas $\mathcal{K}$ e $\mathcal{Q}$ assumem a forma*

$$\mathcal{K} = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 \qquad e \qquad \mathcal{Q} = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2$$

respetivamente, onde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

Os λ_k's (que não são os valores próprios da matriz simétrica que define $\mathcal{Q}$!) são chamados "valores próprios" da forma $\mathcal{Q}$ relativamente à forma positiva $\mathcal{K}$.

Cuidado! Este resultado não diz que as matrizes K e P são simultaneamente diagonalizáveis (caso que implica $KP = PK$), mas apenas que as fomas quadráticas que definem são diagonais numa base comum! O que acontece é que são diagonais simultaneamente as matrizes $(CO)^\top K(CO)$, que de fato é a matriz identidade, e $(CO)^\top P(CO)$ (e estas fórmulas usam transpostas de CO e não inversas!).

Pequenas oscilações e frequências próprias. Numa vizinhança de um ponto de equilíbrio (um ponto onde a força, ou seja, o gradiente do potencial, é nula), que podemos assumir ser a origem do sistema de coordenadas generalizadas $\mathbb{R}^n$, a energia potencial de um sistema mecânico pode ser aproximada por uma forma quadrática

$$\mathcal{U} = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{q}^\top A \mathbf{q}\,,$$

onde $A = (a_{ij}) := (\partial^2 \mathcal{U}/\partial q_i \partial q_j(0))$ é a matriz Hessiana do potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ na origem (que é positiva se a origem é um mínimo local). Por outro lado, a energia cinética é uma forma quadrática positiva

$$\mathcal{K} = \tfrac{1}{2}\, \dot{\mathbf{q}}^\top K \dot{\mathbf{q}}$$

nas velocidades generalizadas, definida por uma matriz simétrica e positiva $K = (k_{ij})$. A Lagrangiana do sistema é $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$, e as equações de Euler-Lagrange 4.1 (ou seja, as equações de movimento de Newton) são, nesta aproximação,

$$\frac{d}{dt} K\dot{\mathbf{q}} = -A\mathbf{q}$$

Pelo teorema 18.14, existe uma transformação linear (não necessariamente ortogonal!) de coordenadas $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{z} = C^{-1}\mathbf{q}$, tal que $C^\top K C = I$ e $C^\top A C = \Lambda$ é uma matriz diagonal, com valores próprios $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Nas coordenadas z_k's, a lagrangiana é $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_k \dot{z_k}^2 - \frac{1}{2}\sum_k \lambda_k z_k^2$. Se a origem for um mínimo local não degenerado do potencial, os valores próprios são positivos, i.e. $\lambda_k > 0$. Consequentemente, as equações de movimento assumem a forma

$$\ddot{\mathbf{z}} = -\Lambda \mathbf{z}\,,$$

ou seja, ficam decompostas nas n equações independentes

$$\ddot{z_k} = -\omega_k^2\, z_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

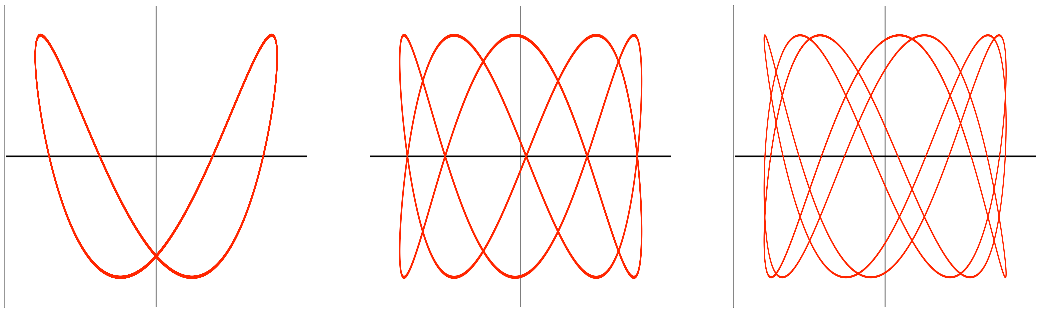
que são n osciladores harmónicos com *frequências próprias* $\omega_k := \sqrt{\lambda_k}$. Na práticas, estas oscilações caraterísticas podem ser obtida assumindo que as soluções das equações de Euler-Lagrange são da forma $\mathbf{q}(t) = e^{\,i\omega_k t}\, \boldsymbol{\xi}_k$, assim que

$$(A - \omega_k^2 K)\, \boldsymbol{\xi}_k = 0\,.$$

A *equação caraterística* $\mathrm{Det}(A - \lambda K) = 0$ determina os valores próprios $\lambda_k = \omega_k^2$. A estes valores próprios correspondem vetores dois a dois ortogonais $\boldsymbol{\xi}_k$. As soluções genéricas são combinações lineares de n oscilações

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \Re\left(\sum_k C_k\, e^{\,i\omega_k t}\, \boldsymbol{\xi}_k\right) \\ &= \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)\, \boldsymbol{\xi}_k \end{aligned}$$

com certas amplitudes A_k e fases iniciais ϕ_k. Os movimentos são periódicos (e desenham figuras de Lissajous no espaço das configurações) ou quase-periódicos, dependendo se as frequências próprias ω_1, ω_2 $\ldots\omega_n$ são racionalmente dependentes ou não.



Algumas figuras de Lissajous.

ref: [Ar87] **V.23.** ou [LL78] **V.23**

Osciladores acoplados. O exemplo clássico é o sistema formado por dois osciladores iguais, com lagrangianas $\mathcal{L}_k = \frac{1}{2}\dot{x_k}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x_k^2$, sendo $k = 1$ ou 2, acoplados com uma energia de interação $\frac{1}{2}\varepsilon\,(x_1 - x_2)^2$ dependente de um parâmetro positivo ε, a "força" da interação. É o caso de dois pêndulos unidos por uma mola (em repouso quando os dois pêndulos estão nas respeitivas posições de equilíbrio). A lagrangiana do sistema é

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\,\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) + \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,(x_1 - x_2)^2\,.$$

Neste caso, a energia cinética é a forma quadrática definida pela matriz identidade $K = I$, e a energia potencial é a forma quadrática positiva definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} \omega^2 + \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \omega^2 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

A equação caraterística $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$ tem raízes ω^2 e $\omega^2 + 2\varepsilon$. As frequência normais são portanto $\omega_1 = \omega$, a frequência comum dos osciladores, e $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\varepsilon}$. Vetores próprios normalizados são $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1)/\sqrt{2}$ e $\boldsymbol{\xi}_2 = (1,-1)/\sqrt{2}$, respetivamente. Consequentemente, nas coordenadas normais $z_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ e $z_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$, as equações de Euler-Lagrange são dois osciladores desacoplados

$$\ddot{z_1} = -\omega_1^2\, z_1 \qquad \text{e} \qquad \ddot{z_2} = -\omega_2^2\, z_2\,.$$

As soluções com $z_2 = 0$ são oscilações sincronizadas dos dois osciladores. Quando a força de interação é fraca, ou seja, $\varepsilon \ll \omega^2$ e portanto $\omega_2 \simeq \omega + \varepsilon/\omega$ é muito próximo de ω_1, as soluções genéricas apresentam o fenómeno dos batimentos. Como explicado em [Ar87], a energia é transferida periodicamente de um oscilador ao outro, com um período $T \simeq 2\pi\omega/\varepsilon$.

ex: Determine as frequências normais do sistema de osciladores iguais acoplados descrito pela lagrangiana ([LL78] **V.23**)

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\,\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) + \tfrac{1}{2}\omega^2\,\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \varepsilon\, x_1 x_2\,.$$

ex: Determine as frequências normais do sistema de osciladores acoplados descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\,\mu\,\dot{x_1}^2 + \tfrac{1}{2}\,\nu\,\dot{x_2}^2 + \tfrac{1}{2}\,\alpha^2\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,\beta^2\,x_2^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,(x_1 - x_2)^2\,.$$

Oscilações das moléculas. [LL78] **V.24**

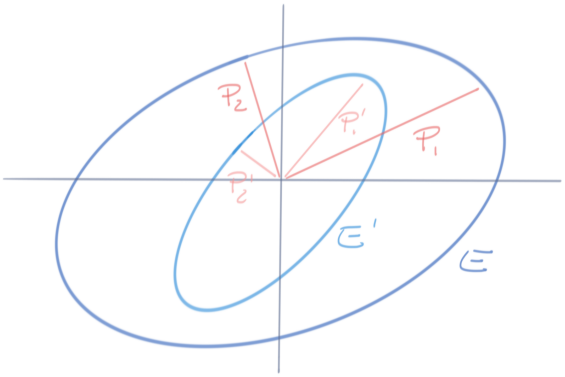
Semi-eixos principais e rigidez. O espaço das formas quadráticas positivas definidas num espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ pode ser munido de uma ordem parcial natural: $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$ se $\mathcal{Q}'(\mathbf{x}) \geq \mathcal{Q}(\mathbf{x})$ para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Se $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$, é claro que o elipsoide E' definido por $\mathcal{Q}'(\mathbf{x}) \leq 1$ está contido no elipsoide E definido por $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) \leq 1$. Vice-versa, se $E' \subset E$ então $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$.

Sejam $p'_1 \geq p'_2 \geq \cdots \geq p'_n$ e $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$ os semieixos principais dos elipsoides E' e E , respetivamente. O princípio min-max de Courant-Fischer 18.8, na forma do teorema 18.10, implica então as desigualdades

$$p'_1 \leq p_1 \qquad p'_2 \leq p_2 \qquad \cdots \qquad p'_n \leq p_n$$

entre os respetivos semieixos.



Se a energia cinética de um sistema mecânico é a forma quadrática definida pela estrutura euclidiana de $\mathbb{R}^n$ (ou seja, se a estrutura euclidiana é definida pela forma quadrática da energia cinética), então a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \tfrac{1}{2}\mathcal{Q}(\mathbf{q})$$

descreve um sistema com energia potencial definida pela forma quadrática positiva $\mathcal{Q}$. Nas coordenadas ortonormadas z_k's que diagonalizam o operador simétrico A que define a forma quadrática, as equações de Euler-Lagrange 4.1 assumem a forma

$$\frac{d}{dt}\,\dot{\mathbf{z}} = -\,\Lambda\mathbf{z}$$

onde $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal dos valores próprios da matriz simétrica A. O movimento é portanto decomposto em n osciladores harmónicos $\ddot{z_k} = -\omega_k^2 z_k$ de freqûencias próprias $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} = 1/p_k$.

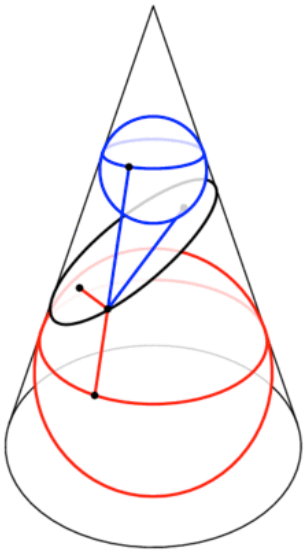
Se $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$, o sistema definido pela energia potencial $\mathcal{Q}'$ é dito mais *rígido* do sistema definido pela energia potencial $\mathcal{Q}$. As frequências próprias então satisfazem as desigualdades $\omega'_k \geq \omega_k$. Ou seja, os períodos das oscilações do sistema decrescem com a rigidez.

Conic sections. The first, tautological, definition is the following: a *conic section* is the intersection between a (right circular) cone $C \subset \mathbb{R}^3$ and a plane $P \subset \mathbb{R}^3$ (not passing through the vertex, for otherwise we have the degenerate cases of a point, a line or two lines). The Cartesian equation of a cone, in a convenient orthogonal coordinates system, is $x^2 + y^2 = z^2$, while a generic plane is defined by a linear equation like $ax + by + cz + d = 0$. Eliminating z, we see that the Cartesian equation of a generic conic is

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$$

There are other definitions, much more useful in physical applications, which were already known to Apollonius of Perga and Pappus of Alexandria. The modern route to the understanding

of them passes through the construction of the *Dandelin spheres* [39]. These are spheres tangent to both the cone C (along a circle) and the plane P (at one point), inside the cone itself. There are two of them, say $S_\pm$, in the case of an ellipse (one on each side of the plane) or an hyperbola (one in each branch of the hyperbola), and only one for a parabola (say, the one with "+"). The points where the Dandelin spheres touch the plane P, say $F_\pm := S_\pm \cap P$, are called *foci* of the conic section. It is clear that when the plane P is orthogonal to the axis of the cone, the two foci coincide and the conic section is a circle. Each Dandelin sphere touches the cone at a circle $C_\pm$, belonging to a certain plane $P_\pm$ (perpendicular to the axis of the cone, hence horizontal in the picture), and the intersection of each of those planes with the plane P determines a line $D_\pm := P_\pm \cap P$, called *directrix* of the conic section.

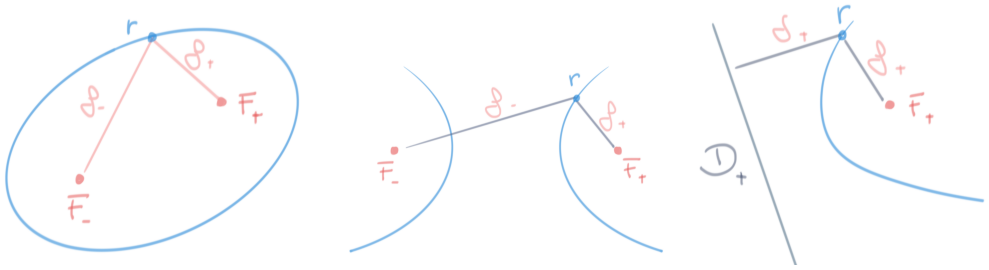


Dandelin spheres of an ellipse.

Second definition: *focal properties*. Consider a moving point $\mathbf{r}$ in the Euclidean plane $P \approx \mathbb{R}^2$. Let $f_\pm := \mathrm{d}(\mathbf{r}, F_\pm)$ denote the distances between $\mathbf{r}$ and the foci $F_\pm$, and let $\delta_\pm := \mathrm{d}(\mathbf{r}, D_\pm)$ denote the distances between $\mathbf{r}$ and the directrices $D_\pm$. Then, the moving point $\mathbf{r}$ describes

- an *ellipse* iff $f_+ + f_- =$ constant;
- an *hyperbola* iff $|f_+ - f_-| =$ constant;
- a *parabola* iff $f_+ = \delta_+$.

The constant above is the distance, along a generatrix of the cone, between the two circles $C \cap S_\pm$. Proofs rely on the elementary observation that all segments between a sphere and an external point, tangent to the sphere, have the same length (see the picture above in the case of an ellipse).



Third definition: eccentricity. The three conditions above may be merged into one single condition relating the distances between the moving point and one focus or one directrix, respectively. A moving point $\mathbf{r}$ in the plane describes a conic section if the ratio $e := f_+/\delta_+$ is constant, i.e.

$$f_+ = e\,\delta_+ \,. \tag{18.10}$$

[39] G. Dandelin, Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique, *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles* **2** (1822), 171-200.

The constant ratio e is called *eccentricity* of the conic section. One has an ellipse if $e < 1$, an hyperbola if $e > 1$, and a parabola if $e = 1$.

Polar equation. Consider the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$, with coordinates x-y. Modulo a translation, we may assume that one of the foci is at the origin, say $F_+ = (0, 0)$. Modulo a rotation, we may also assume that the directrix is a vertical line $D_+ = \{\, x = d\}$, for some $d = \mathrm{d}(F_+, D_+) > 0$. Then, if the moving point has polar representation $\mathbf{r} = re^{i\theta} = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, the defining equation (18.10) reads

$$r = e\,|r\cos(\theta) - d|\,.$$

Solving for r, we get

$$\boxed{r = \frac{ed}{e\cos(\theta) \pm 1}}$$

If $e \leq 1$, the only solution is the one with the + sign, and the curve is an ellipse ($e < 1$) or a parabola ($e = 1$). If $e > 1$, the curve is a hyperbola, with the two solutions corresponding to its two branches. It is this form of the conics which appears when solving Kepler's problem.

Cartesian equations. Good looking Cartesian equations are those which are symmetric w.r. to the origin, i.e. such that $\mathbf{r}$ and $-\mathbf{r}$ both belong to the curve. The canonical form of an ellipse or a hyperbola is then

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1\,.$$

The foci are $F_\pm = (\pm ae, 0)$, while the directrices are the vertical lines $D_\pm = \{\, x = \pm a/e\}$. If $e < 1$, hence the curve is an ellipse, we may write

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{18.11}$$

where $a > 0$ and $b = a\sqrt{1-e^2} \leq a$ are the semi-axis, and $F_\pm = (\pm c, 0)$, with $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, are the foci. The case $e = 0$, hence $a = b$ and $c = 0$, is a circle centered at the origin. If $e < 1$, hence the curve is a hyperbola, we may write

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{18.12}$$

with $a > 0$ and $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. The foci are $F_\pm = (\pm c, 0)$ with $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. The canonical form of a parabola, with focus at $F = (h, 0)$ and directrix $D = \{x = -d\}$ is

$$\boxed{y^2 = 4dx} \tag{18.13}$$

ex: Use the Dandelin spheres to prove that the tautological definition of the conic sections implies their focal properties.

ex: Check that the canonical Cartesian equations (18.11), (18.12) and (18.13) of the conic sections satisfy the focal properties as well as (18.10).

ex: Compute the area of the region bounded by the ellipse of (18.11).

27 abr 2021

Equações de segundo grau no plano e cónicas. Uma equação de segundo grau

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0\,, \tag{18.14}$$

no plano de coordenadas x e y, onde $a, b, \ldots, \gamma$ são coeficientes reais, define uma *cónica*. Uma mudança de coordenedas oportuna, de fato uma rotação e uma translação (logo uma isometria do plano), pode reduzir a equação (18.14) a uma "forma canónica".

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

a matriz simétrica que define a forma quadrática $\mathcal{Q}(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, a parte quadrática do polinómio (18.14). Pelo teorema espectral 17.3, esta pode ser diagonalizada por uma mudança ortogonal de coordenadas, que podemos assumir ser uma rotação (a menos de reordenar as coordenadas). Ou seja, existe um ângulo θ tal que nas variáveis x' e y', definidas por

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \qquad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

a equação (18.14) é transformada em

$$\lambda\,(x')^2 + \mu\,(y')^2 + \alpha' x' + \beta' y' + \gamma = 0\,, \tag{18.15}$$

onde λ e μ são os valores próprios de A, e $\alpha' = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$ e $\beta' = \beta\cos\theta - \alpha\sin\theta$. Observe que o produto dos valores próprios é igual a $\lambda\mu = ac - b^2 = \mathrm{Det}A$.

Se os dois valores próprios, λ e μ, são diferentes de zero, ou seja, se $\mathrm{Det}A \neq 0$, então é possível completar os quadrados, ou seja, fazer uma translação

$$x'' = x' + \xi \qquad y'' = y' + \eta\,,$$

com $\xi = \frac{\alpha'}{2\lambda}$ e $\eta = \frac{\beta'}{2\mu}$, e transformar finalmente a (18.15) em

$$\lambda\,(x'')^2 + \mu\,(y'')^2 = \delta\,,$$

onde $\delta = \frac{(\alpha')^2}{4\lambda} + \frac{(\beta')^2}{4\mu} - \gamma$. Esta é a equação de uma *elipse* se $\lambda\mu > 0$ e δ tem o sinal correto, de uma *hipérbole* se $\lambda\mu < 0$ e $\delta \neq 0$, ou de alguma cónica degenerada como um ponto (como $x^2 + y^2 = 0$), dua retas (como $x^2 - y^2 = 0$) ou o conjunto vazio (como $x^2 + y^2 = -1$).

Se um dos valores próprios é igual a zero, por exemplo $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$, então podemos completar um quadrado e fazer uma translação, até obter

$$\mu(y'')^2 = \alpha' x''\,.$$

Esta é a equação de uma *parábola*, ou de uma reta se também $\alpha'' = 0$.

Finalmente, se os dois valores próprios são nulos, ou seja, $\lambda = \mu = 0$, então temos apenas uma equação de grau um do género $\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' = 0$, ou seja, uma reta afim.

Se sabemos a priori que a cónica definida pela (18.14) não é degenerada, então o género é determinado pelo sinal do determinante $d := \mathrm{Det}A = ac - b^2 = \lambda\mu$ da matriz que define a forma quadrática: é uma elipse se $d > 0$, uma hipérbole se $d < 0$, e uma parábola se $d = 0$.

e.g. Colocamos o problema de identificar a cónica definida pela equação cartesiana

$$2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0\,.$$

A forma quadrática $2x^2 - 4xy - y^2$ é definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} U^\top\,,$$

com valores próprios 3 e -2, onde a matriz ortogonal diagonalizadora é

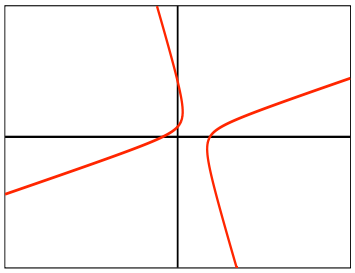
$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nas variáveis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^\top \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

a equação define a hipérbole

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{6} = 1$$



ex: Identifique e esboce as cónicas definidas pelas equações

$$x^2+xy+2x=0 \qquad 5x^2+5y^2-6xy-2=0 \qquad 2x^2+5y^2-4xy-1=0$$
$$5x^2+6xy+5y^2-10\sqrt{2}\,x-6\sqrt{2}\,y+2=0 \qquad x^2+y^2-2xy-3x-y-1=0$$
$$5x^2-4xy+2y^2-6=0 \qquad 2x^2-4xy-y^2-4x+10y-13=0$$
$$2x^2-6xy+2y^2-8x+12y-10=0 \qquad 2x^2+xy+2y^2-4=0$$

ex: [Ap69], *vol. 2*, **5.15.**

Quadrics. *Quadrics* are surfaces defined, in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$, by a degree 2 Cartesian equation like

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fxz+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

A similar procedure, diagonalization of the quadratic form $\mathcal{Q}(x,y,z)$ (the degree 2 part of the polynomial above) and then a translation (completing squares), shows that any non-degenerate quadric (not reduced to the empty set, a point, lines or planes, conics times lines, ...) is equivalent, modulo an isometry, to one of the following models:

an *ellipsoid*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

an *hyperbolic hyperboloid*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

and *elliptic hyperboloid*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

an *elliptic paraboloid*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0}$$

an *hyperbolic paraboloid*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0}$$

(above, of course, all the parameters a,b,c are positive numbers).

ex: You may play with surfer to visualize quadrics, or create new amazing surfaces.

Motion in a central force and Kepler problem. Consider the Newton equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{18.16}$$

describing the motion of a particle/planet of mass $m > 0$ in a central force field $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}$. Above, we use the traditional notation $r := \|\mathbf{r}\|$ for the length of the vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. If $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ denotes the velocity vector, then a computation shows that the angular momentum $\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ is a constant of the motion. If at some (initial) time the vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{v}$ are not parallel, then $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ and the motion occurs in the plane orthogonal to $\mathbf{L}$. We may therefore choose a reference Cartesian system $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ in which $\mathbf{L} = L\,\mathbf{k}$ for some $L > 0$, and write the position vector as $\mathbf{r}(t) = \rho\cos(\theta)\,\mathbf{i} + \rho\sin(\theta)\,\mathbf{j}$ for some time-dependent angle θ and lenght $\rho = \|\mathbf{r}\|$. In polar coordinates Newton equation (18.16) reeds

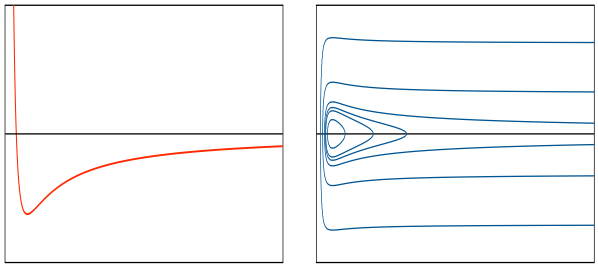
$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 &= F(\rho)/m \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= 0\,. \end{aligned} \tag{18.17}$$

The second equation (18.17) says that the "areal velocity" ("velocidade areal") $\ell := \rho^2\dot{\theta}$ is a constant of the motion, and this is *Kepler's second law* (which therefore holds for all central forces). We specialize now to Newton's gravitational force $F(\rho) = -\frac{GmM}{\rho^2}$, where M is the mass of the Sun and G is the gravitational constant. It may be observed that the first equation (18.17) then reads

$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial}{\partial\rho}V_\ell(\rho)\,,$$

where we defined the "effective potential energy" as

$$V_\ell(\rho) := \tfrac{1}{2}m\ell^2/\rho^2 - GmM/\rho\,.$$



Kepler's effective potential and some energy level sets.

