

Nome e n.º: _____

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nos espaços apropriados.

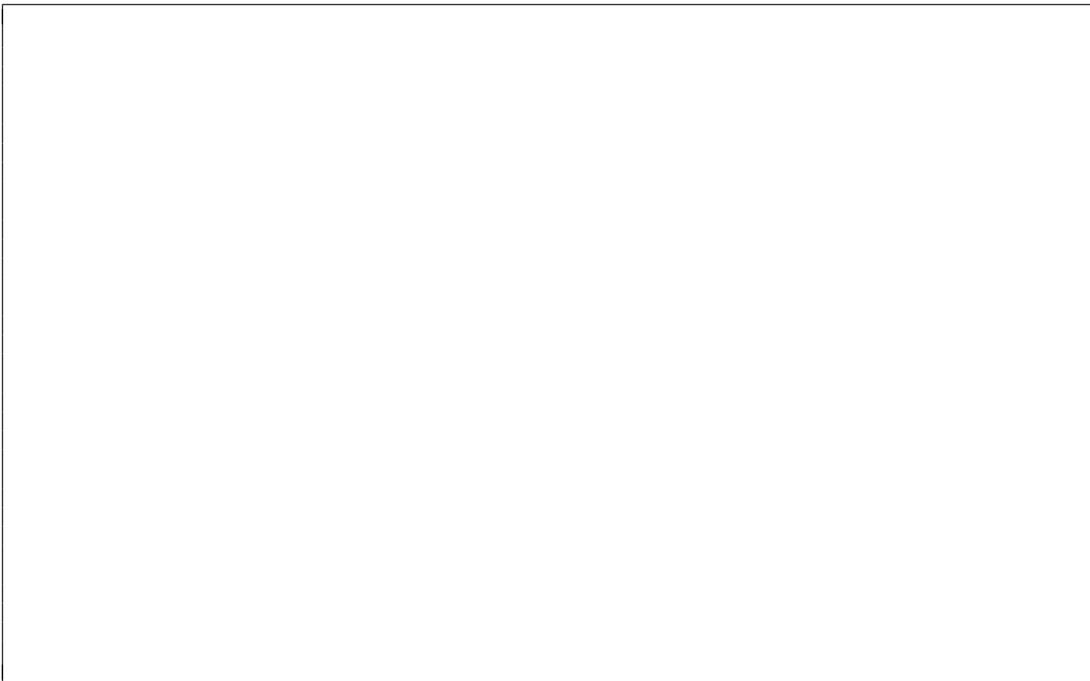
1. (2 valores) Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 1$ da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0.$$

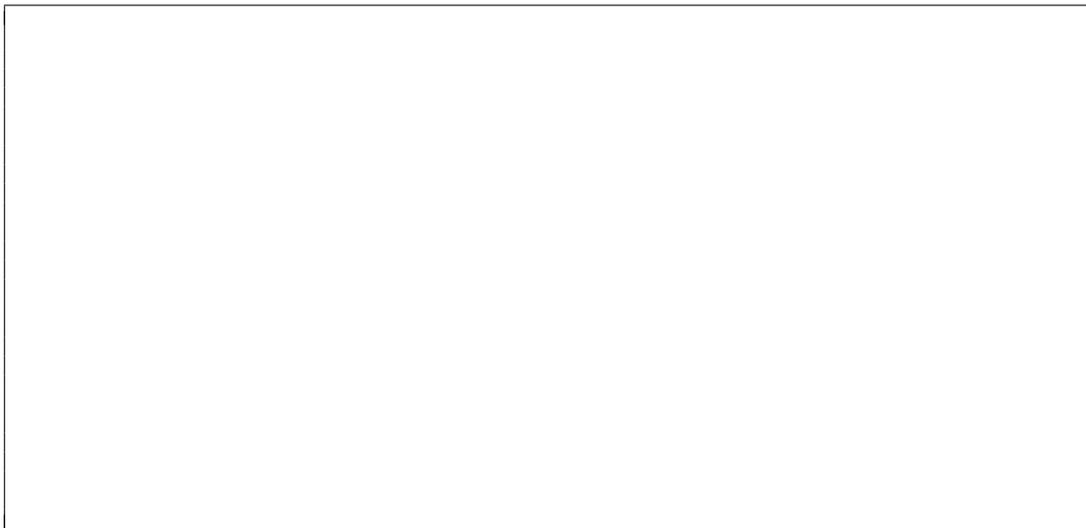


2. (2 valores) Determine a solução geral da equação diferencial linear não homogénea

