15/7/2021 especial	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica	☐ ENGFIS ☐ FIS

Nome e nº: ____________________

Instruções: `responda e justifique brevemente as suas respostas nos espaços apropriados.`

1. *(2 valores)* Determine a solução com condições iniciais $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 1$ da equação diferencial linear homogénea
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0\,.$$

2. *(2 valores)* Determine a solução geral da equação diferencial linear não homogénea
$$\ddot{x} + 4x = \cos(t)\,.$$

3. *(2 valores)* Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $\sqrt{2}\, y = -x$. Determine a matriz que representa R na base canónica.

4. *(2 valores)* Seja $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o operador linear definido por $S(x, y) = (x+iy, y-ix)$. Determine uma base ortonormal formada por vetores próprios de S, e a matriz diagonal que representa o operador nesta base.

5. *(2 valores)* Calcule os comprimentos dos semi-eixos e esboce o elipsóide definido pela equação

$$6x^2 + 2xy + 6y^2 \leq 1$$

6. *(2 valores)* Determine a solução do sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -2q + p \\ \dot{p} &= -q - 2p \end{aligned}$$

com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (1, 0)$, e esboce a órbita no plano q-p.

7. *(2 valores)* Considere o sistema não homogéneo

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p + \\ \dot{p} &= -q \ + \cos(2t) \end{aligned}$$

Determine a solução com condições iniciais nulas $(q(0), p(0)) = (0, 0)$.

8. *(0.5 valores)* As funções $\sinh(t)$ e $\cosh(t)$ são soluções da equação diferencial

   ◯ $\ddot{x} + x = 0$ ◯ $\ddot{x} + \dot{x} = 0$ ◯ $\ddot{x} - x = 0$ ◯ $\ddot{x} - \dot{x} = 0$

9. *(0.5 valores)* O operador linear A, definido no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^N$, é hermítico se

   ◯ $A^*A - AA^* = 0$ ◯ $A^*A + AA^* = 0$ ◯ $A^* = A$ ◯ $A^* = -A$

10. *(0.5 valores)* Se A é uma matriz complexa quadrada, então A^2 é hermítica.

    ◯ Verdadeiro ◯ Falso

11. *(0.5 valores)* Existem matrizes diagonalizáveis A e B tais que também AB é diagonalizável.

    ◯ Verdadeiro ◯ Falso

12. *(0.5 valores)* Se A e B são duas matrizes unitárias, então também AB^* é unitária.

    ◯ Verdadeiro ◯ Falso

13. *(0.5 valores)* Se A é uma matriz ortogonal, então os seus valores próprios são imaginários puros.

    ◯ Verdadeiro ◯ Falso

14. *(0.5 valores)* Se A é uma matriz real anti-simétrica então e^A é ortogonal.

    ◯ Verdadeiro ◯ Falso

15. *(0.5 valores)* Se $\mathrm{tr}A = 0$ então $\det\left(e^A\right) = 1$.

    ◯ Verdadeiro ◯ Falso

16. *(0.5 valores)* Existe uma matriz quadrada real tal que $A^5 = -I$.

    ◯ Verdadeiro ◯ Falso

17. *(0.5 valores)* O grupo a um parâmetro gerado pela matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é

    ◯ $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$ ◯ $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ ◯ $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

18. *(0.5 valores)* A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo das rotações $\mathbf{SO}(n)$ é

    ◯ o espaço linear das matrizes $n \times n$ hermíticas.
    ◯ o espaço linear das matrizes reais $n \times n$ anti-simétricas.
    ◯ o espaço linear das matrizes reais $n \times n$ com traço nulo.

19. *(0.5 valores)* Considere o sistema linear definido por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad y \\ \dot{y} &= \quad -x - y \end{aligned}$$

    A origem é

    ◯ um nodo instável. ◯ um ponto de sela. ◯ um foco estável. ◯ um foco instável.