The conserved energy is therefore

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \tfrac{1}{2}m\ell^2/\rho^2 - GmM/\rho\,.$$

Now we set $\rho = 1/x$ and look for a differential equation for x as a function of θ. Computation shows that $dx/d\theta = -\dot{\rho}/\ell$, and, using conservation of ℓ, that $d^2x/d\theta^2 = -\rho^2\ddot{\rho}/\ell^2$. There follows that the first Newton equation (18.17) reads

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{GM}{\ell^2}\,.$$

This is an harmonic oscillator with unit frequency forced by a constant force, and its general solution is

$$x(\theta) = \frac{GM}{\ell^2}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right)$$

for some constants e and θ_0. Back to the original radial variable we get the solution

$$\rho(\theta) = \frac{\ell^2/GM}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}\,,$$

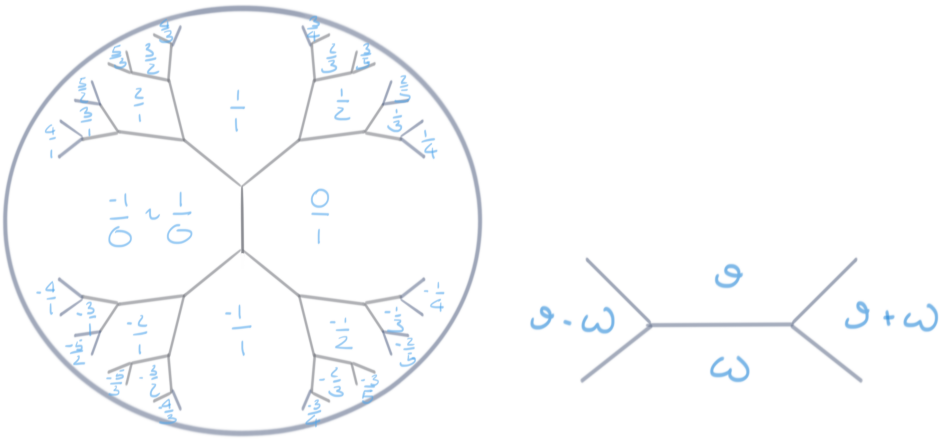
Hence, orbits are conic sections with eccentricity e and focus at the origin. We get an ellipse for $0 \leq e < 1$, corresponding to negative energy, hence to planets, and this is *Kepler's first law*. We get a parabola for $e = 1$, corresponding to zero energy, or an hyperbola for $e > 1$, corresponding to positive energy.

Hodograph, Hamilton's theorem and Feynman's lost lecture. Our "brute force" derivation of Kepler orbits may be substituted by more elegant and geometric considerations. You may want to take a look at the original papers by Hamilton [40], Milnor [41] and the famous lost lecture, now recovered!, of Feynman[42].

Integer binary quadratic forms: topograph and rivers. Since ancient times, mathematicians have been interested and fascinated by values of integer binary forms at integer points. This is the case of Pythagorean (integer) triples $x^2+y^2=z^2$, which were known to Babylonians, or integer solutions of (what Euler named) Pell equation $x^2-2y^2=1$, which Greeks used to find rational approximations of $\sqrt{2}$, and its generalisation $x^2-ny^2=z$, considered by Indian mathematicians. The modern theory of integer quadratic forms starts with Gauss' *Disquisitiones Arithmeticae* in 1801, and it is the origin of many fundamental concepts and ideas of modern algebra (rings, ideals, ...), due to Kummer, Kroenecker, Dedekind, Dirichlet, ... Here we sketch a modern and visual approach discovered recently by Conway[43].

Consider a binary quadratic form $\mathcal{Q}(x,y)=ax^2+hxy+by^2$ with integer coefficients $a,b,h\in\mathbb{Z}$. We are interested in its values when both x and y are integers, i.e. at integer lattice points $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$. From homogeneity, we know that $\mathcal{Q}(np,nq)=n^2\mathcal{Q}(p,q)$, hence it will be sufficient to compute the value only at *primitive* lattice points, those points (p,q) with relatively prime (integer) coordinates. Also, we may change sign to both p and q without altering the value of the quadratic form, thus, we may consider pairs $\pm(p,q)$, which we'd better write p/q and identify with points in the projective rational circle $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Such points may be arranged in a planar "map", called *topograph* by Conway, in regions separated by a 3-valent tree T (which has been rediscovered many times during history, and takes the name of Farey tree[44], or Serre tree[45]) which magically reflects the arithmetics which generate them: the Euclidean algorithm [HW59]. Conway made the fundamental observation that this arithmetic, in turns, will recursively generate all the primitive values of the quadratic form in a simple a "visual" way as a consequence of the parallelogram law.

The tree T is naturally embedded in the hyperbolic plane $\mathbb{H}$, for example, in the Poincaré unit disk model. A view of the global picture of primitive lattice points is shown in the picture, together with a portion of it



The rule which generates it, starting with the initial seed $\mathbf{e}_0=\pm(1,0)$ and $\mathbf{e}_1=\pm(0,1)$, is vector addition. Observe that vector addition $(p,q)+(r,s)$ corresponds, in the projective rational line, to computing the "mediant" $(p+r)/(q+s)$ of the fractions p/q and r/s. Regions $\mathbb{H}\backslash T$ correspond to reduced fractions $p/q\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})$. Geodesic rays in the tree have end-points which are naturally identified with points $\alpha\in\mathbb{P}(\mathbb{R})$, limit of the reduced fractions on both sides of the ray.

[40] W.R. Hamilton, The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction, *Proc. Roy. Irish Acad.* **3** (1846), 344-353.

[41] J. Milnor, On the geometry of the Kepler problem, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 353-365.

[42] D.L. Goodstein & J.R. Goodstein, *Feynman's Lost Lecture, the Motion of Planets Around the Sun*, Norton & Company, 1996.

[43] J.H. Conway, *The sensual (quadratic) form*, Carus Mathematical Monographs **26**, Mathematical Association of America, 1997.

[44] A. Hurwitz, Über die Reduktion der binären quadratischen Formen, *Math. Annalen* **45** (1894), 85-117.

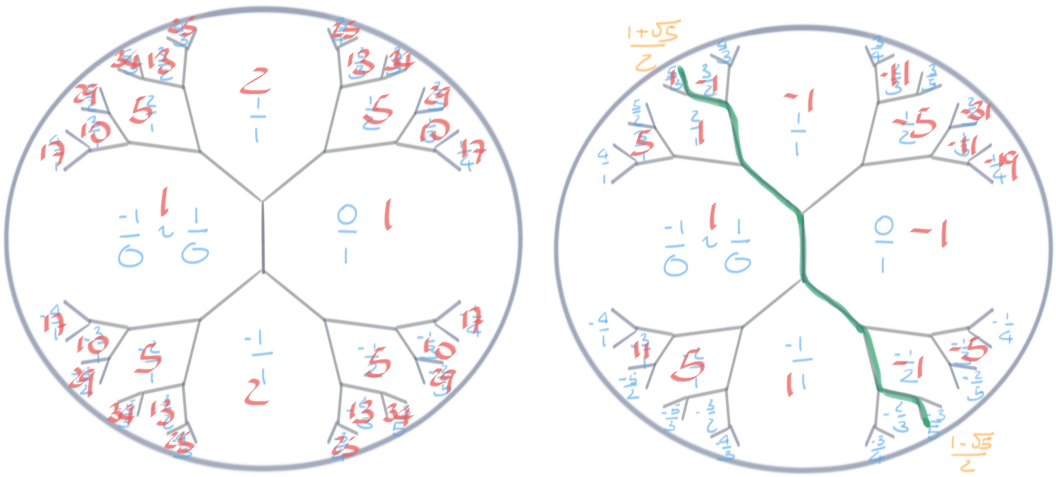
[45] J.-P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2, *Astérisque* **46** (1977).

The parallelogram law

$$\mathcal{Q}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) + \mathcal{Q}(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = 2\,(\mathcal{Q}(\mathbf{v}) + \mathcal{Q}(\mathbf{w}))$$

may be seen as an iterative formula prescribing the value of the quadratic form at $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ given its values at $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ and at $\mathbf{v}-\mathbf{w}$. The first three values, say at the primitive vectors $(0,1)$, $(1,0)$ and $(1,-1)$, are the parameters a, b and $a+b-h$ of the quadratic form.

For example, the values of the Pythagorean quadratic form $\mathcal{Q}(x,y) = x^2+y^2$, which is positive definite, are shown in the picture on the left. The positive and negative values of an indefinite quadratic form as $\mathcal{Q}(x,y) = x^2 - xy - y^2$, in the picture on the right, divide the map into two regions, bounded by a *river* ... Moreover, the values around the river may be shown to be bounded, and therefore recur (as in our case). The river has two endpoints which may be naturally identified with two points α and $\overline{\alpha}$ in $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, the roots of the quadratic equation $\mathcal{Q}(z,1) = 0$, ...



A nice account of all that, and much more, is in the book[46] that Hatcher is preparing.

[46] A. Hatcher, *Topology of Numbers* (https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/TN/TNpage.html)

19 Simetrias, grupos e grupos de matrizes

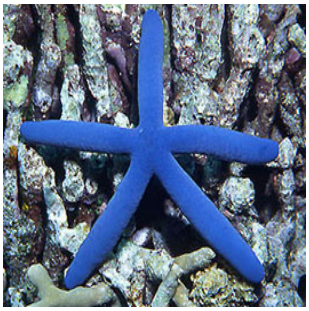
ref: [Ap69] *Vol 2*, **5.11**, **5.20**

4 mai 2021

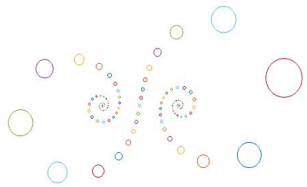
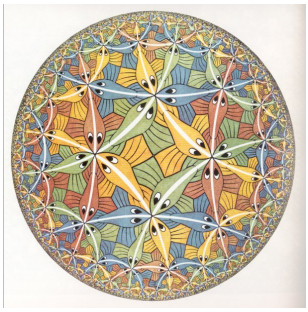
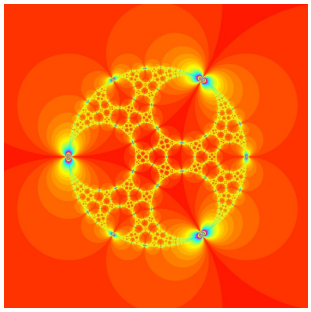
Simetrias e grupos de transformações. As "simetrias" são, grosso modo, movimentos do espaço ambiente (seja o que for) que deixam invariada uma figura ou um padrão no qual estamos interessados. A estrutura matemática que captura esta ideia é a noção de "grupo" , descoberta/inventada por Lagrange, Ruffini, Abel, Galois . . . no início do século XIX para compreender a fatorização dos polinómios, reconhecida por Liouville, Jordan, . . . e finalmente enraizada na geometria moderna graças às intuições de Klein, Hilbert, Poincaré, . . . [47]

A ideia básica e concreta de um grupo é simples. Uma família de "transformações", de algum espaço ou conjunto, que podem ser "compostas" (ou seja, podem agir uma após outra) para produzir mais transformações, e que podem ser "desfeitas". A transformação que desfaz uma transformação dada é chamada (transformação) "inversa". Em particular, uma transformação e a sua inversa podem ser compostas para formar a (transformação) "identidade", a transformação que não faz nada.

ex: Descreva as simetrias das seguintes figuras.



ex: Tente descrever as simetrias destas outras figuras (sem ficar triste se não conseguir!).

Simetrias em física. As simetrias também têm um papel fundamental na nossa descrição e compreensão da Natureza.

Na mecânica clássica, são responsáveis pelas leis de conservação, de acordo com o famoso teorema de Noether [48]. Por exemplo, a invariância da lagrangiana por tanslações do tempo implica a conservação da energia, a invariância por translações do espaço implica a conservação do momento linear, a invariância por rotações implica a conservação do momento angular, . . .

Grupos de isometrias do espaço euclidiano de dimensão 3 também descrevem as simetrias dos cristais (e são por isto chamados "grupos cristalográficos"), dos flocos de neve, ou de outras estruturas biológicas ou químicas.

Ainda mais fundamental é o papel das simetrias de "gauge" na teoria quântica de campos, desde a eletrodinâmica quântica às teorias não-abelianas de Yang e Mills. Por exemplo, no Modelo

[47] Marcus Du Sautoy, *Symmery: A Journey into the Patterns of Nature*, Harper, 2007.

[48] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse.* (1918), 235-257.

Padrão aparece o grupo $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$, os fatores sendo responsáveis pelas três interações fundamentais, forte, fraca e eletromagnética.

Grupos. Um *grupo* é um conjunto G munido de uma operação binária/lei de composição interna $G \times G \to G$, que associa a cada par ordenado $(a, b) \in G \times G$ um elemento $a \cdot b \in G$ (ou simplesmente ab), que verifica os seguintes axiomas:

G1 *(propriedade associativa)* $(ab)c = a(bc)$, para todos $a, b, c \in G$.

G2 *(existência do elemento neutro)* existe um elemento $e \in G$, chamado "elemento neutro", tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.

G3 *(existência do inverso)* para todo $g \in G$ existe um elemento $g^{-1} \in G$, chamato "inverso de g", tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Se a lei de composição satisfaz também o axioma

G4 *(comutatividade)* $ab = ba$, para todos $a, b \in G$,

então o grupo é dito *comutativo*, ou *abeliano* (em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel). Em um grupo abeliano costuma ser usada a notação "aditiva" $a + b$ para a composição de a e b, assim, $-g$ denota o inverso de g, e 0 denota o elemento neutro.

A propriedade associativa diz essencialmente que as parêntesis são desnecessárias. Assim que, por exemplo, o elemento $(a(bc))d$, obtido pela série de operações $c \mapsto bc \mapsto a(bc) \mapsto (a(bc))d$, pode ser simplesmente denotado por $abcd$.

Em um grupo (abeliano ou não), as equações (na incógnita x, dados $a, b \in G$)

$$ax = b \qquad \text{e} \qquad ya = b$$

admitem sempre soluções únicas, dadas por $x = a^{-1}b$ e $y = ba^{-1}$, respetivamente (que são iguais se o grupo é abeliano). Em particular, o elemento neutro é único, assim como o inverso de cada elemento.

Dado um elemento g de um grupo, é possível definir as suas potências g^n, com $n \in \mathbb{Z}$. basta definir $g^0 = e$ e $g^{n+1} := g \cdot g^n$ se $n \geq 0$, e as potências negativas por $g^{-n} := (g^{-1})^n$. É imediato verificar que vale a lei dos expoentes $g^n g^m = g^{n+m}$.

Na prática, os elementos de um grupo podem ser "parametrizados" por um conjunto de "parâmetros" $\alpha \in \mathcal{A}$, que podem ser números, ângulos, ..., assim que um grupo concreto aparece como um conjunto $G = \{\, g_\alpha \,;\, \alpha \in \mathcal{A}\}$, e regras para calcular os produtos $g_\alpha g_\beta = g_\gamma$.

Em particular, pode acontecer que um grupo seja *finito*, ou seja, formado por um número finito de elementos, $G = \{\, g_0 = e, g_1, \ldots, g_{n-1}\}$. Neste caso, o número $|G| := n$ dos seus elementos é chamado *ordem* do grupo (finito) G. A lei de composição de um grupo finito pode ser apresentada na forma de uma "tabuada de multiplicar", uma matriz quadrada $n \times n$ onde no elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna aparece o produto $g_i g_j$.

e.g. Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, munidos da lei "adição" $a, b \mapsto a + b$, são grupos abelianos.

e.g. Todo espaço vetorial $\mathbf{V}$ é um grupo abeliano, se munido da lei "adição" $\mathbf{v}, \mathbf{w} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

e.g. Os conjuntos $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C}\backslash\{0\}$, munidos da lei "multiplicação" $a, b \mapsto a \cdot b$, são grupos abelianos.

ex: Determine a tabuada de multiplicar do mais simples dos grupos não triviais, um grupo $G = \{e, g\}$ formado por apenas dois elementos, a identidade e e um outro elemento $g \neq e$.

ex: Mostre que na tabuada de multiplicar de um grupo finito cada coluna ou cada linha contém cada elemento do grupo exatamente uma vez.

e.g. As rotações do plano $\mathbb{R}^2$ formam um grupo comutativo. De fato, a composição de duas rotações anti-horárias R_θ e R_ϕ é uma rotação $R_\theta\, R_\phi = R_{\theta+\phi}$.

ex: As rotações do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ também formam um grupo. Mostre com um exemplo, abstrato ou físico, que o grupo das rotações em dimensão 3 não é comutativo.

Permutações. Seja X um conjunto não vazio. As *permutações* de X são as transformações invertíveis $f : X \to X$. O conjunto $\mathrm{Per}(X)$ das permutações, munido da lei de composição $fg := f \circ g$, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, é um grupo (a associatividade do produto num grupo é a propriedade natural da composição entre transformações). A identidade de $\mathrm{Per}(X)$ é a transformação identidade, definida por $e(x) = x$ para todo o $x \in X$. O elemento inverso de f é a transformação inversa $f^{-1} : X \to X$, tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Grupo simétrico. Por exemplo, se $X_n \approx \{1, 2, \ldots, n\}$ é um conjunto finito formado por n elementos, então $S_n := \mathrm{Per}(X_n)$ é um grupo finito chamado *grupo simétrico*. É claro que o grupo. simétrico S_n é formado por $n! = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$ elementos (n possibilidades para escolher a imagem de 1, $n-1$ possibilidades para escolher a imagem de 2, ...).

ex: Calcule a tabuada de multiplicar dos grupos simétricos S_2 e S_3.

ex: Verifique que o grupo S_3 não é comutativo. Deduza que o mesmo acontece com S_n se $n \geq 3$.

Grupo diedral. O grupo das simetrias de um polígono regular de $n \geq 3$ lados é chamado *grupo diedral* (em inglês, *dihedral*), e denotado por D_n. Contém as n rotações de ângulos $2\pi k/n$, com $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (ou seja, a rotação r de um ângulo $2\pi/n$ e as suas potências $r^2, r^3, \ldots, r^n = e$), e n reflexões nos eixos de simetria do polígono (as n medianas, quando n é ímpar, ou as $n/2$ diagonais e as $n/2$ retas que unem os pontos médios dos lados opostos, quando n é par). Consequentemente, D_n é um grupo finito de ordem $2n$.

A composição de duas reflexões é uma rotação, possivelmente trivial (pois as reflexões são "involuções"). Se g é uma reflexão de D_n, e r é a rotação de um ângulo $2\pi/n$, então as outras reflexões são obtidas como proddutos gr^k ou $r^k g$.

ex: Descreva explicitamente os grupos diedrais D_3 e D_4, as simetrias de um triângulo equilátero e de um quadrado.

ex: Verifique que os grupos diedrais não são comutativos.

Grupo afim. Translações $z \mapsto z+a$ e homotetias $z \mapsto \lambda z$ geram o *grupo afim* do plano complexo, o grupo $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ das transformações

$$z \mapsto g_{\lambda,a}(z) := \lambda z + a\,,$$

com $a \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

ex: Calcule o inverso de $g_{\lambda,a}$, e a composição $g_{\lambda,a}\, g_{\mu,b}$.

ex: Verifique que o grupo afim não é comutativo.

Grupo linear geral. O grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ dos *automorfismos* do espaço linear complexo $\mathbb{C}^n$ é o conjunto das aplicações lineares invertíveis $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, munido da lei de composição $L, M \mapsto L \circ M$. O elemento neutro é a aplicação identidade. Da mesma forma, é definido o grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ dos automorfismos do espaço linear real $\mathbb{R}^n$.

Fixada uma base de $\mathbb{C}^n$ (por exemplo, a base canónica), uma transformação linear invertível é definida por $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$, onde A é uma matriz complexa $n \times n$ invertível e $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ é um vetor coluna. A composição das transformações $\mathbf{z} \mapsto B\mathbf{z}$ e depois $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$ é a transformação $\mathbf{z} \mapsto AB\mathbf{z}$, e corresponde portanto ao produto "linhas por colunas" entre as matrizes A e B. O grupo

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ pode portanto ser identificado (tecnicamente é "isomorfo", no sentido explicado a seguir) ao conjunto $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ das matrizes $n \times n$ invertíveis A, munido do produto "linhas por colunas"

$$A, B \mapsto AB\,,$$

chamado *grupo linear geral complexo* em dimensão n. A condição que decide se uma matriz quadrada A é invertível é $\mathrm{Det}A \neq 0$, portanto

$$\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\ (\mathbb{C})\ \text{ t.q. }\ \mathrm{Det}A \neq 0\}\,.$$

Todo grupo formado por matrizes $n \times n$ é um "subgrupo" de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, no sentido, também explicado a seguir, que é um subconjunto que é ele próprio um grupo. Um exemplo é o *grupo linear geral real*

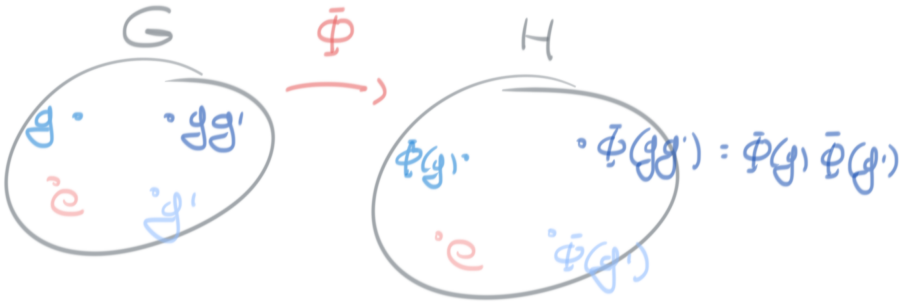
$$\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\ (\mathbb{R})\ \text{ t.q. }\ \mathrm{Det}A \neq 0\}\,.$$

das matrizes invertíveis reais $n \times n$.

Homomorfismos e isomorfismos. Um *homomorfismo* do grupo G no grupo H é uma transformação $\Phi : G \to H$ que "envia produtos em produtos", ou seja, tal que

$$\Phi(g)\,\Phi(g') = \Phi(gg')$$

para todos os $g, g' \in G$. É evidente que a imagem da identidade é a identidade, ou seja, $\Phi(e) = e$. Um homomorfismo invertível é chamado *isomorfismo*. A existência de um isomorfismo entre dois grupos, G e H, é uma relação de equivalência, denotada por $G \approx H$. Grupos isomorfos são indistinguíveis do ponto de vista da estrutura de grupo.



e.g. A função exponencial $x \mapsto e^x$ define um isomorfismo $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times_+$ entre o grupo aditivo $\mathbb{R}$ e o grupo multiplicativo $\mathbb{R}^\times_+$ dos reais positivos, e um homomorfismo $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ do grupo aditivo $\mathbb{C}$ no grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$.

Endomorfismos e automorfismos. Um homomorfismo de um grupo G no próprio grupo G é chamado *endomorfismo*. Um endomorfismo invertível é chamado *automorfismo*. É claro que a composição de dois automorfismos é também um automorfismo, assim que o conjunto $\mathrm{Aut}(G)$ dos automorfismos de um grupo G, munido da lei "composição", forma um grupo, chamado *grupo dos automorfismos* de G.