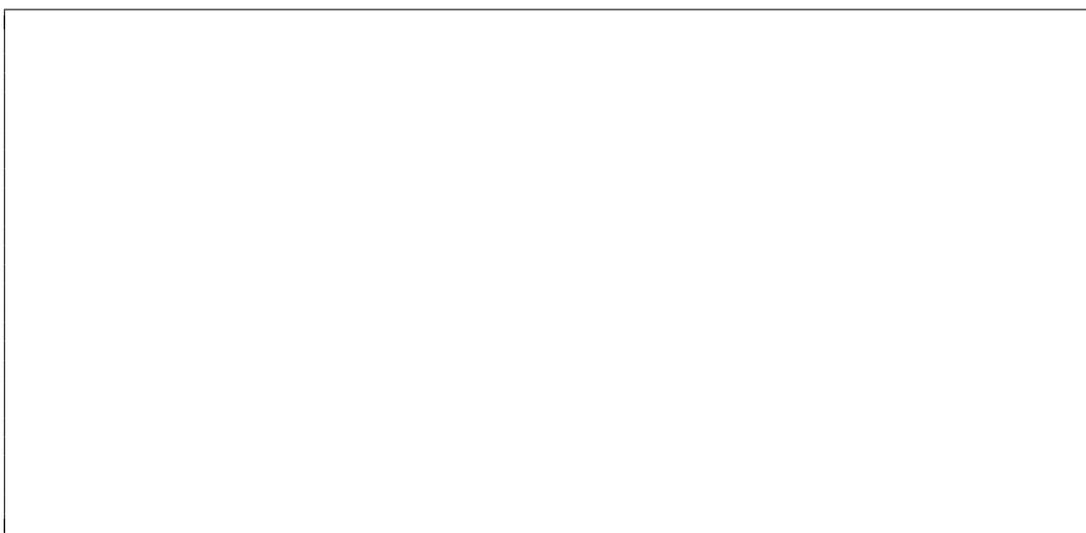
$$\ddot{x} + 4x = \cos(t).$$



3. (2 valores) Seja $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $\sqrt{2}y = -x$. Determine a matriz que representa R na base canônica.

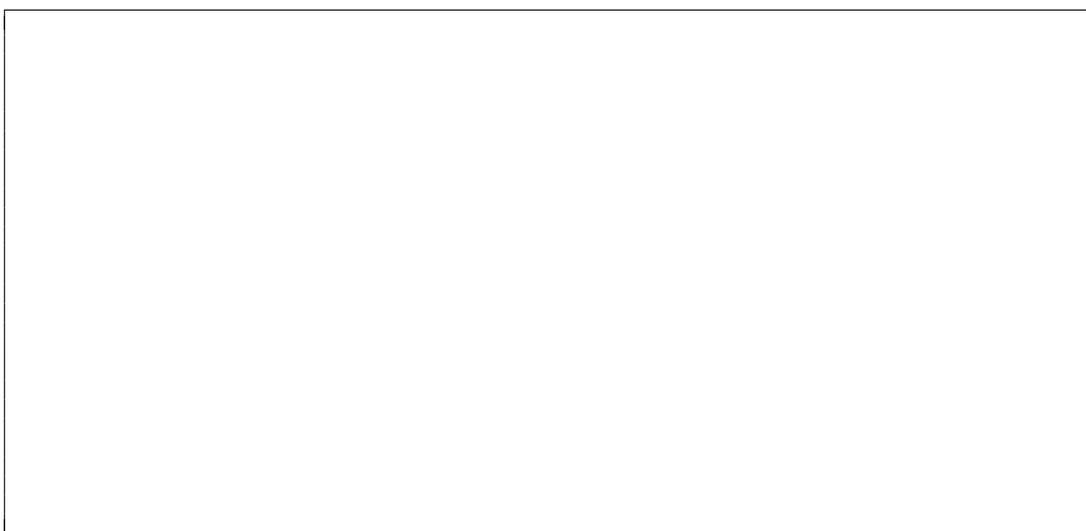


4. (2 valores) Seja $S : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ o operador linear definido por $S(x, y) = (x + iy, y - ix)$. Determine uma base ortonormal formada por vetores próprios de S , e a matriz diagonal que representa o operador nesta base.



