

ENGFIS FIS

2019/20

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab: CG - Edifício 6 - 3.48, tel: 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

28 de Maio de 2020

Resumo

This is not a book! These are notes written for personal use while preparing lectures on “Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica” for students of FIS and MIENGFIS during the a.y.’s 2013/14, 2014/15, 2017/18, 2018/19 and now 2019/20. They are rather informal and certainly contain mistakes (indeed, they are constantly actualized). I tried to be as synthetic as I could, without missing the observations that I consider important.

Most probably I will not lecture all I wrote, and did not write all I plan to lecture. So, I included sketched paragraphs or whole chapters (those marked with an *), about material that I think should/could be lectured within the same course, given enough time. Some chapters, on first order differential equations and on basic linear algebra, are included for completeness, being lectured in Calculus or in Linear Algebra during the previous semester.

References contain some introductory manuals that I like, some classics, books where I have learnt things in the past century, recent books which I find interesting. Almost all material can be found in [Ap69].

Everything about the course may be found in my web pages

<http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/salteaching.html>

The notation is as follows:

e.g. means EXEMPLI GRATIA, that is, “for example”.

ex: means “exercise”, to be solved at home or in the classroom.

ref: means “references”, places where you can find and study what follows inside each section.

Black paragraphs form the main text.

Blue paragraphs deal with examples, applications and ideas relevant in physics, engineering or other sciences. They are the real reason why all this maths is worth studying.

Red paragraphs (mostly written in english) are more advanced or non trivial facts and results which may be skipped in a first (and also second) reading.

□ indicates the end of a proof.

Pictures were made with *Grapher* or *Paintbrush* on my MacBook, or taken from [Wikipedia](#), or produced with [Matlab](#) or [Mathematica](#)®8 .



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License](#).

<i>CONTEÚDO</i>	2
-----------------	---

Conteúdo

1	Equações diferenciais ordinárias*	5
2	Existência, unicidade e simulações*	11
3	EDOs simples, autónomas e separáveis*	17
4	Sistemas conservativos*	26
5	EDOs lineares de primeira ordem*	31
6	Simetrias e EDOs homogéneas*	34
7	Números complexos e oscilações	37
8	EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes	46
9	EDOs lineares não homogéneas	54
10	Espaços lineares*	61
11	Formas lineares*	67
12	Espaços euclidianos	72
13	Transformações lineares*	80
14	Transformações lineares e matrizes*	86
15	Valores e vetores próprios*	96
16	Operadores hermíticos e unitários	103
17	Teorema espectral	111
18	Formas quadráticas e pequenas oscilações	123
19	Simetrias, grupos e grupos de matrizes	143
20	Exponencial	156
21	Sistemas lineares	171

Notações

Conjuntos. $a \in A$ quer dizer que a é um elemento do conjunto A . $A \subset B$ quer dizer que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B . $A \cap B$ é a interseção dos conjuntos A e B , e $A \cup B$ é a reunião dos conjuntos A e B . $A \times B$ é o produto cartesiano dos conjuntos A e B , o conjunto dos pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

Números. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais. $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ denota o anel dos números inteiros. $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ denota o corpo dos números racionais. \mathbb{R} e \mathbb{C} são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

Funções. Uma função $f : X \rightarrow Y$, com *domínio* o conjunto X e *conjunto de chegada* o conjunto Y , é um subconjunto $R \subset X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe um único $y := f(x) \in Y$, dito *imagem* de x , tal que $(x, y) \in R$. Quando domínio e contradomínio são claros, uma função pode ser denotada apenas por $x \mapsto f(x)$, ou seja, identificada com a “regra” que determina $y = f(x)$ a partir de x . A *imagem* do subconjunto $A \subset X$ é o conjunto $f(A) := \{f(a) \text{ com } a \in A\} \subset Y$. Em particular, a *imagem/contradomínio* da função $f : X \rightarrow Y$ é o conjunto $f(X) := \{f(x) \text{ com } x \in X\} \subset Y$ dos valores da função. O *gráfico* da função $f : X \rightarrow Y$ é o subconjunto

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.q. } y = f(x)\} \subset X \times Y$$

do produto cartesiano do domínio e o conjunto de chegada. A função *identidade* $I_X : X \rightarrow X$ é definida por $I_X(x) = x$, e o seu gráfico é a *diagonal* $\{(x, x) \text{ com } x \in X\} \subset X \times X$.

A *restrição* da função $f : X \rightarrow Y$ ao subconjunto $A \subset X$ é a função $f|_A : A \rightarrow Y$ definida por $f|_A(a) := f(a)$.

A *composição* das funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : f(X) \subset Y \rightarrow Z$ é a função $g \circ f : X \rightarrow Z$ definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, ou seja,

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$$

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *injetiva* se $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$, e portanto a imagem $f(X)$ é uma “cópia” de X . Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *sobrejetiva* se todo $y \in Y$ é imagem $y = f(x)$ de algum $x \in X$, ou seja, se $Y = f(X)$. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *bijetiva/invertível* se é injetiva e sobrejetiva, e portanto admite uma função *inversa* $f^{-1} : Y \rightarrow X$, que verifica $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todos os $x \in X$ e $y \in Y$.

Espaço euclidiano. \mathbb{R}^n denota o espaço euclidiano de dimensão n . Fixada a base canónica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, \dots , $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, os pontos de \mathbb{R}^n são os vetores

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) := x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n$$

de coordenadas $x^i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

O *produto interno Euclidiano/canónico* é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n = \sum_{ij} \delta_{ij} x^i x^j.$$

(onde (δ_{ij}) é a matriz/símbolo de Kronecker igual a $\delta_{ii} = 1$ na diagonal e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$). O produto interno Euclidiano realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico) $(\mathbb{R}^n)^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e o próprio \mathbb{R}^n : o valor da forma linear (ou co-vetor) $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ no vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$.

A norma Euclidiana do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. A distância Euclidiana entre os pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}.$$

A bola aberta de centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto $B_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em \mathbb{R}^n se cada seu ponto $\mathbf{a} \in A$ é o centro de uma bola $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Os pontos e as relativas coordenadas no plano Euclidiano \mathbb{R}^2 ou no espaço Euclidiano 3-dimensional \mathbb{R}^3 (ou seja, as posições dos pontos materiais da física) são também denotados, conforme a tradição, pelas letras $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então $r := \|\mathbf{r}\|$ denota o comprimento do vetor \mathbf{r} , ou seja, a distância do ponto \mathbf{r} da origem do referencial.

Caminhos. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável do “tempo” $t \in I \subset \mathbb{R}$, ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$ com valores no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, a primeira derivada $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ é dita “velocidade”, e a sua norma $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$ é dita “velocidade escalar” (*speed*, em inglês). A segunda derivada $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$ é dita “aceleração”.

Campos. Um *campo escalar* é uma função real $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* é uma função $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F^1(\mathbf{x}), F^2(\mathbf{x}), \dots, F^k(\mathbf{x}))$, cujas coordenadas $F^i(\mathbf{x})$ são k campos escalares.

A derivada do campo diferenciável $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a aplicação linear $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma $\|\mathbf{v}\|$ suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana $\text{Jac } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := (\partial F^i / \partial x^j(\mathbf{x})) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$. Em particular, o *diferencial* do campo escalar $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a forma linear $du(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$du(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x^1}(\mathbf{x}) dx^1 + \frac{\partial u}{\partial x^2}(\mathbf{x}) dx^2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x^n}(\mathbf{x}) dx^n$$

(onde dx^k , o diferencial da função coordenada $\mathbf{x} \mapsto x^k$, é a forma linear que envia o vetor $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ na sua k -ésima coordenada $dx^k(\mathbf{v}) := v^k$). A derivada do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na direção do vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicado) no ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = du(\mathbf{x})\mathbf{v}.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vetorial $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$du(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

para todos os vetores (tangentes) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicados no ponto $\mathbf{x} \in X$).

1 Equações diferenciais ordinárias*

ref: [Ap69] Vol. 1, 8.1-7

Equação de Newton. A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma partícula de massa própria m num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}},$$

onde \mathbf{p} é o *momento linear*, definido por

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

sendo $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ a *velocidade*, $v = \|\mathbf{v}\|$ a *velocidade escalar*, e $c \simeq 299\,792\,458$ m/s a velocidade da luz, e onde \mathbf{F} é o *campo de forças* que age sobre a partícula. Em geral, a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ depende da posição \mathbf{r} da partícula, da sua velocidade \mathbf{v} , e, possivelmente, também explicitamente do tempo t .

No regime não relativístico, quando $v \ll c$, o momento linear é $\mathbf{p} \simeq m\mathbf{v}$, e portanto, se a massa m é constante (isto não acontece com um foguetão que queima combustível!), a equação de Newton assume a forma mais conhecida

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ denota a *aceleração* da partícula. Este é o arquétipo de uma “equação diferencial”, que físicos e engenheiros querem aprender a resolver, analiticamente ou numericamente, para calcular trajetórias e fazer previsões.

Partícula livre. A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma partícula livre (não relativística) de massa m num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\dot{\mathbf{p}} = 0 \quad \text{ou seja,} \quad m\mathbf{a} = 0, \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t)$ denota a *velocidade* e $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{r}}(t)$ denota a *aceleração* da partícula. Em particular, o *momento linear* $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ é uma constante do movimento, de acordo com o princípio de inércia de Galileo¹ ou a primeira lei de Newton². As soluções da equação de Newton (1.1) da partícula livre, ou seja, as trajetórias com aceleração nula, são as retas afins

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{v}t,$$

onde $\mathbf{s} = \mathbf{r}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a posição inicial e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade (inicial).

ex: Determine a trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $\mathbf{r}(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2, 3)$.

ex: Determine a velocidade inicial da trajetória de uma partícula livre que passa pela posição $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 2)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $\mathbf{r}(2) = (3, 4, 5)$ no instante $t_1 = 2$.

Queda livre. A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = -mg \quad (1.2)$$

onde $q(t) \in \mathbb{R}$ denota a altura da partícula no instante t , m é a massa da partícula, e $g \simeq 980$ cm/s² é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre. É um fato experimental que

¹ “. . . il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, né erta né china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo” [Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1623.]

² “Lex prima: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare” [Isaac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

a “massa inercial” (o factor de \ddot{q} na (1.2)) e a “massa gravitacional” (o fator de g na (1.2)) são iguais. Conseqüentemente, a equação de Newton reduz-se a $\ddot{q} = -g$, ou seja, a lei horária da queda livre não depende da massa da partícula! As soluções da equação de Newton (1.2) da queda livre, ou seja, as trajetórias com aceleração constante, são as parábolas

$$q(t) = s + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

onde $s = q(0) \in \mathbb{R}$ é a altura inicial e $v_0 = \dot{q}(0) \in \mathbb{R}$ é a velocidade inicial.

ex: Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.

ex: Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?

ex: Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?

ex: Determine soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = 1.$$

O exponencial. O *exponencial* (real), de acordo com Rudin “the most important function in mathematics” [Ru87], é a função $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \exp(t) = e^t$, definida pela série de potências

$$\begin{aligned} e^t &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots \end{aligned} \tag{1.3}$$

O raio de convergência é ∞ , portanto a série converge uniformemente em cada intervalo limitado da reta real.

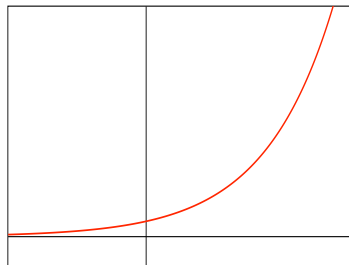


Gráfico do exponencial.

É imediato verificar que $e^0 = 1$, e que $e^{t+s} = e^t e^s$ para todos os $t, s \in \mathbb{R}$ (ou seja, \exp define um homomorfismo do grupo aditivo \mathbb{R} no grupo multiplicativo \mathbb{R}_+^\times dos números reais positivos). Em particular, $e^t \neq 0$ para todos os $t \in \mathbb{R}$, e $e^{-t} = (e^t)^{-1}$.

A derivada do exponencial é o próprio exponencial, como se pode ver derivando a série de potências

$$\frac{d}{dt} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots \right) = 0 + 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots$$

(e usando resultados sobre a derivação de séries convergentes). Em outras palavras, a função exponencial $x(t) = e^t$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$. Mais em geral, seja D o operador linear $f \mapsto Df := f'$, definido, por exemplo, no espaço linear $C^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente diferenciáveis na reta real. Então o exponencial $x(t) = e^{\lambda t}$ é um vetor próprio do operador D com valor próprio λ , pois satisfaz $Df = \lambda f$. Na linguagem das equações diferenciais,

Teorema 1.1. *A função $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, com x_0 constante, é a única solução da equação diferencial*

$$\dot{x} = \lambda x \quad (1.4)$$

(i.e. a única função diferenciável cuja derivada é igual a λ vezes a própria função) com condição inicial $x(0) = x_0$ (i.e. tal que o seu valor quando $t = 0$ é igual a x_0).

Demonstração. Se $y(t)$ é uma (outra?) solução de (1.4) com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $q(t) = y(t)/e^{\lambda t}$ tem derivada $\dot{q} = (\dot{y} - \lambda y)e^{-\lambda t} = 0$. Pelo teorema do valor médio, $q(t)$ é constante e, em particular, igual ao seu valor em $t = 0$, que é x_0 . Consequentemente, $y(t) = x_0 e^{\lambda t}$. \square

ex: Determine as soluções de

$$\dot{x} = 3x \quad \text{ou} \quad \dot{x} = -7x$$

com condição inicial $x(0) = 1/e$ ou $x(2) = e$.

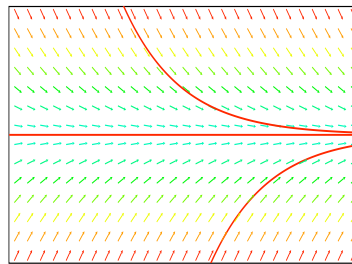
Decaimento radioativo. A taxa de decaimento de matéria radioativa é proporcional à quantidade de matéria existente, desde que a amostra seja suficientemente grande. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioativa existente no instante t satisfaz a lei

$$\dot{N} = -\beta N, \quad (1.5)$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a “vida média” dos núcleos³. A solução de (1.5) com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0 e^{-\beta t},$$

e “decai” para o equilíbrio $\bar{N} = 0$ quando $t \rightarrow \infty$.



Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante $\alpha > 0$, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei (decaimento com reposição)

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha. \quad (1.6)$$

A solução de equilíbrio de (1.6) é $\bar{N} = \alpha/\beta$. A diferença $x(t) := N(t) - \bar{N}$ satisfaz a equação diferencial $\dot{x} = -\beta x$ (ou seja, a (1.5)), e portanto a solução de (1.6) é

$$N(t) = (N(0) - \bar{N})e^{-\beta t} + \bar{N}.$$

Observe que $N(t) \rightarrow \bar{N}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (por exemplo no instante da criação do Universo!).

³O tempo de vida de cada núcleo é modelado por uma variável aleatória exponencial X , com lei $\text{Prob}(X \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$ se $t \geq 0$, e 0 se $t < 0$, e média $\mathbf{E}X := \int_0^\infty t d\text{Prob}(X \leq t) = 1/\beta$. A equação diferencial, quando a quantidade N de núcleos é grande, é uma consequência da lei dos grandes números.

ex: O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioativa é o tempo τ necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial (ou seja, $N(\tau) = \frac{1}{2}N(0)$). Mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$, e determine a relação entre o tempo de meia-vida τ e o parâmetro β .

ex: O radiocarbono ^{14}C tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, assumindo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é conhecida⁴.

Crescimento exponencial. Um modelo do crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N, \quad (1.7)$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t , e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$). A solução estacionária é a solução trivial $N(t) = 0$ (população ausente). A solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

e diverge quanto $t \rightarrow \infty$ (explosão demográfica!).

ex: Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?

ex: Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\gamma > 0$, então a população segue a lei

$$\dot{N} = \lambda N - \gamma.$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assintótico das outras soluções (veja a solução do problema do decaimento com reposição).

Equações diferenciais ordinárias. Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de primeira ordem (resolúvel para a derivada) é uma lei

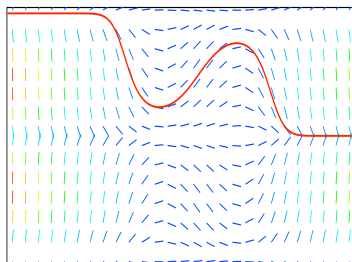
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (1.8)$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ de um sistema com *espaço de fases* $X \subset \mathbb{R}^n$, onde $\mathbf{x}(t) \in X$ denota o *estado* do sistema no instante $t \in T \subset \mathbb{R}$, $\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ denota a derivada de \mathbf{x} em ordem ao tempo t , e $\mathbf{v} : T \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um *campo de direções* dado, que depende de \mathbf{x} e, em geral, também explicitamente do tempo t .

Uma *solução (local)* da EDO (1.8) é um caminho diferenciável $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ cuja velocidade satisfaz $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$ para cada tempo t num intervalo $I \subset T$, ou seja, uma função $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ cujo gráfico $\Gamma := \{(t, \mathbf{x}(t)) \in I \times X \text{ com } t \in I\}$, dito *curva integral* de (1.8), é tangente ao campo de direções $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ em cada ponto $(t, \mathbf{x}(t)) \in \Gamma$. Duas soluções definidas em intervalos $I, J \subset T$ que coincidem na interseção $I \cap J$ definem uma solução no intervalo de tempos $I \cup J$. Uma solução $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ é dita *maximal* se não pode ser estendida a um intervalo maior $J \supset I$. Se $T = \mathbb{R}$, ma solução definida para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é dita *solução global*.

Dados um tempo $t_0 \in T$ e um ponto $\mathbf{x}_0 \in X$, uma solução da EDO (1.8) com *condição inicial* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (ou solução do “Problema de Valores Iniciais”, P.V.I., ou solução do “problema de Cauchy”) é uma solução definida numa vizinhança de t_0 cujo gráfico contém o ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$.

⁴J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.



Campo de direções e uma solução de $\dot{x} = \sin(x)(1 - t^2)$.

O *teorema de Peano*^{5 6} afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo, então existem sempre soluções locais, i.e. definidas em vizinhanças suficientemente pequenas do tempo inicial, do problema de Cauchy. Por outro lado, a continuidade do campo de direções não é suficiente para garantir a unicidade das soluções. O *teorema de Picard-Lindelöf*⁷ afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo e localmente Lipschitziano⁸ (por exemplo, diferenciável e com derivada contínua) na variável \mathbf{x} , então para cada ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$ passa uma única solução com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

A forma mais geral de uma EDO de primeira ordem é

$$F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0.$$

Então também existem EDOs que não têm solução por razões triviais, como por exemplo $(\dot{x})^2 + 1 = 0$.

ex: Esboce o campo de direções das EDOs

$$\dot{x} = t \quad \dot{x} = -x + t \quad \dot{x} = \sin(t)$$

e conjecture sobre o comportamento qualitativo das soluções.

ex: A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$? E a função $x(t) = 0$?

ex: Determine umas EDOs de primeira ordem e de segunda ordem que admitam como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

Quase todas as EDOs têm ordem um! A EDO de ordem $n \geq 2$ (resolúvel para a n -ésima derivada)

$$y^{(n)} = F\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}\right)$$

para o observável $y(t) \in \mathbb{R}$ é equivalente à EDO (ou sistema de EDOs) de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$$

para o observável $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$x_1 := y \quad x_2 := \dot{y} \quad x_3 := \ddot{y} \quad \dots \quad x_n := y^{(n-1)},$$

onde o campo de direções é $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) := (x_2, \dots, x_n, F(t, x_1, x_2, \dots, x_n))$.

⁵G. Peano, Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine, *Atti Accad. Sci. Torino* **21** (1886), 677-685.

⁶G. Peano, Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Mathematische Annalen* **37** (1890) 182-228.

⁷M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

⁸A função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é Lipschitziana no domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ se

$$\exists L > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

ex: Determine os sistemas de ODEs de ordem 1 que traduzem as seguintes ODEs de ordem > 1

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x & \ddot{x} + \dot{x} &= 0 & \ddot{x} + \dot{x} + x &= 0 \\ \ddot{x} &= t - x & \ddot{x} + \dot{x} + x &= 0 & \ddot{x} &= x\end{aligned}$$

ex: Determine uma EDO de segunda ordem que admita como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

ex: Mostre que soluções da EDO $x^{(n)} = 0$ são os polinômios de grau $n - 1$.