Um elemento a de um grupo G define dois automorfismos $L_a : G \to G$ e $R_a : G \to G$ (multiplicação à esquerda e à direita), definidos por

$$L_a(g) := ag \qquad \text{e} \qquad R_a(g) = ga\,,$$

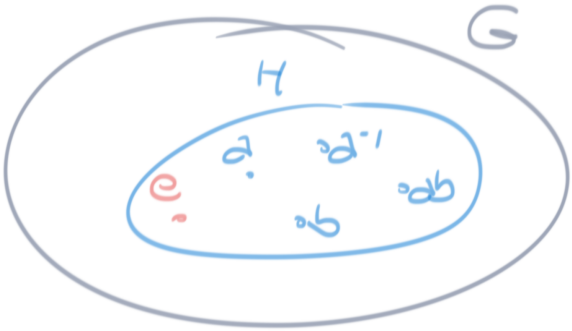
respetivamente. As multiplicações L_a e R_b comutam. Dado um elemento $a \in G$, a composição $\Psi_a := L_a R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} L_a$, que envia

$$g \mapsto aga^{-1}$$

é um automorfismo, chamado *conjugação* (observe que é a mesma fórmula que define matrizes semelhantes, ou seja, a mudança de coordenadas para uma matriz que representa um operador linear!).

ex: Verifique que um endomorfismo $\Psi : G \to G$ é um automorfismo sse $\Psi^{-1}(\{e\}) = \{e\}$, ou também sse $\Psi(G) = G$.

Subgrupos e quocientes. Um *subgrupo* do grupo G é um subconjunto $H \subset G$ que forma um grupo com respeito à lei de composição de G. Para que o subconjunto H seja um subgrupo é suficiente que $ab \in H$ e $a^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$.



Subgrupos triviais são o próprio G e o subgrupo minimal $\{e\}$.

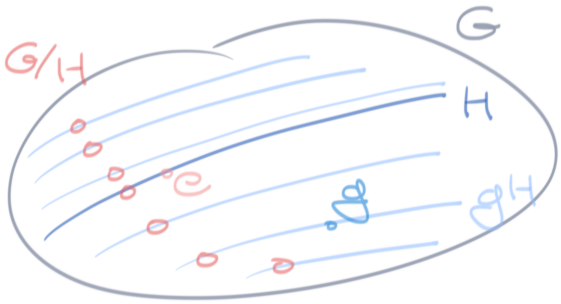
Todo $g \in G$ gera um subgrupo, o *grupo cíclico* $\langle g \rangle$ formado pelas suas potências g^n, com $n \in \mathbb{Z}$. Se finito, a ordem de $\langle g \rangle$ é também chamada *ordem* do elemento g.

O *núcleo* de um homomorfismo $\Phi : G \to H$ é $\ker \Phi := \Phi^{-1}\{e\}$, o conjunto dos $g \in G$ tais que $\Psi(g)$ é a identidade em H. É imediato verificar que o núcleo de Φ é um subgrupo de G.

Seja $H \subset G$ um subgrupo do grupo G. A *classe lateral à esquerda* (em inglês, *left coset*) de um elemento $g \in G$ é o subconjunto

$$gH := \{gh\,, \text{ com } h \in H\}$$

(num grupo aditivo, é mais natural usar a notação $g + H$). É imediato verificar que o grupo G é uma reunião disjunta de classes de equivalência (ou seja, pertencer a mesma classe é uma relação de equivalência). É então possível definir o *espaço quociente* G/H, cujos elementos são as classes de equivalência esquerdas (ou, de forma equivalente, um "representante" g para cada classe de equivalência gH).



Em geral, o espaço quociente não tem uma estrutura natural de grupo. Isto acontece quando H é um subgrupo *normal*, ou seja, quando $gH = Hg$ para todo $g \in G$. Neste caso, é possível definir um produto

$$(aH) \cdot (bH) := (ab)H$$

em G/H (que não depende dos representantes escolhidos a e b), e verificar que este produto faz de G/H um grupo, chamado *grupo quociente*. É claro que todo subgrupo de um grupo abeliano é normal.

De forma análoga é possível definir classes laterais à direita Hg, e portanto espaços ou grupos quociente $H\backslash G$.

O *centro* do grupo G é o conjunto $Z(G)$ dos elementos $h \in G$ que comutam, ou seja, satizfazem $gh = hg$, com todos os elementos $g \in G$. É imediato verificar que $Z(G)$ é um subgrupo normal de G. É claro também que um grupo é abeliano sse é igual ao próprio centro.

ex: Mostre que o subconjunto $H \subset G$ é um subgrupo de G se $ab^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$.

ex: Seja H um subgrupo de G. Verifique que se $g' \in gH$, então também $g \in g'H$, e portanto $g'H = gH$.

ex: Considere o grupo aditivo dos números inteiros $\mathbb{Z}$. O subconjunto $2\mathbb{Z}$ dos números pares é um subgrupo? E o subconjunto $2\mathbb{Z} + 1$ dos números ímpares?

ex: Seja G um grupo, $a \in G$, e L_a o automorfismo $g \mapsto ag$. Sendo L_a uma permutação de G, todo grupo G pode ser considerado um subgrupo de um grupo de permutações, por exemplo de $\mathrm{Per}(G)$. Em particular, se G é um grupo finito composto de $|G| = n$ elementos, então $a \mapsto L_a$ define um homomorfismo injetivo de G no grupo simétrico $S_n \approx \mathrm{Per}(G)$ (*teorema de Cayley-Jordan*).

ex: Seja H um subgrupo finito do grupo G. Mostre que cada classe gH de G/H contém exatamente $|H|$ elementos (ou seja, existe uma bijeção de H sobre cada classe gH). Deduza que se G é também finito, então $|H|$ divide $|G|$ (*teorema de Lagrange*). A cardinalidade de G/H, ou seja, o número de classes diferentes gH em G, é chamada *índice* de H em G, e denotada por $[G : H]$. O teorema de Lagrange assume então a forma "tautológica"

$$|G| = [G : H] \cdot |H| \,.$$

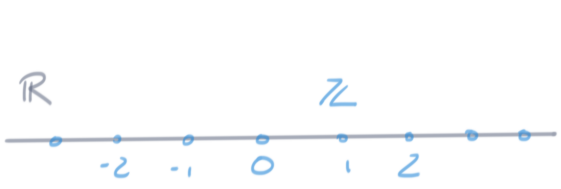
Se H é um subgrupo normal do grupo finito G, então $[G : H] = |G/H|$.

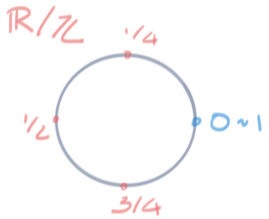
ex: Mostre que um subgrupo $H \subset G$ é normal sse $h \in H$ implica $ghg^{-1} \in H$ para todo $g \in G$

ex: Mostre que $\mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Det} A > 0\}$ é um subgrupo de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

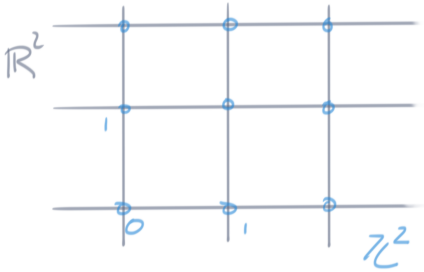
Toros. $\mathbb{Z}$ é um subgrupo do grupo aditivo abeliano $\mathbb{R}$. Em geral, $\mathbb{Z}^n$ é um subgrupo do grupo aditivo abeliano $\mathbb{R}^n$, formado pelos vetores de coordenadas inteiras. O quociente $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é chamado *toro* de dimensão n, e é um grupo abeliano. Cada ponto do toro, ou seja, cada classe $x + \mathbb{Z}^n$, admite um (único) representante x no "domínio fundamental" $[0, 1)^n$.

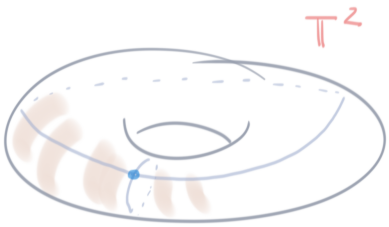
Por exemplo, o toro $\mathbb{T}^1$ é obtido do segmento $[0, 1]$ ao identificar os pontos 0 e 1, ou seja, é uma circunferência.





O toro $\mathbb{T}^2$ é obtido do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ ao identificar os lados opostos da forma natural. É portanto a superfície de um "doughnut".





Circunferência. A circunferência unitária $\mathbf{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$ é um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. A aplicação "exponencial" $\exp : x \mapsto e^{2\pi i x}$ é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ sobre o grupo $\mathbf{S}$. O núcleo é o subgrupo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx \mathbf{S}$.

Aritmética modular. Seja $n \in \mathbb{N}$. Os múltiplos inteiros de n formam um subgrupo $n\mathbb{Z}$ do grupo aditivo $\mathbb{Z}$, e o quociente $Z_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um grupo finito de ordem n. Os elementos são as classes $[k] = k + n\mathbb{Z}$ com $k = 0, 1, \ldots, n-1$, e o elemento neutro é a classe $[0]$. A lei "adição" é $(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z}$.

Esta é, por exemplo, a aritmétrica que utilizam os relógios, que medem o tempo módulo 12 horas.

Raízes da unidade. Seja $G_n := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z^n = 1\} \subset \mathbf{S} \subset \mathbb{C}^\times$ o grupo multiplicativo das raízes n-ésimas da unidade. A aplicação "exponencial" $\exp : k + n\mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i k/n}$ realiza um isomorfismo $Z_n \approx G_n$.

ex: Mostre que um grupo cíclico de ordem n, ou seja, um grupo do género $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ com $g^{n-1} = g^{-1}$, é isomorfo a Z_n.

ex: A multiplicação em $\mathbb{Z}$ também passa ao quociente, e portanto define uma lei de composição interna em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Se p úm número primo, então o conjunto $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ dos elementos não nulos (i.e. diferentes da classe $0 + p\mathbb{Z}$) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é um grupo abeliano multiplicativo se munido da lei "multiplicação" $(a + p\mathbb{Z}) \cdot (b + p\mathbb{Z}) = (a \cdot b) + p\mathbb{Z}$.

ex: Mostre que, se $n \geq 3$, o grupo cíclico Z_n é um subgrupo do grupo diedral (gerado pela rotação de um ângulo $2\pi/n$), que é um subgrupo do grupo simétrico, ou seja,

$$Z_n \subset D_n \subset S_n \,.$$

Produtos. Dados dois grupos, H_1 e H_2, é possível construir um *grupo produto* $G = H_1 \times H_2$ considerando pares ordenados (h_1, h_2), com $h_1 \in H_2$ e $h_2 \in H_2$, e definendo o produto da maneira natural

$$(h_1, h_2) \cdot (h_1', h_2') := (h_1 h_1', h_2 h_2')$$

A identidade é o produto das identidades. $H_1' = H_1 \times \{e\}$ e $H_2' = \{e\} \times H_2$ são subgrupos normais isomorfos a H_1 e H_2, respetivamente, e é claro que os grupos quocientes são $G/H_1' \approx H_2$ e $G/H_2' \approx H_1$.

Iterando esta a construção, é possível definir produtos finitos $\prod_{k=1}^n G_k$ de grupos.

ex: Mostre que o produto $Z_2 \times Z_3$ é isomorfo a Z_6.

Grupo linear especial. O determinante de uma matriz quadrada, a aplicação $A \mapsto \mathrm{Det}A$, é um homomorfismo

$$\mathrm{Det} : \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$$

do grupo linear geral complexo sobre o grupo multiplicativo dos números complexos diferentes de zero (pois o determinante de um produto é igual ao produto dos determinantes). O seu núcleo, o conjunto

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathbf{GL}\ (n, \mathbb{C})\ \text{ t.q. } \mathrm{Det}A = 1\}$$

das matrizes com determinante igual a um, é portanto um subgrupo do grupo linear, chamado *grupo linear especial*.

Da mesma forma, o grupo *linear especial real*

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}\ (n, \mathbb{R})\ \text{ t.q. } \mathrm{Det}A = 1\}$$

é o subgrupo do grupo linear real formado pelas matrizes com $\mathrm{Det}A = 1$. O determinante de uma matriz quadrada real A é igual ao quociente

$$\mathrm{Det}A = \pm \frac{\mathrm{Vol}(A(\square))}{\mathrm{Vol}(\square)}$$

entre o volumes do hipercubo $\square := [0,1]^n$ e o volume da sua imagem $A(\square)$ pela transformação linear definida por A, com sinal positivo ou negativo dependendo se A preserva ou inverte a orientação. Consequentemente, $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ representa o grupo dos automorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preservam o volume e também a orientação.

Isometrias. Um *espaço métrico* (X,d) é um conjunto não vazio X munido de uma *métrica*, ou seja, uma função "distância" $\mathrm{d} : X \times X \to [0,\infty)$ que satisfaz os axiomas:

M1 *(simetria)* $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$;

M2 *(positividade)* $\mathrm{d}(x,x) = 0$, e $\mathrm{d}(x,y) > 0$ se $x \neq y$;

M3 *(desigualdade do triângulo)* $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$.

Exemplos são os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, munidos da distância definida pela norma euclidiana, $\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, e os seus subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

Uma permutação $f : X \to X$ do espaço mérico (X,d) é dita *isometria* se preserva as distâncias, ou seja, se

$$\mathrm{d}(f(x), f(y)) = \mathrm{d}(x,y)$$

para todos os $x, y \in X$. É imediato verificar que a identidade é uma isometria, a inversa de uma isometria é uma isometria, e a composição de duas isometrias é ainda uma isometria. Consequentemente, o espaço $\mathrm{Isom}(X)$ das isometrias de (X,d) é um subgrupo do grupo $\mathrm{Per}(X)$ das permutações de X.

Translações. O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) é um grupo abeliano relativamente à operação "soma", $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. O elemento neutro é a origem $\mathbf{0}$. Os seus elementos podem ser pensados como "translações" do próprio espaço $\mathbb{R}^n$. De fato, cada vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ define uma transformação invertível $T_\mathbf{a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$T_\mathbf{a}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a}\,,$$

com inversa $(T_\mathbf{a})^{-1} = T_{-\mathbf{a}}$. A composição é $T_\mathbf{a} \circ T_\mathbf{b} = T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$. O elemento neutro $\mathbf{0}$ define a translação trivial $\mathbf{x} \mapsto T_\mathbf{0}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. O grupo $\mathbf{T}(n)$ das translações de $\mathbb{R}^n$ representa as mudanças da origem do referencial. Se $\mathbb{R}^n$ é munido da distância euclidiana $\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, então o grupo das translações é um subgrupo do grupo das isometrias de $\mathbb{R}^n$.

Grupo ortogonal e rotações. O *grupo das isometrias lineares* do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o subgrupo dos automorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preservam o produto escalar canónico. Fixada a base canónica (ou outra base ortonormada), a transformação linear $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna e $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, é uma isometria sse $A^\top A = AA^\top = I$ (ou seja, se A é invertível e a sua inversa é $A^{-1} = A^\top$). Portanto, o grupo das isometrias lineares de $\mathbb{R}^n$ é isomorfo ao *grupo ortogonal*

$$\mathbf{O}(n) := \{A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \text{ t.q. } A^\top A = AA^\top = I\}\,.$$

O *grupo especial ortogonal* é o subgrupo $\mathbf{SO}(n)$ formado pelas matrizes ortogonais com $\mathrm{Det}A = 1$. É chamado grupo das *rotações*, ou grupo das isometrias lineares "diretas" de $\mathbb{R}^n$ (ou seja, isometrias lineares que preservam a orientação).

ex: Mostre que o determinante de uma matriz $A \in \mathbf{O}(n)$ é $\mathrm{Det}A = \pm 1$.

ex: Mostre que uma matriz $A \in \mathbf{SO}(2)$ é

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

com $\theta \in \mathbb{R}$ (definido a menos de múltiplos inteiros de 2π), e portanto define uma rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

ex: Se $B \in \mathbf{O}(2)$ tem determinante $\mathrm{Det}B = -1$, então $A = BJ \in \mathbf{SO}(2)$ se $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Deduza que existe um ângulo θ (definido a menos de múltiplos inteiros de 2π) tal que

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

ex: Diga se as seguintes matrizes são ortogonais.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: O conjunto das matrizes $A \in \mathbf{O}(n)$ com $\mathrm{Det}A = -1$ é um subgrupo de $\mathbf{O}(n)$?

Isometrias euclidianas. O grupo das isometrias do espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$ é também chamado $\mathbf{E}(n) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Toda a isometria do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é do género

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbf{O}(n)$, ou seja, é a composição de uma "isometria linear" (uma isometria que preserva a origem) e uma translação.

É claro que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria e se $f(\mathbf{0}) = \mathbf{a}$, então a transformação $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}$ é também uma isometria e fixa a origem, i.e. $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. A afirmação acima é portanto consequência do seguinte

Teorema 19.1. *Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação que preserva as distâncias euclidianas entre os pontos de $\mathbb{R}^n$ e que envia a origem na origem, i.e. $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Então g é uma transformação linear que preserva os produtos escalares, logo definida por $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ com $A \in \mathbf{O}(n)$.*

Demonstração. Se g preserva as distâncias e fixa a origem, então também preserva as distâncias da origem, ou seja, as normas (pois $\|g(\mathbf{x})\|^2 = \mathrm{d}(g(\mathbf{x}), \mathbf{0}) = \mathrm{d}(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{0})) = \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\|$). Pelas identidades de polarização (12.2), g também preserva os produtos escalares, ou seja, $\langle g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.

Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada, por exemplo a base canónica. Então também os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, definidos por $\mathbf{f}_k = g(\mathbf{e}_k)$, formam uma base ortonormada, pois g preserva os produtos escalares. Se $\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$ é um vetor arbitrário, com coordenadas $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x}\rangle$ na base ortonormada $\mathbf{e}_k$, então a sua imagem é

$$g(\mathbf{x}) = \sum_k \langle \mathbf{f}_k, g(\mathbf{x})\rangle\, \mathbf{f}_k = \sum_k \langle g(\mathbf{e}_k), g(\mathbf{x})\rangle\, \mathbf{f}_k = \sum_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x}\rangle\, \mathbf{f}_k = \sum_k x_k \mathbf{f}_k$$

também porque g preserva os produtos escalares. É claro que esta fórmula implica que g é linear. Mas uma isometria linear é definida, num referencial ortonormado, por uma matriz ortogonal (a matriz que envia os $\mathbf{e}_k$'s, pensados como vetores coluna, nos $A\mathbf{e}_k = \mathbf{f}_k$'s). □

Uma isometria $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ é chamada *direta* se preserva a orientação, i.e. se $\mathrm{Det}A = 1$ e portanto A é uma rotação. Observem que translações e isometrias lineares não comutam. Em geral, a composição de $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ e depois $\mathbf{y} \mapsto B\mathbf{y} + \mathbf{b}$, com $A, B \in \mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, é

$$\mathbf{x} \mapsto BA\mathbf{x} + (B\mathbf{a} + \mathbf{b})\,.$$

ex: Verifique que o grupo $\mathbf{T}(n)$ das translações $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, e que o quociente $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)/\mathbf{T}(n)$ é isomorfo ao grupo $\mathbf{O}(n)$.

Rotações do espaço de dimensão 3. O grupo das isometrias lineares do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ (o espaço onde acontece a física newtoniana) é o grupo dos operadores ortogonais, representados numa base ortonormada por matrizes do grupo ortogonal $\mathbf{O}(3)$.

Uma matriz ortogonal A, pensada como matriz complexa, é unitária. Consequentemente, os seus valores próprios (em quanto matriz complexa!) satisfazem $|\lambda| = 1$, ou seja, estão na circunferência unitária do plano complexo. O polinómio caraterístico de A é um polinómio de grau 3 com coeficientes reais. Portanto, pelo menos uma das raízes é real, por exemplo $\lambda = \pm 1$ (os únicos pontos reais da circunferência unitária), e as outras duas raízes são complexas conjugadas, por exemplo $\lambda_\pm = e^{\pm i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Então $\mathrm{Det}A = \lambda\,\lambda_+\lambda_- = \lambda$.

Se $\lambda = \mathrm{Det}A = -1$, então $\mathrm{Det}(-A) = 1$, e portanto $-A \in \mathbf{SO}(3)$, ou seja, A é a composição $A = JR$ de uma rotação $R \in \mathbf{SO}(3)$ e a inversão $J := -I \in \mathbf{O}(3)$. Em particular, o grupo $\mathbf{O}(3)$ é a reunião disjunta do subgrupo $\mathbf{SO}(3)$ e da classe $-\mathbf{SO}(3) := J \cdot \mathbf{SO}(3)$ (que não é um subgrupo). Em quanto grupo, o grupo ortogonal $\mathbf{O}(3)$ é isomorfo ao produto $\mathbf{SO}(3) \times C_2$ do grupo das rotações vezes o grupo cíclico $C_2 = \{\ \pm I\}$. É suficiente portanto compreender as rotações.

Seja $R \in \mathbf{SO}(3)$. Se $\mathbf{n}$ é um vetor próprio unitário de R associado ao valor próprio $\lambda = 1$, então o complemento ortogonal $\mathbf{n}^\perp \approx \mathbb{R}^2$ é um subespaço invariante para R, e a restrição $R|_{\mathbf{n}^\perp}$ é também uma rotação, representada por uma matriz de $\mathbf{SO}(2)$. Portanto, em um referencial ortonormado $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ tal que $\mathbf{k}' = \mathbf{n}$, a rotação R é representada pela matriz

$$R_{\theta\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Se o ângulo θ não é um múltiplo inteiro de π, então a reta $\mathbf{n}\mathbb{R}$ é o único espaço próprio de R, e é chamada "eixo de rotação". Finalmente, R é da forma

$$O^\top R_{\theta\mathbf{k}} O$$

com $O \in \mathbf{SO}(3)$. A mudança de coordenadas ortogonal O que envia $\mathbf{n}$ no eixo $\mathbf{k}'$ é determinada por dois ângulos, por exemplo a longitude $\varphi \in [0, 2\pi]$ e a latidude $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ de $\mathbf{n}$ (que é um ponto da esfera unitária $\mathbf{S}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|\mathbf{v}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$). Isto significa que as matrizes do grupo $\mathbf{SO}(3)$ podem ser parametrizadas por 3 ângulos.

Ângulos de Euler. Uma parametrização conveniente do grupo da rotações, usada para tratar problemas de física e engenharia como o corpo rígido, usa um sistema de ângulos chamados "ângulos de Euler".