5. (2 valores) Calcule os comprimentos dos semi-eixos e esboce o elipsóide definido pela equação

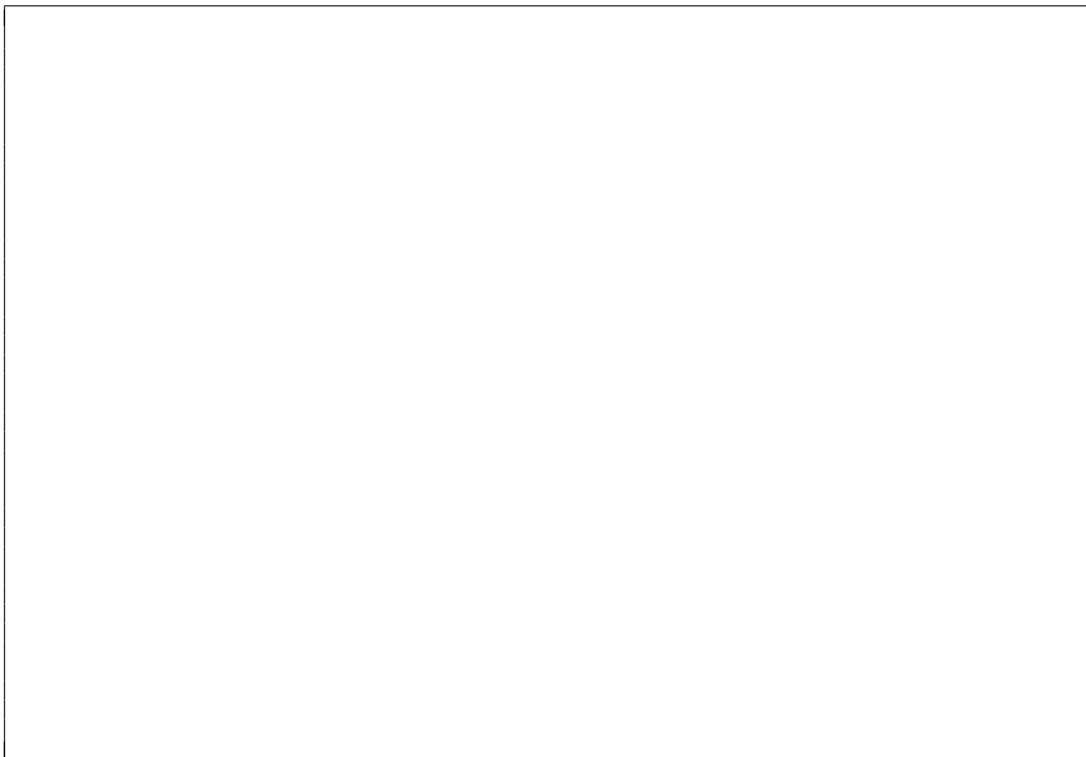
$$6x^2 + 2xy + 6y^2 \leq 1$$



6. (2 valores) Determine a solução do sistema

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -2q + p \\ \dot{p} &= -q - 2p\end{aligned}$$