Soluções de Chandrasekhar da equação de Lane-Emden. Um modelo do perfil de equilíbrio hidrostático de uma estrela é a equação de Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^p, \quad (1.9)$$

onde ξ é uma “distância adimensional” do centro da estrela, $\theta(\xi)$ é proporcional à densidade, e p é um parâmetro que depende da equação de estado $P = K\rho^{1+1/p}$ do gás que forma a estrela. O problema físico é determinar a solução com condições iniciais $\theta(0) = 1$ e $d\theta/d\xi(0) = 0$, e o menor zero de $\theta(\xi)$ com $\xi > 0$ é interpretado como sendo o raio da estrela.

ex: Verifique que

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2, \quad \theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad \text{e} \quad \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}}$$

são soluções da equação de Lane-Emden (1.9) quando $p = 0, 1$ e 5 , respetivamente. ⁹

Movimento uniformemente acelerado relativístico. Por fim, podem querer saber como aparece o movimento uniformemente acelerado na relatividade especial. A equação de Newton relativística (por exemplo ao longo do eixo x de um referencial inercial) com aceleração própria constante g é

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = g.$$

A solução com velocidade e posição iniciais nulas é

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2 t^2 / c^2}} \quad \text{e portanto, ao integrar,} \quad x(t) = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + g^2 t^2 / c^2} - 1 \right)$$

Observem que para tempos pequenos (logo velocidades pequenas) $x \simeq gt^2/2$, como esperado. Este é chamado “movimento hiperbólico”, pois as trajetórias vivem num ramo da hipérbole

$$\left(\frac{gx}{c^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{gt}{c} \right)^2 = 1$$

no espaço-tempo, cujas assíntotas são as retas $x + c^2/g = \pm ct$, com velocidades $\pm c$. ¹⁰

ex: Verifique as fórmulas acima.

⁹S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, 1958.

¹⁰C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.

2 Existência, unicidade e simulações*

Iterações de Picard. Uma função diferenciável $t \mapsto \varphi(t)$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e com valores num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ com condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$ se e só se

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \varphi(s)) ds,$$

ou seja, se $\varphi(t)$ é um ponto fixo do mapa de Picard $\mathcal{P} : C(I, X) \rightarrow C(I, X)$, que envia uma função $\phi(t)$ na função

$$\boxed{(\mathcal{P}\phi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \phi(s)) ds.} \quad (2.1)$$

Se a sucessão de funções $\phi, \mathcal{P}\phi, \mathcal{P}^2\phi := \mathcal{P}(\mathcal{P}\phi), \dots, \mathcal{P}^n\phi := \mathcal{P}(\mathcal{P}^{n-1}\phi), \dots$, obtidas iterando o mapa de Picard a partir de uma função inicial ϕ , é convergente (numa topologia apropriada definida num subespaço $\mathcal{C} \subset C(I, X) := \{\phi : I \rightarrow X \text{ contínua}\}$ tal que $\mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ seja contínua), então o limite $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{P}^n\phi)(t)$ é um ponto fixo do mapa de Picard, e portanto uma solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ com a condição inicial dada $x(t_0) = x_0$.

e.g. Se o campo de velocidades apenas depende do tempo, ou seja o problema é a EDO simples $\dot{x} = v(t)$, então o mapa de Picard envia toda função inicial $\phi(t)$ na solução

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

com $x(t_0) = x_0$.

e.g. Queremos resolver $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Começamos pela conjectura $\phi(t) = 1$, e depois calculamos

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = 1 + t \quad (\mathcal{P}^2\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} \quad (\mathcal{P}^3\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \quad \dots$$

Então a sucessão converge (uniformemente em intervalos limitados) para a série de Taylor da função exponencial

$$(\mathcal{P}^n\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} \rightarrow e^t,$$

que é a solução que já conhecemos.

Contrações e teorema de ponto fixo de Banach. Seja (X, d) um espaço métrico. Uma transformação $f : X \rightarrow X$ é dita *contração* se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz inferior a um, ou seja, se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todos $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot d(x, x').$$

As *trajetórias* da transformação $f : X \rightarrow X$ são as sucessões (x_n) definidas recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$, se $n \geq 0$, a partir de uma condição inicial $x_0 \in X$. Os *pontos fixos* de f são os pontos $p \in X$ tais que $f(p) = p$.

Teorema 2.1 (princípio das contrações, teorema de ponto fixo de Banach). *As trajetórias de uma contração $f : X \rightarrow X$ são sucessões de Cauchy, e a distância entre cada duas trajetórias decai exponencialmente no tempo. Se X é completo, então f admite um único ponto fixo p , e a trajetória de todo ponto converge exponencialmente para o ponto fixo.*

Demonstração. Seja $f : X \rightarrow X$ uma λ -contração. Seja $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, e seja (x_n) a sua trajetória, a sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$. Usando k -vezes a contratividade ve-se que $d(x_{k+1}, x_k) \leq \lambda d(x_1, x_0)^k$, e portanto que

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Em particular, (x_n) é uma sucessão de Cauchy, pois para todo $\varepsilon > 0$ existe \bar{n} tão grande que se $n \geq \bar{n}$ então $\lambda^n/(1-\lambda) < \varepsilon$.

Se (y_n) é a trajetória de um outro ponto $y_0 \in Y$, a contratividade também implica que

$$d(x_n, y_n) \leq \lambda^n \cdot d(x_0, y_0),$$

ou seja que a distância entre duas trajetórias decai exponencialmente.

O limite $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, que existe se X é completo, é um ponto fixo de f , porque f é contínua, e

$$f(p) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p.$$

Se p e p' são pontos fixos, então $d(p, p') = d(f(p), f(p')) \leq \lambda d(p, p')$ com $\lambda < 1$ implica que $d(p, p') = 0$, o que mostra que o ponto fixo é único. Comparando a trajetória de x_0 e do ponto fixo p (que é a sucessão constante), ve-se que

$$d(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot d(x_0, p),$$

ou seja, que a convergência $x_n \rightarrow p$ é exponencial. \square

ex: Utilize o teorema do valor médio para mostrar que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 é uma contração sse existe $\lambda < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

ex: Mostre que uma transformação $f : X \rightarrow X$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$ distintos pode não ter pontos fixos, mesmo se o espaço métrico X for completo.

Teorema de Picard-Lindelöf. ¹¹ O teorema de existência e unicidade básico para equações diferenciais ordinárias é o seguinte.

Teorema 2.2 (Picard-Lindelöf). *Seja $v(t, x)$ um campo de velocidades contínuo definido num domínio D do espaço de fases estendido $\mathbb{R} \times X$. Se v é localmente Lipschitziana (por exemplo, diferenciável com continuidade) com respeito a segunda variável $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma e uma única solução local da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ que passa por cada ponto $(t_0, x_0) \in D$.*

Demonstração. Seja $I \times B = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_\delta(x_0)$ uma vizinhança suficientemente pequena de (t_0, x_0) , onde $B = \overline{B}_\delta(x_0)$ denota o disco fechado de centro x_0 e raio δ in X . Pela continuidade do campo de velocidades $v(t, x)$ existe $K > 0$ tal que $|v(t, x)| \leq K$ se $(t, x) \in I \times B$. Pela condição de Lipschitz, existe $M > 0$ tal que $|v(t, x) - v(t, y)| \leq M|x - y|$ se $t \in I$ e $x, y \in B$. Podemos reduzir, se necessário, o raio ε de I de maneira tal que $K\varepsilon \leq \delta$ e $M\varepsilon < 1$. Seja $\mathcal{C} = C^0(I, B)$ o espaço das funções contínuas $t \mapsto \phi(t)$ que enviam I em B . Munido da norma do supremo,

¹¹M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

$\|\phi - \varphi\|_\infty := \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|$ este é um espaço métrico completo (de fato, um espaço de Banach). O mapa de Picard (2.1) envia \mathcal{C} em \mathcal{C} , pois

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s))| ds \leq K\varepsilon \leq \delta.$$

Finalmente, dadas duas funções $\phi, \varphi \in \mathcal{C}$, acontece que

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}\phi)(t) - (\mathcal{P}\varphi)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s)) - v(s, \varphi(s))| ds \\ &\leq M\varepsilon \cdot \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|\mathcal{P}\phi - \mathcal{P}\varphi\|_\infty < M\varepsilon \cdot \|\phi - \varphi\|_\infty.$$

Sendo $M\varepsilon < 1$, o mapa de Picard é uma contração. O teorema segue do princípio das contrações 2.1. \square

Soluções exatas e simulações. Exceto poucos casos importantes, resolvidos por matemáticos e físicos famosos (como a queda livre, a lei de Hooke/oscilador harmônico, o problema de Kepler, ...), não há nenhuma esperança de resolver “analiticamente” as equações diferenciais que descrevem fenômenos interessantes do mundo real (leis da física, problemas de engenharia, ...). É necessário fazer “simulações”, ou seja, calcular valores aproximados das soluções.

Método de Euler/diferenças finitas. Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x) \tag{2.2}$$

O método de Euler consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) \simeq x(t) + v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo” $dt = \tau$ suficientemente pequeno. A solução $x(t_n)$, nos tempos $t_n = t_0 + n\tau$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é estimada pela sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot \tau.}$$

Numa linguagem como **C++** ou **Java**, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) = \mathbf{x}$, é

```
while (time < t)
{
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
}
```

Se a solução verdadeira admite segunda derivada, é natural esperar, pela fórmula de Taylor com resto, que o erro

$$\varepsilon_n := x(t_n) - x_n$$

introduzido em cada passo seja da ordem de τ^2 . Num intervalo de tempo fixado $[t_0, t_0 + T]$, dividido em N subintervalos de comprimento τ (assim que $T = N\tau$), o erro acumulado deve ser então da ordem de $N\tau^2 \sim T\tau$, que converge para zero quando $\tau \rightarrow 0$.

Estimação dos erros no método de Euler. Este argumento pode ser feito rigoroso, com algumas hipóteses a priori sobre a solução.

Usa o seguinte lema, de interesse independente, que descreve um crescimento quase-exponencial. Observe que a equação recursiva $y_{n+1} = \lambda y_n + \beta$, com λ positivo mas $\neq 1$, descreve um crescimento/decaimento (dependendo se λ é superior ou inferior a 1) exponencial com reposição/recolha (dependendo se β é positivo ou negativo), e a sua solução é $y_n = \lambda^n(y_0 - \bar{y}) + \bar{y}$, sendo $\bar{y} = \beta/(1 - \lambda)$ o equilíbrio.

Teorema 2.3. *Seja (y_n) uma sucessão de números não negativos que verifica*

$$y_{n+1} \leq \lambda y_n + \beta$$

com $\lambda, \beta > 0$ e $\lambda \neq 1$. Então

$$y_n \leq \lambda^n y_0 + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \beta.$$

A demonstração é simples, por indução.

Assumimos então que exista e seja única a solução de $\dot{x} = v(t, x)$ no intervalo $I = [t_0, t_0 + T]$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Assumimos também que a sua segunda derivada seja uniformemente limitada, i.e.

$$|\ddot{x}(t)| \leq M \tag{2.3}$$

e que o campo de velocidades seja Lipschitziano na segunda variável, i.e.

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leq K |x - y|, \tag{2.4}$$

também uniformemente em $t \in I$.

Teorema 2.4. *Seja $x(t)$ a única solução de $\dot{x} = v(t, x)$ no intervalo $[t_0, t_0 + T]$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se o campo satisfaz (2.4) e a solução satisfaz (2.3), então a diferença entre os $x(t_n)$, com $t_n = t_0 + n\tau$ e $0 \leq n \leq N$, e os termos da sucessão $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$, obtida usando o método de Euler com passo $\tau = T/N$, é limitada por*

$$|x(t_n) - x_n| \leq M \frac{(1 + K\tau)^n}{2K} \tau.$$

Demonstração. Usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange e a própria equação diferencial $\dot{x}(t_n) = v(t_n, x(t_n))$, podemos escrever

$$\begin{aligned} |x(t_{n+1}) - x_{n+1}| &= |x(t_n + \tau) - x_n - v(t_n, x_n) \tau| \\ &= \left| x(t_n) + \dot{x}(t_n) \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}(t_n + \delta) \tau^2 - x_n - v(t_n, x_n) \tau \right| \\ &= \left| x(t_n) - x_n + (v(t_n, x(t_n)) - v(t_n, x_n)) \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}(t_n + \delta) \tau^2 \right| \end{aligned}$$

onde $0 < \delta < \tau$. Pela desigualdade do triângulo e as hipóteses (2.3) sobre a segunda derivada da solução e (2.4) sobre o campo vetorial,

$$\begin{aligned} |x(t_{n+1}) - x_{n+1}| &\leq |x(t_n) - x_n| + |v(t_n, x(t_n)) - v(t_n, x_n)| \tau + \left| \frac{1}{2} \ddot{x}(t_n + \delta) \tau^2 \right| \\ &\leq |x(t_n) - x_n| + K\tau |x(t_n) - x_n| + M\tau^2/2. \end{aligned}$$

Portanto, a sucessão dos erros $\varepsilon_n = x(t_n) - x_n$ satisfaz

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1 + K\tau) |\varepsilon_n| + \frac{M\tau^2}{2}$$

Pelo teorema 2.3, com $\varepsilon_0 = 0$, $\lambda = (1 + K\tau)$ e $\beta = M\tau^2/2$, temos

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{(1 + K\tau)^n - 1}{K\tau} M\tau^2/2$$

e portanto o resultado. □

Convergência do método de Euler. Como natural esperar, a cota superior aos erros no teorema 2.4 é máxima quando $n = N$, o número total de passos no intervalo $[t_0, t_0 + T]$. Quando o passo $\tau \rightarrow 0$, o número de passos $N = T/\tau$ tende para o ∞ . Mas

$$M \frac{(1 + K\tau)^N}{2K} = M \frac{\left(1 + \frac{KT}{N}\right)^N}{2K} \rightarrow M \frac{e^{KT}}{2K}$$

quando $N \rightarrow \infty$. Consequentemente, nas hipóteses do teorema 2.4, os erros são uniformemente limitados por

$$|\varepsilon_n| \leq M \frac{e^{KT}}{2K} \tau,$$

logo convergem para zero uniformemente quando $\tau \rightarrow 0$.

e.g. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$, que define o exponencial. Se o passo é $\tau > 0$ e o tempo final é $t = n\tau$ com $n \in \mathbb{N}$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq x_n = (1 + \tau)^n$$

onde $n = t/\tau$ é o número de passos. No limite quando o passo $\tau \rightarrow 0$, as aproximações convergem para a solução $x(t) = e^t$, pois

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (1 + \tau)^{t/\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t.$$

ex: Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...

ex: Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

Método RK-4. O método de Runge-Kutta (de ordem) 4 para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \quad \text{com condição inicial} \quad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um “passo” dt , e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dt}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$, e os coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)$$

ex: Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

Simulações com software proprietário. Existem software proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinárias e parciais. Por exemplo, a função `ode45` do **MATLAB**, ou a função `NDSolve` do **Mathematica**, calculam soluções aproximadas de EDOs $\dot{x} = v(t, x)$ utilizando variações do método de Runge-Kutta.

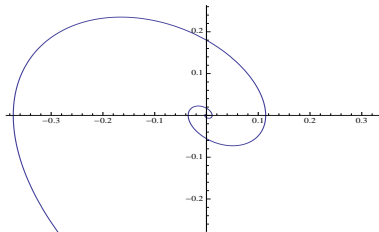
ex: Verifique se os PC do seu Departamento/da sua Universidade têm acesso a um dos software proprietários [MATLAB](#) ou [Mathematica](#).

ex: Em caso afirmativo, aprenda a usar as funções [ode45](#) ou [NDSolve](#).

Por exemplo, o pêndulo com atrito pode ser simulado, no [Mathematica](#), usando as instruções

```
s = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -Sin[x[t]] - 0.7 y[t],  
  x[0] == y[0] == 1}, {x, y}, {t, 20}]  
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 20}]
```

O resultado é

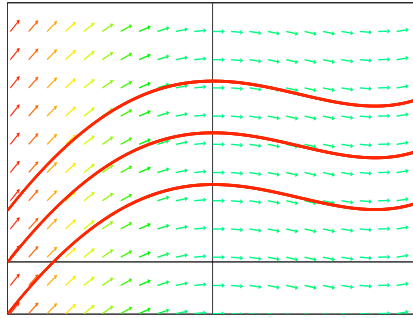


3 EDOS simples, autónomas e separáveis*

Integração de EDOS simples. A equação diferencial mais simples é do género

$$\dot{x} = v(t) \quad (3.1)$$

onde o campo de direções $v(t)$ depende apenas do tempo t , e não da própria função incógnita x . Se $x(t)$ é solução de (3.1) então também $x(t) + c$ é solução, para todas as constantes $c \in \mathbb{R}$. Consequentemente, as soluções diferem por uma constante aditiva, determinada pela condição inicial.



Três soluções da EDO simples $\dot{x} = t^3 \sin(t)$ que diferem por uma constante aditiva.

O teorema (fundamental do cálculo) de Newton e Leibniz¹² afirma que a derivada do integral indefinido $F(t) := \int_a^t f(s) ds$ de uma função contínua $f(t)$ existe e é igual a $F'(t) = f(t)$. Portanto,

Teorema 3.1. Se $v(t)$ é um campo de direções contínuo definido num intervalo de tempos, então a solução da EDO simples (3.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja, é dada por

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds \quad (3.2)$$

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo, a derivada da (3.2) é $\dot{x}(t) = v(t)$, e o seu valor no instante t_0 é $x(t_0) = x_0$, pois o integral $\int_{t_0}^{t_0} v(s) ds$ é nulo. A unicidade é um exercício. \square

Por causa deste teorema, as equações diferenciais simples são ditas *integráveis*, e “integrar” (uma equação diferencial) é usado como sinónimo de “resolver”.

ex: Integre (ou seja, determine a solução geral) as seguintes EDOS, definidas em oportunos intervalos de tempo

$$\dot{x} = 2 - t + 3t^2 + 5t^6 \quad \dot{x} = e^{-t} \quad \dot{x} = \cos(3t) \quad \dot{x} = 1/t$$

ex: Determine $x(t)$ sabendo que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^{2t} & \text{e} & & x(0) &= 6 \\ \dot{x} &= \sin(t) & \text{e} & & x(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

ex: Mostre que a solução do teorema 3.2 é única (considere duas soluções, calcule a derivada da diferença, e utilize o teorema do valor médio ...)

¹²A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é “*Data aequatione quocunqve fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*”.

Foguetão. Se um foguetão de massa $m(t)$ no espaço vazio (ou seja, sem forças gravitacionais!) expulsa combustível a uma velocidade relativa constante $-V$ e a uma taxa constante $\dot{m} = -\alpha$, (com $\alpha > 0$) então a sua trajetória num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = \dot{m}(v - V), \quad \text{e portanto,} \quad m\dot{v} = -\alpha V.$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$ é a velocidade e $q(t)$ a posição.

ex: Resolva a EDO $\dot{m} = -\alpha$ para a massa do foguetão, com massa inicial $m(0) = m_0$, e substitua o resultado na equação de Newton, obtendo

$$\dot{v} = \frac{\alpha V}{m_0 - \alpha t}$$

(desde que $0 \leq t < m_c/\alpha$, onde $m_c < m_0$ é a massa inicial do combustível). Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = 0$ e posição inicial $q(0) = 0$, válida para tempos t inferiores ao tempo necessário para acabar o combustível.

ex: Se $q(t)$ representa a altura e o foguetão está sujeito à força gravitacional próximo da superfície da Terra, então a equação de movimento fica

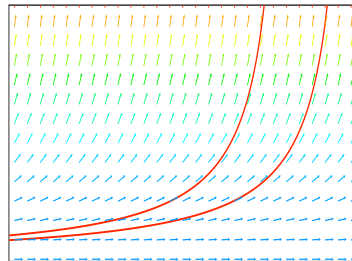
$$m\dot{v} = -\alpha V - mg$$

Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = 0$ e posição inicial $q(0) = 0$, e determine a altura atingida no instante $\bar{t} = m_c/\alpha$ em que o combustível acaba.

Campos de vetores e EDOs autónomas na reta. Um campo de vetores $v : X \rightarrow \mathbb{R}$, definido num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, define uma EDO *autónoma*

$$\dot{x} = v(x). \quad (3.3)$$

A palavra “autónoma” indica que o campo $v(x)$, portanto a dinâmica modelada pela equação diferencial, não depende explicitamente do tempo. Se $x(t)$ é solução de (3.3), então também $x(t - c)$ é solução, para todos os tempos $c \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a física modelada por uma EDO autónoma é invariante para translações no tempo.