Uma rotação $R \in \mathbf{SO}(3)$ envia o referencial canónico $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, que define as coordenadas cartesianas x, y, z, num outro referencial ortonormado $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$, que define coordenadas cartesianas X, Y, Z. Se $\mathbf{k}' \neq \pm\mathbf{k}$ (i.e. se R não é uma rotação em torno do eixo dos z), então a interseção entre os planos x-y e X-Y determina uma reta, chamada "linha dos nós". Nesta reta, é possível individuar um vetor unitário $\mathbf{n}$ de maneira tal que uma rotação anti-horária de um ângulo $0 \leq \alpha < 2\pi$ em torno de $\mathbf{k}$, definida pela matriz

$$R_{\alpha\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

envia $\mathbf{i}$ em $\mathbf{n}$. Existe então um ângulo $0 \leq \beta \leq \pi$ tal que uma sucessiva rotação em torno de $\mathbf{n}$ (que agora é o eixo $\mathbf{i}$), definida pela matriz

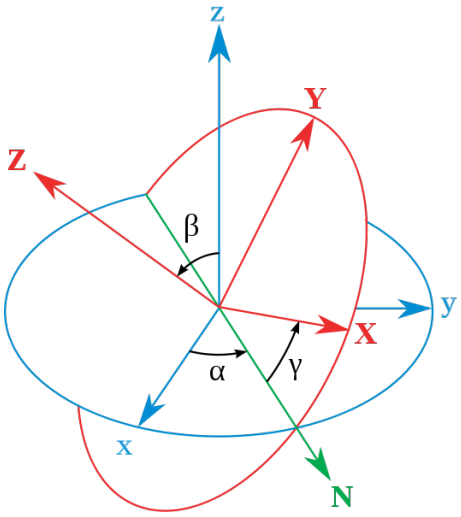
$$R_{\beta\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

envia $\mathbf{k}$ em $\mathbf{k}'$. Finalmente, existe um ângulo $0 \leq \gamma < 2\pi$ tal que uma sucessiva rotação em torno de $\mathbf{k}'$ (que agora é o eixo $\mathbf{k}$), definida pela matriz

$$R_{\gamma\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

envia $\mathbf{n}$ em $\mathbf{i}'$. Assim, a rotação genérica é uma composição de três rotações

$$R = R_{\gamma\mathbf{k}}\ R_{\beta\mathbf{i}}\, R_{\alpha\mathbf{k}}\,.$$



Ângulos de Euler (from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eulerangles.svg).
(Lionel Brits / CC BY https://creativecommons.org/licenses/by/3.0)

ex: Diga se as seguintes matrizes são ortogonais e se representam rotações.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Calcule explicitamente o produto $R_{\gamma\mathbf{k}}R_{\beta\mathbf{i}}R_{\alpha\mathbf{k}}$.

Grupo de Galilei. A equação de Newton $\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = 0$ de uma partícula livre não relativística de massa m em um referencial inercial é invariante para o grupo das isometrias euclidianas $\mathbf{E}(3)$, gerado pelas translações $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}+\mathbf{q}$, com $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, e pelas isometrias lineares $\mathbf{r} \mapsto O\mathbf{r}$, com $O \in \mathbf{O}(3)$. Também é invariante, de acordo com o princípio de inércia de Galileo, se passamos de um referencial inercial a outro em movimento retilíneo uniforme relativamente ao primeiro, ou seja, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{V}t$, onde $\mathbf{V}$ é uma velocidade constante. É subentendido que o tempo t não muda, sendo absoluto na física não relativística. Estas simetrias do espaço-tempo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, de coordenadas $(\mathbf{r}, t)$, formam o *grupo de Galilei*.

Grupo unitário. O *grupo dos automorfismos unitários* do espaço hermítico $\mathbb{C}^n$ é o subgrupo dos automorfismos que preservam o produto hermítico. A transformação $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$, onde $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ é um vetor coluna e $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, é unitária sse $A^*A = AA^* = I$. O grupo dos automorfismo unitários de $\mathbb{C}^n$ é portanto isomorfo ao *grupo unitário*

$$\mathbf{U}(n) := \{A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ \text{ t.q. } \ A^*A = I\}\,.$$

O determinante de uma matriz unitária satisfaz $|\mathrm{Det}A| = 1$. O *grupo especial unitário* é o subgrupo $\mathbf{SU}(n)$ formado pelas matrizes unitárias com determinante $\mathrm{Det}A = 1$.

e.g. O grupo $\mathbf{U}(1)$ é o grupo multiplicativo dos números complexos $z = x + iy$ de módulo $|z| = 1$, ou seja, a circunferência unitária $\mathbf{S} \subset \mathbb{C}$. Todo número complexo de módulo um pode ser representado por $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. É imediato verificar que a correspondência

$$e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo $\mathbf{U}(1) \approx \mathbf{SO}(2)$.

e.g. As matrizes de $\mathbf{U}(2)$ são normais, logo diagonalizáveis sobre os complexos, e têm valores próprios unitários. Em particular, uma matriz $A \in \mathbf{SU}(2)$ tem valores próprios $\lambda_\pm = e^{\pm i\theta}$ para algum ângulo θ, pois o produto é $\lambda_+\lambda_- = \mathrm{Det}A = 1$. Portanto, uma matriz genérica de $\mathbf{SU}(2)$ é da forma

$$A = U \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} U^*$$

com $U \in \mathbf{SU}(2)$. É também claro que, a menos de reordenar os vetores próprios, basta considerar valores $0 \leq \theta < \pi$ do parâmetro.

ex: Identifique $\mathbf{SU}(1)$.

ex: Mostre que o grupo $\mathbf{SU}(2)$ é o grupo das matrizes complexas

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

com α e β números complexos tais que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Matrizes de Pauli. As *matrizes de Pauli* são as matrizes unitárias e auto-adjuntas

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

São utilizadas para descrever a interação de uma partícula quântica com spin 1/2 com o campo eletromagnético, no regime não relativístico.

É imediato verificar que $\mathrm{Det}\sigma_i = -1$ e $\mathrm{Tr}\,\sigma_i = 0$. Também

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Determine os valores próprios e os vetores prórpios das matrizes de Pauli.

Grupos de Poincaré e de Lorentz. O *espaço-tempo de Minkowski*, o espaço-tempo da teoria da relatividade restrita[49], é o produto cartesiano $\mathbf{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, de coordenadas $(t, \mathbf{r}) = (t, x, y, z)$ (ou seja, uma coordenada temporal t e 3 coordenadas espaciais $\mathbf{r} = (x, y, z)$), munido da *métrica de Minkowski*, a métrica pseudo-euclidiana definida por

$$\langle (t, \mathbf{r}), (t', \mathbf{r}') \rangle := c^2 tt' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

onde $c > 0$ denota a "velocidade da luz". A pseudo-norma do vetor $(t, \mathbf{r})$ é portanto

$$\|(t, \mathbf{r})\|^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) .$$

Um ponto $(t, \mathbf{r})$ é de *tipo tempo* se $\|(t, \mathbf{r})\| > 0$, de *tipo espaço* se $\|(t, \mathbf{r})\| < 0$, e de *tipo luz*, ou *nulo*, se $\|(t, \mathbf{r})\| = 0$.

O grupo das isometrias de $\mathbf{M}$ é chamado *grupo de Poincaré*. Translações, no tempo $t \in \mathbb{R}$ ou no espaço $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ fazem parte do grupo de Poincaré. As isometrias lineares, as transformações lineares de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ que preservam a pseudo-norma de Minkowski, formam o *grupo de Lorentz* $\mathbf{O}(1, 3)$. É claro que as isometrias do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, de coordenadas $\mathbf{r} = (x, y, z)$, são transformações de Lorentz, e em particular $\mathbf{O}(3) \subset \mathbf{O}(1, 3)$. O *grupo de Lorentz restrito* é o subgrupo $\mathbf{SO}^+(1, 3) \subset \mathbf{O}(1, 3)$ das transformações de Lorentz que preservam a direção do tempo e a orientação do espaço.

É claro que $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ contém o grupo as rotações $\mathbf{SO}(3)$. Mais interessantes são as transformações de Lorentz chamadas *boosts* (ou seja, "empurrões"), que descrevem as coordenadas (t', x', y', z') em um referencial em movimento retilíneo uniforme relativamente a um referencial

[49] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17** (1905), 891-921. [On the electrodynamics of moving bodies, *The Principle of Relativity*, 1923]

inercial (t, x, y, z). Se o eixo x é escolhido na direção da velocidade $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, então a transformação de Lorentz é

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

onde $|v| < c$. Em particular, a transformação linear que envia (ct, x) em (ct', x') é definida pela matriz dois por dois

$$H_\varphi = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

onde o "ângulo hiperbólico" φ (chamado, em inglês, *rapidity*) é definido por $\tanh\varphi = v/c$, ou seja,

$$\cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{e} \qquad \sinh\varphi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Observe que $-\infty < \varphi < \infty$ se $-c < v < c$, e que $\varphi = 0$ se $v = 0$, que corresponde a $H_0 = I$. A matriz H_φ define uma "rotação hiperbólica" de um ângulo hiperbólico φ.

Para obter boost com velocidade em uma direção arbitrária $\mathbf{v}$, é suficiente aplicar uma rotação do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ que envie $\mathbf{v}$ em $v\mathbf{i}$.

ex: Verifique a lei de composição $H_\varphi H_\psi = H_{\varphi+\psi}$, que corresponde à lei de adição das velocidades (escalares)

$$(u, v) \mapsto w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}$$

Verifique que se $|u| < c$ e $|v| < c$ então também $|w| < c$.

Grupo de Weyl/Heisenberg. Em mecânica quântica, assim como em análise de Fourier, são importantes os operadores de *translação* $T_\mathbf{q}$, com $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, definidos por

$$(T_\mathbf{q} f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{q})\,.$$

e os operadores de *modulação* $M_\mathbf{p}$, com $\mathbf{p} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, definidos por

$$(M_\mathbf{p} f)(\mathbf{x}) := e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\,.$$

O domínio dos operdores pode ser o espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (onde vivem as funções próprias, que são as ondas planas), ou subespaços de $L^2(\mathbb{R}^n)$, onde é possível definir o produto interno L^2, como o espaço das *funções de prova* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (as funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto) ou o *espaço de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (as funções infinitamente diferenciáveis tais que todas as derivadas decaem mais rapidamente que o inverso de qualquer polinómio quando $\|\mathbf{x}\| \to \infty$). Estes operadores são unitários relativamente ao produto L^2, pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} + \mathbf{q})|^2\, dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} |f(\mathbf{x})|^2\, dx_1 \dots dx_n$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\right|^2\, dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2\, dx_1 \dots dx_n\,.$$

A composição $W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = M_\mathbf{p} T_\mathbf{q}$ é chamada *operador de Weyl*. Os operadores translação e modulação geram o *grupo de Weyl*, ou *grupo de Heisenberg reduzido*, $\mathrm{Wey}_n \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{S}$, parametrizado por $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbf{S}$, de acordo com a identificação

$$M_\mathbf{p} T_\mathbf{q}\, z \approx (\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)\,.$$

O produto, que corresponde a composição dos operadores $M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}\,z$, com $z \in \mathbf{S}$, é dado por

$$(\mathbf{p},\mathbf{q},z)\cdot(\mathbf{p}',\mathbf{q}',z') \mapsto \left(\mathbf{p}+\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{q}+\mathbf{q}'\,,\,zz'e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}'}\right)$$

O *grupo de Heisenberg* (não reduzido) é o conjunto $\mathrm{Heis}_n \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, munido do produto

$$(\mathbf{p},\mathbf{q},t)\cdot(\mathbf{p}',\mathbf{q}',t') \mapsto (\mathbf{p}+\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{q}+\mathbf{q}'\,,\,t+t'+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}')$$

e é claro que a aplicação $(\mathbf{p},\mathbf{q},t) \mapsto (\mathbf{p},\mathbf{q},e^{it})$ é um homomorfismo do grupo de Heisenberg sobre o grupo de Heisenberg reduzido. É possível realizar o grupo de Heisenberg como um grupo de matrizes. De fato, a correspondência $M : \mathrm{Heis}_n \to \mathrm{Mat}_{(n+2)\times(n+2)}(\mathbb{R})$, que envia $(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ na matriz

$$M(\mathbf{p},\mathbf{q},t) = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & \dots & p_n & t \\ 0 & 1 & \dots & 0 & q_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & q_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo do grupo de Heisenberg Heis_n no grupo $\mathbf{GL}(n+2,\mathbb{R})$.

ex: Verifique que $T_{\mathbf{q}}M_{\mathbf{p}} = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}$.

ex: Verifique que o centro do grupo de Heisenberg é o subgrupo $Z(\mathrm{Heis}_n) \approx \mathbb{R}$ dos elementos da forma $(0,0,t)$, e que o quociente $\mathrm{Heis}_n/Z(\mathrm{Heis}_n)$ é (isomorfo a)o grupo aditivo abeliano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Plane waves and Pontryagin dual. A *plane wave* is a complex valued function $e_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ defined by

$$e_\xi(\mathbf{x}) := e^{2\pi i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$$

for some "wave vector" $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ (an alternative definition omits the factor 2π). For example, a plane wave

$$e^{2\pi i(\omega t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$$

in the space-time $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ with coordinates $(t,\mathbf{r})$, describes a (transversal) wave traveling in the direction of the vector $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^3$ with frequency ω (observe that vectors and covectors have different dimensions, e.g. if t is time and $\mathbf{r}$ is a length, then ω is a frequency while $\mathbf{p}$ is the inverse of a length, hence the distinction between a linear space and its dual is real!).

Any plane wave is a continuous (actually infinitely differentiable) homeomorphism from the abelian additive group $\mathbb{R}^n$ into the abelian multiplicative group $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$ of unit complex numbers, i.e.

$$e_\xi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = e_\xi(\mathbf{x})\,e_\xi(\mathbf{y})$$

The set $\widehat{\mathbb{R}^n}$ of all plane waves, or, technically, the set of all continuous homomorphisms $e_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbf{S}$, equipped with the group law

$$(e_\xi \cdot e_{\xi'})(\mathbf{x}) = e_\xi(\mathbf{x})\,e_{\xi'}(\mathbf{x})\,,$$

is called *Pontryagin/topological dual* of the abelian (topological) group $\mathbb{R}^n$, and, as an abelian group, it is isomorphic to $\widehat{\mathbb{R}^n} \approx (\mathbb{R}^n)^*$, the isomorphism being $e_\xi \leftrightarrow \boldsymbol{\xi}$.

Lattices and reciprocal lattices. A *(Bravais) lattice* is an additive subgroup

$$\begin{aligned}\Lambda &= \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{v}_n \\ &:= \{\, n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + \dots n_n\mathbf{v}_n \quad \text{with} \quad n_1,n_2,\dots,n_n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

of the additive group $\mathbb{R}^n$, generated by n linearly independent vectors $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$, called *primitive vectors*. A plane wave $e_\xi(\mathbf{x}) := e^{2\pi i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$ in $\mathbb{R}^n$ is Λ-periodic, i.e. satisfies $e_\xi(\mathbf{x}+\mathbf{v}) = e_\xi(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ and all $\mathbf{v}\in\Lambda$, provided the wave vector $\boldsymbol{\xi}$ belongs to the *reciprocal lattice*

$$\Lambda_* := \{\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ s.t. } \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{v} \in \mathbb{Z} \quad \forall\,\mathbf{v}\in\Lambda\} \subset (\mathbb{R}^n)^*\,,$$

isomorphic to the *dual subgroup*

$$\Lambda^{\perp} := \{e_\xi \in \widehat{\mathbb{R}^n} \text{ s.t. } e_\xi(\mathbf{v}) = 1 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \Lambda\} \subset \widehat{\mathbb{R}^n}\,.$$

For example, the reciprocal lattice of the one-dimensional lattice $\Lambda = \lambda\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, with $\lambda > 0$, is $\Lambda_* = \lambda^{-1}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^*$. Physicists are mainly interested in lattices $\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_3 \subset \mathbb{R}^3$ generated by three independent vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, since they describe (the positions of atoms in) crystals. The volume of a *fundamental domain* (or *primitive unit cell*) for such a lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ (a domain $F \subset \mathbb{R}^3$ such that $\cup_{\mathbf{v}\in\Lambda} T_{\mathbf{v}}(F) = \mathbb{R}^3$, and such that the different images $T_{\mathbf{v}}(F)$ and $T_{\mathbf{v}'}(F)$ for $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ in Λ have disjoint interiors), or, equivalently, the volume of the quotient space $\mathbb{R}^3/\Lambda$, is

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^3/\Lambda) = |\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)|\,.$$

The reciprocal lattice is the lattice $\Lambda_* = \mathbb{Z}\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbb{Z}\boldsymbol{\xi}_2 + \mathbb{Z}\boldsymbol{\xi}_3 \subset (\mathbb{R}^3)^*$ generated by the co-vectors

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1)} \qquad \boldsymbol{\xi}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}$$

(under the identification $(\mathbb{R}^3)^* \approx \mathbb{R}^3$ induced by the Euclidian scalar product).

20 Exponencial e álgebras de Lie

ref: [Ap69] *Vol. 2*, **7.1-10**, **7.12**

Normas. Uma *norma* no espaço linear $\mathbf{V}$, real ou complexo, é uma função real não-negativa $\|\cdot\| : \mathbf{V} \to [0,\infty)$ que satisfaz os axiomas

N1 *(positividade)* $\|\mathbf{x}\| > 0 \qquad \forall \mathbf{x} \neq 0.$

N2 *(homogeneidade)* $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C} \text{ e } \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$

N3 *(desigualdade do triângulo)* $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}.$

Um *espaço normado* é um espaço vetorial $\mathbf{V}$ munido de uma norma. A *distância* entre os pontos/vetores de $\mathbf{V}$ é definida por $\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

É imediato verificar que

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \qquad \text{e} \qquad \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

são normas no espaço $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. De fato, estas normas são os dois extremos de uma família de normas parametrizadas por um número $1 \leq p \leq \infty$, definidas por

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Quando $p = 2$ esta é a norma euclidiana usual $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$, definida à custa do produto interno usual.

ex: Use N3 para deduzir a desigualdade do triângulo

$$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mathrm{d}(\mathbf{z},\mathbf{y})$$

para a distância.

ex: Uma norma $\|\cdot\|$ é euclidiana (ou seja, é definida à custa de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ usando $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle^{1/2}$) sse satisfaz a identidade do paralelogramo.

ex: Dada uma norma $\|\cdot\|$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), e um operador linear invertível $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, verifique que $\|\mathbf{v}\|_A := \|A\mathbf{v}\|$ é uma norma.

Normas equivalentes. Duas normas $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ no mesmo espaço vetorial $\mathbf{V}$ são *equivalentes* se existem constantes $c, C > 0$ tais que para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

$$c\,\|\mathbf{x}\|_\beta \leq \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq C\,\|\mathbf{x}\|_\beta$$

Normas equivalentes definem a mesma noção de limite, ou seja, a mesma "topologia".

Teorema 20.1. *Todas as normas num espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes.*

Demonstração. Fixada uma base (arbitrária) $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, é possível definir uma norma declarando que os $\mathbf{e}_k$'s formam uma base ortonormada. Basta dizer que a norma do vetor $\mathbf{v} = \sum_k v_k \mathbf{e}_k$ é $\|\mathbf{v}\|_2 := \left(\sum_k |v_k|^2\right)^{1/2}$ (esta é uma norma euclidiana, induzida pelo produto interno tal que $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ij}$). Seja $\|\cdot\|$ uma outra norma em $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{v} = \sum_k v_k \mathbf{e}_k$, então

$$\|\mathbf{v}\| \leq \sum_k |v_k|\,\|\mathbf{e}_k\| \leq \left(\sum_k |v_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_k \|\mathbf{e}_k\|^2\right)^{1/2} = M\,\|\mathbf{v}\|_2$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e onde a constante positiva M é

$$M = \left(\sum_k \|\mathbf{e}_k\|^2 \right)^{1/2} .$$

Por outro lado, a esfera unitária $S := \{\, \|\mathbf{v}\|^2 = 1\}$ é compacta (porque estamos em um espaço de dimensão finita!), logo a função contínua $\|\cdot\|$ atinge um mínimo em S, que é necessariamente positivo, pela N1. Ou seja, existe $m > 0$ tal que $\|\mathbf{v}\| \geq m$ se $\mathbf{v} \in S$. Se $\mathbf{v} \neq 0$ é um vetor genérico com norma $\|\mathbf{v}\|_2 = \lambda > 0$, então $\mathbf{v}/\lambda \in S$, e portanto

$$\|\mathbf{v}\| = \|\lambda\,(\mathbf{v}/\lambda)\| = \lambda\,\|\mathbf{v}/\lambda\| \geq \lambda\, m = m\,\|\mathbf{v}\|_2$$

Logo, $m\,\|\mathbf{v}\|_2 \leq \|\mathbf{v}\| \leq M\,\|\mathbf{v}\|_2$. □

Este resultado é importante porque diz que a topologia de um espaço linear de dimensão finita, ou seja, os conceitos de limites e vizinhanças, não dependem da particular norma usada na definição (desde que seja usada uma norma!).

Normas na álgebra das matrizes quadradas. O espaço $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ das matrizes quadradas $n \times n$ é um espaço linear isomorfo a $\mathbb{C}^{n^2}$. Como tal, admite muitas normas, todas equivalentes.

Por exemplo, a norma de uma matriz $A = (a_{ij})$ pode ser

$$\|A\|_1 := \sum_{i,j} |a_{ij}| \qquad \|A\|_2^2 := \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \qquad \ldots \qquad \|A\|_\infty := \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Outra possibilidade importante é considerar o operador $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$ do espaço euclidiano $\mathbb{C}^n$ definido pela matriz A, e definir a *norma do operador* de A como

$$\|A\| := \sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n\,,\,\|\mathbf{z}\|=1} \|A\mathbf{z}\| = \sup_{0\neq\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n} \frac{\|A\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|}$$

onde $\|\mathbf{z}\|$ denota a norma euclidiana de um vetor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. O operador A dilata ou contrai cada vetor não nulo $\mathbf{z}$ de um fator $\|A\mathbf{z}\|/\|\mathbf{z}\|$. A norma do operador é o supremo destes fatores de dilatação. Ou seja, $\|A\|$ é o menor raio R tal que a imagem da bola unitária $B_1(0) = \{\|\mathbf{z}\| \leq 1\}$ pela transformação linear definida por A está contida na bola $B_R(0) = \{\, \|\mathbf{z}\| \leq R\}$. De acordo com a decomposição em valores singulares 18.13, $A(B_1(0))$ é um elipsoide com semieixos iguais aos valores singulares $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_n$ de A (as raízes quadradas dos valores próprios de A^*A). Consequentemente, $\|A\| = \sigma_n$, o maior dos valores singulares.

O produto linhas por colunas (ou seja, a composição das transformações lineares) faz do espaço das matrizes quadradas uma álgebra. É fácil provar que algumas de estas normas são "sub-multiplicativas", ou seja,

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1\,\|B\|_1 \qquad \text{e} \qquad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \tag{20.1}$$

Em particular, considerando $A = B$ e iterando,

$$\|A^k\|_1 \leq \|A\|_1^k \qquad \text{e} \qquad \|A^k\| \leq \|A\|^k .$$

ex: Mostre que $\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n^2\,\|A\|_\infty$.

ex: Mostre que $\|AB\|_1 \leq \|A\|_\infty\,\|B\|_1$. Deduza a primeira das desigualdades (20.1).

ex: Prove a segunda das desigualdades (20.1).

ex: Mostre que $\|AB\|_\infty \leq n\,\|A\|_\infty\,\|B\|_\infty$. Deduza que

$$\|A^k\|_\infty \leq n^k\,\|A\|_\infty^k .$$

11 mai 2021

Exponencial de uma matriz. O *exponencial* da matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é a matriz quadrada e^A, ou $\exp(A)$, definida pela série de potências

$$\boxed{\begin{aligned} e^A &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\ &= I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots \end{aligned}} \tag{20.2}$$

A definição é bem posta porque cada entrada de e^A é a soma de uma série absolutamente convergente. De fato, se $a_{ij}^{(k)}$ são as entradas de A^k, então

$$|a_{ij}^{(k)}| \le \|A^k\|_\infty \le n^k \|A\|_\infty^k \,.$$

Portanto, as séries dos valores absolutos das entradas de e^A são limitadas pela série convergente

$$\left(\delta_{ij} + |a_{ij}| + \frac{|a_{ij}^{(2)}|}{2} + \frac{|a_{ij}^{(3)}|}{6} + \dots\right) \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k \, \|A\|_\infty^k}{k!} = e^{n\|A\|_\infty} \,.$$

Em alternativa, basta observar que, pela (20.1), os termos da série que define o ecponencial são limitados por

$$\|A^k/k!\| \le \|A\|^k/k!$$

e que a série $\sum \|A\|^k/k! = e^{\|A\|}$ é convergente. Em particula5, isto prova a desigualdede

$$\left\|e^A\right\| \le e^{\|A\|}$$

Exponencial de um operador. Se A e B são matrizes semelhantes, ou seja, $A = UBU^{-1}$ com $U \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, então também os exponenciais são semelhantes, pois as potências de A são $A^n = UB^nU^{-1}$ para todo $n \ge 0$, e portanto

$$\begin{aligned} e^A &= I + UBU^{-1} + \tfrac{1}{2}UB^2U^{-1} + \dots \\ &= U\left(I + B + \tfrac{1}{2}B^2 + \dots\right)U^{-1} \\ &= Ue^BU^{-1} \,. \end{aligned} \tag{20.3}$$

Consequentemente, se $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ é um operador do espaço linear de dimensão finita $\mathbf{V} \approx \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$, representado em uma base fixada pela matriz A, então a fórmula (20.2) define um operador

$$e^L = I + L + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{6}L^3 + \dots$$

Pela obervação (20.3), esta definição não depende da base escolhida.

e.g. O exponencial da matriz nula

$$e^0 = I \,,$$

pois todos os outros termos da série de potências são nulos. Portanto, o exponencial do operador nulo é o operador identidade.

e.g. Uma matriz $N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é nilpotente se alguma sua potência é nula, ou seja, se $N^k = 0$ para algum inteiro minimal $k \ge 0$. Sendo também nulas todas as potências superiores N^m com $m \ge k$, a série de potência que define o seu exponencial é de fato uma soma finita

$$e^N = I + N + \frac{1}{2}N^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1} \quad .$$

Assim, as entradas do exponencial de uma matriz nilpotente são polinómios nas entradas da matriz.