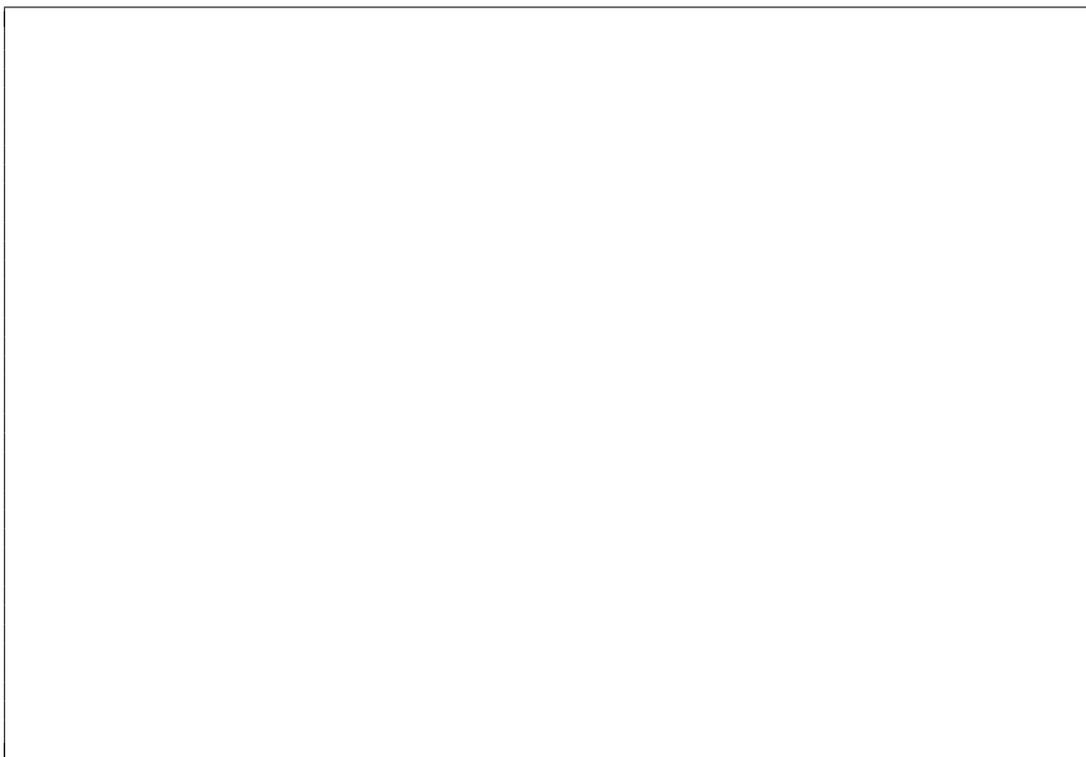
com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (1, 0)$, e esboce a órbita no plano q - p .



7. (2 valores) Considere o sistema não homogêneo

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p + \\ \dot{p} &= -q + \cos(2t)\end{aligned}$$

Determine a solução com condições iniciais nulas $(q(0), p(0)) = (0, 0)$.



8. (0.5 valores) As funções $\sinh(t)$ e $\cosh(t)$ são soluções da equação diferencial
 $\ddot{x} + x = 0$ $\ddot{x} + \dot{x} = 0$ $\ddot{x} - x = 0$ $\ddot{x} - \dot{x} = 0$
9. (0.5 valores) O operador linear A , definido no espaço euclidiano complexo \mathbb{C}^N , é hermitico se
 $A^*A - AA^* = 0$ $A^*A + AA^* = 0$ $A^* = A$ $A^* = -A$
10. (0.5 valores) Se A é uma matriz complexa quadrada, então A^2 é hermitica.
 Verdadeiro Falso
11. (0.5 valores) Existem matrizes diagonalizáveis A e B tais que também AB é diagonalizável.
 Verdadeiro Falso
12. (0.5 valores) Se A e B são duas matrizes unitárias, então também AB^* é unitária.
 Verdadeiro Falso
13. (0.5 valores) Se A é uma matriz ortogonal, então os seus valores próprios são imaginários puros.
 Verdadeiro Falso
14. (0.5 valores) Se A é uma matriz real anti-simétrica então e^A é ortogonal.
 Verdadeiro Falso
15. (0.5 valores) Se $\text{tr}A = 0$ então $\det(e^A) = 1$.
 Verdadeiro Falso
16. (0.5 valores) Existe uma matriz quadrada real tal que $A^5 = -I$.
 Verdadeiro Falso
17. (0.5 valores) O grupo a um parâmetro gerado pela matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é
 $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$ $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$
18. (0.5 valores) A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo das rotações $\mathbf{SO}(n)$ é
 o espaço linear das matrizes $n \times n$ hermiticas.
 o espaço linear das matrizes reais $n \times n$ anti-simétricas.
 o espaço linear das matrizes reais $n \times n$ com traço nulo.
19. (0.5 valores) Considere o sistema linear definido por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - y\end{aligned}$$

A origem é

- um nodo instável. um ponto de sela. um foco estável. um foco instável.