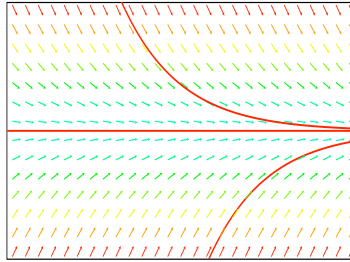


Duas soluções da EDO autónoma $\dot{x} = x^2$ que diferem por uma translação no tempo.

Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. um ponto onde $v(x_0) = 0$, então a trajetória constante

$$x(t) = x_0$$

para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução *estacionária*, ou *de equilíbrio*, da equação diferencial autónoma (3.3).

Equilíbrio e outras duas soluções da EDO autônoma $\dot{x} = -x$.

Se x_0 é um ponto não singular do campo contínuo $v(x)$, i.e. se $v(x_0) \neq 0$ (e portanto, pela continuidade, $v(x)$ continua diferente de zero numa vizinhança de x_0), então uma solução local de (3.3) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada “separando as variáveis”, ou seja, fazendo formalmente

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{v(x)} = dt$$

e integrando os dois membros,

$$\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$$

entre limites de integração apropriados. Ou seja,

Teorema 3.2. *Se x_0 é um ponto regular do campo contínuo $v(x)$, então uma solução da EDO autônoma (3.3) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é dada implicitamente por*

$$\boxed{\int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0} \quad (3.4)$$

Se o campo $v(x)$ é diferenciável, esta solução é única.

Demonstração. Assumimos que o campo de velocidades v é contínuo, e seja $J = (x_-, x_+)$ o intervalo maximal contendo x_0 onde v é diferente de zero. Definimos a função $H : \mathbb{R} \times J \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$H(t, x) = t - t_0 - \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}.$$

Se $t \mapsto \varphi(t)$ é uma solução do problema de Cauchy, então um cálculo mostra que $\frac{d}{dt}H(t, \varphi(t)) = 0$ para todo tempo t . Consequentemente H é constante ao longo das soluções do problema de Cauchy. Sendo $H(t_0, x_0) = 0$, concluímos que o gráfico de toda solução pertence ao conjunto de nível $\Sigma = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times J \text{ s.t. } H(t, x) = 0\}$. A função H é derivável, e o seu diferencial $dH = dt + dx/v(x)$ não é nulo. De fato, as duas derivadas parciais $\partial H/\partial t$ e $\partial H/\partial x$ são sempre diferentes de zero. Pelo teorema da função implícita o conjunto de nível Σ é, numa vizinhança $I \times J$ do ponto (t_0, x_0) , o gráfico de uma função diferenciável $x \mapsto t(x)$, assim como o gráfico de uma função diferenciável $t \mapsto x(t)$, a função inversa de $t(x)$, que é uma solução do problema de Cauchy. De fato, a sua derivada é, pelo teorema da função inversa,

$$\dot{x}(t) = 1 / \left(\frac{dt}{dx}(x(t)) \right) = v(x)$$

e a condição inicial é $x(t_0) = x_0$. □

Observe que a função $t(x) - t_0$ tem a interpretação do “tempo necessário para ir de x_0 até x ”.

ex: Considere as seguintes EDOs autónomas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x & \dot{x} &= x - 1 & \dot{x} &= x^2 & \dot{x} &= \sqrt{x} \\ \dot{x} &= (x - 1)(x - 2) & \dot{x} &= e^x & \dot{x} &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

definidas em intervalos convenientes. Encontre, caso existam, as soluções estacionárias. Desenhe os respectivos campos de vetores e conjecture sobre o comportamento das soluções. Integre, quando possível, as equações e calcule soluções. Determine, quando possível, umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

Atrito e tempo de relaxamento. O atrito pode ser modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. Portanto, a equação de Newton (em dimensão 1) de uma partícula livre de massa m em presença de atrito é

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$$

onde $\gamma > 0$ é o “coeficiente de atrito”. A velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v$$

onde $\tau = m/\gamma > 0$. A solução é $v(t) = e^{-t/\tau}v(0)$, assim que τ é um “tempo de relaxamento”. A energia cinética $T := \frac{1}{2}mv^2$ da partícula satisfaz

$$\dot{T} = -\frac{2}{\tau}T,$$

e portanto decresce exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau/2$.

ex: Calcule a trajetória de $m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$ com posição inicial $q(0) = q_0$ e velocidade inicial $\dot{q}(0) = v_0$.

Paraquedista. Um modelo da queda de um paraquedista é

$$m\dot{v} = -\alpha v|v| - mg,$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$, $q(t) \in \mathbb{R}$ é a altura no instante t , $m > 0$ é a massa, $g \simeq 9.80$ m/s² é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\alpha > 0$ é uma constante que depende da atmosfera e do paraquedista (um valor realístico é $\alpha \simeq 30$ kg/m).

ex: Mostre que a velocidade $v(t)$ do paraquedista converge para o valor estacionário $\bar{v} = \sqrt{mg/\alpha}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Circuito/filtro RC. A tensão sobre o capacitor num filtro/circuito RC é modelada pela lei de Kirchoff

$$C\dot{V} + \frac{1}{R}V = 0$$

ex: Verifique que a solução com tensão inicial $V(0) = V_0$ é

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

onde o tempo característico do filtro é $\tau = 1/(RC)$.

Logística. Um modelo mais realista da dinâmica de uma população $N(t)$ num meio ambiente limitado é dado pela *equação logística*¹³

$$\dot{N} = \lambda N (1 - N/M)$$

onde a constante positiva M é a população máxima permitida e $\lambda > 0$. Observe que $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll M$, e que $\dot{N} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow M$. A “população relativa” $x(t) := N(t)/M$ satisfaz a equação logística “adimensional”

$$\dot{x} = \lambda x (1 - x). \quad (3.5)$$

As soluções de equilíbrio são $\bar{x} = 0$ (população ausente) e $\bar{x} = 1$ (ou seja, $\bar{N} = M$, população máxima). A solução de (3.5) com condição inicial $x(0) = x_0 \neq 0, 1$ pode ser determinada separando as variáveis e integrando, e é dada em forma implícita por

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{y(1-y)} = \int_0^t \lambda ds$$

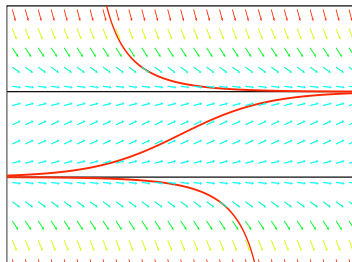
ex: Use a identidade

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

e deduza que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ (fora deste intervalo o modelo não faz sentido físico) é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}.$$

ex: Discuta o comportamento assintótico das soluções da equação logística.



Epidemias. Num surto epidémico, a taxa de crescimento do número $I(t)$ de indivíduos infetados, dentro de uma população total constante N , é proporcional ao produto do número de indivíduos infetados e o número $S(t) = N - I(t)$ de indivíduos saudáveis (e portanto susceptíveis de serem infetados), ou seja,

$$\dot{I} = \lambda I (N - I)$$

com $\lambda > 0$.

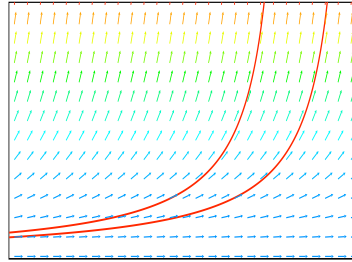
ex: Determine a lei de crescimento da população infectada relativa $x(t) := I(t)/N$, e discuta o comportamento assintótico de $x(t)$.

¹³Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

Crescimento super-exponencial/explosão. Um outro modelo de dinâmica de uma população em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N^2,$$

ou seja, a taxa de crescimento é proporcional aos pares de indivíduos contidos na população. A solução estacionária é a solução trivial $N(t) = 0$.



ex: Mostre que a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = \frac{1}{N_0^{-1} - \lambda t},$$

definida para tempos $t < 1/\lambda N_0$. Este modelo prevê uma catástrofe (população infinita, explosão) após um intervalo de tempo finito!

Fazer modelos. Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

ex: A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá é proporcional à diferença entre a temperatura do quarto, suposta constante, e a temperatura do chá.

ex: A velocidade vertical de um foguetão é inversamente proporcional à altura atingida.

ex: A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.

ex: Uma esfera de gelo derrete a uma taxa proporcional à sua superfície.

ex: A taxa de crescimento de uma população de marcianos é proporcional ao número de trios que é possível formar com a dada população.

Campos de vetores e EDOs autónomas. Um *campo de vetores* $\mathbf{v} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ no espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$ define uma equação diferencial ordinária *autónoma* (que não depende explicitamente do tempo, como todas as leis fundamentais da física)

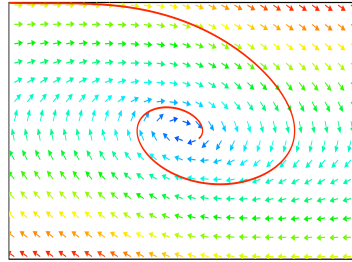
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (3.6)$$

As imagens $\mathbf{x}(I) = \{\mathbf{x}(t) \text{ com } t \in I\} \subset X$ das soluções/trajetórias $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ (com $I \subset \mathbb{R}$ intervalos) no espaço de fases são ditas *órbitas*, ou *curvas de fases*, do sistema autónomo.

Se $\bar{\mathbf{x}} \in X$ é um ponto singular do campo de vetores, i.e. um ponto onde $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, então o caminho constante $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução da EDO autónoma (3.6), dita solução de *equilíbrio*, ou *estacionária*.

Soluções periódicas são soluções globais tais que $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ para todo t e algum $T > 0$ minimal, dito *período*. As órbitas correspondentes são curvas fechadas.

Se a EDO (3.6) satisfaz um teorema de existência e unicidade (pelo teorema de Picard-Lindelöf 2.1, é suficiente que o campo seja Lipschitziano, por exemplo diferenciável com continuidade), então para cada ponto do espaço de fases passa uma e uma única órbita (que pode ser o próprio ponto no caso de uma solução estacionária). Em particular, órbitas diferentes não têm interseções, e portanto as órbitas definem uma “partição” do espaço de fases.



Campo de vetores e uma curva de fases do pêndulo com atrito,
 $\dot{q} = p, \dot{p} = -\sin(q) - p/2$.

ex: Esboce o campo de direções e o campo de vetores das EDOs autónomas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x & \dot{x} &= x - 1 & \dot{x} &= x(1 - x) \\ \dot{x} &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) & \dot{x} &= (x - 1)^2(x - 2)^2 \\ \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} & \begin{cases} \dot{q} = 2q \\ \dot{p} = -p/2 \end{cases} & \begin{cases} \dot{q} = q - p \\ \dot{p} = p - q \end{cases} \end{aligned}$$

determine as soluções de equilíbrio, e conjecture sobre o comportamento qualitativo das (outras) soluções.

Campos completos e fluxos de fases. Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou numa variedade diferenciável). Se por cada ponto $\mathbf{x}_0 \in X$ do espaço de fases passa uma e uma única solução global (i.e. definida para todos os tempos) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$, $t \mapsto \varphi(t)$, com condição inicial $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$, então o campo de vetores é dito *completo*. Um campo completo define/gera portanto um *fluxo de fases*, um grupo de transformações $\Phi_t = e^{t\mathbf{v}} : X \rightarrow X$, com $t \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad \text{e} \quad \Phi_0 = \text{id}_X \quad \forall t, s, \in \mathbb{R}.$$

O ponto $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$ é o estado $\varphi(t)$ no tempo t da solução que passa por \mathbf{x}_0 no instante 0. Vice-versa, um fluxo de fases diferenciável define um campo de vetores

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{t},$$

dito “gerador infinitesimal” do grupo de transformações. As curvas $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$ são as soluções de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

ex: Determine os campos de vetores que geram os seguintes fluxos no plano \mathbb{R}^2

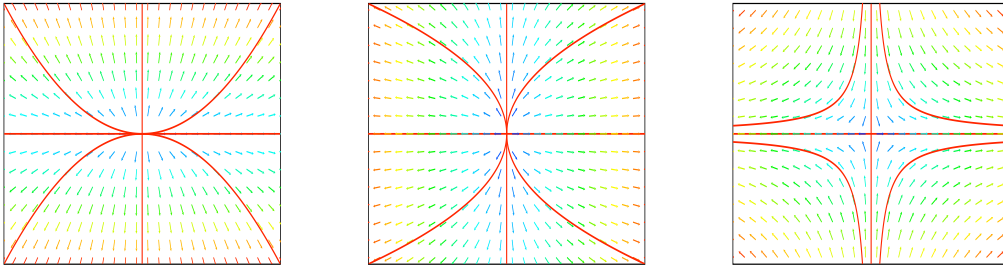
$$\begin{aligned} \Phi_t(x, y) &= (e^{\lambda t}x, e^{\mu t}y) \\ \Phi_t(x, y) &= (\cos(t)x - \sin(t)y, \sin(t)x + \cos(t)y) \\ \Phi_t(x, y) &= (x + ty, y) \end{aligned}$$

Produto direto de EDOs. O *produto directo* das EDOs autónomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$ é o sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ \dot{y} = w(y) \end{cases}$$

As soluções do sistema são os caminhos $t \mapsto (x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são as soluções das EDOs autónomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$, respetivamente. A curva de fases que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, onde $v(x_0) \neq 0$ (ou onde $w(y_0) \neq 0$), é (localmente) o gráfico de uma função $x \mapsto y(x)$ (ou $y \mapsto x(y)$) que satisfaz a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)} \quad \left(\text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{v(x)}{w(y)} \right).$$



ex: Determine as soluções e as curvas de fases do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

quando $\lambda = 0, \pm 1, 2, \dots$ e quando $\lambda = 1/2, 1/3, \dots$.

EDOs separáveis. A solução da uma EDO *separável*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)} \tag{3.7}$$

com condição inicial $y(x_0) = y_0$ tal que $v(x_0) \neq 0$ e $w(y_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{w(\eta)}}$$

ex: Resolva as seguintes EDOs separáveis definidas em oportunos domínios.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{dy}{dx} = -x/y & \frac{dy}{dx} = x/y & \frac{dy}{dx} = kx^\alpha y^\beta & \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y} & & \\ \dot{x} = tx^3 & t\dot{x} + t = t^2 & \dot{x} = t^3/x^2 & x\dot{x} = e^{x+3t^2}t & \dot{x} = e^{t-x} & \\ \dot{x} = \frac{t-1}{x^2} & \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 & (t^2+1)\dot{x} = 2tx & \dot{x} = t(x^2-x) & & \end{array}$$

Allometric laws. If two organs/tissues/components of a living body/organism/community grow with different (but both constant!) relative growth rates α and β , say

$$\dot{x} = \alpha x \quad \text{and} \quad \dot{y} = \beta y$$

(the independent variable t may be time, or a linear dimension, or something else), then they satisfy the relation

$$\frac{1}{\beta y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha x} \frac{dx}{dt}$$

Eliminating “ dt ”, we get the linear/separable/homogeneous ODE

$$\frac{dy}{dx} = (\beta/\alpha) \frac{y}{x},$$

Its solution is the *allometric law* ^{14 15}

$$y = c \cdot x^\gamma \quad \text{or, equivalently,} \quad \log y = \gamma \cdot \log x + \log c,$$

with “scaling exponent” $\gamma = \beta/\alpha$, and some constant $c = x_0/y_0$ related to the initial conditions $x(t_0) = x_0$ and $y(t_0) = y_0$.

¹⁴W. D’Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 1917, 2nd ed. 1942 [Cambridge University Press, 1992].

¹⁵Julian S. Huxley, *Problems of Relative Growth (2nd ed.)*, Dover, 1972.

A famous example is *Kleiber's law*¹⁶ (*mouse-to-elephant curve*)

$$\text{BMR} = c \cdot M^{3/4}$$

which relates the basal metabolic rate BMR to the mass M of an animal.

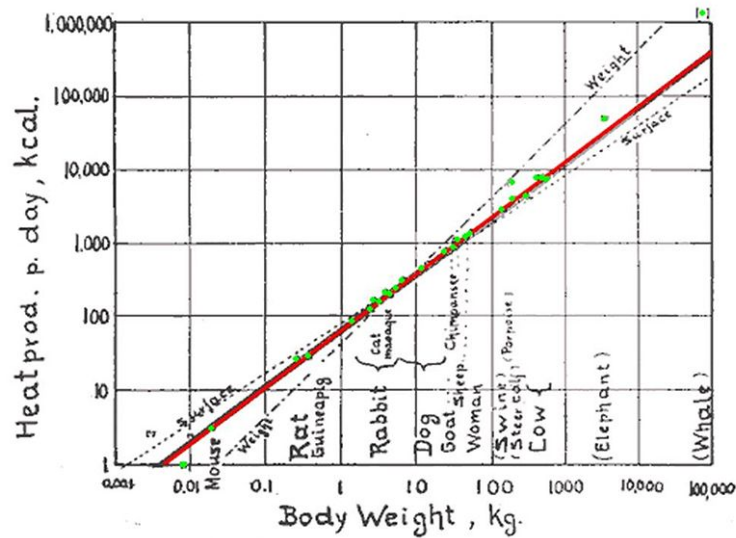


Fig. 1. Log. metabol. rate/log body weight

Original graph of body size versus metabolic rate hand-drawn by Max Kleiber (source [Wikipedia](#))

The heart rate T and the mass M of an animal are related by the allometric law

$$T = c \cdot M^{1/4}$$

¹⁶M. Kleiber, Body size and metabolism, *Hilgardia* **6** (1932), 315-351. M. Kleiber, Body size and metabolic rate, *Physiological Reviews* **27** (1947), 511-541.

4 Sistemas conservativos*

Constantes do movimento. Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com coordenadas $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$, um campo de vetores que define a EDO autónoma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

num espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$. Os *observáveis* são as funções $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Os observáveis que assumem valores $\varphi(\mathbf{x}(t))$ constantes ao longo das soluções $\mathbf{x}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ são ditos *constantes do movimento*, ou *integrals primeiros*. Pela regra da cadeia, o observável diferenciável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma constante do movimento se e só se a *derivada de Lie* de φ ao longo do campo \mathbf{v} é igual a zero, ou seja,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\varphi)(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \cdot v_k(\mathbf{x}) = 0.$$

para todos os pontos $\mathbf{x} \in X$.

As órbitas/curvas de fases estão contidas nas hiperfícies de nível $\Sigma_c := \{\mathbf{x} \in X \text{ t.q. } \varphi(\mathbf{x}) = c\}$ das constantes do movimento. Se o sistema admite k constantes do movimento independentes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ (ou seja, tais que os diferenciais $d\varphi_i(\mathbf{x})$ são linearmente independentes em cada ponto \mathbf{x}), então as órbitas do sistema estão contidas nas interseções das k hiperfícies de nível, umas sub-variedades de co-dimensão k . Em particular, a existência de $n - 1$ constantes do movimento independentes permite determinar as órbitas.

ex: Verifique que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz diagonal com $\det A \neq 0$ (ou seja, todos os valores próprios são $\neq 0$) não admite constantes do movimento não triviais (i.e. constantes).

Sistemas conservativos. [LL78] A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula de massa $m > 0$ (suposta constante!) num campo de forças conservativo é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

onde a força é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$, e $U(\mathbf{r})$ é um(a energia) *potencial*. Um sistema isolado de N pontos materiais, com posições $\mathbf{r}_\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e massas $m_\alpha > 0$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, é modelado pelas equações de Newton

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

onde a força que atua sobre o α -ésimo ponto material é

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} U := -\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \right),$$

i.e. o oposto do gradiente, com respeito às coordenadas $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, de uma energia potencial $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$. A *energia cinética* é

$$K := \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2$$

onde $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$ é a velocidade do α -ésimo ponto material.

ex: Verifique que a *energia* (energia cinética + energia potencial)

$$E := K + U = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2 + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt} E = 0$ ao longo das trajetórias.