Exponencial de matrizes diagonalizáveis. Se Λ é uma matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

com valores próprios λ_k's, então o seu exponencial também é diagonal

$$e^{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} .$$

com valores próprios e^{λ_k}'s. Consequentemente, se A é diagonalizável, ou seja, $A = U\Lambda U^{-1}$ com Λ diagonal e U invertível, então o seu exponencial é diagonalizável, pois, pela (20.3),

$$e^{A} = U\, e^{\Lambda}\, U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} U^{-1} \ .$$

Uma consequência importante é a relação entre o exponencial e os invariantes principais de uma matriz quadrada, o determinante e o traço:

Teorema 20.2. *Se A é uma matriz quadrada, então*

$$\boxed{\mathrm{Det}\left(e^{A}\right) = e^{\mathrm{Tr}A}} \tag{20.4}$$

Esta fórmula é evidente se A é diagonalizável, e segue por continuidade no caso geral (porque, de acordo com o teorema 17.11, o conjunto das matrizes diagonalizáveis é denso no espaço $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ das matrizes quadradas complexas).

ex: Mostre que

$$\left(e^{A}\right)^{\top} = e^{A^{\top}} \qquad \text{e} \qquad \left(e^{A}\right)^{*} = e^{A^{*}}$$

ex: Mostre que se λ é um valor próprio de A, então e^{λ} é um valor próprio de e^{A}.

Equação diferencial & subgrupos a um parâmetro. Dada uma matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, podemos construir a família das matrizes

$$G(t) := e^{tA}\,, \qquad \text{com } t \in \mathbb{R}\,.$$

É imediato ver que $G(0) = I$. As séries de funções $t \mapsto (e^{tA})_{ij}$ que definem as entradas de e^{tA} convergem uniformemente em cada intervalo limitado da reta real, assim como as séries das derivadas das entradas. Portanto, $t \mapsto G(t)$ define uma curva $G : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, que passa pela identidade quando $t = 0$.

Em particular, as derivadas em ordem a t podem ser calculadas derivando cada termo. O resultado é que

$$\frac{d}{dt}\, G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = A\, G(t) = G(t)\, A \tag{20.5}$$

Em particular, A comuta com $G(t)$.

A derivada de $F(t) := e^{tA}e^{-tA}$ é igual, pela regra de Leibniz (aplicada a cada entrada do produto), a

$$\dot{F}(t) = AF(t) - F(t)A = 0$$

porque A comuta com $G(t)$. Pelo teorema do valor médio, $F(t) = F(0) = I$. Consequentemente, $G(t) = e^{tA}$ é invertível, e a sua inversa é $G(-t)$, ou seja,

$$\boxed{(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}\,.}$$

Em particular,

Teorema 20.3. *O exponencial envia o espaço linear das matrizes quadradas, reais ou complexas, no grupo geral linear, real ou complexo, respetivamente, ou seja,*

$$\exp(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})) \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \qquad e \qquad \exp(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})) \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})\,.$$

O exponencial também resolve umas equações diferenciais no espaço das matrizes, de acordo com o seguinte

Teorema 20.4. *Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. A única solução da equação diferencial*

$$\dot{X} = AX \qquad ou \qquad \dot{X} = XA$$

com condição inicial $X(0) = X_0 \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, é

$$X(t) = e^{tA}\,X_0 \qquad ou \qquad X(t) = X_0\,e^{tA}\,,$$

respetivamente.

Demonstração. As fórmulas (20.5) dizem que $e^{tA}X_0$ ou X_0e^{tA} são soluções. Para provar a unicidade, basta observar que, se $X(t)$ é uma solução, então a quociente $H(t) = e^{-tA}\,X(t)$ (ou $X(t)e^{\,-tA}$ no segundo caso) satisfaz, pela regra de Leibniz e as (20.5),

$$\dot{H}(t) = -Ae^{-tA}X(t) + e^{-tA}AX(t) = 0$$

pois A comuta com e^{-tA}. Pelo teorema do valor médio (aplicada a cada entrada da matriz), $H(t) = H(0) = X_0$, e portanto $X(t) = e^{\,tA}X_0$. □

Em geral, se A e B não comutam, $e^{A+B} \neq e^Ae^B \neq e^Be^A$ (e a expressão de Z tal que $e^Z = e^A\,e^B$, ou seja, moralmente "$\log(\exp(A)\exp(B))$", em termos dos comutadores iterados de A e B, é chamada *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*). O que é verdade é o seguinte

Teorema 20.5. *Se A e B comutam, ou seja, se $AB = BA$, então*

$$e^{A+B} = e^Ae^B = e^Be^A\,.$$

Demonstração. Se A comuta com B, então todas as potências A^k comutam com todas as potências B^j, e consequentemente com os exponenciais e^{tB} e e^{tA}, respetivamente. Então a derivada de

$$H(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}$$

é, usando as fórmulas 20.5,

$$\dot{H}(t) = (A+B)\,e^{t(A+B)} - A\,e^{tA}e^{tB} - e^{tA}e^{tB}\,B = (A+B)\,H(t)$$

Pelo teorema 20.4, $H(t) = e^{t(A+B)}H(0)$. Mas $H(0) = 0$, logo $H(t) = 0$ para todo t, em particular para $t = 1$. □

Em particular (sendo que todos os múltiplos tA de uma matriz quadrada A comutam),

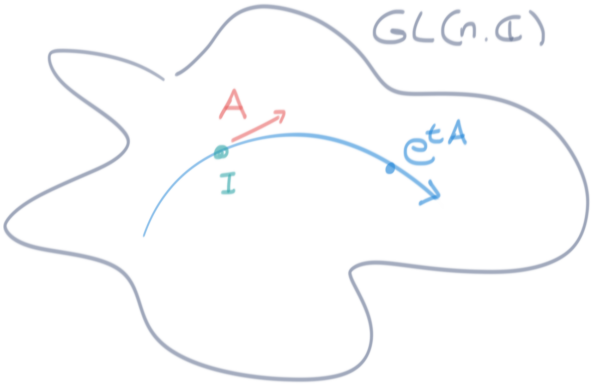
$$\boxed{e^{0A} = I \qquad \text{e} \qquad e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}\,.}$$

Isto significa que a família dos $G(t) = e^{tA}$, com $t \in \mathbb{R}$, é um *subgrupo a um parâmetro* do grupo $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, ou seja, a correspondência $t \mapsto G(t) = e^{tA}$ é um homomorfismo contínuo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

Geometricamente, $t \mapsto G(t)$ é uma curva no grupo linear, passando pela identidade quando $t = 0$, que resolve a equação diferencial $\dot{G} = AG$. A matriz A é dita *gerador (infinitesimal)* do subgrupo $\{\, G(t)\}_{\,t\in\mathbb{R}}$, e pode ser obtida calculando o limite

$$A = \dot{G}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{G(t) - I}{t}\,.$$

É a derivada, ou seja, a "velocidade" da curva $G(t)$ no instante $t = 0$.



Vice-versa, é possível provar que

Teorema 20.6. *Todo subgrupo a um parâmetro $t \mapsto G(t)$ de matrizes de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ que seja diferenciável na origem é da forma e^{tA} para alguma matriz A.*

Demonstração. Seja $A = \dot{G}(0)$ a velocidade do subgrupo em $t = 0$, quando $G(0) = I$. A derivada nos outros pontos também existe e é igual, pelas propriedades de grupo, a

$$\begin{aligned}\dot{G}(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{G(t+\varepsilon) - G(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{G(\varepsilon)G(t) - G(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{G(\varepsilon) - I}{\varepsilon}\, G(t) = \dot{G}(0)\, G(t) \;= A\, G(t)\,.\end{aligned}$$

Pelo teorema 20.4, $G(t) = e^{tA}G(0) = e^{tA}$. □

ex: Verifique que as identidades $e^{A+B} = e^Ae^B = e^Be^A$ são em geral falsas quando A e B não comutam. Por exemplo, considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Verifique que se A é simétrica/ então também e^A é simétrica.

ex: Verifique que se A é hermítica então também e^A é hermítica.

ex: Mostre que se A é anti-simétrica (real) então e^A é ortogonal.

ex: Mostre que se A é anti-hermítica então e^A é unitária. Deduza que se H é hermítica então $e^{\,iH}$ é unitária.

ex: Use a identidade (20.4) para verificar que o exponencial de uma matriz A com traço nulo, $\mathrm{Tr}A = 0$, é uma matriz do grupo linear especial, i.e. $e^A \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$.

ex: [Ap69] *vol. 2*, **7.12.**

Exponencial de blocos de Jordan. Se $A = \lambda I + B$, então $e^A = e^\lambda e^B$, porque λI comuta com todas as matrizes. Em particular, é simples calcular o exponencial de um "bloco de Jordan"

$$A = \lambda I + N$$

onde N é uma matriz nilpotente. De fato, se N é nilpotente de ordem k, ou seja, verifica $N^k = 0$ (subentendido, com $N^j \neq 0$ se $j < k$), então o seu exponencial é um polinómio de grau $k-1$ em N,

$$e^N = I + N + \tfrac{1}{2}N^2 + \cdots + \tfrac{1}{(k-1)!}N^{k-1}\,.$$

Consequentemente,

$$e^{\lambda I + N} = e^\lambda \left(I + N + \tfrac{1}{2}N^2 + \cdots + \tfrac{1}{(k-1)!}N^{k-1} \right)\,.$$

Rotações do plano. O exponencial de uma matriz anti-simétrica é uma matriz ortogonal. O caso mais simples é em dimensão 2. Seja

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Observe que J não é diagonalizável sobre os reais, pois o polinómio caraterístico é $z^2 + 1$, e a suas raízes complexas são $\pm i$. O quadrado de J é $J^2 = -I$ (assim como o número imaginário i, cujo quadrado é. $i^2 = -1$), e portanto todas as suas potências são iguais a $\pm J$ ou $\pm I$, com periodicidade 4. A fórmula de Euler $e^{\,i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ sugere que também a matriz $e^{\,tJ}$ seja relacionada com as funções trigonométricas. De fato, ao escrever as séries de potências de t que definem as entradas de e^{tJ}, é imediato reconhecer que

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots & -t + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{120}t^5 + \dots \\ t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots & 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

uma rotação do plano de um ângulo t no sentido anti-horário.

Rotações hiperbólicas. A matriz simétrica

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável sobre os reais, pois representa uma reflexão na reta $y = x$, e portanto tem valores próprios ± 1. De fato, é imediato ver que

$$S = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^\top\,,$$

onde $U = R_{\pi/4}$ é uma rotação de um ângulo $\pi/4$. O seu exponencial é portanto

$$e^{\,tS} = U \begin{pmatrix} e^{\,t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} U^\top$$

Mais interessante é calcular o exponencial usando diretamente a série de potências. O quadrado de S é $S^2 = I$, e portanto as potências são iguais a S ou a I, dependendo da paridade. Então

$$\begin{aligned} e^{tS} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \dots & t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \dots \\ t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \dots & 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esta é uma "rotação hiperbólica" do plano. O caminho $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ descreve um ponto que percorre um ramo da hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ do plano. As rotações hiperbólicas são, em uma interpretação conveniente das coordenadas, os "boost" do grupo de Lorentz da relatividade especial.

ex: Calcule o exponencial das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e

$$B = \lambda I + A = \begin{pmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^B = e^\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ex: Se P é uma projeção, i.e. satisfaz $P^2 = P$ (é "idempotente"), então

$$e^P = I + (e-1)P\,.$$

ex: Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(observe que A é a soma de uma matriz nilpotente e um múltiplo da identidade).

ex: [Ap69] *vol. 2*, **7.12.**

18 mai 2021

Grupos de matrizes. O determinante é uma função contínua $\mathrm{Det} : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (de fato, um polinómio de grau n nas entradas da matriz, ou seja, nas coordenadas do espaço linear). O grupo linear geral real $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ é portanto um aberto de $\mathbb{R}^{n^2}$, sendo o conjunto das matrizes com $\mathrm{Det}A \neq 0$ (ou seja, uma matriz suficientemente próxima de uma matriz invertível é invertível). Da mesma forma, o grupo linear geral complexo $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ é um aberto do espaço linear real $\mathbb{C}^{n^2} \approx \mathbb{R}^{2n^2}$.

Um *grupo de matrizes* é um subgrupo $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ ou $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ que é um conjunto fechado relativamente a topologia do grupo linear correspondente. Exemplos são os próprios grupos lineares gerais, e os subgrupos especiais, ortogonais e unitários considerados no capítulo anterior (e outros que não teremos tempo de considerar).

É possível provar, usando o teorema da função implícita, que todos estes grupos são "variedades diferenciáveis", de fato, subvariedades do aberto $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ ou $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$. Também, as operações de grupo, o produto $(g,h) \mapsto gh$ e a inversão $g \mapsto g^{-1}$, são funções diferenciáveis de $\mathbf{G}\times\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ e $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$.

e.g. O grupos lineare especial $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ é um subgrupo fechado de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ por ser o conjunto de nível 1 da função contínua "determinante" $\mathrm{Det} : \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

e.g. O grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é um subgrupos fechado de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ por ser a imagen inversa da origem pelas função contínua $f : \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ definida por $f(A) = A^\top A - I$ (observe que cada coordenada desta função é um polinómio de grau 2 nas entradas da matriz A).

e.g. O grupo especial $\mathbf{SO}(n) = \mathbf{SL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathbf{O}(n)$ é também um subgrupo fechado de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ por ser uma interseção de dois fechados.

e.g. Da mesma forma, também $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ e $\mathbf{SU}(n)$ são subgrupos fechados de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, logo grupos de matrices.

$\mathbf{U}(1) \approx \mathbf{SO}(2)$ é uma circunferência $\mathbf{S}^1$. O grupo unitário $\mathbf{U}(1)$ é o grupo multiplicativo dos números complexos de módulo um $e^{\,i\theta}$, que formam a circunferência unitária $\mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$ do plano complexo. É isomorfo ao grupo $\mathbf{SO}(2)$ das rotações do plano, através do isomorfismo

$$e^{\,i\theta} \;\mapsto\; \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$\mathbf{SU}(2)$ é uma esfera $\mathbf{S}^3$. O espaço linear $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ é isomorfo a $\mathbb{C}^4 \approx \mathbb{R}^8$. O grupo especial unitário $\mathbf{SU}(2)$ é o grupo das matrizes complexas 2×2 da forma

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

onde $\alpha = x + iy$ e $\beta = u + iv$ são dois números complexos tais que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Esta condição define a esfera unitária $\mathbf{S}^3 = \{\, (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x^2+y^2+u^2+v^2 = 1\}$ dentro do espaço euclidiano real $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$ de coordenadas $(\alpha,\beta) \approx (x,y,u,v)$. É claro que a aplicação $\mathbf{S}^3 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, definida por $(\alpha,\beta) \mapsto A(\alpha,\beta)$, é injetiva. Assim, o grupo especial unitário $\mathbf{SU}(2)$ é uma esfera de dimensão real três $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{R}^8$.

Derivar matrizes. Uma matriz (quadrada) pode ser pensada como um vetor do espaço linear $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, que é naturalmente isomorfo a $\mathbb{C}^{n^2}$. Assim, uma "matriz dependente do tempo" $A(t)$ pode ser pensada como uma curva $t \mapsto A(t)$ neste espaço vetorial. É portanto natural calcular a sua derivada em ordem ao tempo, quando existir, e chamar $\frac{d}{dt}A(t) = \dot{A}(t)$ "velocidade" da curva no instante t. Se $A(t) = (a_{ij}(t))$, então $\dot{A}(t)$ é uma matriz cujas entradas são as derivadas $\dot{a}_{ij}(t)$.

Se $A(t)$ são duas curvas no espaço das matrizes quadrada da mesma dimensão, então é possível definir a curva "produto linha por colunas" $C(t) = A(t)B(t)$, cujas entradas são as sobreposições de produtos produtos $c_{ij}(t) = \sum_k a_{ik}(t)b_{kj}(t)$. Aplicando a regra de Leibniz a cada entrada, temos $\dot{c}_{ij}(t) = \sum_k \dot{a}_{ik}\,(t)\, b_{kj}(t) + a_{ik}(t)\,\dot{b}_{kj}(t)$. Mas isto significa que, numa notação que omite os argumentos,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(AB) = \dot{A}B + A\dot{B}}$$

ou seja, a regra de Leibniz também se aplica ao produto entre matrizes!

Seja agora $G(t)$ uma curva composta por matrizes (quadradas) invertíveis. Então o produto $G(t)\,G(t)^{-1} = I$ para todo tempo t, e portanto a sua derivada é a matriz nula. Portanto, aplicando a regra de Leibniz,

$$0 = \frac{d}{dt}\left(G\,G^{-1}\right) = \dot{G}\,G^{-1} + G\,\frac{d}{dt}(G^{-1})$$

e finalmente, ao multiplicar a direita por G^{-1}, a derivada da matriz inversa é

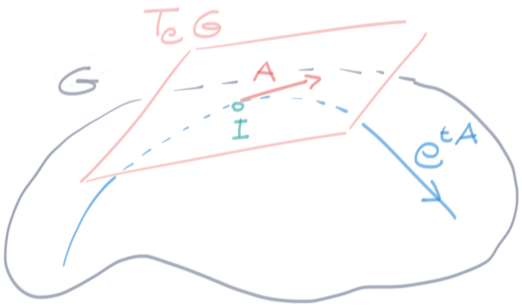
$$\boxed{\frac{d}{dt}(G^{-1}) = -G^{-1}\,\dot{G}\,G^{-1}}$$

uma fórmula que lembra a derivada do inverso de uma função!

Espaço tangente na identidade. Seja $\mathbf{G}$ um grupo de matrizes, real ou complexo, e seja $e = I$ a identidade. Consideramos curvas diferenciáveis $t \mapsto g(t)$ de matrizes $g(t) \in \mathbf{G}$, definidas num intervalo de tempos $(-\varepsilon, \varepsilon)$ em torno da origem, que passem pela identidade $g(0) = e$ quando $t = 0$. A velocidade de uma tal curva no tempo $t = 0$ é uma matriz $X = \dot{g}(0) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

O espaço de todas as possíveis velocidades $X = \dot{g}(0)$ da curvas diferenciáveis que passam pela identidade (ou melhor, as classes de equivalências das curvas que têm a mesma velocidade em e) é chamado espaço tangente ao grupo no ponto e, e denotado por $T_e\mathbf{G}$.

Por exemplo, se o grupo de matrizes é o próprio $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, e se A é uma matriz $n \times n$ arbitrária, então a curva $e^t \mapsto tA$ passa pela identidade com velocidade A. Portanto, o espaço tangente $T_e\mathbf{G}$ é o próprio espaço $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. O mesmo acontece para grupo linear geral real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.



O espaço tangente na identidade de um grupo de matrizes tem uma estrutura natural de espaço vetorial real (não é gralha, "real", independentemente do grupo ser formado por matrizes reais ou complexas!).

Teorema 20.7. *O espaço $T_e\mathbf{G}$ é um subespaço vetorial real de $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ou de $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, dependendo se $\mathbf{G}$ é real ou complexo.*

Demonstração. De fato, se a curva $g(t)$ tem velocidade $X = \dot{g}(0)$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, então a curva $f(t) = g(\lambda t)$ também passa pela identiade, e com velocidade $\dot{f}(0) = \lambda X$. Em particular, a curva constante $c(t) = g(0 \cdot t) = e$ tem velocidade $\dot{c}(0) = 0$. Por outro lado, se $h(t)$ é outra curva que passa pela identidade $h(0) = e$ com velocidade $Y = \dot{h}(0)$, então também a curva $\ell(t) = g(t)\, h(t)$ passa pela identidade quando $t = 0$. Pela regra de Leibniz, a sua velocidade é

$$\dot{\ell}(t) = \dot{g}(t)\, h(t) + g(t)\, \dot{h}(t)\,,$$

e portanto vale $X + Y$ quando $t = 0$. Observem também que se a curva $g(t)$ tem velocidade $X = \dot{g}(0)$, então a curva $g(t)^{-1}$ tem velocidade $-X$ na identidade, pois a velocidade da curva constante $g(t)\, g(t)^{-1} = e$ na identidade é 0. □

Parêntese de Lie. A estrutura multiplicativa do grupo se reflete em mais uma operação natural no espaço tangente na identidade. Todo $g \in \mathbf{G}$ define um automorfismo $\Psi_g := L_g \circ R_{g^{-1}} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$, de acordo com

$$\Psi_g(h) = g\, h\, g^{-1}\,.$$

Como Ψ_g fixa a identidade, i.e. $\Psi_g(e) = e$, envia curvas passando pela identidade em curvas passando pela identidade. O seu diferencial, calculado no ponto I, é portanto um automorfismo do espaço tangente na identidade, denotado por

$$\mathrm{Ad}_g := d\Psi_g|_I \in \mathrm{Aut}(T_e\mathbf{G})$$

Explicitamente, se $t \mapsto h(s)$ é uma curva passando por $h(0) = e$ com velocidade $\dot{h}(0) = Y$, então a velocidade da curva $s \mapsto \Psi_g(h(s) = g\, h(s)\, g^{-1}$ quando $s = 0$ é

$$\mathrm{Ad}_g Y = g\, Y\, g^{-1}\,.$$

O mapa $\mathrm{Ad} : \mathbf{G} \to \mathrm{Aut}(T_e\mathbf{G})$, que envia g no automorfismo Ad_g , é chamado representação adjunta do grupo. O seu diferencial na identidade, $\mathrm{ad} := \mathrm{d}\,\mathrm{Ad}|_e : T_e\mathbf{G} \to \mathrm{End}(T_e\mathbf{G})$, define uma transformação bilinear $T_e\mathbf{G} \times T_e\mathbf{G} \to T_e\mathbf{G}$, chamada *parêntese de Lie*, de acordo com

$$\boxed{[X, Y] \ := \mathrm{ad}_X Y}$$

Para calcular a parêntese de Lie, consideramos uma curva $g(t)$ com $\dot{g}(0) = X$. Então

$$\begin{aligned}
[X, Y] \ &= \frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}_{g(t)} Y \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\, g(t)\, Y\, g(t)^{-1} \Big|_{t=0} \\
&= \dot{g}(0)\, Y\, g(0)^{-1} - g(0)\, Y\, g^{-1}(0)\, \dot{g}(0)\, g^{-1}(0) \\
&= XY - YX
\end{aligned}$$

Assim a parêntese de Lie entre dois vetores do espaço tangente na identidade é simplesmente o "comutador" entre as matrizes (o que justifica ter utilizado a mesma notação). Esta derivação mostra que o comutador entre duas matrizes de $T_e\mathbf{G}$ é também uma matriz de $T_e\mathbf{G}$, coisa que não era evidente a priori. É imediato então verificar que a parêntese de Lie/comutador é linear nas duas variáveis, é anti-simétrica, i.e. satisfaz

$$[X, Y] = -[Y, X]\,,$$

e satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0\,.$$

ex: Verifique que Ψ_G é um automorfismo do grupo $\mathbf{G}$.

ex: Verifique que $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g\, \mathrm{Ad}_h$.

ex: Verifique que o comutador satisfaz a identidade de Jacobi.