Mecânica lagrangiana e hamiltoniana. Um sistema mecânico é descrito por um espaço das configurações M , tipicamente um aberto de \mathbb{R}^n ou, em geral, uma variedade diferenciável, com coordenadas locais $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, e uma *lagrangiana* $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$, uma função $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ que depende das coordenadas e das velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$. Por exemplo, o espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_\alpha \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, representa a posição do α -ésimo ponto. A lagrangiana é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n).$$

A ação de uma trajetória $[t_0, t_1] \mapsto \mathbf{q}(t) \in M$ entre a posição $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ e a posição $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ é o integral

$$S[t \mapsto \mathbf{q}(t)] := \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt.$$

O *princípio de mínima ação* (de Hamilton) afirma que as trajetórias físicas são os pontos críticos da ação, mantend fixas as posições inicial e final. A variação δS , dada uma variações infinitésimas $\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$ da trajetória com $\delta\mathbf{q}(t_0) = \delta\mathbf{q}(t_1) = 0$, é dada por

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) dt \end{aligned}$$

(integrando por partes a segunda soma e usando as condições de fronteira). Portanto, os pontos críticos da ação são as soluções das *equações de Euler-Lagrange*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n.} \quad (4.1)$$

A forma linear $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N) = p^1 dq_1 + p^2 dq_2 + \dots + p^n dq_n \in T_{\mathbf{q}}^*M$, de coordenadas $p^i := \partial L / \partial \dot{q}_i(\mathbf{q})$, é dito *momento*. O espaço $X = T^*M \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, com coordenadas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , é dito *espaço de fases* do sistema mecânico. As equações de Euler-Lagrange são equivalentes às *equações de Hamilton*

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n,} \quad (4.2)$$

onde a *hamiltoniana* do sistema, $H : X \rightarrow \mathbb{R}$, é a “transformada de Legendre” da lagrangiana, definida por

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &:= \sup_{\dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} \|\mathbf{p}_{\alpha}\|^2 + U(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

ex: O espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_\alpha \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, representa a posição do α -ésimo ponto. A lagrangiana é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n),$$

onde U é a energia potencial da interação. Verifique que as equações de Euler-Lagrange são equivalentes às equações de Newton $m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha}$.

ex: Mostre que a hamiltoniana é uma constante do movimento, ou seja, que

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = 0$$

ao longo das soluções das equações de Hamilton. Deduza que as órbitas do sistema no espaço de fases X estão contidas nas curvas/superfícies de nível $\{H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\}$ da hamiltoniana.

One-dimensional Newtonian motion in a time independent force field. The one-dimensional motion of a particle of mass m subject to a force $F(x)$ that does not depend on time is described by the Newton equation

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}(x),$$

where the potential $U(x) = -\int F(x)dx$ is some primitive of the force. The total energy

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

(which of course is defined up to an arbitrary additive constant) of the system is a constant of the motion, i.e. is constant along solutions of the Newton equation. In particular, once a value E of the energy is given (depending on the initial conditions), the motion takes place in the region where $U(x) \leq E$, since the kinetic energy $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ is non-negative. Conservation of energy allows to reduce the problem to the first order ODE

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x)),$$

which has the unpleasant feature to be quadratic in the velocity \dot{x} . Meanwhile, if we are interested in a one-way trajectory going from some x_0 to x , say with $x > x_0$, we may solve for \dot{x} and find the first order autonomous ODE

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

There follows that the time needed to go from x_0 to x is

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(y))}}.$$

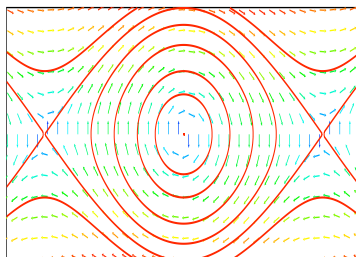
The inverse function of the above $t(x)$ will give the trajectory $x(t)$ with initial position $x(0) = x_0$ and initial positive velocity $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x_0))}$, at least for sufficiently small times t .

Pêndulo matemático. A equação de Newton que modela as oscilações de um pêndulo é

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta),$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, $g \simeq 980 \text{ cm s}^{-2}$ é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo e θ é o ângulo que o pêndulo forma com a vertical. No espaço de fases, de coordenadas θ e $p := \dot{\theta}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin(\theta) \end{cases}.$$



ex: Verifique que a energia

$$H(\theta, p) := \frac{1}{2}p^2 + \omega^2(1 - \cos(\theta))$$

é uma constante do movimento.

ex: Esboce as curvas de energia constante e o campo de velocidades, e conjecture sobre as trajetórias.

ex: Show that the motion with energy E is given by

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - \cos(\theta))}}$$

ex: Define the new variable $x := \sqrt{\frac{2}{E+1}} \sin(\theta/2)$ and the square energy $K := \sqrt{\frac{E+1}{2}}$, and show that the motion reads

$$\dot{x} = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}$$

Deduce that time is given by the so called *Jacobi's elliptic integral of the first kind*

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$$

whose solution (i.e. x as a function of time t) is “defined” as the *elliptic function* $x(t) = \text{sn}(t, K)$ (see [?]).

Oscilador harmónico/lei de Hooke. As pequenas oscilações de um pêndulo à volta da posição de equilíbrio $\theta = 0$, ou as oscilações de uma partícula sujeita à *lei de Hooke*, são modeladas pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}$$

ex: Verifique que a energia

$$H(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento.

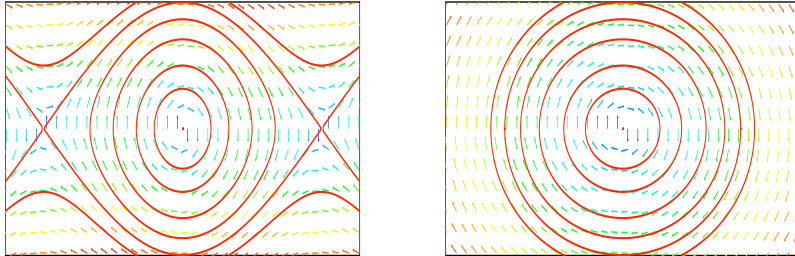
ex: Esboce as curvas de energia constante e o campo de velocidades, e conjecture sobre as trajetórias.

ex: Fixed a positive energy E , the motion takes place in the interval (x_-, x_+) with $x_{\pm} = \pm\sqrt{2E}/\omega$, and the velocity \dot{x} satisfies the quadratic equation

$$\dot{x}^2 = \omega^2(|x_{\pm}|^2 - x^2).$$

Find the trajectory from x_- to any $x \leq x_+$.

ex: Compute the time needed to go from x_- to x_+ , and show that it does not depend on the energy E .



Retratos de fases do pêndulo matemático e do oscilador harmônico.

Real gravity and second cosmic velocity. The distance r of a particle of mass m from the center of the Earth satisfies the Newton equation

$$m\ddot{r} = -mg\frac{R^2}{r^2},$$

where R is the radius of the Earth (and, of course, $r \geq R$). Here we are considering the real gravitational force produced by the Earth, but we are disregarding the gravitational influence of the Sun and other celestial bodies.

ex: Find the potential $U(r)$ of the gravitational field and write the expression for the total energy of the system.

ex: Write the integral that represents the time needed to send a particle from the Earth surface $r_0 = R$ up to a height $h = r - R > 0$ from the Earth surface, given an initial energy $E > gR$.

ex: Find the minimum upward velocity necessary to escape from the Earth gravitational field, i.e. to reach an infinite distance.

5 EDOs lineares de primeira ordem*

[Ap69] Vol. 1, 8.1-7

EDOs lineares de primeira ordem. Uma EDO linear de primeira ordem é uma lei

$$\dot{x} + p(t)x = q(t) \quad (5.1)$$

para o observável $x(t)$, onde os “coeficientes” $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas definidas num intervalo de tempos (por exemplo, em toda a reta real).

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções da EDO linear de primeira ordem (5.1), então a diferença $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução da equação homogênea associada

$$\dot{y} + p(t)y = 0 \quad (5.2)$$

O espaço das soluções da equação homogênea (5.2) é um espaço vetorial de dimensão 1, uma reta $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}$ gerada, por exemplo, pela solução

$$y_1(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \quad (5.3)$$

que vale $y_1(t_0) = 1$ no instante inicial t_0 . Portanto, o espaço das soluções da equação linear (5.1) é uma reta afim $z + \mathcal{H}$, onde $z(t)$ é uma solução particular de (5.1).

A solução da EDO linear (5.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada usando o método da “variação das constantes/dos parâmetros”. O primeiro passo consiste em determinar uma solução não-trivial $y(t)$ da equação homogênea (5.2) (por exemplo, a solução (5.3), que tem valor 1 no instante inicial). O segundo passo consiste em substituir a “conjetura”

$$x(t) = \lambda(t)y(t)$$

(o fator λ é o parâmetro que varia!) na equação não-homogênea (5.1), deduzir a EDO simples

$$\dot{\lambda}y + \lambda\dot{y} + p\lambda y = q \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}y = q$$

(porque $\lambda\dot{y} + p\lambda y = 0$, sendo y uma solução da homogênea) para o parâmetro $\lambda(t)$, e integrar

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{q(s)}{y(s)} ds,$$

usando a condição inicial $x_0 = \lambda(t_0)y(t_0)$. Observe que se $y(t_0) = 1$, como sugerido, então $x_0 = \lambda(t_0)$. O resultado é a seguinte receita (mas é mais fácil lembrar o método!).

Teorema 5.1. A solução da (5.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u) du} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u) du} q(s) ds \right).$$

ex: Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \quad \dot{x} + 2x = t \quad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \quad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

ex: Resolva os seguintes problemas de Cauchy nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan \theta = \cos \theta \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

Queda livre com atrito. Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência pode ser modelada como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade, assim que a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - mg$$

onde $\gamma > 0$ é um coeficiente de atrito. Portanto, a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$m\dot{v} = -\gamma v - mg.$$

ex: Resolva o problema com condição inicial $v(0) = 0$.

ex: Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para um valor assintótico \bar{v} quando $t \rightarrow \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.

ex: Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $q(t)$ com condição inicial $q(0) = q_0 > 0$.

Circuito RL. A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V(t)$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

As soluções da equação homogénea, ou seja, com $V(t) = 0$ (circuito desligado), são proporcionais a $e^{-(R/L)t}$, e portanto decrescem exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau = L/R$. Se o circuito é alimentado com tensão constante $V(t) = E$, então a solução estacionária é a $\bar{I} = E/R$ (lei de Ohm). A diferença $x(t) = I(t) - \bar{I}$ é solução de $\dot{x} = -(R/L)x$, e portanto a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = \bar{I} + e^{-\frac{R}{L}t} (I_0 - \bar{I}),$$

assintótica à lei de Ohm.

Quando a tensão que alimenta o circuito é variável, então a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} V(\tau) d\tau \right).$$

ex: Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E \sin(\omega t)$. Verifique que a solução com $I(0) = 0$ é

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde ϕ é uma fase que depende de ω , L e R .

Lei do arrefecimento de Newton. Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ pode ser modelada pela *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k(T - M(t))$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva (que depende do material do corpo). A solução com condição inicial $T(0) = T_0$ é

$$T(t) = e^{-kt} \left(T_0 + k \int_0^t e^{k\tau} M(\tau) d\tau \right).$$

ex: Se a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$, então a diferença $x(t) := T(t) - M$ satisfaz a EDO

$$\dot{x} = -kx.$$

Determine $T(t)$ e diga o que acontece quando $t \rightarrow \infty$

ex: Determine a solução assintótica (ou seja, quando t é grande) quando a temperatura do meio ambiente é a função periódica $M(t) = M \sin(\omega t)$.

ex: Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100°C , é colocada numa sala cuja temperatura é de 20°C . Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60°C em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40°C .

Equações de Bernoulli. Uma EDO da forma

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^n,$$

onde p e q são funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $n \neq 0, 1$ (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita *equação de Bernoulli*.

ex: Verifique que $x(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio da equação de Bernoulli.

ex: Seja $k = 1 - n$. Mostre que $x(t)$ é uma solução positiva da equação de Bernoulli com condição inicial $x(t_0) = x_0 > 0$ se e só se a função $y(t) = x(t)^k$ é uma solução da EDO linear

$$\dot{y} + kp(t)y = kq(t)$$

com condição inicial $y(t_0) = (x_0)^{1/k}$.

ex: Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$\dot{x} + x = x^2 (\cos t - \sin t) \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} + e^{t^2}x = x^2 \log t \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$\dot{x} - x/t = t\sqrt{x} \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

6 Simetrias e EDOs homogéneas*

ref: [Ar89] I.1

Simetrias de uma equação diferencial. Seja $\mathbf{v} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores que define a EDO autónoma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

num espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou, em geral, numa variedade diferenciável). Uma *simetria* do campo \mathbf{v} , ou da EDO autónoma (6.1), é um difeomorfismo $g : X \rightarrow X$ que deixa invariante o campo de vetores, ou seja, tal que

$$\mathbf{v}(g(\mathbf{x})) = Dg_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

para todo ponto $\mathbf{x} \in X$, onde $Dg_{\mathbf{x}}$ denota a derivada de g no ponto \mathbf{x} . Se o vetor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é a velocidade $\dot{\varphi}(0)$ de uma curva $t \mapsto \varphi(t)$ que passa por \mathbf{x} no instante $t = 0$, então, por definição, o vetor $Dg_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x})$ é a velocidade $\dot{\psi}(0)$ da curva $t \mapsto \psi(t) := g(\varphi(t))$, que passa por $g(\mathbf{x})$ no instante $t = 0$. Consequentemente, se $\varphi(t)$ é uma solução de (6.1) e g é uma sua simetria, então também $g \circ \varphi$ é uma solução.

Mais em geral, uma *simetria* da equação diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (6.2)$$

é uma simetria do campo de direções $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, ou seja, uma simetria do campo de vetores $(1, \mathbf{v}(t, \mathbf{x}))$, definido no espaço de fases ampliado $\mathbb{R} \times X$. A cada curva integral da EDO (6.2) corresponde uma solução da EDO autónoma $(t, \dot{\mathbf{x}}) = (1, \mathbf{v}(t, \mathbf{x}))$, e vice-versa. Consequentemente,

Teorema 6.1. *As simetrias de uma equação diferencial, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, enviam soluções/curvas integrais em soluções/curvas integrais.*

É claro que as simetrias de uma equação diferencial formam um grupo (de difeomorfismos do espaço de fases ou do espaço de fases ampliado).

ex: Uma equação simples $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t)$, definida em $X \subset \mathbb{R}^n$, é invariante para translações $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$, com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. O grupo das suas simetrias contém portanto o grupo aditivo \mathbb{R}^n .

ex: Uma equação autónoma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ é invariante para translações no eixo dos tempos $t \mapsto t + \tau$, com $\tau \in \mathbb{R}$ (que são simetrias do espaço de fases ampliado). O grupo das suas simetrias contém portanto o grupo aditivo \mathbb{R} .

Homotetias e funções homogéneas. As *homotetias (positivas)* do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n são as transformações $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$, com $\lambda \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$. Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou um campo vetorial $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$), definida num domínio “homogéneo” (i.e. invariante para homotetias) $D \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, é dita *homogénea de grau k* se

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \forall \mathbf{x} \in D,$$

e é dita *homogénea* (de grau 0) se é invariante para homotetias, ou seja, se

$$f(\lambda \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

Teorema 6.2 (Euler). *Uma função diferenciável $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é homogénea de grau k sse*

$$\langle \mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = k f(\mathbf{x})$$

para todos os pontos $\mathbf{x} \in D$.

ex: Prove o teorema de Euler (calcule as derivadas em ordem a λ dos dois termos $f(\lambda \mathbf{x})$ e $\lambda^k f(\mathbf{x})$ quando $\lambda = 1$).

ex: Determine os polinômios homogêneos de grau 1, de grau 2 e de grau 3 no plano \mathbb{R}^2 . ex Mostre que as únicas funções homogêneas e contínuas definida em todo o espaço \mathbb{R}^n são as constantes (observe que as funções homogêneas são constantes ao longo das semi-retas que saem da origem, logo, se a origem está no domínio da função ...).

ex: Determine o grau de homogeneidade dos campos de forças elástico e gravitacional/elétrico, definidos por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

respetivamente (o segundo definido para $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$).

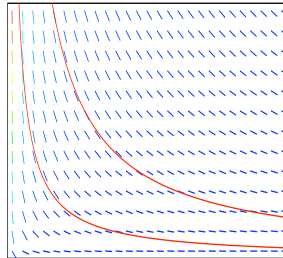
ex: Diga se as seguintes funções $f(x, y)$, definidas em oportunos domínios do plano, são homogêneas:

$$x/y \quad e^{x-y} \quad \frac{x^2 - xy}{xy + 3y^2} \quad \sin(y) \cos(x)$$

EDOs homogêneas. Uma EDO *homogênea* é uma equação diferencial

$$\dot{x} = v(t, x)$$

definida, num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ do plano de coordenadas (t, x) , por um campo de direções homogêneo, ou seja, tal que $v(\lambda t, \lambda x) = v(t, x)$ para todos os $\lambda > 0$. As homotetias $(t, x) \mapsto (\lambda t, \lambda x)$, com $\lambda \in \mathbb{R}_+$, enviam curvas integrais de uma EDO homogênea em curvas integrais.



A mudança de variável $y(t) := x(t)/t$, num domínio onde $t > 0$ ou $t < 0$, transforma uma EDO homogênea $\dot{x} = v(t, x)$ numa EDO separável $y + ty' = v(1, y)$. Ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(1, x/t) \quad \Rightarrow \quad y + ty' = v(1, y) \quad \text{se } y = x/t}$$

ex: Seja $\dot{x} = v(t, x)$ uma EDO homogênea. Mostre que, se $\varphi(t)$ é uma solução e $\lambda > 0$, então também $\phi(t) := \lambda \cdot \varphi(t/\lambda)$ é uma solução.

ex: Seja $\varphi(t)$ uma solução da EDO homogênea $\dot{x} = v(t, x)$ tal que $\varphi(1) = 5$ e $\varphi(2) = 7$. Se $\phi(t)$ é uma outra solução tal que $\phi(3) = 15$, quanto vale $\phi(6)$?

ex: Resolva as seguintes EDOs homogêneas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -t/x & \dot{x} &= \frac{x-t}{x+t} & \dot{x} &= 1 + x/t \\ \dot{x} &= x/t & \dot{x} &= 2\frac{t}{x}e^{x/t} + \frac{x}{t} & \frac{dy}{dx} &= y/x + \sin(y/x), \end{aligned}$$

definidas em oportunos domínios, e esboce a representação gráfica de algumas das soluções.

Equação de Newton com forças homogêneas. [Ar89, LL78] Considere a equação de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula sujeita a uma força homogênea de grau k , ou seja, tal que $\mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^k\mathbf{F}(\mathbf{r})$ para todos os $\lambda > 0$ e todo os pontos $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. As “quase-homotetias”

$$(t, \mathbf{r}) \mapsto (\lambda^\alpha t, \lambda^\beta \mathbf{r}),$$

com $\lambda > 0$, enviam curvas integrais em curvas integrais se os “pesos” α e β satisfazem a relação

$$\beta(1 - k) = 2\alpha.$$

Em particular, uma órbita fechada de dimensão linear L e período de revolução T é enviada numa órbita fechada de dimensão linear $L' = \lambda^\beta L$ e período de revolução $T' = \lambda^\alpha T$, e portanto o quociente T^β/L^α é constante.

ex: Considere uma força constante (e.g. a gravidade próximo da superfície da terra)

$$F(x) \propto 1,$$

e determine a relação entre espaço percorrido e tempo necessário.

ex: Considere a força elástica (e.g. lei de Hooke, oscilador harmônico)

$$F(x) \propto -x,$$

e deduza que os períodos das órbitas fechadas não dependem das amplitudes das oscilações.

ex: Considere uma força elástica “fraca”

$$F(x) \propto -x^3,$$

Determine o período das pequenas oscilações em quanto função da amplitude.

ex: Considere a força gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \propto -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

e deduza a *terceira lei de Kepler*¹⁷: “os quadrados dos períodos de revolução T são proporcionais aos cubos das distâncias médias L do Sol aos planetas, ou seja, T^2/L^3 é uma constante”.

¹⁷Johannes Kepler, *Harmonices mundi*, 1619.

7 Números complexos e oscilações

ref: [Ap69] Vol. 1, 9.1-10 ; [MW85] Vol. 2, 12.6.

6 fev 2020

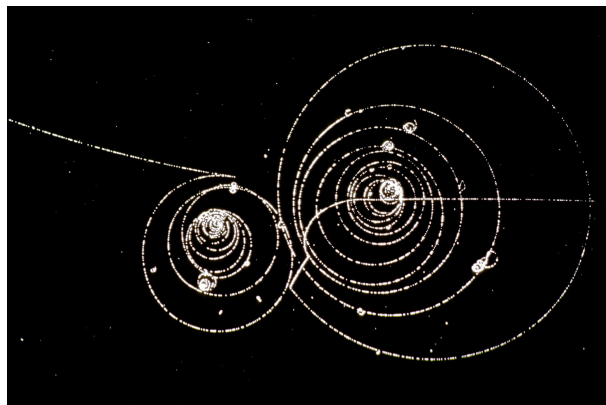
História muito breve. Os números complexos foram inventados/descobertos no século XVI como um truque “sofístico” para resolver polinômios do gênero $x^3 + px + q = 0$. Hoje em dia, fazem parte da formulação das leis fundamentais da Natureza, como, por exemplo, a *equação de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$$

da mecânica quântica, ou os *integrals de Feynman*

$$\int_{\text{paths}} e^{iS[x]/\hbar} \mathcal{D}x$$

da teoria quântica dos campos.



Nas palavras de Roger Penrose [Pe05],

... complex numbers, as much as reals, and perhaps even more, find a unity with nature that is truly remarkable. It is as though Nature herself is as impressed by the scope and consistency of the complex-number system as we are ourselves, and has entrusted to these numbers the precise operations of her world at its minutest scales.

Exponencial e funções trigonométricas. A função exponencial, definida pela série de potências

$$e^t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \dots,$$

é a (única) solução da equação diferencial $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = 1$. As funções $e^{\alpha t}$, obtidas com uma reparametrização do tempo, descrevem um decaimento ou um crescimento exponencial, dependendo do sinal do parâmetro real α .

As séries de potências das funções trigonométricas,

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots \quad \text{e} \quad \sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots$$

parecem ser formadas pelas partes par e ímpar do exponencial, respectivamente, mas têm sinais alternados. Uma maneira, aparentemente artificial, de obter os sinais alternados consiste em considerar uma reparametrização do tempo do gênero $t \mapsto it$, onde i é um “número imaginário” que satisfaz $i^2 = -1$ (este truque, chamado “rotação de Wick”, resulta ser uma arma poderosa nas mãos dos físicos teóricos modernos). Se definimos $z(t) := e^{it}$ e calculamos a sua derivada de acordo com as regras algébricas usuais, observamos que esta função é solução da equação diferencial $\dot{z} = iz$

(que não tem significado físico, pois contém o número imaginário i). No entanto, ao derivar uma segunda vez, chegamos a

$$\ddot{z} = -z,$$

que é a equação diferencial do oscilador harmônico, cuja soluções são as funções trigonométricas! De fato, a substituição do tempo real t pelo tempo imaginário it na série de potências que define o exponencial, mostra que formalmente

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}it^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}it^5 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots\right) + i \left(t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots\right), \end{aligned}$$

Esta é a famosa *fórmula de Euler*,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

O corpo dos números complexos. Do ponto de vista algébrico, o corpo dos *números complexos* é $\mathbb{C} := \mathbb{R}(i)$, onde $i^2 = -1$. Ou seja, é o conjunto \mathbb{C} das expressões formais $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, que chamamos “números complexos”, munido das operações binárias “soma”, definida por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (7.1)$$

e “multiplicação”, definida por

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (7.2)$$

É subentendido que dois números complexos $x_1 + iy_2$ e $x_2 + iy_2$ são iguais sse $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. É também conveniente denotar simplesmente $x + i0 = x$ e $0 + iy = iy$. Em particular, $x \mapsto x + i0$ define uma inclusão $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, e as operações definidas acima são as usuais operações no corpo dos reais.

Se $i := 0 + i \cdot 1 \in \mathbb{C}$, então $i \cdot i = -1$, ou seja, $\pm i$ são (as únicas) “raízes quadradas de -1 ”. De fato (e esta é a origem das fórmulas acima), somas e multiplicações entre números complexos podem ser manipuladas como as correspondentes operações entre números reais (ou seja, usando as propriedades associativas, comutativas e distributivas), e depois substituindo $i \cdot i$ por -1 .

É natural identificar os números complexos $z = (x + iy)$ com os pontos/vetores (x, y) do plano \mathbb{R}^2 , e denotar a correspondência com $x + iy \approx (x, y)$. Então a soma $z_1 + z_2$ corresponde à soma dos vetores $z_1 \approx (x_1, y_1)$ e $z_2 \approx (x_2, y_2)$ do plano. A reta real $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é naturalmente identificada com o eixo dos x 's em \mathbb{R}^2 , e a reta “imaginária” $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é naturalmente identificada com o eixo dos y 's.

O conjunto \mathbb{C} , munido da operação $+$ definida em (7.1), é um grupo abeliano aditivo, cujo elemento neutro é $0 := 0 + i0$. O oposto do número complexo $z = x + iy$ é o número complexo $-z = (-x) + i(-y)$ (denotado simplesmente por $-z = -x - iy$), que verifica $z + (-z) = 0$. Somar um número complexo z , i.e. fazer $w \mapsto w + z$, corresponde a uma translação no plano complexo $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$.

Todo $z = x + iy \neq 0$ admite um único inverso multiplicativo, um número complexo $1/z$ tal que $z \cdot (1/z) = (1/z) \cdot z = 1$, dado por

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

como é fácil verificar (observe que se $z \neq 0$ então $x^2 + y^2 > 0$). Consequentemente, o conjunto $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, munido da operação \cdot definida em (7.2), é um grupo abeliano, o grupo multiplicativo dos números complexos invertíveis, cujo elemento neutro é $1 := 1 + i0$. As potências inteiras de um número complexo são definidas por recorrência: $z^{n+1} := z \cdot z^n$, se $n \geq 1$, sendo $z^0 := 1$. Se $z \in \mathbb{C}^\times$, então as potências negativas são definidas por $z^{-n} := (1/z)^n$. Por exemplo, $i^2 = -1$, e $i^{-1} = 1/i = -i$.

A propriedade distributiva $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$, que implicitamente foi usada na definição da multiplicação, mostra que \mathbb{C} é um corpo. Contém, como subcorpos, o corpo dos reais \mathbb{R} , que a sua vez contém o corpo \mathbb{Q} dos racionais. No entanto, não é possível estender a ordem de \mathbb{R} a uma ordem de \mathbb{C} compatível com as operações, ou seja, o corpo dos números complexos não é um corpo ordenado.

ex: Calcule

$$(2 + i3) + (3 - i2) \quad (1 - i) \cdot (2 - i) \quad (1 + i) + (1 - i) \cdot (2 - i5)$$

ex: Na identificação $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ definida por $x + iy \approx (x, y)$, o produto $(a + ib)(x + iy)$ é dado por

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Em particular, se $a + ib \neq 0$, então o produto é

$$\sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde $\tan \theta = b/a$ se $a \neq 0$, ou $\theta = \pi/2$ se $a = 0$. Esta fórmula revela o significado geométrico da multiplicação: a multiplicação por um número complexo $a + ib$ diferente de zero corresponde a uma rotação de um ângulo θ e uma homotetia de razão $\sqrt{a^2 + b^2}$.

ex: Represente na forma $x + iy$ os seguintes números complexo

$$i^3 \quad \frac{1}{1+i} \quad \frac{2-i}{1+i} \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{i}{2+i} \quad (1-i3)^2 \quad i^{17} \quad (2 \pm i)^3$$

Conjugação. O *conjugado* de $z = x + iy$ é

$$\boxed{\bar{z} := x - iy,}$$

ou seja, a imagem do ponto $x + iy \approx (x, y)$ pela reflexão na reta $y = 0$ do plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. A conjugação respeita soma e produtos, ou seja, verifica

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{e} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

(a segunda identidade não é óbvia, mas um “milagre” que relaciona multiplicação e geometria euclidiana do plano). Observe também que a conjugação é uma involução, ou seja, $\bar{\bar{z}} = z$.

Os números reais

$$x = \Re(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \Im(z) := \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z = x + iy$, respetivamente. Observe que $z = \bar{z}$ sse z é real, i.e. sse $\Im(z) = 0$.

Módulo. A conjugação permite definir $N(z) := z\bar{z} = x^2 + y^2$, que é um número real não-negativo (o “módulo” de z no sentido da teoria de números), e portanto o *módulo*, ou *valor absoluto*, de $z = x + iy$,

$$\boxed{|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

que é a norma euclidiana do vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Em particular, $|z| = 0$ sse $z = 0$. O valor absoluto é multiplicativo, ou seja,

$$|zw| = |z||w|$$

e, Consequentemente, $|z/w| = |z|/|w|$ se $w \neq 0$. O inverso multiplicativo de um número complexo $z \neq 0$ é então

$$1/z = \bar{z}/|z|^2.$$

Os números complexos de norma um definem a *circunferência unitária* $\mathbf{S} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$, que é um subgrupo do grupo multiplicativo \mathbb{C}^\times , isomorfo ao grupo $U(1)$ das transformações unitárias do espaço euclidiano complexo \mathbb{C} .

ex: Verifique que $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

ex: Interprete, e prove, a seguinte identidade entre números reais:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Raízes de polinômios reais de grau dois. Um polinômio de grau dois com coeficiente reais é uma função do gênero $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Para calcular as suas raízes, ou seja, os pontos onde $f(x) = 0$, podemos dividir por a , e considerar o polinômio mônico (ou seja, tal que o termo de grau maior tem coeficiente um)

$$f(z) = z^2 + 2\alpha z + \beta$$

(o fator 2 está para simplificar as contas). Ao “completar o quadrado” temos que

$$\begin{aligned} z^2 + 2\alpha z + \beta &= z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 - \alpha^2 + \beta \\ &= (z + \alpha)^2 + (\beta - \alpha^2) \end{aligned}$$

e portanto as raízes são soluções de

$$(z + \alpha)^2 = \alpha^2 - \beta.$$

O número $\delta := \alpha^2 - \beta$ é chamado “discriminante” do polinômio. Se $\delta \geq 0$, temos duas raízes reais $z_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\delta}$, eventualmente coincidentes quando $\delta = 0$. Em termos dos coeficientes originais a, b, c , esta é a famosa “fórmula resolvente”

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $\delta < 0$, e portanto $\delta = -\omega^2$ para algum $\omega > 0$, o polinômio não admite raízes reais. No entanto, podemos observar que $(\pm i\omega)^2 = \delta$. Então temos duas raízes complexas e conjugadas

$$z_{\pm} = -\alpha \pm i\omega.$$

Nos dois casos, o polinômio mônico fatoriza como produto

$$f(z) = (z - z_+)(z - z_-)$$

de duas raízes, simétricas em relação ao eixo real.

ex: Resolva as seguintes equações

$$z^2 + 5 = 0 \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

Representação polar. A *representação polar* do número complexo $z = x + iy \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$z = \rho e^{i\theta}$$

onde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ é o módulo de z , $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é um *argumento* de z , ou seja, um ângulo tal que $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$ (logo definido a menos de múltiplos inteiros de 2π), e o número complexo unitário $e^{i\theta} \in \mathbf{S}$ é (provisoriamente) definido pela *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta). \quad (7.3)$$

à custa, portanto, das funções trigonométricas \cos e \sin , supostas definidas anteriormente (e.g. num curso de cálculo). Pode ser útil escolher um valor do argumento, e chamar *argumento principal* de um número z o único argumento que satisfaz $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.

É imediato verificar que o conjugado de $z = \rho e^{i\theta}$ é

$$\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$$

ou seja, a conjugação apenas muda o sinal do argumento. Por exemplo, $\bar{i} = -i = 1/i$.

Produto em representação polar. Se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, então as fórmulas de adição para seno e cosseno mostram que

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}} \quad (7.4)$$

Por exemplo, o quadrado de um número complexo $z = \rho e^{i\theta}$ é $z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$. Também, se $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Estas fórmulas revelam, mais uma vez, o significado geométrico da multiplicação entre números complexos. Uma primeira consequência é que o inverso do número complexo $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho > 0$, é $z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$. Outra é que a multiplicação por $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$, no plano $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, ou seja, a transformação $w \mapsto zw$, corresponde a uma homotetia $w \mapsto \rho w$ de razão $|z| = \rho > 0$ (uma dilatação ou contração se $\rho \neq 1$) e uma rotação $w \mapsto e^{i\theta} w$ de um ângulo θ .

Em particular, a multiplicação por um número complexo de módulo um, ou seja, da forma $e^{i\theta}$ com θ real, corresponde a uma rotação anti-horária de um ângulo θ . Por exemplo, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$ é uma “raiz quadrada” da rotação $z \mapsto e^{i\pi} z = -z$ de um ângulo π , i.e. uma rotação de um ângulo $\pi/2$.

ex: Represente na forma polar os seguintes números complexos:

$$-i \quad i - 1 \quad 1 + i \quad 3 - 4i$$

ex: Calcule

$$e^{i\pi} \quad e^{-i\pi/2}$$

Potências e raízes. As potências do número complexo z são definidas recursivamente por

$$z^0 = 1 \quad z^{n+1} = z \cdot z^n \quad \text{se } n \geq 1$$

Observe que

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta} \quad (7.5)$$

Em particular, $z^n \neq 0$ se $z \neq 0$. Consequentemente, é possível definir potências negativas se $z \neq 0$, por meio de $z^{-n} := 1/z^n$. Os pontos $\{z^n, n \in \mathbb{Z}\}$ desenham uma espiral no plano complexo, se $|z| \neq 1$. Por outro lado, as diferentes potências de um número complexo unitário $e^{i\theta}$ pertencem à circunferência unitária, e formam um conjunto finito se θ é um múltiplo racional de π .

Se $n = 1, 2, 3, \dots$, então cada número complexo $w \neq 0$ possui n raízes n -ésimas, i.e. n números complexos z que resolvem

$$z^n = w.$$

De fato, as raízes n -ésimas de $w = \rho e^{i\theta}$, com $\rho \neq 0$, são os números

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta + 2\pi k)/n}$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Os pontos z_k formam os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$ e centro 0. Em particular, os números complexos

$$\zeta_k := e^{i2\pi k/n},$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, que resolvem $(\zeta_k)^n = 1$ e portanto pertencem à circunferência unitária, são chamados *raízes n -ésimas da unidade*. Observe que $\zeta_k = (\zeta_1)^k$, onde $\zeta_1 = e^{i2\pi/n}$ é uma raiz “primitiva”.

ex: Calcule

$$\sqrt{i} \quad \sqrt{-i} \quad \sqrt{1+i} \quad \sqrt[4]{i}$$

ex: Resolva as equações

$$z^3 = -1 \quad z^5 = 1 \quad z^3 = 81.$$

Raízes de polinômios. Um polinômio de grau n é uma expressão (função complexa de uma variável complexa)

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (7.6)$$

onde os coeficientes a_k 's são números complexos e o primeiro é $a_n \neq 0$. Um número complexo p é uma raiz do polinômio $f(z)$ se $f(p) = 0$. As raízes de $f(z)$ são também as raízes do polinômio mônico $f(z)/a_n = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$, que é chamado polinômio *mônico*, e vice-versa. Gauss provou em 1799 o que hoje é chamado *teorema fundamental da álgebra*.

Teorema 7.1 (Gauss). *Todo polinômio de grau $n \geq 1$ admite (pelo menos) uma raiz em \mathbb{C} .*

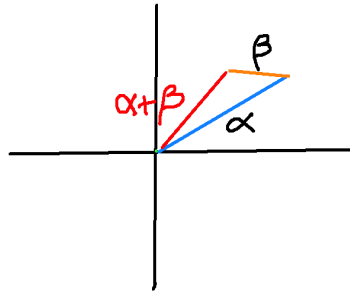
Demonstração. É claro que, a menos de dividir pelo coeficiente de grau máximo, basta provar o teorema para um polinômio mônico $f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ com $n \geq 1$. É também claro que se $|z| = R$ é suficientemente grande então também $|f(z)| \simeq R^n$ é grande, por exemplo superior ao valor de $|f(0)| = |a_0|$. Pelo teorema de Weierstrass, a função contínua $z \mapsto |f(z)|$ atinge um mínimo no disco fechado $|z| \leq R$, e, pela observação anterior, este mínimo é atingido num ponto p com $|p| < R$, e é também um mínimo absoluto de $|f(z)|$ no plano complexo. A menos de uma translação (ou seja de considerar o polinômio $f(z - p)$) podemos assumir que o mínimo é atingido na origem, e portanto que o polinômio tem a forma

$$f(z) = \alpha + z^m (b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k)$$

com $b_0 \neq 0$, $m \geq 1$, e que o seu mínimo módulo é $|f(0)| = |\alpha|$. Queremos provar que $\alpha = 0$, ou seja, que a origem é uma raiz do polinômio $f(z)$. Seja então $\alpha = \rho e^{i\theta} \neq 0$. O polinômio é da forma $\alpha + \beta(z)$, onde $\beta(z)$ é um polinômio de grau $m \geq 1$ que se anula na origem. Se o módulo de z é muito pequeno, então

$$\beta(z) = z^m (b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k) \simeq z^m b_0.$$

Ao variar z numa circunferência suficientemente pequena à volta da origem, $\beta(z)$ dá pelo menos uma volta (de fato, m voltas) em torno da origem, e portanto necessariamente o seu argumento assume valores próximos do oposto do argumento de α . Então, se $\alpha \neq 0$ e β é pequeno, é claro que $|\alpha + \beta| < |\alpha|$, como mostra a figura seguinte.



Mais precisamente, num ponto onde $\beta(z) \simeq \varepsilon e^{-i\theta}$ com $\varepsilon \ll \rho$,

$$|f(z) = |\alpha + \beta(z)| \simeq |\rho e^{i\theta} + \varepsilon e^{-i\theta}| = \rho - \varepsilon < |\alpha|,$$

o que contradiz o fato de $|\alpha|$ ser o mínimo absoluto de $|f(z)|$. □

Se p uma raiz do polinômio (7.6) de grau $n \geq 1$, então

$$f(z) = f(z) - f(p) = a_n (z^n - p^n) + \cdots + a_1 (z - p).$$

Então a identidade

$$z^k - p^k = (z - p) (z^{k-1} + z^{k-2} p + \cdots + z p^{k-2} + p^{k-1})$$

implica que o polinômio fatoriza como $f(z) = (z - p) g(z)$, onde g é um polinômio de grau $n - 1$. Consequentemente,

Teorema 7.2. Um polinómio mónico de grau $n \geq 1$ fatoriza no produto

$$f(z) = (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)$$

onde p_1, p_2, \dots, p_n são as suas n raízes, não necessariamente distintas.

A fatorização é única, a menos de permutações dos fatores. Vice-versa, é evidente que existe um único polinómio mónico de grau n cujas raízes são n números complexos distintos p_1, p_2, \dots, p_n .

Se p é uma raiz do polinómio $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, então \bar{p} é uma raiz do polinómio $\bar{f}(z) := \bar{a}_n z^n + \dots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0$, obtido de $f(z)$ trocando cada coeficiente pelo seu conjugado. Se os coeficientes de $f(z)$ são reais (i.e. $a_k = \bar{a}_k$), então $\bar{f} = f$. Consequentemente,

Teorema 7.3. As raízes não reais de um polinómio com coeficientes reais ocorrem em pares de números complexos conjugados, p e \bar{p} .

ex: Verifique que $(1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$, e portanto, se $z \neq 1$,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Considere $z = e^{i\theta}$ com $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$ e real, calcule a parte real e deduza

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2 \sin(\theta/2)}$$

ex: Mostre que se ω é uma raiz n -ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

Fórmula de de Moivre. A fórmula de Euler (7.3) e a (7.5) implicam a fórmula de de Moivre

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (7.7)$$

Ao calcular as potências a esquerda usando a fórmula do binómio, é então possível deduzir fórmulas para $\cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta)$ enquanto polinómios em $\cos \theta$ e $\sin \theta$, com expoentes $\leq n$. Por exemplo,

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{e} \quad \sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta.$$

Consequentemente, existem polinómios algébricos $T_n(x)$ de grau $n \geq 0$, (chamados *polinómios de Chebyshev*) tais que

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$$

(observe que as potências pares de $\sin \theta$ podem ser substituídas por potências pares de $\cos \theta$ usando a identidade trigonométrica).

ex: Calcule os polinómios de Chebyshev para valores pequenos de n , por exemplo T_2 , T_3 e T_4 .

ex: Calcule

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)^{13} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)^{17}$$

Exponencial complexo. A fórmula de Euler (7.3) e a propriedade (7.4) permitem definir o *exponencial* de um número complexo arbitrário $z = x + iy$ como

$$e^z := e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (7.8)$$

Assim, o módulo de e^z é igual ao número real e^x , que é estritamente positivo, e um argumento de e^z é igual a y , a parte imaginária de z . Em particular, $e^z \neq 0$. É imediato então verificar que o exponencial complexo satisfaz a regra do produto

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

ou seja, define um homomorfismo do grupo aditivo \mathbb{C} no grupo multiplicativo \mathbb{C}^\times . Em particular, o exponencial de um número complexo não é nulo, e o inverso multiplicativo de e^z é

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Oscilações. Uma curva $t \mapsto (x(t), y(t))$ no plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ pode ser representada, usando a notação complexa, como a função (complexa de uma variável real) $z(t) = x(t) + iy(t)$. A sua velocidade, o campo vetorial $v(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ (pensado aplicado no ponto $z(t)$), é então $\dot{z}(t) := \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$.