Álgebra de Lie de um grupo de matrizes. O espaço tangente $T_e\mathbf{G}$, munido da estrutura de espaço linear real e da parêntese de Lie $[\cdot, \cdot]$ (que é anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi), é chamado *álgebra de Lie* do grupo de matriezes $\mathbf{G}$. Costuma ser denotado pelas letras germánicas correspondentes às letras que denotam o grupo: por exemplo, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ denota a álgebra de Lie do grupo $\mathbf{G}$. A dimensão real de $\mathfrak{g}$ é chamada dimensão (real) do grupo de matrizes $\mathbf{G}$.

Sendo um espaço linear de dimensão finita, a álgebra de Lie de um grupo de matrizes admite uma base finita $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Os comutadores são combinações lineares dos próprios elementos da base, logo expressões do género

$$[X_i, X_j] = \sum_{ijk} c_{ij}^k X_k\,,$$

com certos coeficientes c_{ij}^k que dependem da base escolhida e da estrutura do grupo, e são chamadas *constantes de estrutura*. Observe que se o grupo é comutativo então Ad é constante, e portanto a sua derivada é nula. Assim, a álgebra de Lie de um grupo abeliano é comutativa.

É claro que a álgebra de Lie do grupo linear geral real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ é

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

pois toda matriz X define um subgrupo a um parámetro e^{tX} que passa pela identidade com velocidade X. Da mesma forma, a álgebra de Lie do grupo linear geral real complexo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ é $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, pensado como espaço vetorial real de dimensão $2\,n^2$.

Para compreender as álgebra de Lie dos grupos especiais é útil a seguinte observação, que revela o significado geométrico do traço de uma matriz: é o diferencial do determinante calculado na identidade. De fato, o determinante de uma pequena variação $I + \varepsilon X$ da matriz identidade tem um desenvolvimento

$$\mathrm{Det}\,(I + \varepsilon X) \simeq 1 + \varepsilon\,\mathrm{Tr} X + \dots$$

onde os outros termos são quadráticos em ε. Ao calcular a derivada, temos

Teorema 20.8. *Seja $g(t)$ é uma curva derivável em $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ passando por $g(0) = I$. Então*

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Det} g(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{Tr}\,\dot{g}(0)\,.$$

Consequentemente,

Teorema 20.9. *A álgebra de Lie do grupo especial linear $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ é o espaço linear das matrizes com traço nulo,*

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{\ X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\ (\mathbb{R})\ :\ \mathrm{Tr} X = 0\}$$

Demonstração. O teorema 20.8 prova uma inclusão. Por outro lado, a identidade (20.4) mostra que se X é uma matriz com traço nulo então e^{tX} é uma curva em $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ que passa pela identidade com velocidade X. □

E particular, $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ tem dimensão $n^2 - 1$. A mesma demonstração prova que

Teorema 20.10. *A álgebra de Lie do grupo especial linear $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ é o espaço linear das matrizes complexas com traço nulo,*

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{\ X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\ (\mathbb{C})\ :\ \mathrm{Tr} X = 0\}$$

Assim, $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ tem dimensão real $2(n^2 - 1)$.

Teorema 20.11. *A álgebra de Lie do grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é o espaço linear das matrizes reais anti-simétricas,*

$$\mathfrak{o}(n) = \{\ X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\ (\mathbb{R})\ :\ X + X^\top = 0\}$$

Demonstração. Seja $t \mapsto g(t) \in \mathbf{O}(n)$ uma curva que passa pela origem $g(0) = I$ com velociade $\dot{g}(0) = X$. Sendo ortogonais, as matrizes satisfazem $g(t)\,g(t)^\top = I$. Derivando esta relação, e usando a regra de Leibniz, obtemos

$$\dot{g}(t)\,g(t)^\top + g(t)\,\dot{g}(t)^\top = 0\ ,$$

que, quando $t = 0$, diz que $X + X^\top = 0$. Vice-versa, é um exercício verificar que se X é anti-simétrica então e^{tX} é uma curva em $\mathbf{O}(n)$ que tem velocidade X em I. □

Assim, $\mathbf{O}(n)$ tem dimensão $n(n-1)/2$. Em particular, o grupo ortogonal tem a mesma dimensão do espaço apenas quando $n = 3$, a dimensão do espaço onde acontece a mecânica de Galileo e Newton!

Uma matriz anti-simétrica tem automaticamente traço nulo, portanto $\mathfrak{o}(n)$ é também a álgebra de Lie do grupo ortogonal especial $\mathbf{SO}(n) = \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$. De fato, a função determinante envia $\mathrm{Det} : \mathbf{O}(n) \to \{\pm 1\}$. O grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é composto por duas componentes conexas: a componente conexa que contém a identidade I (por onde passam as curvas que definem a álgebra de Lie), que é claramente $\mathbf{SO}(n) = \mathrm{Det}^{-1}\ (\{\ 1\}\ )$, e a componente conexa que contém $-I$, que é $-\mathbf{SO}(n)$, o subconjunto (que não é um grupo!) das matrizes ortogonais com determinante -1.

Teorema 20.12. *A álgebra de Lie do grupo unitário* $\mathbf{U}(n)$ *é o espaço linear real das matrizes anti-hermíticas,*

$$\mathfrak{u}(n) = \{\ X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\ (\mathbb{C})\ :\ X + X^* = 0\}$$

Demonstração. Seja $t \mapsto g(t) \in \mathbf{U}(n)$ uma curva que passa pela origem $g(0) = I$ com velociade $\dot g(0) = X$. Sendo unitárias, as matrizes satisfazem $g(t)\, g(t)^* = I$. Derivando esta relação, e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\dot g(t)\, g(t)^* + g(t)\, \dot g(t)^* = 0\ ,$$

que, quando $t = 0$, diz que $X + X^* = 0$. Vice-versa, é um exercício verificar que se X é anti-hermítica então e^{tX} é uma curva em $\mathbf{U}(n)$ que tem velocidade X em I. □

Teorema 20.13. *A álgebra de Lie do grupo especial unitário* $\mathbf{SU}(n)$ *é o espaço linear das matrizes anti-hermíticas com traço nulo,*

$$\mathfrak{u}(n) = \{\ X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\ (\mathbb{C})\ :\ X + X^* = 0\,,\ \mathrm{Tr} X = 0\}$$

Rotações infinitesimais do plano, álgebra de Lie de SO(2) e U(1). Uma rotação genérica do plano é uma matriz $R(\theta) \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, definida por

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

É claro que $\theta \mapsto R(\theta)$ é um grupo a um parâmetro, passando por $R(0) = I$, cuja imagem é todo o grupo $\mathbf{SO}(2)$. As sua derivada quando $\theta = 0$ é

$$\frac{d}{d\theta} R(\theta)\Big|_{t=0} = J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A álgeba de Lie $\mathfrak{so}(2)$ é portanto uma reta, gerada pelo vetor J. Toda rotação é do género $R(\theta) = e^{\ \theta L_z}$ para algum θ, definido a menos de múltiplos inteiros de 2π.

Rotações infinitesimais do espaço, álgebra de Lie de SO(3). O espaço linear das matrizes 3×3 reais anti-simétricas tem dimensão 3, e uma base natural é formada pelas matrizes/vetores

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os exponenciais $e^{\theta X_1}$, $e^{\theta X_2}$ e $e^{\theta X_3}$ representam rotações anti-horárias de um ângulo θ em torno dos eixos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respetivamente. Os comutadores são

$$[X_1, X_2] = X_3 \qquad [X_2, X_3] = X_1 \qquad [X_3, X_1] = X_2\,.$$

Uma rotação genérica de um ângulo ω en torno do eixo definido pelo vetor unitário $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ é $R = e^{\omega X}$, onde $X = n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3$. De fato, um cálculo elementar mostra que se $\mathbf{v}$ é um vetor genérico do espaço, então

$$\frac{d}{dt} e^{\ tX}\, \mathbf{v}\Big|_{t=0} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$$

onde $\times$ denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$. Então é claro que $\mathbb{R}\mathbf{n}$ é o eixo de rotação, e que a velocidade angular da rotação $t \mapsto e^{t\omega X}\mathbf{v}$ é ω.

É possível portanto associar a cada matriz/vetor Ω da álgebra de Lie de $\mathbf{SO}(3)$ um vetor do espaço $\mathbb{R}^3$, de acordo com

$$\Omega = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \omega_3 X_3 \qquad \mapsto \qquad \mathbf{\Omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}\,, \tag{20.6}$$

de maneira tal que e^{Ω} é uma rotação anti-horária de um ângulo $\omega = \|\Omega\| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ em torno do vetor unitário $\mathbf{n} = \mathbf{\Omega}/\omega$. O vetor $\mathbf{\Omega}$ é chamado *(vetor) velocidade angular* da rotação $t \mapsto e^{t\Omega}$. Esta correspondência, que é claramente um isomorfismo entre espaços lineares reais, envia os vetores da base X_1, X_2, X_3 nos vetores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, respetivamente. É imediato então verificar que as parênteses de Lie entre os vetores X_k correspondem aos produtos vetoriais entre os vetores da base canónica. Assim, a correspondência $\mathfrak{so}(3) \approx \mathbb{R}^3$, definida pela (20.6), é um isomorfismo entre a álgebra de Lie do grupo das rotações, munida da parêntese de Lie, e o espaço euclidiano real de dimensão três, munido do produto vetorial.

Sistemas não inerciais, força de Coriolis. [Ar87]

Pêndulo de Foucault. [Ar87]

Álgebra de Lie de SU(2) e matrizes de Pauli. A álgebra de Lie do grupo especial unitário $\mathbf{SU}(2)$ é formada por matrizes anti-hermítica com traço nulo, ou seja, do género

$$\begin{pmatrix} ia & \beta \\ -\overline{\beta} & -ia \end{pmatrix}$$

com $\beta \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}$. Uma base do espaço linear $\mathfrak{su}(2)$ é formada por

$$X_1 = \frac{i}{2}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = -\frac{i}{2}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \frac{i}{2}\sigma_3 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}$$

onde as σ_k são as matrizes de Pauli. É imediato verificar que as relaçõs de comutação são $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = X_1$ e $[X_3, X_1] = X_2$.

Estas são as mesmas relações entre os geradores canónicos de $\mathfrak{so}(3)$! ...

Álgebra de Lie de SL(2, ℝ). O grupo $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ é o subgrupo das matrizes invertíveis $A \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$ com determinante $\mathrm{Det}A = 1$. O espaço $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais dois por dois $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ é um espaço linear real isomorfo a $\mathbb{R}^4$, com coordenadas a, b, c e d, e o grupo $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ é portanto a quádrica definida pela equação cartesiana $ad - bc = 1$. As matrizes

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\,, \qquad H_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad H_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base do espaço linear $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^3$ das matrizes reais dois por dois com traço nulo, o hiperplano definido pela equação cartesiana $a + d = 0$ em $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Pela (20.4), os exponenciais

$$g(t) := e^{tX} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

e

$$h_+(x) := e^{xH_+} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad h_-(y) := e^{yH_-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\,,$$

com $t, x, y \in \mathbb{R}$, definem subgrupos a um parâmetro de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$. O exponencial

$$k(\theta) := e^{\theta(H_- - H_+)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, define o subgrupo a um parâmetro $\mathbf{SO}(2,\mathbb{R}) \subset \mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$, o grupo das rotações.

ex: Verifique as relações de comutação

$$[G, H_\pm] \ = \pm H_\pm \qquad [H_+, H_-] = 2G$$

e

$$g(t)\, h_\pm(x)\, g(-t) = h_\pm\left(e^{\pm t} x\right)$$

ex: Calcule $e^{t(H_+ + H_-)}$.

Geradores infinitesimais dos grupos unitários. Seja A um operador auto-adjunto de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Os operadores

$$U_t := e^{itA}$$

com t real (por exemplo, um "tempo") formam uma família a um parâmetro de operadores unitários, ou seja, U_0 é a identidade, e $U_t U_s = U_{t+s}$. Isto é evidente em dimensão finita, mas não trivial em dimensão infinita, onde a própria definição de exponencial precisa de uma versão do teorema espectral para operadores auto-adjuntos não necessariamente limitados.

O *teorema de Stone*[50] afirma que toda família a um parâmetro de operadores unitários U_t, desde que "fortemente contínua", é gerada por um operador auto-adjunto, possivelmente não limitado. Fortemente contínua significa que $\lim_{t\to s} \ \|U_t\,|\psi\rangle - U_s\,|\psi\rangle\,\| = 0$ para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. O *gerador infinitesimal* é definido pela fórmula natural

$$A\,|\psi\rangle := \lim_{t\to 0} \frac{U_t\,|\psi\rangle - |\psi\rangle}{it}$$

no domímio $D_A \subset \mathcal{H}$ onde o limite existe (e o que não é trivial é provar que este subespaço é suficientemente grande, ou seja, denso).

O teorema de Stone é particularmente importante em mecânica quântica, onde, por exemplo, o gerador da evolução temporal é o operador Hamiltoniano H, o observável que corresponde a energia do sistema. A evolução temporal de um sistema que é preparado no estado $|\psi(0)\rangle$ no tempo $t = 0$, é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itH/\hbar} \ |\psi(0)\rangle \ ,$$

que é a solução da *equação de Shrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,|\psi\rangle \ = H\,|\psi\rangle \quad .$$

Geradores infinitesimais do grupo de Weyl/Heisenberg. Outro exemplo clássico, importante em mecânica quântica ou mais em geral em análise de Fourier (vejam, por exemplo, [Fo89]), é o grupo de Weyl/Heisenberg, gerado pelas translações

$$(T_q f)(x) := f(x+q)$$

e pelas modulações

$$(M_p f)(x) := e^{ipx} f(x)\,,$$

com $q \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^* \approx \mathbb{R}$. Translações e modulações são grupos a um parâmetro de operadores unitários de $L^2(\mathbb{R})$, pois são invertíveis e é claro que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+q)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}} \left|e^{ipx} f(x)\right|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\,.$$

É possível provar que o gerador infinitesimal das translações é o operador momento $P = -iD$, definido, por exemplo, no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Ou seja,

$$\boxed{T_q = e^{iqP} \ = e^{qD}}$$

[50] M.H. Stone, On one-parameter unitary groups in Hilbert Space, *Annals of Mathematics* **33** (1932), 643-648.

Este fato é razoável, interpretando a fórmula de Taylor como

$$\begin{aligned} f(x+q) &= f(x) + q\,f'(x) + \frac{q^2}{2}\,f''(x) + \frac{q^3}{6}\,f'''(x) + \dots \\ &= \left(\left(1 + q\,D + \frac{q^2}{2}\,D^2 + \frac{q^3}{6}\,D^3 + \dots \right) f \right)(x) \end{aligned}$$

(naturalmente, esta não é uma demonstração!). O gerador infinitesimal das modulações é o operador *posição* Q, definido por $(Qf)(x) := x\,f(x)$, também no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Ou seja, como parece natural,

$$\boxed{M_p = e^{ipQ}}$$

Assim como T_q e M_p , os operadores momento e posição não comutam. De fato, satisfazem a relação de comutação

$$[P, Q] = -iI$$

e geram a álgebra de Lie do grupo de Heisenberg.

ex: Considere o espaço vetorial $V = \mathrm{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau $\leq n$, do género $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. O operador derivada envia o polinómio $f(x)$ no polinómio $(Df)(x) = f'(x)$. Determine a matriz D que representa o operador derivada na base de V formada pelos monómios $e_k(x) := x^k/k!$, com $k = 0, 1, \dots, n$. Calcule o exponencial e^{tD}, e verifique que

$$\left(e^{tD} f\right)(x) = f(x+t)$$

ou seja, $e^{tD} = T_t$, onde o operador translação é definido por $(T_t f)(x) = f(x+t)$.

21 Sistemas lineares

ref: [Ap69] *Vol. 2*, **7.9** , **7.16-17**, [HS74]

24 mai 2021

Campos lineares. Um *sistema linear homogéneo* com coeficientes constantes (real) é uma EDO autónoma $\dot{\mathbf{x}} = L(\mathbf{x})$ para uma variável $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, definida por um campo de vetores linear $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.

Fixada uma base de $\mathbb{R}^n$, por exemplo a base canónica, o sistema pode ser escrito em notação matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}\,, \tag{21.1}$$

onde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^\top \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna e $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz que representa o campo linear na base escolhida.

Fluxos lineares. A origem é uma solução de equilíbrio do sistema (21.1). É a única solução de equilíbrio de a matriz A é invertível.

Pelo teorema 20.4 (ou melhor, pela demonstração deste teorema), a solução do sistema (21.1) com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ é

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0\,.$$

A família a um parâmetro de operadores $\Phi_t := e^{tA}$, que a cada tempo $t \in \mathbb{R}$ e a cada ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder a o valor no instante t da solução com condição inicial $\mathbf{x}$, é dita *fluxo* do campo linear. Observe que $\Phi_0 = I$ e que $\Phi_{t+s} = \Phi_t\Phi_s$. Em particular, os Φ_t são invertíveis, e $\Phi_{-t} = (\Phi_t)^{-1}$.

O espaço linear $\mathbb{R}^n$ é chamado "espaço de fases" do sistema: é o espaço das possíveis condições iniciais, que determinam o futuro (e o passado) do sistema. Os caminhos $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{x})$ são chamados "trajetórias" do sistema, e as suas imagens, que são curvas no espaço de fases, são chamadas "órbitas".

Conjugações lineares. Naturalmente, é possível fazer mudanças lineares de coordenadas $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ com $U \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, que transformam o sistema (21.1) no sistema *linearmente equivalente* $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$, definido pela matriz semelhante $B = UAU^{-1}$. Os fluxos de dois sistemas linearmente equivalentes são *linearmente conjugados*, no sentido em que

$$e^{tB} = Ue^{tA}U^{-1}\,.$$

Esta identidade diz que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{e^{tA}} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow U & & \downarrow U \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{e^{tB}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Isto implica, em particular, que o automorfismo $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ envia bijetivamente trajetórias/órbita de um sistema em trajetórias/órbitas do outro, respeitando a direção do tempo.

É claro então que a compreensão das soluções passa pela compreensão do exponencial de uma matriz semelhante UAU^{-1} mais "simples" possível.

Fluxos de campos lineares diagonalizáveis. Se A é diagonalizável, ou seja, possui n valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (não necesariamente diferentes) com vetores próprios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ que formam uma base, então o sistema (21.1) é equivalente a um sistema definido pela matriz diagonal $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. O exponencial $e^{\,t\Lambda}$ é uma matriz diagonal com valores próprios $e^{t\lambda_k}$. A solução com condição inicial genérica $\mathbf{x}(0) = \sum_{k=1}^n c_k\mathbf{v}_k$ é portanto uma sobreposição

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} c_k \mathbf{v}_k$$

O comportamento qualitativo assimptótico das soluções é então determinado pelos sinais dos valores próprios. Por exemplo, se todos os valores próprios são negativos, i.e. $\lambda_k < 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$, então todas as soluções decaem exponencialmente, e em particular $\mathbf{x}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Neste caso a origem é um equilíbrio "assimptoticamente estável". Se todos os valores próprios são positivos, i.e. $\lambda_k > 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$, então todas as soluções com condição inicial $\mathbf{x}(0) \neq 0$ se afastam exponencialmente da origem, e em particular $\|\mathbf{x}(t)\| \to \infty$ quando $t \to \infty$. Neste caso, a origem é um equilíbrio "assimptoticamente instável".

No caso geral, uma compreensão do comportamento qualitativo das trajetórias passa pela compreensão da forma normal de uma matriz genérica A, que nem sempre é diagonalizável.

Começamos pelo caso de dimensão dois, onde já são presentes todos os fenómenos típicos do caso geral e as provas são simples.

Sistemas lineares no plano. Um campo linear no plano é definido, na base canónica, por uma matriz quadrada 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

O sistema linear definido por A é

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{ou seja,} \qquad \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \tag{21.2}$$

Sejam λ_+ e λ_- os valores próprios de A pensada como matriz complexa, ou seja, as raízes complexas do polinómio caraterístico $\mathrm{Det}(zI - A)$. O produto $\lambda_+\lambda_-$ dos valores próprios é igual ao determinante $q := \mathrm{Det}(A) = ad - bc$, e a soma $\lambda_+ + \lambda_-$ dos valores próprios é igual ao traço $p := \mathrm{Tr}(A) = a + d$. Os valores próprios são então

$$\lambda_\pm = \frac{p \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

onde $\Delta = p^2 - 4q$.

Três casos distintos são possíveis. A matriz que define o campo é diagonalizável: isto acontece quando $\Delta > 0$ (pois neste caso a matriz admite dois valores próprios reais e distintos) ou quando $\Delta = 0$ e a matriz é proporcional à matriz identidade. A matriz que define o campo admite apenas uma reta de vetores próprios: isto acontece quando $\Delta = 0$ e a matriz não é proporcional à matriz identidade. Finalmente, a matriz que define o campo não admite valores e vetores próprios reais: isto acontece quando $\Delta < 0$ (e portanto as raízes do polinómio caraterístico não são reais).

Campos lineares planares diagonalizáveis. Se a matriz A é diagonalizável sobre os reais (e, em particular, $\Delta \geq 0$), então admite dois vetores próprios independentes $\mathbf{v}_\pm$, com valores próprios reais $\lambda_\pm \in \mathbb{R}$, respetivamente (não necessariamente distintos), assim que $A\mathbf{v}_\pm = \lambda_\pm \mathbf{v}_\pm$. Na base formada pelos vetores $\mathbf{v}_+$ e $\mathbf{v}_-$ o campo linear L é portanto definido pela matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

, que é um equilíbrio, cujo fluxo é também diagonal

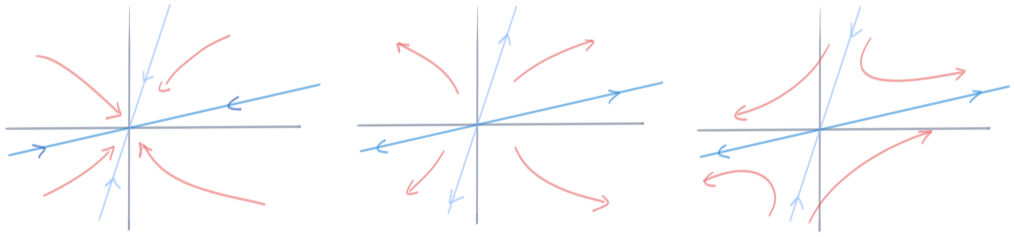
$$e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}$$

A solução com condição inicial genérica $\mathbf{x}(0) = a\mathbf{v}_+ + b\mathbf{v}_-$ é portanto

$$\mathbf{x}(t) = ae^{\lambda_+ t}\mathbf{v}_+ + be^{\lambda_- t}\mathbf{v}_-$$

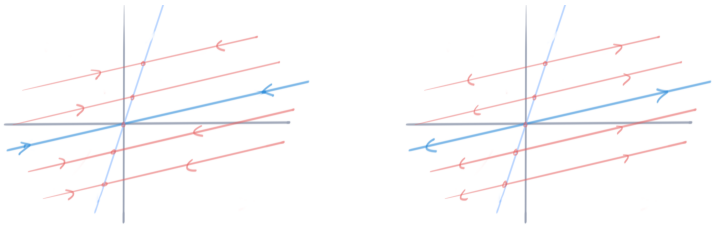
A origem, que é um equilíbrio, é dita *nodo estável* se $\lambda_\pm < 0$ (logo se $q > 0$ e $p < 0$), assim que todas as trajetórias convergem exponencialmente para a origem. É dita *nodo instável* se $\lambda_\pm > 0$ (logo se $q > 0$ e $p > 0$), assim que todas as trajetórias com condição inicial não nula divergem

exponencialmente. É dita e *ponto de sela* se os valores próprios têm sinais opostos, por exemplo $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ (logo quando $q < 0$). Neste terceiro caso, as trajetórias que começam na reta gerada por $\mathbf{v}_-$ convergem exponencialmente para a origem, e todas as outras trajetórias divergem, desenhando curvas parecidas a hipérbolas.