Dado ω real e positivo, a função

$$z(t) = e^{i\omega t}$$

descreve um ponto que percorre a circunferência unitária do plano complexo no sentido anti-horário com “frequência angular” ω , i.e. uma rotação cada período $T = 2\pi/\omega$, e portanto frequência $\nu = \omega/(2\pi)$ (medida em Hertz, rotações por segundo).

Mais em geral, a função

$$z(t) = c e^{i\omega t},$$

onde $c = \rho e^{i\varphi}$ é um parâmetro complexo, descreve um ponto que percorre a circunferência de raio $|c| = \rho$ no sentido anti-horário. Um cálculo elementar mostra que a velocidade desta curva é $\dot{z}(t) = i\omega c e^{i\omega t}$. Ou seja, $z(t)$ satisfaz as equações diferenciais lineares

$$\dot{z} = i\omega z \quad \text{e} \quad \ddot{z} = -\omega^2 z.$$

com condições iniciais $z(0) = c$ e $\dot{z}(0) = i\omega c$. Consequentemente, a parte real (e também a parte imaginária) de $z(t)$,

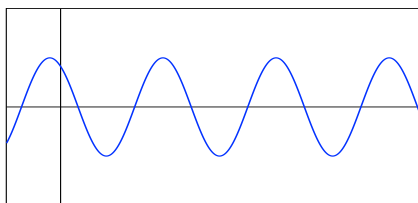
$$q(t) := \Re[z(t)] = \rho \cos(\omega t + \varphi)$$

é uma solução (real) do oscilador harmônico $\ddot{q} = -\omega^2 q$. De fato, as duas curvas $e^{\pm i\omega t}$ são soluções de $\ddot{z} = -\omega^2 z$, e as soluções trigonométricas pode ser obtidas ao fazer combinações lineares complexas

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad \text{e} \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

ex: Identifique as condições iniciais $q(0)$ e $\dot{q}(0)$ enquanto funções de $z(0) = \rho e^{i\varphi}$.

ex: Determine as constantes complexas c e d tais que a curva $z(t) = ce^{i\omega t} + de^{-i\omega t}$ seja solução de $\ddot{z} = -\omega^2 z$ com condições iniciais $z(0) = a$ e $\dot{z}(0) = b$.



Oscilação $q(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi)$.

Sobreposições. A sobreposição das oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$,

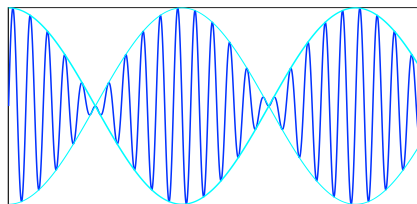
$$z(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t},$$

é máxima quando $\omega_1 t = \omega_2 t$ (módulo 2π), e mínima quando $\omega_1 t - \omega_2 t = \pi$ (módulo 2π).

Se $\omega_1 = \omega + \varepsilon$ e $\omega_2 = \omega - \varepsilon$, a sobreposição das duas oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$ pode ser representada como

$$z(t) = e^{i\omega t} (e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t}) = 2e^{i\omega t} \cos(\varepsilon t)$$

Em particular, se $|\varepsilon| \ll |\omega|$, então a sobreposição consiste numa modulação lenta (com período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) da frequência fundamental $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$.



Sobreposição $z(t) = \sin(0.95 \cdot t) + \sin(1.05 \cdot t)$.

Oscilações amortecidas. A função

$$t \mapsto z(t) = e^{(\alpha+i\omega)t}$$

descreve um ponto no plano que percorre uma espiral centrada na origem. Por exemplo, se $\alpha < 0$, então sua parte real,

$$q(t) = e^{\alpha t} \cos(\omega t)$$

descreve uma oscilação amortecida.

8 EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes

ref: [Ap69] Vol. 1, 8.8-14 ; [MW85] Vol. 2, 12.6-7

13 fev 2020

Equação de Newton num potencial quadrático. Considere a equação de Newton

$$\ddot{q} = -\beta q \quad (8.1)$$

que determina a trajetória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}$ de uma partícula (de massa unitária) num potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$. Uma solução de equilíbrio é a solução trivial $q(t) = 0$ para todo tempo t , e é a única se $\beta \neq 0$.

Se $\beta = 0$, soluções da equação de Newton $\ddot{q} = 0$ (que neste caso é a equação da partícula livre) são

$$q(t) = a + bt$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias (movimento retilíneo uniforme).

Se $\beta = -k^2 < 0$, duas soluções da equação de Newton são $e^{\pm kt}$, ou $\cosh(kt) = (e^{kt} + e^{-kt})/2$ e $\sinh(kt) = (e^{kt} - e^{-kt})/2$. Por linearidade, uma solução é também uma sobreposição $\ddot{q} = k^2 q$ são

$$q(t) = ae^{kt} + be^{-kt} = c \cosh(kt) + d \sinh(kt)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

Se $\beta = \omega^2 > 0$, das soluções da equação (do oscilador harmônico) $\ddot{q} = -\omega^2 q$ são $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$. Por linearidade, uma solução é também uma sobreposição

$$q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias (oscilações de frequência ω).

Partícula num potencial quadrático com atrito. O atrito é modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. A equação de Newton de uma partícula num potencial quadrático com atrito é portanto da forma

$$\ddot{q} = -2\alpha \dot{q} - \beta q, \quad (8.2)$$

onde $\gamma = 2\alpha$ é um coeficiente de atrito (positivo). Um cálculo elementar mostra que a função $q(t) = e^{-\alpha t} y(t)$ é uma solução da equação de Newton (8.2) sse $y(t)$ é uma solução da equação de Newton sem atrito

$$\ddot{y} = -\delta y$$

com $\delta = \beta - \alpha^2$. Consequentemente, soluções de (8.2) são

$$q(t) = e^{-\alpha t} (a + bt)$$

se $\alpha^2 = \beta$ (um caso muito particular), ou

$$q(t) = e^{-\alpha t} (ae^{kt} + be^{-kt})$$

se $0 < \alpha^2 - \beta = k^2$ (atrito grande), ou

$$q(t) = e^{-\alpha t} (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

se $0 < \beta - \alpha^2 = \omega^2$ (atrito pequeno).

Independência linear e Wronskiano. A intuição física, ou melhor, o “determinismo”, diz que uma equação de Newton $m\ddot{q} = F$ determina univocamente o futuro e o passado, ou seja, a trajetória $t \mapsto q(t)$ definida para todo tempo t , se são dadas a posição $q(0) = q_0$ e a velocidade $\dot{q}(0) = v_0$ iniciais da partícula. No caso da partícula num potencial quadrático com atrito, ou seja, das equações lineares homogêneas do género $\ddot{q} = -2\alpha \dot{q} - \beta q$, encontramos pares de soluções. Duas

soluções, $q_+(t)$ e $q_-(t)$, são suficientes se conseguirmos representar toda solução como combinação linear $q(t) = a q_+(t) + b q_-(t)$. Mas isto significa que o sistema linear

$$\begin{aligned} a q_+(0) + b q_-(0) &= q_0 \\ a \dot{q}_+(0) + b \dot{q}_-(0) &= v_0 \end{aligned}$$

admite uma única solução para todo vetor (q_0, v_0) de condições iniciais, e portanto que o determinante $q_+(0) \dot{q}_-(0) - \dot{q}_+(0) q_-(0)$ é diferente de zero. É imediato verificar que este é o caso dos pares de soluções entoadas no parágrafo anterior. É claro também que o tempo inicial $t_0 = 0$ pode ser substituído por qualquer outro tempo, sendo a equação de Newton invariante para translações no tempo.

O (*determinante*) *Wronskiano* entre as funções $f(t)$ and $g(t)$, definidas e deriváveis com continuidade num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, é a função

$$W_{f,g}(t) := \det \begin{pmatrix} f(t) & \dot{f}(t) \\ g(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix} = f(t)\dot{g}(t) - \dot{f}(t)g(t)$$

Se $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos $t \in I$ então o quociente g/f (ou f/g) é constante no intervalo I , e portanto as funções $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes (enquanto vetores do espaço linear das funções com derivada contínua definidas no intervalo I). Consequentemente, se $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes, então o Wronskiano $W_{f,g}(t) \neq 0$ em algum ponto $t \in I$.

Se ϕ_+ e ϕ_- são duas soluções da mesma EDO linear

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$$

(os coeficientes não são necessariamente constantes!), definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e $t_0 \in I$, então um cálculo elementar mostra que o Wronskiano satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} W_{\phi_+, \phi_-} = -p(t) W_{\phi_+, \phi_-},$$

e portanto a *identidade de Abel*

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = W_{\phi_+, \phi_-}(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

Consequentemente,

Teorema 8.1. *Dois soluções ϕ_+ e ϕ_- da mesma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem são linearmente independentes se e só se $W_{\phi_+, \phi_-}(t) \neq 0$ num ponto (e portanto em todos os pontos) $t_0 \in I$.*

ex: Calcule

$$W_{e^{-\alpha t}, te^{-\alpha t}}, \quad W_{e^{-\alpha t} e^{kt}, e^{-\alpha t} e^{-kt}} \quad \text{and} \quad W_{e^{-\alpha t} \sin(\omega t), e^{-\alpha t} \cos(\omega t)}.$$

Unicidade das soluções. Uma equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes genérica é uma equação

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0 \tag{8.3}$$

onde os coeficientes α e β são números reais (e, nos casos físicos, positivos!). Os exemplos anteriores mostram que admite sempre um par de soluções independentes, e portanto uma solução para cada condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Esta solução é única, como segue do teorema de Picard.

No entanto, é interessante provar a unicidade usando uma ideia no mesmo tempo mais elementar e mais profunda. Já vimos que $x(t) = e^{-\alpha t} y(t)$ é solução de (8.3) sse $y(t)$ é solução de $\ddot{y} = \lambda y$, com $\lambda = \alpha^2 - \beta$. Portanto, é suficiente provar o teorema de unicidade para esta equação.

O operador *laplaciano* em dimensão um é o operador $\Delta := D^2$, onde $D = d/dt$ denota o operador *derivação*, que envia $f(t)$ em $(Df)(t) := f'(t)$. A equação $f'' = \lambda f$ pode portanto ser escrita

$$\Delta f = \lambda f,$$

e diz que $f(t)$ é um vetor próprio do laplaciano, com valor próprio λ . O teorema de unicidade é uma consequência imediata do seguinte resultado, caso particular de um teorema profundo sobre os operadores diferenciais “elípticos”.

Uma função $f(t)$ é dita *analítica* se a sua série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$ centrada em cada ponto t_0 do seu domínio, definida pelos coeficientes $c_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}$, tem raio de convergência positivo, e converge para a própria função dentro do disco de convergência.

O ingrediente essencial da prova é a seguinte observação, caso particular de um fenómeno chamado “bootstrap”. A identidade $f'' = \lambda f$ implica que $f(t)$ admite derivadas de todas as ordens, e que podemos calcular enquanto funções apenas das primeiras duas. De fato, a terceira derivada é $f''' = (f'')' = \lambda f'$, a quarta derivada é $f'''' = (f''')' = (\lambda f')' = \lambda f'' = \lambda^2 f$, ... e, por indução, as derivadas de ordens par ou ímpar são

$$f^{(2n)} = \lambda^n f \quad \text{e} \quad f^{(2n+1)} = \lambda^n f', \quad (8.4)$$

respetivamente.

Teorema 8.2. *As funções próprias do laplaciano na reta real são funções analíticas.*

Demonstração. Neste caso, acontece que a série de Taylor de uma função própria do laplaciano na reta real é convergente em toda a reta para a função. Seja $f(t)$ uma função própria do operador laplaciano com valor próprio λ , ou seja, uma função duas vezes derivável, definida na reta real, que satisfaz a equação diferencial $f'' = \lambda f$. As identidades (8.4) implicam que os coeficientes $c_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ da série de Taylor de f centrada em 0 são limitados por $|c_n| \leq C\Lambda^n$, onde C é o máximo entre $|f(0)|$ e $|f'(0)|$, e $\Lambda = |\lambda|$. Pelo critério da raiz/razão, o raio de convergência da série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ é ∞ . Fixado um intervalo limitado $[-R, R]$, seja K o máximo de $|f(t)|$ e $|f'(t)|$ quando $|t| \leq R$ (que existe porque f e f' são contínuas). Então, pelas (8.4), as derivadas de f são limitadas por

$$|f^{(n)}(t)| \leq K\Lambda^n$$

quando $|t| \leq R$. Seja $P_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k$ o polinómio de Taylor de grau $n-1$. Pela fórmula de Taylor com resto

$$f(t) - P_{n-1}(t) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} t^n$$

onde c é um ponto entre 0 e t . Consequentemente, o erro é limitado, quando $|t| \leq R$, por

$$|f(t) - P_{n-1}(t)| \leq K \frac{(\Lambda R)^n}{n!}$$

que tende para 0 quando $n \rightarrow \infty$. □

Teorema 8.3. *O espaço das soluções de uma equação linear homogénea de ordem 2 com coeficientes constantes (8.3) é um espaço linear de dimensão 2.*

Demonstração. Como visto, é suficiente provar o resultado para a equação $\ddot{x} = \lambda x$. Usando a linearidade, é suficiente provar que a única solução com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ é a solução trivial $x(t) = 0$. As fórmulas (8.4) da demonstração anterior implicam que todas as derivadas de $x(t)$ em $t = 0$ são nulas. Isto quer dizer que todos os coeficientes da série de Taylor de $x(t)$ centrada em 0 são nulos. Pela analiticidade, o teorema 8.2, a função $x(t)$ é identicamente nula. □

EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes, polinômio caraterístico. O uso dos exponenciais complexos permite uma leitura unificada dos três casos tratados acima.

Uma EDO *linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes* é uma equação diferencial da forma

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0 \quad (8.5)$$

onde α e β são coeficientes reais (e, tipicamente, positivos). A ideia, de Euler ¹⁸, é que

as suas soluções são (sobreposições de) exponenciais complexos $x(t) = e^{zt}$

pelo menos no caso genérico. Isto acontece porque as derivadas de um exponencial são proporcionais ao próprio exponencial, e Consequentemente uma equação homogênea com coeficientes constantes para um exponencial e^{zt} é uma equação algébrica para a sua “frequência” z . De fato, ao substituir a conjectura $x(t) = e^{zt}$ na (8.5) temos que

$$z^2 e^{zt} + 2\alpha z e^{zt} + \beta e^{zt} = (z^2 + 2\alpha z + \beta) e^{zt} = 0.$$

Observando que os exponenciais são diferentes de zero, temos que $x(t) = e^{zt}$ é uma solução (complexa) de (8.5) se z é igual a uma das raízes $z_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ do *polinômio caraterístico*

$$P(z) := z^2 + 2\alpha z + \beta.$$

Se $\alpha^2 - \beta = k^2 > 0$ as duas raízes são reais, e portanto duas soluções independentes são os exponenciais reais $x_{\pm}(t) = e^{-(\alpha \pm k)t}$. A solução geral é portanto uma combinação linear

$$x(t) = e^{-\alpha t} (a e^{kt} + b e^{-t}).$$

Se $\alpha^2 - \beta = -\omega^2 < 0$, as duas raízes não são reais (mas são complexas conjugadas), e duas soluções independentes são os exponenciais complexos $x_{\pm}(t) = e^{-(\alpha \pm i\omega)t}$. Neste caso, duas soluções reais, logo a solução geral com significado físico, podem ser obtidas usando a fórmula de Euler e a paridade das funções trigonométricas, pois

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t} (a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-\alpha t} (a \cos(\omega t) + ia \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) - ib \sin(\omega t)) \\ &= e^{-\alpha t} (c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

se $c = a + b$ e $d = i(a - b)$. Observe que estas soluções são reais se c e d são parâmetros reais.

Quando $\alpha^2 = \beta$, o polinômio caraterístico tem apenas uma raiz $z_{\pm} = -\alpha$, que é real, e o método fornece apenas a solução $x(t) = e^{-\alpha t}$. Uma segunda solução pode ser calculada ao fazer o limite quando $z_+ \rightarrow z_-$ de uma oportuna combinação linear das soluções $e^{z_{\pm}t}$, pois o espaço das soluções é um espaço linear. Por exemplo

$$\lim_{z_+ \rightarrow z_-} \frac{e^{z_+t} - e^{z_-t}}{z_+ - z_-} = t e^{z_-t}.$$

Consequentemente, a solução geral é uma sobreposição

$$x(t) = e^{-\alpha t} (a + bt).$$

Temos portanto a seguinte receita: o espaço das soluções de (8.5) é um espaço linear \mathcal{H} de dimensão 2 gerado por

$e^{(-\alpha+k)t}$	e	$e^{(-\alpha-k)t}$	se $z_{\pm} = -\alpha \pm k$, com $k > 0$ (raízes reais e distintas)
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	e	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	se $z_{\pm} = -\alpha \pm i\omega$, com $\omega > 0$ (raízes complexas conjugadas)
$e^{-\alpha t}$	e	$t e^{-\alpha t}$	se $z_{\pm} = -\alpha$ (raiz dupla)

¹⁸L. Euler, De integratione aequationum differentialium altiorum gradurn, *Miscellanea Berolinensia* 7 (1743).

Se $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ formam uma base de \mathcal{H} , então a “solução geral” é

$$x(t) = c_+\phi_+(t) + c_-\phi_-(t)$$

onde $c_{\pm} \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Estas constantes são univocamente determinadas pelas condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, ao resolver um sistema linear determinado. É claro que o tempo inicial $t = 0$ pode ser substituído por qualquer outro tempo t_0 , pela homogeneidade da equação diferencial.

ex: Determine a solução geral das seguintes EDOs homogêneas:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2x = 0 & \quad \ddot{x} + \pi^2 x = 0 & \quad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 & \quad \ddot{x} - \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 & \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 & \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 & \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0. \end{aligned}$$

ex: Resolva os seguintes problemas com condições iniciais (ou problemas de Cauchy).

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2 \\ \ddot{x} + \dot{x} = 0 & \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0 \\ \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1 \\ \ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 & \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0 \\ \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9 \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 & \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1. \end{aligned}$$

ex: Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:

$$\begin{aligned} e^{2t} \quad e^{-2t}, & \quad e^{-t} \sin(2\pi t) \quad e^{-t} \cos(2\pi t), & \quad \sinh(t) \quad e \quad \cosh(t), \\ e^{-3t} \quad e^{-3t}, & \quad \sin(2t+1) \quad e \quad \cos(2t+2), & \quad 3 \quad e \quad 5t. \end{aligned}$$

Oscilador harmônico. As pequenas oscilações de um pêndulo $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta)$ em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descritas pela equação de Newton do *oscilador harmônico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q, \tag{8.6}$$

onde $\omega > 0$ é a “frequência (angular) característica”. Esta é uma equação universal, pois descreve as pequenas oscilações de qualquer sistema Newtoniano unidimensional numa vizinhança de um equilíbrio estável genérico.¹⁹ No espaço de fases $X = \mathbb{R}^2$, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases} . \tag{8.7}$$

A solução com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

¹⁹ “The harmonic oscillator, which we are about to study, has close analogs in many other fields; although we start with a mechanical example of a weight on a spring, or a pendulum with a small swing, or certain other mechanical devices, we are really studying a certain *differential equation*. This equation appears again and again in physics and other sciences, and in fact is a part of so many phenomena that its close study is well worth our while. Some of the phenomena involving this equation are the oscillations of a mass on a spring; the oscillations of charge flowing back and forth in an electrical circuit; the vibrations of a tuning fork which is generating sound waves; the analogous vibrations of the electrons in an atom, which generate light waves; the equations for the operation of a servosystem, such as a thermostat trying to adjust a temperature; complicated interactions in chemical reactions; the growth of a colony of bacteria in interaction with the food supply and the poison the bacteria produce; foxes eating rabbits eating grass, and so on; ...”

As trajetórias $q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ podem ser escritas como

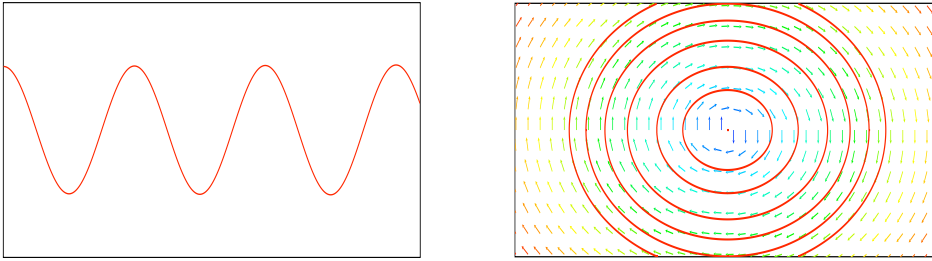
$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega t + \phi),$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos coeficientes a e b , ou seja, dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ (usando as fórmulas $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$).

A energia

$$E(q, p) := \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento. Ou seja que, se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmônico, então $\frac{d}{dt} E(q(t), p(t)) = 0$ para todo o tempo t . Consequentemente, as órbitas do oscilador harmônico estão contidas (de fato, são iguais!) nas curvas de nível da energia E , que são elipses.



Uma trajetória e retrato de fases do oscilador harmônico.

A variável complexa $z := p + i\omega q$ satisfaz a EDO de primeira ordem

$$\dot{z} = i\omega z,$$

cuja solução é $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$. A energia do oscilador é dada por $E = \frac{1}{2}|z|^2$.

ex: Determine a energia em quanto função da amplitude e da frequência das oscilações.

ex: “Elimine” dt no sistema (8.7), e mostre que as curvas de fases são soluções da EDO exacta

$$p dp + \omega^2 q dq = 0,$$

equivalente a $dE = 0$, cujas soluções implícitas são as curvas de nível de E .

Oscilações amortecidas. Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q,$$

onde $2\alpha := 1/\tau > 0$ é um coeficiente de atrito (τ é o tempo de relaxamento). No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q - 2\alpha p \end{cases}.$$

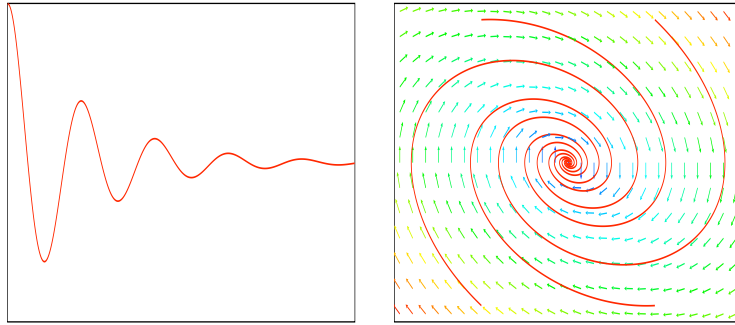
As soluções do sistema “sub-crítico”, ou seja, com $\alpha^2 < \omega^2$, são

$$q(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi)$$

onde a frequência é $\Omega := \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$. Observe que $\Omega < \omega$, e portanto o período das oscilações é superior ao período sem atrito. Observe também que em primeira aproximação a frequência é

$$\Omega \simeq \omega - \frac{\alpha^2}{2\omega} + \dots$$

se $\alpha \ll \omega$, mas tende para zero (e, Consequentemente, o período das oscilações tende para o ∞) quando $\alpha \rightarrow \omega$.

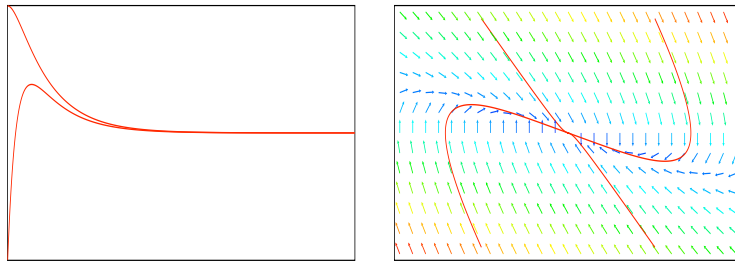


Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido sub-crítico.

As soluções do sistema “super-crítico”, ou seja, com $\alpha^2 > \omega^2$, são

$$q(t) = A e^{-\alpha t} \sinh(k t + \varphi)$$

onde $k = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Observe que $k < \alpha$, e portanto $q(t) \rightarrow 0$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$.



Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido super-crítico.

As soluções do sistema “crítico”, ou seja, com $\alpha^2 = \omega^2$ (uma condição muito difícil de observar!), são

$$q(t) = (a + bt)e^{-\alpha t}.$$

A energia

$$E(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

não é uma constante do movimento, mas decresce a uma taxa proporcional à energia cinética, pois

$$\frac{d}{dt}E = -2\alpha p^2 \leq 0.$$

Uma medida da perda de energia ao longo de um período é o *Q-factor*, definido por $Q := \omega/2\alpha$. É possível mostrar que, se $\Delta E = E(t+T) - E(t)$, onde $T = 2\pi/\omega$ é o período próprio das oscilações, então $\Delta E/E \simeq 2\pi/Q$.

ex: [LL78] V.25

Equação de Schrödinger estacionária. Considere a equação de Schrödinger estacionária

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.262... \times 10^{-34}$ J·s.

ex: Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

EDOs equidimensionais. Uma equação diferencial da forma

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

é dita *equidimensional* (é invariante pela transformação $x \mapsto \lambda x$ com $\lambda > 0$). A substituição $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) := y(x(t))$.

ex: Resolva a equação

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0,$$

na semireta $x > 0$.

9 EDOs lineares não homogêneas

ref: [Ap69] Vol. 1, 8.15-19 ; [MW85] Vol. 2, 12.6-7

20 fev 2020

EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes. Uma EDO de segunda ordem linear com coeficientes constantes é uma lei

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = f(t) \quad (9.1)$$

para a trajetória $x(t)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são coeficientes constantes, e $f(t)$ é uma função dada, uma força externa dependente do tempo, definida num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções de (9.1), então a diferença $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ é uma solução da EDO homogênea associada

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \beta y = 0 \quad (9.2)$$

obtida de (9.1) ao fazer $f(t) = 0$ (i.e. força nula). Portanto, a solução geral de (9.1) pode ser representada como uma soma

$$x(t) = z(t) + y(t),$$

onde $z(t)$ é uma (apenas uma!) “solução particular” de (9.1) e $y(t) = c_+ \phi_+(t) + c_- \phi_-(t)$ é a solução geral da EDO homogênea associada (9.2), combinação linear de duas soluções independentes $\phi_{\pm}(t)$ com coeficientes arbitrários $c_{\pm} \in \mathbb{R}$. Em particular,

Teorema 9.1. *O espaço das soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes é um plano afim $z + \mathcal{H}$, modelado sobre o espaço linear $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}^2$ das soluções da equação homogênea associada.*

Portanto, o problema de resolver uma equação diferencial linear com coeficientes constantes é reduzido ao problema de determinar apenas uma solução, por exemplo, a solução com condições iniciais triviais, dita “resposta do sistema” a força $f(t)$.

Adivinhar. O método mais simples e mais utilizado é “adivinhar” soluções, ou melhor, conjecturar soluções particulares, seguindo o instinto, a experiência, ou exemplos importantes e recorrentes (os ingleses dizem “educated guess”).

Partícula num campo de forças dependente do tempo. Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = f(t)$$

de uma partícula de massa m sujeita a uma força dependendo do tempo $f(t)$.

A partícula livre tem trajetórias $q(t) = a + bt$. Estas são as soluções da equação homogênea, que descreve o movimento inercial, ou movimento retilíneo uniforme.

Se a força é constante, por exemplo $f(t) = mg$ (a aceleração gravitacional próximo da superfície da terra), as soluções são as parábolas

$$q(t) = \frac{1}{2}gt^2 + a + bt,$$

obtidas somando ao movimento inercial a solução particular $gt^2/2$.

Outro caso interessante é uma força periódica como $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$. É claro que uma solução particular é também periódica, do mesmo período (por a segunda derivada de um coseno ou de um seno é proporcional à própria função), e de fato é imediato verificar que uma solução é

$$q(t) = -\frac{F_0}{\omega^2} \cos(\omega t) + a + bt.$$

Moral, conseguimos encontrar soluções particulares, e portanto gerais, quando conseguimos determinar uma primitiva da primitiva da força.

ex: Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} + f(t)$$

onde $\gamma := 1/\tau \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, determine a trajetória quando a força é constante $f(t) = g$, linear $f(t) = ct$, ou periódica $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

Princípio de sobreposição. A procura de uma solução particular de (9.1) pode ser simplificada usando o *princípio de sobreposição*, consequência da linearidade do problema. Se $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ são soluções das EDOs lineares

$$\ddot{x}_k + 2\alpha\dot{x}_k + \beta x_k = f_k(t) \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, n,$$

(observe que α e β são sempre os mesmos!) então a “sobreposição”

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$$

é solução da EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t).$$

A ideia é utilizar a estratégia dor romanos (ou dos macedónios?), DIVIDE ET IMPERA. Ao dividir a força $f(t)$ em parcelas simples $f_k(t)$, podemos esperar resolver o problema aparentemente difícil juntando as soluções $x_k(t)$ dos problemas mais simples.

ex: Determine a solução geral de

$$\ddot{x} = \sin(t) \quad \ddot{x} + \dot{x} = t \quad \ddot{x} + x = e^{-t}$$

ex: Determine uma solução particular de

$$\ddot{x} = 1 + t + t^2 \quad \ddot{x} + \dot{x} = e^{-t} - e^{-2t}$$

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares.

$$\ddot{x} + x = t \quad \ddot{x} - \dot{x} = t^2 \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = t^2 - 1 \quad \ddot{x} - 4x = e^{-2t}$$

Coefficientes indeterminados. O *método dos coeficientes indeterminados* permite determinar soluções particulares de uma EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t) \tag{9.3}$$

(ou, mais em geral, de uma EDO linear com coeficientes constantes de ordem n arbitrária) quando o segundo membro (a força) $f(t)$ é um quase-polinómio.

Um *quase-polinómio* é um produto $p(t)e^{\lambda t}$ de um polinómio $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_k t^k$ vezes um exponencial (real ou complexo, ou seja, um produto de um exponencial real $e^{\rho t}$ e funções trigonométricas, $\cos(\omega t)$ e/ou $\sin(\omega t)$, se $\lambda = \rho \pm i\omega$). Observe que os polinómios correspondem ao expoente $\lambda = 0$, e portanto são quase-polinómios.

Um operador diferencial linear com coeficientes constantes $L = \sum_n a_n d^n/dt^n$ envia um quase-polinómio $P(t)e^{\lambda t}$ de grau g num quase-polinómio $p(t)e^{\lambda t}$ com o mesmo expoente λ e grau $\leq g$. Consequentemente, se a força em (9.3) é um quase-polinómio

$$f(t) = e^{\rho t} (p(t) \cos(\omega t) + q(t) \sin(\omega t)) ,$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são polinómios de grau $\leq g$, então a EDO (9.3) admite uma solução particular

$$z(t) = t^n e^{\rho t} (P(t) \cos(\omega t) + Q(t) \sin(\omega t)) ,$$

onde $Q(t)$ e $P(t)$ são polinómios de grau $\leq g$, se $\lambda = \rho + i\omega$ é uma raiz do polinómio característico $z^2 + 2\alpha z + \beta$ da equação homogénea com multiplicidade $n \leq 2$ (se λ não for uma raiz, basta considerar $n = 0$). Os “coeficientes indeterminados” dos polinómios $P(t)$ e $Q(t)$ são obtidos ao igualar os termos de mesmo grau na (9.3), e portanto ao resolver um sistema linear de $2(g+1)$ equações em $2(g+1)$ incógnitas (no caso geral em que $\omega \neq 0$, ou a metade se $\omega = 0$).

Usando o princípio de sobreposição, é possível determinar soluções particulares quando o segundo membro $f(t)$ é uma combinação linear de quase-polinómios.

ex: Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= t^3 e^{-t} + e^t & \ddot{x} + x &= \sin(t) & \ddot{x} + 4x &= 2t \cos(t) \\ \ddot{x} + 9x &= \sin(\pi t) & \ddot{x} + 4x &= \cos(2t) & \ddot{x} - 4x &= te^{-2t} & \ddot{x} + 4x &= te^{-t} \cos(2t). \end{aligned}$$

Oscilações forçadas, batimentos e ressonância. Considere a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = F_0 \cos(\gamma t).$$

com uma força periódica proporcional a um cosseno (ou um seno). O sistema homogêneo é um oscilador harmônico de frequência ω , e portanto as suas soluções são oscilações $A \cos(\omega t + \phi)$, onde A e ϕ são constantes arbitrárias. A intuição sugere que o efeito da força seja uma oscilação adicional de frequência γ .

Quando $\gamma^2 \neq \omega^2$, uma solução pode ser determinada usando a conjectura $x(t) = a \cos(\gamma t)$, e um cálculo elementar mostra que a solução geral é

$$q(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t)$$

Em particular, a solução com condições iniciais triviais pode ser escrita

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} (\cos(\gamma t) - \cos(\omega t)) \\ &= \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} 2 \sin\left(\frac{\omega - \gamma}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega + \gamma}{2} t\right) \end{aligned}$$

Quando a diferença $2\varepsilon := \omega - \gamma$ é pequena, ou seja $|\varepsilon| \ll |\omega|$, e portanto $\frac{\omega + \gamma}{2} \simeq \omega$, podemos estimar

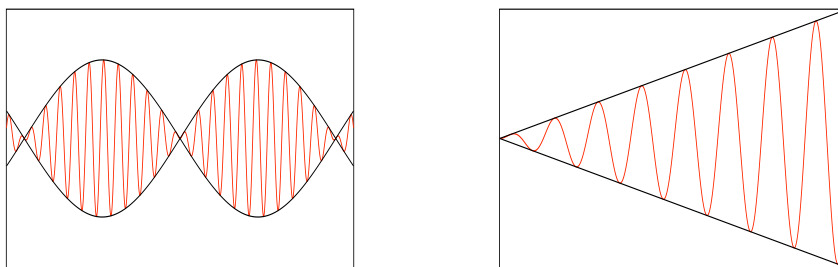
$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \cdot \sin(\omega t).$$

Portanto, a resposta do oscilador à força externa de frequência próxima (mas diferente) da frequência própria ω é uma “modulação” lenta (de período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) de uma oscilação com frequência ω . Este fenómeno é chamado *batimentos* (em inglês, *beats*).

Para compreender o caso ressonante $\gamma = \omega$ podemos fazer o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Este limite é

$$q(t) = \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

Ou seja, quando $\gamma \rightarrow \omega$, a frequência dos batimento decresce para zero, o que significa que o período dos batimentos tende para o infinito, e apenas vemos a “parte inicial” do seno, que é uma reta. Este fenómeno, uma resposta cuja amplitude cresce linearmente no tempo, é chamado *ressonância*.



Batimentos e ressonância.

ex: Deduza a fórmula da ressonância usando a conjectura $x(t) = bt \sin(\omega t)$ e o método dos coeficientes indeterminados.

Oscilações forçadas em notação complexa. Considere a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t).$$

A variável complexa $z := p + i\omega q$, onde $p := \dot{q}$ é o momento linear, satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$\dot{z} - i\omega z = f(t).$$

Uma solução não trivial da EDO homogênea associada $\dot{y} - i\omega y = 0$ é $y(t) = e^{i\omega t}$. Por outro lado, o produto $z(t) = \lambda(t) e^{i\omega t}$ é uma solução de $\dot{z} - i\omega z = f(t)$ se λ é solução de $\dot{\lambda} = f(t) e^{-i\omega t}$. Consequentemente, uma solução com condição inicial $z(0) = z_0$ é

$$z(t) = e^{i\omega t} \left(z_0 + \int_0^t f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right).$$

A energia do oscilador,

$$E = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) = \frac{1}{2} |z|^2,$$

é conservada se a força é nula. Uma força $f(t)$, atuando do tempo $t = -\infty$ até ao tempo $t = \infty$, fornece ao oscilador (inicialmente em repouso) uma energia [LL78]

$$E(\infty) - E(-\infty) = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2,$$

proporcional ao valor da “transformada de Fourier” de $f(t)$ calculada na frequência ω .

Oscilações forçadas amortecidas. Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega^2 q = f(t),$$

onde $2\alpha := 1/\tau > 0$ é um coeficiente de atrito, e a força é $f(t) = F_0 \sin(\gamma t)$.

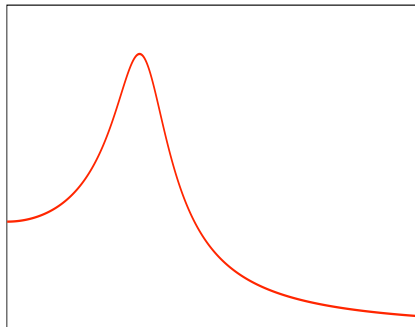
Se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), a solução geral é

$$q(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi) + R(\gamma) F_0 \sin(\gamma t + \phi),$$

onde $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$, a amplitude A e a fases φ dependem dos dados iniciais, a fase da resposta satisfaz $\tan \phi = -2\alpha\gamma/(\omega^2 - \gamma^2)$, e o fator de proporcionalidade entre a amplitude da força e a resposta é

$$R(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}}$$

A primeira parcela da solução representa um “regime transitório” (transiente), desprezável para grandes valores do tempo (i.e. para $t \gg \tau$). A segunda é dita “solução estacionária”, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função $R(\gamma)$ é dita *curva de ressonância* do sistema.



Um exemplo de curva de ressonância $R(\gamma)$.

A curva de ressonância $R(\gamma)$ atinge um máximo para o valor

$$\boxed{\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2}}$$

da frequência γ , chamada *frequência de ressonância*. Observe que, se o atrito é pequeno, i.e. $\alpha \ll \omega$, então a frequência de ressonância é $\gamma_r \simeq \omega - \alpha^2/\omega + \dots$.

ex: Discuta também o caso crítico $\alpha^2 = \omega^2$ e super-crítico $\alpha^2 > \omega^2$.

ex: [LL78] V.26

Circuito RLC. A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R , indutância L e capacidade C , é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

ex: Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$, e esboce as soluções (compare com a equação das oscilações amortecidas).

ex: Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).

ex: Determine a frequência de ressonância do circuito.

Representação integral da resposta de um oscilador. Uma solução particular (com condições iniciais triviais) da equação do oscilador harmónico forçado $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau, \quad (9.4)$$

uma “convolução” da função $\sin(\omega t)$ com a força $f(t)$.

Esta fórmula pode ser verificada com um cálculo elementar (cuidado, o tempo t aparece nos limite de integração mas também na função dentro do integral!). No entanto, a técnica importante, que permite obter fórmulas parecidas que resolvem “todas” as equações lineares com coeficientes constantes, é a *transformada de Laplace*, que, infelizmente, não faz parte do programa de esta unidade curricular. A ideia subjacente é representar uma força arbitrária como sobreposição de exponenciais ...

ex: Calcule o limite da solução (9.4) quando $\omega \rightarrow 0$, e conjecture que uma solução particular da equação de Newton $\ddot{x} = f(t)$ é

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) (t - \tau) d\tau.$$

Verifique esta conjectura.

ex: Verifique e que uma solução particular da equação $\ddot{x} - k^2 x = f(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sinh(k(t - \tau)) d\tau.$$

Varição das constantes. Um método aparentemente elegante para resolver EDOs lineares é o seguinte. Uma solução particular da EDO linear não homogênea (9.1) pode ser determinada usando a conjectura

$$z(t) = \lambda_+(t) \phi_+(t) + \lambda_-(t) \phi_-(t) \quad (9.5)$$

onde $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ são duas soluções independentes da equação homogênea $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$, e $\lambda_{\pm}(t)$ são “coeficientes/parâmetros/constantes” variáveis. Um cálculo (e muita paciência) mostra que

$$\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \beta z = \frac{d}{dt} \left(\dot{\lambda}_+ \phi_+ + \dot{\lambda}_- \phi_- \right) + 2\alpha \left(\dot{\lambda}_+ \phi_+ + \dot{\lambda}_- \phi_- \right) + \left(\lambda_+ \dot{\phi}_+ + \lambda_- \dot{\phi}_- \right)$$

Em particular, (9.5) é solução de (9.1) se (mas não só se!) as derivadas $\dot{\lambda}_{\pm}$ dos coeficientes satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_+ \phi_+ + \dot{\lambda}_- \phi_- = 0 \\ \lambda_+ \dot{\phi}_+ + \lambda_- \dot{\phi}_- = f \end{cases}$$

O determinante da matriz 2×2 que define o sistema é o Wronskiano

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = \phi_+(t) \dot{\phi}_-(t) - \dot{\phi}_+(t) \phi_-(t),$$

que é diferente de zero porque as ϕ_{\pm} são independentes. A única solução do sistema é

$$\dot{\lambda}_+ = -\frac{\phi_- f}{W_{\phi_+, \phi_-}} \quad \dot{\lambda}_- = \frac{\phi_+ f}{W_{\phi_+, \phi_-}},$$

e portanto os coeficientes podem ser umas primitivas

$$\lambda_+ = -\int \phi_-(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt, \quad \lambda_- = \int \phi_+(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt,$$

definidas a menos de constantes aditivas arbitrárias (que correspondem, em (9.5), a somar soluções da equação linear homogênea).