Nodos estável, nodo instável e ponto de sela.

Se um dos valores próprios é nulo, por exemplo $\lambda_- = 0$, então todos os pontos da reta gerada por $\mathbf{v}_-$ são soluções de equilíbrio. As outras trajetórias vivem em retas paralelas ao vetor próprio $\mathbf{v}_+$, e se afastam ou se aproximam da reta gerada por $\mathbf{v}_-$ dependendo se o sinal de λ_+ é positivo ou negativo, respetivamente. Se os dois valores próprios são nulos, o sistema é trivial e todos os pontos do plano são pontos de equilíbrio. É claro que estas últimas duas possibilidades não representam sistemas "genéricos", pois não persistem ao fazer pequenas perturbaçõs dos parâmetros.



Nodos com um valr próprio nulo.

Campos lineares planares com apenas um vetor próprio. O segundo caso é uma matriz A que admite apenas um espaço próprio de dimensão um, contendo um vetor próprio $\mathbf{v}_1$, com valor próprio $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja $\mathbf{w}$ um vetor não nulo independente de $\mathbf{v}_1$. Então a matriz que representa o campo linear na base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}$ é uma matriz diagonal superior do género (15.1). As entradas diagonais são iguais a λ (pois uma segunda entrada diagonal diferente seria mais uma raiz do polinómio caraterístico, logo mais um valor próprio diferente e portanto mais um vetor próprio independente) e entrada superior direita é diferente de zero (pois caso contrário a matriz seria diagonalizável). Ou seja, o campo linear envia $L\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ e $L\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{w}$ com $a \neq 0$. Na base formada pelos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 := a^{-1}\mathbf{w}$, o campo linear L é portanto definido pela matriz triangular superior

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{21.3}$$

cujo fluxo é

$$e^{tJ_\lambda} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A solução com condição inicial genérica $\mathbf{x}(0) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$ é portanto

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\left((a + bt)\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2\right)$$

A origem é dita *nodo degenerado*, estável ou instável, dependendo do sinal de λ.

ex: Discuta o caso em que um dos valores próprios, eventualmente o único, é $\lambda = 0$.

Blocos de Jordan no plano. Uma prova mais abstrata do fenómeno ilustrado acima introduz a ideia das "cadeias de Jordan", os tijolos elementares da forma normal de Jordan de uma matriz.

Seja L o campo linear definido, na base canónica, pela matriz A. Assumimos que L admite apenas um espaço próprio de dimensão um, gerado pelo vetor próprio $\mathbf{v}_1$ com valor próprio λ. Isto significa que o núcleo do operador $L_\lambda := L - \lambda$ é $\mathrm{Ker}(L_\lambda) = \mathbb{R}\mathbf{v}_1$. Por razões dimensionais, também a imagem de L_λ tem dimensão um. A interseção das duas retas não pode ser trivial, caso contrário o plano seria uma soma direta $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Im}(L_\lambda) \oplus \mathrm{Ker}(L_\lambda)$ de dois subespaços invariantes, logo o operador L seria diagonalizável. Isto significa que $\mathrm{Im}(L_\lambda) = \mathrm{Ker}(L_\lambda)$, e em particular existe um vetor (não nulo) $\mathbf{v}_2$ tal que $L_\lambda \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, que formam uma "cadeia de Jordan", são independentes. De fato, seja $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = 0$. Aplicando o operador L_λ obtemos $L_\lambda(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = a_2\mathbf{v}_1 = 0$ (pois $L_\lambda\mathbf{v}_1 = 0$ e $L_\lambda\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$), e portanto $a_2 = 0$. Mas então $a_1\mathbf{v}_1 = 0$ implica que também $a_1 = 0$. Finalmente, basta observar que, na base formada por $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ (chamada "base de Jordan"), o operador L é representado pela matriz (21.3), pois $L\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ e $L\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$.

Campos lineares planares sem vetores próprios. O terceiro e último caso é um campo linear L definido por uma matriz A sem valores próprios reais (e portanto $\Delta < 0$). Podemos pensar que a mesma matriz real A define um operador $L^{\mathbb{C}}$ no plano complexo $\mathbb{C}^2$, a "complexificação do operador L definido no plano $\mathbb{R}^2$. Este operador $L^{\mathbb{C}}$ admite dois valores próprios distintos e conjugados

$$\lambda_\pm = \alpha \pm i\omega\,.$$

com $\omega > 0$ (conjugados pelo teorema 7.3, pois o polinómio caraterístico tem coeficientes reais, e diferentes porque o operador L não admite valores próprios reais). Se $\mathbf{v}_+$ é um vetor próprio associado ao valor próprio λ_+, assim que $A\mathbf{v}_+ = \lambda_+\mathbf{v}_+$, então $\mathbf{v}_- = \overline{\mathbf{v}_+}$ é um vetor próprio com valor próprio λ_-, pois

$$A\mathbf{v}_- = A\overline{\mathbf{v}_+} = \overline{A\mathbf{v}_+} = \overline{\lambda_+}\,\overline{\mathbf{v}_+} = \lambda_-\,\mathbf{v}_-\,.$$

Os vetores

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{e}_- = \frac{1}{2i}(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)$$

são independentes e reais, logo formam uma base de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$. Observando que $\mathbf{v}_\pm = \mathbf{e}_+ \pm i\mathbf{e}_-$, um cálculo elementar mostra que

$$A\mathbf{e}_+ = \alpha\,\mathbf{e}_+ - \omega\,\mathbf{e}_- \qquad \text{e} \qquad A\mathbf{e}_- = \alpha\,\mathbf{e}_- + \omega\,\mathbf{e}_+$$

Portanto, a matriz que representa o campo linear L na base formada por $\mathbf{e}_+$ e $\mathbf{e}_-$ é a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soma de αI e da matriz anti-simétrica $-\omega J$, com $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Como toda matriz comuta com os múltiplos da identidade, pelo teorem 20.5 podemos calcular separadamente os fluxos de αI e $-\omega J$ e depois multiplicar. O fluxo da parte diagonal é simplesmente $e^{\,t\alpha I} = e^{\alpha t} I$. Por outro lado, um cálculo elementar (que usa a série de Taylor das funções trigonométricas) mostra que o fluxo de $-\omega J$ é

$$e^{-t\omega J} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

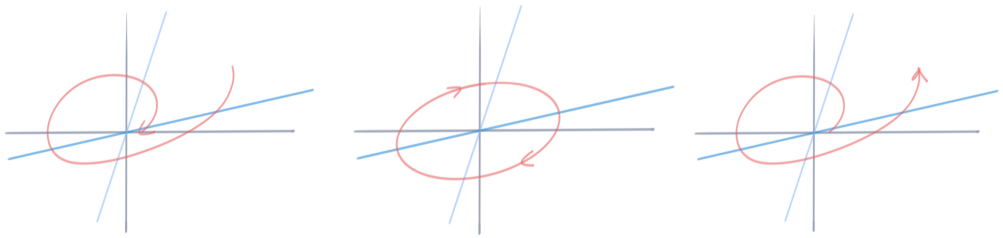
e representa uma rotação horária de um ângulo ωt (ou seja, uma rotação horária com frequência angular ω). O resultado é que o fluxo do campo linear, na base $\mathbf{e}_+$ e $\mathbf{e}_-$, é

$$e^{t(\alpha I - \omega J)} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

A solução com condição inicial genérica $\mathbf{x}(0) = a\mathbf{e}_+ + b\mathbf{e}_-$ é portanto

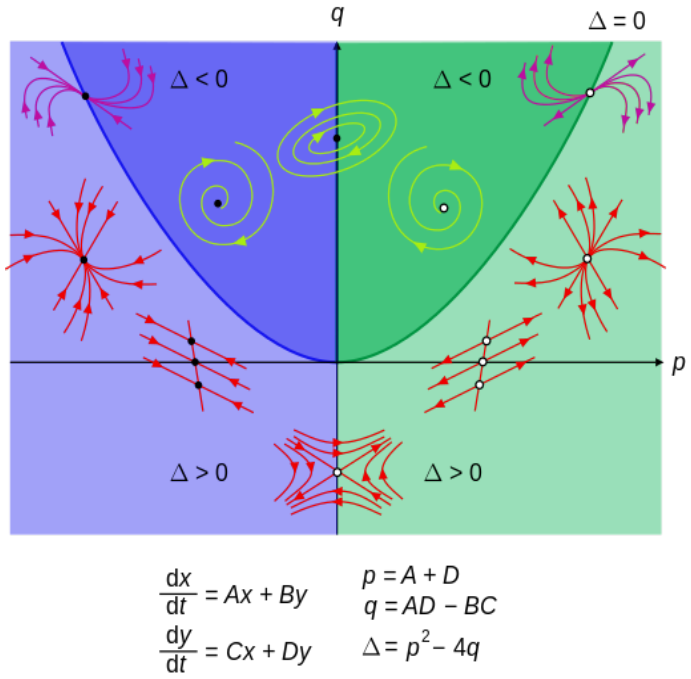
$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t}\left((a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t))\mathbf{e}_+ + (-a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t))\mathbf{e}_-\right)$$

Se $\alpha = 0$ (logo $p = 0$), então as órbitas são elipses $a^2+b^2 =$ constante, e a origem é chamada *centro*. Este caso corresponde a um oscilador harmónico. Se $\alpha \neq 0$, as órbitas são espirais logarítmicas, que saem da origem ou entram na origem, dependendo do sinal de α. A origem é dita *foco estável* se $\alpha < 0$ (logo se $p < 0$), e *foco instável* se $\alpha > 0$ (logo se $p > 0$). Os focos estáveis correspondem ao caso físico de um oscilador amortecido.



Focos estável, centro, e foco instável.

Desenho global. É claro que a estabilidade ou instabilidade de nodos ou focos é preservada para pequenas perturbações dos parâmetros, pois as partes reais dos valores próprios mantêm os seus sinais. Esta é uma figura famosa dos possíveis retatos de fase, dependendo do traço e do determinante da matriz A (vejam, por exemplo, o clássico [HS74]).



By Maschen, from Wikimedia Commons.

ex: Discuta os casos degerados quando um dos valores próprios é nulo (ou seja, $\mathrm{Det}(A) = 0$).

ex: Considere o oscilador invertido

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= q \end{aligned}$$

Determine a natureza do equilíbrio. Determine a solução com condições iniciais genéricas $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.

ex: Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas órbitas à volta da posição de equilíbrio no espaço de fases) dos seguintes sistemas lineares homogéneos.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 4x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -7x + y \\ \dot{y} = -4x - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x + 5y \\ \dot{y} = -5x - y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x + 5y \\ \dot{y} = -5x + y \end{cases}$$

Determine também a solução com condições iniciais genéricas $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.

ex: A corrente que circula num circuito LRC é solução da equação diferencial homogénea

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

Escreva o sistema linear correspondente, e esboce os possíveis retratos de fases dependendo dos valores dos parâmetros L, R e C.

ex: [Ap69] *Vol. 2*, **7.12**

Ciclotrão. A força de Lorentz que age sobre uma partícula de carga q em um campo magnético $\mathbf{B}$ é igual ao produto vetorial $\mathbf{F} = (q/c)\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, onde $\mathbf{v}$ é a velocidade da partícula e $c \simeq 299,792,458$ m/s denota a velocidade da luz. Consequentemente, a equação do movimento (de Newton) da partícula de massa m é

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Se o campo é homogéneo e constante, por exemplo $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ com B independente da posição e do tempo, então a componente vertical v_z da velocidade $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ é constante (pois tem derivada nula), e as componentes v_x e v_y satisfazem o sistema de EDOs lineares

$$\begin{aligned} \dot{v_x} &= \omega\, v_y \\ \dot{v_y} &= -\omega\, v_x \end{aligned}$$

onde $\omega = qB/mc$ é chamada *frequência de ciclotrão*. As trajetórias da partícula são hélices

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + (A\cos(\omega t + \varphi), A\sin(\omega t + \varphi), v_z t)$$

onde os parâmetros $\mathbf{a}, v_z, A, \varphi$ dependem da posição e da velocidade iniciais.

Blocos de Jordan. Seja $L : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ um operador linear definido num espaço linear complexo de dimensão finita. Dado um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, denotamos por L_λ o operador $L - \lambda$. Se o núcleo de L_λ não é trivial, então λ é um valor próprio de L, e $\mathbf{V}_\lambda = \mathrm{Ker}(L_\lambda)$ é o espaço próprio associado.

Um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é dito *vetor próprio generalizado* se está no núcleo de alguma potência de L_λ, ou seja, se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $L_\lambda^n \mathbf{v} = 0$ para algum inteiro minimal $n \geq 1$. Este inteiro n é dito *período* de $\mathbf{v}$, e o vetor $\mathbf{v}$ é também dito *L_λ-cíclico* (a órbita de $\mathbf{v}$ pela aplicação L_λ é formada por n vetores não nulos distintos).

Se o período é $n = 1$, então $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de L. Em geral, os n vetores

$$\mathbf{v}_1 = L_\lambda^{n-1}\mathbf{v} \qquad \mathbf{v}_2 = L_\lambda^{n-2}\mathbf{v} \qquad \ldots \qquad \mathbf{v}_{n-1} = L_\lambda \mathbf{v}_n \qquad \mathbf{v}_n = \mathbf{v} \tag{21.4}$$

são vetores próprios generalizados, pois $L_\lambda^k \mathbf{v}_k = L_\lambda^k L_\lambda^{n-k}\mathbf{v} = L_\lambda^n \mathbf{v} = 0$, e $\mathbf{v}_1$ é um vetor próprio com valor próprio λ. O espaço gerado pelos $\mathbf{v}_k$'s é L-invariante porque

$$L\mathbf{v}_k = L(L_\lambda^{n-k}\mathbf{v}) = L_\lambda^{n-k+1}\mathbf{v} + \lambda\, L_\lambda^{n-k}\mathbf{v} = \mathbf{v}_{k-1} + \lambda \mathbf{v}_k$$

onde, naturalmente, $\mathbf{v}_0 = (L - \lambda I)^n \mathbf{v} = 0$.

Teorema 21.1. *Se $\mathbf{v}$ é um vetor L_λ-cíclico de período n, então os n vetores (21.4) são linearmente independentes e geram um subsespaço L-invariante de vetores próprios generalizados.*

Demonstração. Seja $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+\cdots+a_n\mathbf{v}_n=0$. Ao aplicar L_λ^{n-1} aos dois termos da igualdade, temos que $a_n\mathbf{v}_1=0$, logo $a_n=0$. Ao aplicar L_λ^{n-2} aos dois termos da igualdade que sobra $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+\cdots+a_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}=0$, temos que $a_{n-1}\mathbf{v}_1=0$, logo também $a_{n-1}=0$. E assim a seguir.

□

O núcleo $\mathrm{Ker}(L_\lambda^k)$ é chamado *espaço próprio generalizado* de ordem k. É imediato ver que $\mathrm{Ker}(L_\lambda)\subset\mathrm{Ker}(L_\lambda^2)\subset\cdots\subset\mathrm{Ker}(L_\lambda^n)$.

Se os vetores (21.4) geram o próprio espaço $\mathbf{V}$, que portanto é isomorfo a $\mathbf{V}=\mathrm{Ker}(L_\lambda^n)\approx\mathbb{C}^n$, então o espaço $\mathbf{V}$ é dito *cíclico*. O cálculo acima mostra que

$$L\mathbf{v}_1=\lambda\mathbf{v}_1 \qquad \text{e} \qquad L\mathbf{v}_k=\lambda\mathbf{v}_k+\mathbf{v}_{k-1} \qquad \text{se } 2\le k\le n$$

Então, a matriz que representa L nesta base é

$$J_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix} \tag{21.5}$$

Em particular, $\mathbf{v}_1$ é um vetor próprio com valor próprio λ. O espaço próprio $\mathbf{V}_\lambda=\mathrm{Ker}(L_\lambda)$ é a reta $\mathbf{V}_\lambda=\mathbb{C}\mathbf{v}_1$, ou seja, a multiplicidade geométrica do valor próprio λ é igual a 1. A matriz (21.5) é dita *bloco de Jordan* de dimensão n, e a base (21.4) é dita *base de Jordan*, ou *cadeia de Jordan* de comprimento n.

Observe que um bloco de Jordan de dimensão n é da forma

$$J_\lambda=\lambda I+N$$

onde N é a matriz nilpotente (triangular superior)

$$N=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0\end{pmatrix} \tag{21.6}$$

que verifica $NE_k=E_{k-1}$, se E_k denotam os vetores coluna da base canónica de $\mathbb{C}^n$, e $N^n=0$. O operador definido pela matriz N , que envia $(x_1,x_2\ldots,x_{n-1},x_n)\mapsto(x_2,x_3,\ldots,x_n,0)$, é também chamado *deslocamento esquerdo*.

O polinómio caraterístico de um bloco de Jordan J_λ de comprimento n é $P_{J_\lambda}(z)=(z-\lambda)^n$, e portanto a multiplicidade algébrica do valor próprio λ é n. O polinómio minimal (o polinómio mónico $p(t)$ de grau mínimo tal que $p(J)=0$) é também $M_{J_\lambda}(z)=(z-\lambda)^n$ (comparado com o polinómio minimal da matriz λI, com I matriz identidade de ordem n, que é apenas $M_{\lambda I}(z)=(z-\lambda)$).

Quase-polinómios e derivada. O modelo de um bloco de Jordan é o operador derivação $\partial:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$, definido por $(\partial f)(t):=f'(t)$, no espaço linear $\mathbf{V}$ dos quase-polinómios $f(t)=p(t)e^{\lambda t}$ de grau $\deg(p)<n$. Se $\lambda=0$, então $\partial^n=0$, pois a n-ésima derivada de um polinómio de grau $<n$ é nula. Em geral, é imediato verificar que $(\partial-\lambda)^n=0$. O vetor próprio é $f(t)=e^{\lambda t}$, com valor próprio λ. A base de Jordan é

$$e^{\lambda t} \qquad t\,e^{\lambda t} \qquad \tfrac{1}{2}\,t^{\,2}\,e^{\lambda t} \qquad \ldots \qquad \tfrac{1}{(n-1)!}\;t^{n-1}\;e^{\lambda t}$$

Nesta base, o operador ∂ é representado pela matriz (21.5).

Fluxo de um bloco de Jordan. Consideramos um bloco de Jordan J_λ de dimensão n, definido em (21.5). O exponencial de $t\ J_\lambda$ define o fluxo do sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = J_\lambda\, \mathbf{x}$$

cujo espaço de fases é um espaço cíclico $\mathbb{C}^n$. Como a parte nilpotente N comuta com λI, podemos calcular separadamente os exponenciais e depois multiplicar. Sendo N nilpotente de período n, temos que $N^n = 0$ e portanto também $N^k = 0$ se $k \geq n$. Consequentemente, a série que define o exponencial de tN é de fato um polinómio de grau $n-1$, pois

$$e^{tN} \ = I + tN + \frac{t}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1}\,.$$

O exponencial da parte diagonal é $e^{t\lambda}I$, e finalmente

$$\begin{aligned} e^{tJ_\lambda} \ &= e^{t\lambda}\left(I + tN + \frac{t}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1}\right) \\ &= e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sendo uma correção polinomial desprezável se comparada com um crescimento ou um decaimento exponenciais, é claro que o comportamento assimptótico das trajetórias do sistema linear definido por um bloco de Jordan apenas dependem do sinal da parte real de λ, desde que não seja nula.

Teorema 21.2. *Se $\Re(\lambda) < 0$, então para todo $0 < \alpha < |\Re(\lambda)|$ existe uma constante C tal que*

$$\|e^{tJ_\lambda}\mathbf{v}\| \leq C\, e^{-\alpha t}\, \|\mathbf{v}\| \qquad \textit{se} \quad t \geq 0\,.$$

Demonstração. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ é uma base de Jordan, então um vetor genérico é $\mathbf{v} = \sum_k a_k \mathbf{v}_k$. É claro que

$$e^{tJ_\lambda}\ \mathbf{v} = e^{\lambda t}\ \left(\sum_i a_i\, p_{ik}(t)\right)\mathbf{v}_k$$

onde os $p_{ik}(t)$'s são certos polinómios de grau $< n$, que apenas dependem da dimensão n do bloco de Jordan. Seja $\Re(\lambda) = -\rho < 0$. Consideramos $0 < \alpha < \rho$, e definimos $\varepsilon = \rho - \alpha > 0$. Podemos definir uma norma no espaço cíclico gerado pelos $\mathbf{v}_k$'s de acordo com $\|\mathbf{v}\| := \max_k |a_k|$. Então, se $M = \max_{i,k} M_{ik}$ denota o valor máximal dos $M_{ik} = \sup_{\ t\geq 0} |e^{-t\varepsilon} p_{ik}\ (t)|$ (que são finitos porque $\varepsilon > 0$), é claro que

$$\|e^{tJ_\lambda}\mathbf{v}\| \leq M\, e^{-\alpha t}\, \|\mathbf{v}\|$$

para todos os tempos positivos $t \geq 0$. Como todas as normas de um espaço de dimensão finita são equivalentes, a mesma afirmação é verdadeira se usamos a norma euclidiana, possivelmente substituíndo a constante M com alguma outra constante C. □

Assim, se $\Re(\lambda) < 0$, todos os vetores são contraídos pelo fluxo de J_λ, e decaem exponencialmente para zero quando $t \to \infty$.

Invertendo a direção do tempo, é claro que se $\Re(\lambda) = \rho > 0$ e $\rho > \beta > 0$, então existe uma constante C tal que

$$\|e^{-tJ_\lambda}v\| \leq C\, e^{-\beta t}\, \|v\| \qquad \forall\, t \geq 0$$

Assim, se $\Re(\lambda) > 0$, todos os vetores são dilatados pelo fluxo de J_λ, e decaem exponencialmente para zero quando $t \to -\infty$.

Forma normal de Jordan. Acontece que todo operador linear num espaço linear complexo de dimensão finita é uma soma direta de blocos de Jordan.

Teorema 21.3 (forma normal de Jordan)**.** *Seja L é um operador linear de um espaço vetorial complexo de dimensão finita $\mathbb{C}^n$. O espaço é uma soma direta $\mathbb{C}^n = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_d$ de subespaços L-invariantes cíclicos.*

Se em cada subespaço invariante cíclico escolhemos uma base de Jordan, a matriz que representa L na base resultante é uma matriz diagonal em blocos

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_d} \end{pmatrix} \tag{21.7}$$

onde cada $J_{\lambda_k} = \lambda_k I + N_k$ é um bloco de Jordan da forma (21.5) de dimensão $n_k \leq n$. Os λ_k's, não necessariamente diferentes, são os valores próprios de L, ou seja, as raízes do polinómio caraterístico $P_A(z) = \mathrm{Det}(zI - A)$, se A é a matriz que representa L na base canónica. De fato, o polinómio caraterístico é um produto $P_A(z) = \prod_k (z - \lambda_k)^{n_k}$. A *multiplicidade algébrica* de cada valor próprio λ é igual à soma das dimensões n_k dos blocos de Jordan com $\lambda_k = \lambda$. A *multiplicidade geométrica* do valor próprio λ é a dimensão do espaço próprio $\mathrm{Ker}(L_\lambda)$, que é igual à cardinalidade de blocos de Jordan com $\lambda_k = \lambda$. O polinómio minimal de A é um produto $M_A(z) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (z - \lambda)^{\mu_\lambda}$, sendo μ_λ a dimensão do maior bloco de Jordan com $\lambda_k = \lambda$.

Se A é a matriz que representa o operador L na base canónica (ou em qualquer outra base), então existe uma matriz invertível U (cujas colunas são os vetores das bases de Jordan) tal que $U^{-1}AU = J$. A *forma canónica* J é única a menos de permutações dos blocos. Em particular, a matriz pode ser representada como uma soma

$$A = \Lambda + N$$

de uma matriz semi-simples, ou seja, diagonalizável, $\Lambda = U(\lambda_1 I \oplus \lambda_2 I \oplus \dots)U^{-1}$ e uma matriz nilpotente $N = U(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots)U^{-1}$ que comutam.

As demonstrações clássicas do teorema 21.3 são elementares mas demoradas, e podem ser encontradas, por exemplo, em [Ax97, HS74, La87].

Forma normal de Jordan de matrizes reais. Consideramos agora um operador $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definido, na base canónica, pela matriz real $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Podemos pensar em A como numa matriz complexa, que define a complexificação , $L^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, e como tal conjugada, de acordo com o teorema 21.3, a uma matriz diagonal em blocos (21.7). Como A é real, o seu polinómio caraterí stico tem coeficientes reais. Pelo teorema 7.3, os valores próprios de A são números reais λ ou pares de números complexos conjugados $\lambda = \alpha + i\omega$ e $\overline{\lambda} = \alpha - i\omega$.

Teorema 21.4 (forma normal de Jordan real)**.** *Seja L um operador no espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Então o espaço total é uma soma direta*

$$\mathbb{R}^n = \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathbf{E}_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \mathbf{E}_{\lambda,\overline{\lambda}} \right) .$$

de subespaços invariantes $\mathbf{E}_\lambda$, associados aos valores próprios reais λ's, e $\mathbf{E}_{\lambda,\overline{\lambda}}$, associados aos pares de valores próprios conjugados não reais $\lambda, \overline{\lambda}$.

Numa base apropriada, a restrição do operador L a cada subespaços invariantes $\mathbf{E}_\lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, é um bloco de Jordan da forma (21.5). Numa base apropriada, a restrição do operador L a cada subespaços invariante $\mathbf{E}_{\lambda,\overline{\lambda}}$, com $\lambda = \alpha + i\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, é uma matriz da forma

$$J_{\lambda,\overline{\lambda}} = \begin{pmatrix} R_{\lambda,\overline{\lambda}} & I & & & \\ & R_{\lambda,\overline{\lambda}} & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R_{\lambda,\overline{\lambda}} & I \\ & & & & R_{\lambda,\overline{\lambda}} \end{pmatrix} \tag{21.8}$$

com

$$R_{\lambda,\overline{\lambda}} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \qquad \textit{and} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Consequentemente, numa base apropriada, o operador L é representado por uma matriz diagonal em blocos (21.7), onde cada bloco J_k é da forma (21.5) ou (21.8).

Demonstração. De acordo com o teorema 21.3, $\mathbb{C}^n$ é uma soma direta de subespaços $\mathbf{V}_\lambda$ invariantes para a complexificação do operador L. A matriz que define o perador complexificado numa base apropriada é uma soma direta de blocos de Jordan.

Consideramos um bloco de Jordan com valor próprio real λ. Se $\mathbf{x} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ é o vetor L_λ-cíclico que gera o espaço cíclico $\mathbf{V}_\lambda$, então x ou y é um vector L_λ-cíclico real. Este vetor gera portando um espaço cíclico real $\mathbf{E}_\lambda$, e portanto uma cadeia de Jordan de dimensão real igual à dimensão complexa de $\mathbf{E}_\lambda$.

Consideramos agora um bloco de Jordan associado a um espaço cíclico $\mathbf{V}_\lambda$, com valor próprio $\lambda = \alpha + i\omega$ que não é real (ou seja, com $\omega \neq 0$. Então o operador complexificado também admite o valor próprio conjugado $\overline{\lambda} = \alpha - i\omega$, e o correspondente espaço cíclico $\mathbf{V}_{\overline{\lambda}}$. É claro que as dimensões de $\mathbf{V}_\lambda$ e $\mathbf{V}_\lambda$ são iguais, pois se $\mathbf{v}$ is L_λ-cíclico então $\overline{v}$ é $L_{\overline{\lambda}}$-cíclico, e vice-versa. Procedendo como no caso planar (i.e. usando um raciocínio análogo ao utilizado na demontração do teorema 17.9), é então fácil verificar que o subespaço invariante $\mathbf{V}_\lambda \oplus \mathbf{V}_{\overline{\lambda}} \subset \mathbb{C}^n$ dá origem a um subespaço invariante real $\mathbf{E}_{\lambda,\overline{\lambda}} \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão real igual à dimensão complexa de $\mathbf{V}_\lambda$, onde o operador é um bloco do género (21.8). □

Fatorização de operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes. De acordo com o teorema de Picard-Lindelöf 2.2, o espaço das soluções da EDO linear homogénea com coeficientes constantes de ordem n

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0 \tag{21.9}$$

é um subespaço linear $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de dimensão $\dim \mathcal{H} = n$ do espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente deriváveis. Pode ser caracterizado como sendo o núcleo $\mathcal{H} = \mathrm{Ker} L$ do operador diferencial com coeficientes constantes

$$L = \partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_2\partial^2 + a_1\partial + a_0\,.$$

É claro que a EDO (21.9) é equivalente a um sistema linear em $\mathbb{R}^n$, e portanto pode ser estudada com os métodos ilustrados até agora. No entanto, existe também uma outra possibilidade, que revela o significado analítico dos blocos de Jordan.

As soluções de (21.9) são combinações lineares (finitas) de "quase-polinómios". De fato, a conjetura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução de (21.9) se z é uma raiz do *polinómio caratéristico*

$$P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0\,.$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinómio $P(z)$ é um produto

$$P(z) = (z - \lambda_1)^{n_1}(z - \lambda_2)^{n_2} \dots (z - \lambda_\ell)^{n_\ell}$$

de fatores $(z - \lambda_k)^{n_k}$, onde os $\lambda_k \in \mathbb{C}$ são as raízes (em geral, complexas) do polinómio, e os inteiros $n_k \geq 1$ as respetivas multiplicidades algébricas. As multiplicidades algébricas satisfazem $n_1 + n_2 + \cdots + n_\ell = n$.

A correspondência entre o polinómio $P(z)$ e o operador $L = P(\partial)$ é um isomorfismo entre álgebra dos polinómios em uma variável complexa e a álgebra dos operadores diferenciais com coeficientes constantes. Ou seja, combinações lineares de polinómios são enviadas em combinações lineares de operadores diferenciais, e ao produto pontual entre dois polinómios corresponde o produto, i.e. a composição, dos operadores diferenciais (que é comutativa quando os coeficientes são constantes). Consequentemente, o operador L também fatoriza num produto

$$L = (\partial - \lambda_1)^{n_1}(\partial - \lambda_2)^{n_2} \dots (\partial - \lambda_\ell)^{n_\ell}\,.$$

Os operadores $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$, com λ_k's diferentes, comutam. Consequentemente, o núcleo de L contém os núcleos de cada um dos fatores. O núcleo de $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$ é o espaço de dimensão n_k dos quase-polinómios $p(t)e^{\lambda_k t}$, onde $p(t)$ é um polinómio de grau $\deg(p) < n_k$. Portanto, a solução geral de (21.9) é uma sobreposição

$$x(t) = \sum_k p_k(t)\, e^{\lambda_k t}\,,$$

onde $\lambda_k \in \mathbb{C}$ são as raízes do polinómio caraterístico, com multiplicidades algébricas n_k, e os $p_k \in \mathbb{C}[t]$ são polinómios arbitrários de grau $\deg(p_k) < n_k$.

Se os coeficientes a_k's da equação diferencial linear (21.9) são números reais (como acontece frequentemente na física!), então o polinómio caraterístico possui raízes reais ou pares de raízes complexas conjugadas. É então possível construir um espaço de dimensão real n de soluções reais, da forma seguinte.

A cada raiz real $\lambda_k \in \mathbb{R}$ com multiplicidade algébrica $n_k \geq 1$ está associado o espaço de dimensão real n_k dos quase-polinómios reais que anulam o operador $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$, ou seja, o espaço linear de dimensão real n_k dos quase-polinómios

$$p(t)\, e^{\lambda_k t}$$

com $\deg(p) < n_k$.

A cada par de raízes complexas conjugadas $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$ e $\overline{\lambda_k} = \alpha_k - i\omega_k \in \mathbb{C}$ (com $\omega_k > 0$), de multiplicidade algébrica n_k, ou seja, a cada fator

$$(\partial - \lambda_k)^{n_k}(\partial - \overline{\lambda_k})^{n_k} = \left((\partial - \alpha_k)^2 + \omega_k^2\right)^{n_k}$$

de L, está associado o espaço linear de dimensão real $2n_k$ dos quase-polinómios

$$p(t)\, e^{\alpha t}\cos(\omega_k) + q(t)\, e^{\alpha_k t}\sin(\omega_k t)$$

onde $p, q \in \mathbb{R}[t]$ são polinómios reais de grau $\deg(p) < n_k$ e $\deg(q) < n_k$.

ex: Verifique que o espaço das soluções de $\partial^n x = 0$ é o espaço linear $\mathrm{Pol}_{<n}$ dos polinómios de grau $< n$.

ex: Verifique que o núcleo do operador linear $L_\lambda := \partial - \lambda$ é o espaço linear de dimensão 1 gerado pela função $e^{\lambda t}$.

ex: Seja M_λ o operador *modulação*, definido por $(M_\lambda x)(t) := e^{\lambda t}x(t)$. Verifique que

$$\partial - \lambda = M_\lambda\, \partial\, {M_\lambda}^{-1}$$

(ou seja, M_λ realiza uma conjugação entre os operadores ∂ e $\partial - \lambda$), e portanto

$$(\partial - \lambda)^n = M_\lambda\, \partial^n\, {M_\lambda}^{-1}\ .$$

Deduza que o núcleo da potência $(\partial - \lambda)^n$, com $n \geq 1$, é o espaço linear (de dimensão n) dos quase-polinómios $p(t)e^{\lambda t}$ de grau $\deg(p) < n$.

ex: Determine a solução geral das seguintes ODEs lineares

$$\dddot{x} - \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \qquad \ddddot{x} = x \qquad \ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = 0 \qquad \dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

ex: [Ap69] *Vol. 2*, **6.9.**

Espaços estável, neutro e instável Seja $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ um campo linear, definido na base canónica pela matriz real A. O fluxo do sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

é dado por $\Phi_t = e^{\,tA}$. O comportamento assimptótico do fluxo em cada subespaço invariante (ou, com abuso de linguagem, cadeia de Jordan) $\mathbf{E}_\lambda$ ou $\mathbf{E}_{\lambda,\bar{\lambda}}$ descrito no teorema 21.4 depende da parte real do valor próprio λ correspondente.

É possível representar o espaço de fases como soma direta de três subespaços invariantes

$$\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^- \oplus \mathbf{E}^0 \oplus \mathbf{E}^+$$

onde o *espaço estável* $\mathbf{E}^-$ é a soma direta das cadeias de Jordan com $\Re(\lambda) < 0$, o *espaço instável* $\mathbf{E}^+$ é a soma direta das cadeias de Jordan $\Re(\lambda) > 0$, e finalmente o *espaço neutro* $\mathbf{E}^0$ é a soma direta das cadeias de Jordan com $\Re(\lambda) = 0$.

Poços e fontes. O sistema linear, ou, melhor, o ponto de equilíbrio 0, é chamado *poço* (em inglês, *sink*) se todos os valores próprios têm parte real negativa, i.e. $\Re(\lambda) < 0$, assim que $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^-$. Por exemplo, nodos e focos estáveis no plano são poços.

O sistema linear é chamado *fonte* (em inglês, *source*) se todos os valores próprios têm parte real positiva, assim que $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^+$. Por exemplo, nodos e focos instáveis no plano são fontes.

É claro que uma inversão da direção do tempo transforma um poço numa fonte e vice-versa pois $(e^{\,tA})^{-1} = e^{\,-tA}$. O seguinte teorema diz que os poços são os sistemas lineares cujas trajetórias decaem exponencialmente quando $t \to \infty$.

Teorema 21.5. *O sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ é um poço sse satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:*

i) todos os valores próprios de A têm parte real negativa,

ii) todas as soluções decaem $e^{tA}\mathbf{v} \to 0$ quando $t \to \infty$,

iii) existe um expoente $\alpha > 0$ e uma constante C tais que para todos os $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\left\| e^{tA}\ \mathbf{v} \right\| \le C\, e^{\,-\alpha t}\, \|\mathbf{v}\| \qquad \textit{se} \quad t \ge 0 \quad . \tag{21.10}$$

Demonstração. É óbvio que iii) ⇒ ii). É também claro que ii) ⇒ i), pois se algum valor próprio tem $\Re(\lambda) \ge 0$, então é fácil encontrar, na cadeia de Jordan correspondente, uma solução que não decai quando $t \to \infty$. Para provar que i) ⇒ iii), começamos por observar que iii) acontece em cada cadeia de Jordan, pelo teorema 21.2. Mas se fixamos uma norma em cada subespaço de uma soma direta (por exemplo a restrição da norma euclidiana), então podemos definir uma norma no espaço total considerando o máximo (ou a soma, ou a raíz quadrada da soma dos quadrados) entre as normas das componentes dos vetores. Relativamente a esta norma temos claramente a desigualdade (21.10) com algum expoente $\alpha > 0$ estritamente inferior ao menor dos $|\Re(\lambda)|$'s e alguma constante C. Pela equivalência de todas as normas em $\mathbb{R}^n$, a mesma desigualdade é verificada realativamente a toda outra norma, com possivelmente uma constante C diferente. □

Mudando a direção do tempo, obtemos também uma caraterização das fontes. Todas as trajetórias não nulas de uma fonte divergem exponencialmente, ou seja, satisfazem

$$\left\| e^{tA}\ \mathbf{v} \right\| \ge C\, e^{\,\beta t}\, \|\mathbf{v}\| \qquad \text{se} \quad t \ge 0 \quad ,$$

para algum expoente $\beta > 0$, alguma constante C.

Campos lineares hiperbólicos. Um campo linear L é chamado *hiperbólico* se o espetro da sua complexificação é disjunto do eixo imaginário, ou seja, se todos os valores próprios λ, reais ou complexos, têm parte real $\Re(\lambda) \neq 0$. O espaço de fases de um campo hiperbólico é então uma soma direta

$$\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^- \oplus \mathbf{E}^+$$

apenas dos subespaços estável e instável.

É claro que poços e fontes são hiperbólicos, mas o caso mais interessante é quando ambos os espaços $\mathbf{E}^{\pm}$ são não vazios. Um argumento análogo a prova do teorema 21.5 mostra a seguinte caraterização de um campo hiperbólico.

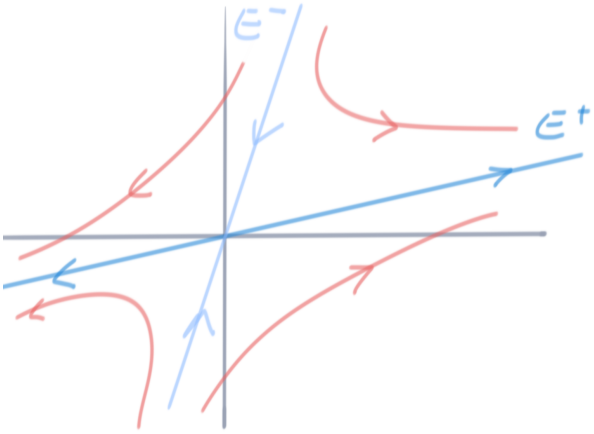
Teorema 21.6. *Seja A um campo hiperbólico em $\mathbb{R}^n$. O espaço de fase é uma soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^- \oplus \mathbf{E}^+$ dos supespaços invariantes estável e instável, e existem expoentes positivos $\alpha, \beta > 0$ e uma constante C tais que*

$$\|e^{tA}\mathbf{v}\| \leq C\, e^{\,-\alpha t}\, \|\mathbf{v}\| \qquad \textit{se} \quad \mathbf{v} \in \mathbf{E}^- \quad \textit{e} \quad t \geq 0$$

e

$$\|e^{-tA}\mathbf{v}\| \leq C\, e^{\,-\beta t}\, \|\mathbf{v}\| \qquad \textit{se} \quad \mathbf{v} \in \mathbf{E}^+ \quad \textit{e} \quad t \geq 0$$

O fluxo de um campo hiperbólico contrai os vetores do espaço estável e dilata os vetores do espaço instável. De fato, os espaços estável e instável podem ser caraterizados como os conjuntos dos vetores $\mathbf{v}$ satisfazendo $e^{\pm tA}\mathbf{v} \to 0$ quando $t \to \infty$, respetivamente. Se os dois subespaços não são vazios, trajetórias genéricas $e^{tA}\mathbf{v}$, que não começam em $\mathbf{E}^- \cup \mathbf{E}^+$, divergem quando $t \to \pm\infty$.



Os campos lineares hiperbólicos são o modelos paradigmáticos de uma grande classe de sistemas dinâmicos, tratada pela área da teoria moderna dos sistemas dinâmicos chamada *teoria hiperbólica*. Uma introdução clássica é [HS74].

25 mai 2021

Sistemas forçados. Um *sistema linear não homogéneo*, ou *forçado*, é uma lei

$$\dot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{21.11}$$

para o vetor $X(t) \in \mathbb{R}^n$, onde $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\ (\mathbb{R})$ e $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ é uma "força" dependente do tempo. As soluções da equação homogénea associada $\dot{\mathbf{y}} = A\,\mathbf{y}$ são $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\,\mathbf{z}$, onde $\mathbf{z}$ é um vetor constante. A conjetura $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\ \mathbf{z}(t)$ (obtida ao fazer "variar as constantes" da solução da homogénea) é solução de (21.11) sse

$$A\,e^{tA}\,\mathbf{z} + e^{tA}\,\dot{\mathbf{z}} = A\,e^{tA}\,\mathbf{z} + \mathbf{f}(t)\,,$$

e portanto sse $\mathbf{z}(t)$ é solução do sistema simples

$$\dot{\mathbf{z}} = e^{-tA}\,\mathbf{f}(t)\,.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, aplicado a cada entrada da matriz,

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\,\mathbf{f}(\tau)\,d\tau\,.$$

Sendo $\mathbf{z}(t_0) = e^{-t_0 A}\mathbf{x}(t_0)$, a solução de (21.11) com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ é

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\,\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\,\mathbf{f}(\tau)\,d\tau\,.}$$

Mais uma vez, mais fácil do que lembrar esta fórmula é útil lembrar o método.

Oscilador forçado. A posição e o momento linear do oscilador harmónico forçado satisfazem o sistema

$$\begin{aligned}\dot q &= p\\ \dot p &= -q + f(t)\end{aligned}$$

onde $f(t)$ é uma força externa. O fluxo da parte homogénea, definida pela matriz anti-simétrica $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, é uma rotação

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

A solução com condição inicial arbitrária $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$ é portanto

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

Em particular, a solução com condição inicial nula admite a representação integral

$$q(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau\,,$$

(isto é suficiente pois $p(t) = \dot q(t)$, de acordo com a primeira das equações). Assim, a resposta do oscilador é uma "convolução" entre a força $f(t)$ e a "resposta impulsiva" $\sin t$. A teoria da transformada de Laplace generaliza esta observação.

ex: Considere o sistema forçado

$$\begin{aligned}\dot q &= q + p\\ \dot p &= p + e^{-t}\end{aligned}$$

Determine a solução com condição inicial arbitrária $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.

ex: Considere o sistema forçado

$$\begin{aligned}\dot q &= -q + p\\ \dot p &= -p + t\end{aligned}$$

Determine a solução com condição inicial arbitrária $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.

Osciladores acoplados e forçados. Considere um sistema de dois osciladores acoplados e forçados, com lagrangiana

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\left(\dot x_1{}^2 + \dot x_2{}^2\right) + \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,(x_1 - x_2)^2 + f_1(x_1, t) + f_2(x_2, t)\,.$$

onde $\partial f_1/\partial x_1$ e $\partial f_2/\partial x_2$ são as forças externas que agem sobre o primeiro e o segundo oscilador, respetivamente.

Um caso simples é uma força constante, assim que $f_k(x_k, t) = x_k\, f(t)$. Nas coordenadas (não ortonormadas) $z_1 = (x_1 + x_2)/2$ e $z_2 = (x_1 - x_2)/2$ que diagonalizam a forma quadrática da energia potencial em ausência de força externa, as equações de Euler-Lagrange assumem a forma

$$\ddot z_1 \;= -\omega_1^2\, z_1 + 2\, f(t) \qquad \text{e} \qquad \ddot z_2 = -\omega_2^2\, z_2\,,$$

onde $\omega_1 = \omega$ e $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\varepsilon}$. Portanto, a força age sobre o centro de massa do sistema, de coordenada z_1, mas não sobre a oscilações "internas" da coordenada z_2.

ex: Determine a solução geral (pode assumir que $\omega = 1$).

ex: [Ap69] *Vol. 2*, **7.17.**

Linear control theory.

Referências

[Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, 1969 [*Cálculo*, Editora Reverté, 1999].

[Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR, 1985. [*Ordinary Differential Equations*, Springer, 1992]

[Ar87] V.I. Arnold, *Métodos matemáticos da mecânica clássica*, MIR, 1987. [*Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1989]

[Ar89] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, 1989. [*Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1988]

[Ax97] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, second edition, Springer, 1997.

[Ba77] F. Banino, *Geometria per fisici*, Feltrinelli, 1977.

[BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.

[Bl08] S.M. Blinder, *Guide to Essential Math, a review for Physics, Chemistry and Engineering Students*, Elsevier, 2008.

[Bo89] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Algebra I*, Springer, 1989.

[BR98] T.S. Blyth and E.F. Robertson, *Basic Linear Algebra*, McGraw Hill, 1998.

[Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.

[CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948. [*O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000].

[Di47] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (2nd edition), Clarendon Press, 1947

[Fe63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.

[Fo89] G.B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press, 1989.

[Go96] R. Godement, *Cours d'algébre* (Troisième édition mise à jour), Hermann Éditeurs, 1996.

[Ha58] P.R. Halmos, *Finite dimensional vector spaces*, Van Nostrand, 1958.

[HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.

[HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford University Press, 1959.

[KKR62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics*, McGraw-Hill, 1962.

[La87] S. Lang, *Linear Algebra*, Third Edition, UTM Springer, 1987.

[La97] S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, UTM Springer, 1997.

[LL78] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.

[MW85] J.E. Marsden and A. Weinstein, *Calculus I & II*, Springer, 1985.

[Me00] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

[MB99] S. MacLane and G. Birkhoff, *Algebra (Third Edition)*, AMS Chelsea Publishing, 1999.

[Na06] P.J. Nahin, *Dr. Euler's fabulous formula: cures many mathematical ills*, Princeton University Press, 2006.

[Pe05] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Knopf, 2005.

[RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2006.

[Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 2004.

[Ru87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[Se89] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1989.

[SG04] M. Stone and P. Goldbart, *Mathematics for Physics*, Cambridge University Press, 2004.

[St98] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Hartcourt Brace Jonovich Publishers, 1998.

[St09] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, fourth edition, Wellesley-Cambridge Press and SIAM 2009.
http://math.mit.edu/linearalgebra/ , MIT Linear Algebra Lectures

[Tr13] W.F. Trench, *Elementary Differential Equations*, 2013. Books and Monographs. Book 8.
http://digitalcommons.trinity.edu/mono/8

[Wa91] B.L. van der Waerden, *Algebra*, Springer, 1991 [*Moderne Algebra*, 1930-1931].

[We52] H. Weyl, *Space Time Matter*, Dover, 1952 [*Raum Zeit Materie*, 1921].

[Ze16] A. Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists*, Princeton University Press, 2016.