Como podem ver nos exercícios a seguir, é difícil arranjar exemplos de equações diferenciais “interessantes/realísticas” cuja solução seja obtida por este método de forma razoável. Infelizmente, pelo menos de acordo com Gian-Carlo Rota, “the much-trumpeted method of variation of parameters is pathetically useless.”²⁰

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em oportunos domínios, utilizando o método de variação dos parâmetros:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= 1/\sin(t) & \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= e^{-t} & \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x &= e^{-2t} \log t. \\ \ddot{x} + x &= \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} & \ddot{x} + x &= \tan(t) & \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x &= \frac{e^{2t}}{\cos(2t)}. \end{aligned}$$

EDOs lineares de ordem superior. Pode existir um universo paralelo ao nosso, onde a equação de Newton (se calhar um senhor com 3 cabeças) assume a forma

$$m \ddot{\ddot{x}} = F,$$

sendo a força uma função $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, t)$ da posição x , da velocidade \dot{x} , da aceleração \ddot{x} e da “arrancada” (em inglês, *jerk*) $\ddot{\ddot{x}}$ da partícula, e, possivelmente, do tempo t . O espaço de fases tem, neste universo, dimensão 4. Engenheiros, físicos e matemáticos deste universo teriam, justamente, interesse em resolver equações diferenciais lineares de ordem 4, do género

$$\ddot{\ddot{x}} + \alpha \ddot{\ddot{x}} + \beta \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \delta x = f(t).$$

A boa notícia é que engenheiros, físicos e matemáticos do nosso planeta já conhecem as técnicas para resolver este tipo de equações, pois são as mesmas que usamos no planeta Terra: conjectura e^{zt}

²⁰G.-C. Rota, *Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations*, MAA meeting at Simons College, april 24, 1997. <https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Rota.pdf>

para resolver a equação homogénea (e agora o polinómio caraterístico terá grau 4), e método dos coeficientes indeterminados para determinar uma solução particular quando a força é um quase-polinómio.

Isto vale, naturalmente, para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes de ordem arbitrário.

Oscilador harmónico tralfamadoriano. Por exemplo, o oscilador harmónico no planeta Tralfamador²¹ deste universo paralelo pode ser do género

$$\ddot{x} = -4\omega^4 x.$$

As raízes do polinómio caraterístico $z^4 + 4\omega^4$ são $\omega \pm i\omega$ e $-\omega \pm i\omega$. A solução geral é portanto uma sobreposição

$$x(t) = A e^{\omega t} \cos(\omega t + \varphi) + B e^{-\omega t} \cos(\omega t + \phi),$$

onde os parâmetros A , B , φ e ϕ dependem das condições iniciais. A origem é um equilíbrio hiperbólico: as soluções com $A = 0$ decaem exponencialmente, mas as soluções genéricas (com $A \neq 0$) divergem exponencialmente, quando $t \rightarrow \infty$. Não há como fazer relógios de pêndulo no planeta Tralfamador.

So it goes.

ex: Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares homogéneas.

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{x} = 0 \quad \ddot{x} + x = 0 \quad \ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$$

ex: Determine umas soluções particulares das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x + 2x + x = t - 1 \quad \ddot{x} + x = \sin(t) \quad \ddot{x} + 4x = e^{-t}$$

²¹Kurt Vonnegut, *Slaughterhouse-Five, or The Children's Crusade*, Delacorte, 1969.

10 Espaços lineares*

ref: [Ap69] Vol. 2, 1.1-10 ; [La97] Ch. III

Espaços lineares/vetoriais. Um *espaço linear/vetorial real* (ou seja, sobre o corpo \mathbb{R} dos números reais) é um conjunto \mathbf{V} munido de duas operações:

a “adição” : $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w},$$

que satisfaz os axiomas

EL1 (*propriedade associativa*) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$,

EL2 (*propriedade comutativa*) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,

EL3 (*existência do elemento neutro*) existe $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$

EL4 (*existência do simétrico*) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existe $-\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

e a “multiplicação por escalares/números” : $\mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$

$$\lambda, \mathbf{v} \mapsto \lambda \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

que satisfaz os axiomas

EL5 (*propriedade associativa*) $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$,

EL6 (*propriedade distributiva para a adição em \mathbb{R}*) $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$,

EL7 (*propriedade distributiva para a adição em \mathbf{V}*) $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$,

EL8 (*existência do elemento neutro*) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$,

Um *isomorfismo* entre os espaços lineares \mathbf{V} e \mathbf{V}' é uma aplicação bijetiva $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$, $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$, que respeita as operações, i.e. tal que se $\mathbf{v} \leftrightarrow f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$ e $\mathbf{w} \leftrightarrow f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$, então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} \leftrightarrow \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \quad \text{e} \quad \lambda \mathbf{v} \leftrightarrow \lambda \mathbf{v}' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se substituirmos o corpo \mathbb{R} dos números reais pelo corpo \mathbb{C} dos números complexos, obtemos a definição de *espaço linear/vetorial complexo*.

ex: Verifique que \mathbb{R} , munido das operações usuais “+” e “·”, é um espaço vetorial real.

ex: Verifique que \mathbb{R}^n , munido das operações “adição” e “produto por um escalar” definidas no exercício 1 do capítulo 1, é um espaço vetorial real.

ex: Mostre que o elemento neutro $\mathbf{0}$ é único.

ex: Mostre que o simétrico $-\mathbf{v}$ de cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é único.

ex: Mostre que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e que $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

ex: Mostre que $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ou $\lambda = 0$.

ex: Mostre que $\lambda\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ implica $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ou $\lambda = \mu$.

ex: Mostre que $\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ implica $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ou $\lambda = 0$.

ex: [Ap69] 15.5.

O espaço linear complexo \mathbb{C}^n . O espaço vetorial complexo de dimensão n é o espaço

$$\mathbb{C}^n := \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \text{ vezes}}$$

das n -uplas $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ de números complexos, munido das operações *adição*, definida por

$$\mathbf{z}, \mathbf{w} \mapsto \mathbf{z} + \mathbf{w} := (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n)$$

e *multiplicação por um escalar*, definida por

$$\lambda, \mathbf{z} \mapsto \lambda \mathbf{z} := (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_n)$$

Espaço afim. Um *espaço afim* modelado sobre o espaço vetorial \mathbf{V} é um conjunto \mathcal{A} munido de uma aplicação $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{V}$

$$P, Q \mapsto \vec{PQ}$$

que satisfaz os axiomas

EA1 para cada $P \in \mathcal{A}$ e cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existe um único $Q \in \mathcal{A}$ tal que $\vec{PQ} = \mathbf{v}$

EA2 para quaisquer $P, Q, R \in \mathcal{A}$,

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

ex: Verifique que o conjunto \mathbb{R}^n munido da aplicação $P, Q \mapsto Q - P$ é um espaço afim modelado sobre o espaço vetorial real \mathbb{R}^n .

Espaços de funções. Os espaços interessantes em análise, em física e em engenharia, são espaços de funções, chamados “espaços funcionais”.

Sejam X um conjunto e $\mathbb{R}^X = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{C}^X = \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ os espaços das funções reais ou complexas definidas em X , cujos elementos são denotados por $x \mapsto f(x)$. Os espaços $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, munidos das operações “adição” e “produto por um escalar” definidas por

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x),$$

são espaços vetoriais reais e complexos, respetivamente. Também interessantes são os ‘campos vetoriais’, funções com valores num espaço vetorial como \mathbb{R}^m (campos de força, de velocidade, campo eletro-magnético, ...)

Engenheiros e físicos estão por exemplo interessados em “sinais” $f(t)$ (a intensidade de uma onda de som, onde t é o tempo), ou “funções de onda” $\psi(\mathbf{r}, t)$, em mecânica quântica, ou outros “campos” $u(\mathbf{r}, t)$ (um deslocamento, um campo de velocidades, o campo eletro-magnético, ...) que resolvem certas equações diferenciais parciais como a equação de onda, de calor, de Laplace, de Schrödinger, ...).

Polinómios. Sejam $\text{Pol}(\mathbb{R}) := \mathbb{R}[t]$ o espaço dos polinómios $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ com coeficientes reais na variável t , e $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$ o espaço dos polinómios reais de grau $\leq n$. $\text{Pol}(\mathbb{R})$ e $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$ são espaços lineares. Por outro lado, o conjunto dos polinómios de grau n não é um espaço linear (porque?).

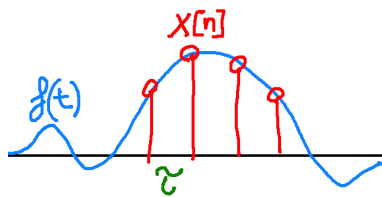
Funções contínuas e diferenciáveis. São espaços vetoriais, reais ou complexos, o espaço $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ das funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , os espaços $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ das funções com k derivadas contínuas, o espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente deriváveis. As inclusões sendo

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

Sucessões. Seja $\mathbb{R}^\infty := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ o espaço das sucessões reais $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, com $x_n \in \mathbb{R}$. Descreva a sua estrutura de espaço linear real. Mostre que o espaço b das sucessões limitadas, o espaço c das sucessões convergentes, o espaço c_0 das sucessões que convergem para 0, e o espaço ℓ das sucessões com suporte compacto (i.e. tais que $x_n = 0$ se n é suficientemente grande) são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^∞ , e que

$$\ell \subset c_0 \subset c \subset b \subset \mathbb{R}^\infty .$$

Amostragem/ADC. Um sinal contínuo $f(t)$ pode ser observado apenas em múltiplos inteiros de um tempo de amostragem $\tau > 0$, e transformado num sinal discreto $x[n] := f(n\tau)$, com $n \in \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} , que é uma sequência.



ex: [Ap69] 15.5.

Superposition principle for linear ODEs. Consider a “linear homogeneous” ordinary differential equation, for example with constant coefficients and of second order like

$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y = 0. \tag{10.1}$$

A superposition $ay_1(t) + by_2(t)$ of any two solutions, $y_1(t)$ and $y_2(t)$, is still a solution. Therefore, the space \mathbf{H} of solutions of (10.1) is a linear space (a subspace of the infinite-dimensional space $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ of twice differentiable functions on the real line). Actually, as you will see in analysis, this space is two-dimensional, so that $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^2$, and therefore any solution is a superposition

$$y(t) = c_+ y_+(t) + c_- y_-(t)$$

of two basic independent solutions $y_\pm(t)$, forming a base of \mathbf{H} . We now add a time-dependent force $f(t)$, and consider the linear ordinary differential equation

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = f(t). \tag{10.2}$$

The difference $x_1(t) - x_2(t)$ between any two solutions of (10.2) is a solution of (10.1). Therefore, if $z(t)$ is any (particular) solution of (10.2), then the space of all solutions of (10.2) is the affine space $z + \mathbf{H}$.

Superposition principle in quantum mechanics. If a physical system can be prepared in each of the states $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots$, for example corresponding to certain values $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ of a certain observable L , then the most general state is a *superposition* ²²

$$|\psi\rangle = \psi_1 |1\rangle + \psi_2 |2\rangle + \psi_3 |3\rangle + \dots$$

²²“Any state may be considered as the result of a superposition of two or more other states, and indeed in an infinite number of ways. Conversely any two or more states may be superposed to give a new state ... The non-classical nature of the superposition process is brought out clearly if we consider the superposition of two states, A and B, such that there exists an observation which, when made on the system in state A, is certain to lead to one particular result, a say, and when made on the system in state B is certain to lead to some different result, b say. What will be the result of the observation when made on the system in the superposed state? The answer is that the result will be sometimes a and sometimes b, according to a probability law depending on the relative weights of A and B in the superposition process. It will never be different from both a and b [i.e. either a or b]. The intermediate character of the state formed by superposition thus expresses itself through the probability of a particular result for an observation being intermediate between the corresponding probabilities for the original states, not through the result itself being intermediate between the corresponding results for the original states.”

with complex coefficients $\psi_n \in \mathbb{C}$. The observation of the observable L in the state $|\psi\rangle$ will then give one of the value λ_n (and not a value in between!) with relative frequency (if the experience is repeated a large number of times) proportional to $|\psi_n|^2$. States of a quantum system therefore live in a complex linear space \mathbf{H} (which typically is infinite dimensional). Actually, proportional states must be considered as equal, which amounts to say that we may only consider normalized states, those with $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + \dots = 1$, and do not distinguish between those which differ by a multiplicative phase $e^{i\phi}$ (although this ambiguity is then central in quantum field theory). Therefore the state space of a quantum system is a projective space $\mathbb{P}\mathbf{H}$ of a complex linear space \mathbf{H} .

Subespaços e geradores. Seja \mathbf{V} um espaço vetorial real ou complexo. Um subconjunto não vazio $W \subset \mathbf{V}$ que é também um espaço vetorial (ou seja, tal que $w + w' \in W$ e $\lambda w \in W$ para todos os $w, w' \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$) é dito *subespaço (linear/vetorial)* de \mathbf{V} . Se $S \subset \mathbf{V}$ é um subconjunto de \mathbf{V} , o conjunto $\text{Span}(S)$ das combinações lineares finitas

$$\lambda_1 \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{s}_m \quad \mathbf{s}_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

é um subespaço de \mathbf{V} , dito subespaço *gerado* por S . O espaço linear \mathbf{V} tem “dimensão finita” se admite um conjunto finito de geradores.

Somas e somas diretas. Se X e Y são subespaços de \mathbf{V} , então a “soma”

$$X + Y := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \text{ com } \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$$

é um subespaço de \mathbf{V} . Se cada vetor $\mathbf{v} \in X + Y$ admite uma única representação $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ com $\mathbf{x} \in X$ e $\mathbf{y} \in Y$, então a soma é chamada *soma direta*, e denotada por $X \oplus Y$.

ex: Se X_1, X_2, \dots são subespaços de \mathbf{V} , então

$$\bigcap_i X_i := \{\mathbf{x} \text{ t.q. } \mathbf{x} \in X_i \forall i\}$$

é um subespaço de \mathbf{V} .

ex: Dados os números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, o conjunto dos vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

é um subespaço linear de \mathbb{R}^n .

ex: Se V é um subespaço do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , então

$$V^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V\}$$

é um subespaço de \mathbb{R}^n .

ex: Verifique que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ex: Verifique que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que é um subespaço de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que é um subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ex: Verifique que $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$ é um subespaço de $\text{Pol}(\mathbb{R})$, que é um subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. O espaço $\text{Pol}_n(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau (exatamente) n é um subespaço vetorial de $\text{Pol}(\mathbb{R})$?

ex: Determine os subespaços gerados por

$$\begin{array}{lll} (1, 2) & (-1, -2) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ (0, 1, 0) & (0, 0, 1) & \text{em } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \\ \{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\} & & \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ t & t^2 & \text{em } \text{Pol}(\mathbb{R}) \\ e^t & e^{-t} & \text{em } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{array}$$

ex: O conjunto b das sucessões $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitadas é um subespaço do espaço das sucessões reais $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? E o conjunto c das sucessões convergentes? E o conjunto c_0 das sucessões convergentes tais que $x_n \rightarrow 0$?

ex: O espaço das funções não negativas, i.e. tais que $f(t) \geq 0 \forall t$, é um subespaço do espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

ex: Os conjuntos das funções pares e ímpares, definidos por

$$\mathcal{F}_{\pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(t) = \pm f(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\},$$

são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Mostre que cada $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma soma $f = f_+ + f_-$ com $f_{\pm} \in \mathcal{F}_{\pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ex: [Ap69] 15.9.

Conjuntos livres/linearmente independentes. Seja \mathbf{V} um espaço linear. O conjunto $S \subset \mathbf{V}$ é *livre*/(linearmente) *independente* se gera cada vetor de $\text{Span}(S)$ duma única maneira, ou seja, se gera o vetor nulo $\mathbf{0}$ duma única maneira, i.e. se quaisquer que sejam os elementos distintos $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m \in S$,

$$\lambda_1 \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{s}_m = \mathbf{0} \quad \implies \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Caso contrário, o conjunto é dito (linearmente) *dependente*.

ex: Verifique se os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes

$$\begin{array}{llll} (1, 2) & (-1, 2) & & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ (1, 1, 0) & (0, 1, 1) & (1, 0, 1) & \text{em } \mathbb{R}^3 \\ (1, 2, 3) & (2, 3, 4) & (3, 4, 5) & \text{em } \mathbb{R}^3 \\ (1, 0, 0, 0) & (1, 1, 0, 0) & (1, 1, 1, 0) & (1, 1, 1, 1) \quad \text{em } \mathbb{R}^4 \\ \cos t & \sin t & & \text{em } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \cos^2 t & \sin^2 t & 1/2 & \text{em } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ 1 & t & t^2 & \text{em } \text{Pol}(\mathbb{R}) \\ (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots) & (1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) & & \text{em } \mathbb{R}^{\infty} \end{array}$$

Bases e dimensão. Seja \mathbf{V} um espaço linear de dimensão finita, real ou complexo. Uma *base* de \mathbf{V} é um conjunto livre de geradores de \mathbf{V} , ou seja, um conjunto ordenado $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ de vetores tal que cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ admite uma e uma única representação

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b}_1 + v_2 \mathbf{b}_2 + \dots + v_n \mathbf{b}_n$$

Os números v_i são as *componentes* do vetor \mathbf{v} relativamente à base $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$. A *dimensão* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}$ do espaço linear \mathbf{V} (de dimensão finita) é o número de elementos de uma base. Se $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ é uma base ordenada do espaço linear \mathbf{V} , então a aplicação

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b}_1 + v_2 \mathbf{b}_2 + \dots + v_n \mathbf{b}_n \mapsto (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

define um isomorfismo $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n (dependendo se o espaço linear é real ou complexo).

ex: Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x = y\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y = 0 \text{ e } y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0 \text{ e } z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

ex: Verifique que

$$1 \quad t \quad t^2 \quad t^3 \quad \dots \quad t^n$$

é uma base do espaço $\text{Pol}_n(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau $\leq n$. Qual a dimensão de $\text{Pol}_n(\mathbb{R})$?

ex: Determine as coordenadas do polinômio $f(t) = (1-t)^2$ relativamente à base ordenada $(1, t, t^2)$ de $\text{Pol}_2(\mathbb{R})$.

ex: [Ap69] **15.9.**

Dimensão infinita. Um espaço linear que não admite uma base finita (ou seja, que admite um conjunto independente e não finito) é dito espaço de *dimensão infinita*. Por exemplo, os espaços $\text{Pol}(\mathbb{R})$ ou $\text{Pol}(\mathbb{C})$ dos polinômios, com coeficientes reais ou complexos, têm dimensão infinita. De fato, o conjunto infinito e numerável dos monômios $\mathbf{e}_n(t) = t^n$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ é um conjunto independente (dois polinômios são iguais sse todos os coeficientes são iguais). A fortiori, têm dimensão infinita os espaços $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ das funções com k derivadas contínuas definidas na reta real (ou num intervalo, \dots), onde $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Da mesma forma, têm dimensão infinita os espaços $\ell \subset c_0, \subset c \subset b \subset \mathbb{R}^\infty$ ou \mathbb{C}^∞ das sucessões, reais ou complexas.

Rational linear independence on the line. The real numbers x_1, x_2, \dots, x_n are said *linear independent over the field of rationals* if the only solution of

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = 0$$

with $k_i \in \mathbb{Z}$ is the trivial solution $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

ex: Show that (any finite subset of) the sequence

$$\log 2, \log 3, \log 5, \log 7, \dots, \log p, \dots$$

of natural logarithms of prime numbers is linear independent over the rationals (use the unique factorization of an integer into prime factors)²³.

²³H. Bohr, 1910.

11 Formas lineares*

ref: [La87] Ch. III

Linearidade. Se cada kilo de \heartsuit custa A euros e cada kilo de \spadesuit custa B euros, então a kilos de \heartsuit e b kilos de \spadesuit custam $aA + bB$ euros. Ou seja, a função “preço” P satisfaz

$$P(a\heartsuit + b\spadesuit) = a \cdot P(\heartsuit) + b \cdot P(\spadesuit)$$

Esta propriedade é chamada *linearidade*.

Por outro lado, a superfície e o volume de um cubo de lado 2ℓ são 4 e 8 vezes a superfície e o volume de um cubo de lado ℓ , respetivamente (e esta é uma das razões pela existência de dimensões típicas de animais e plantas, como explicado por D’Arcy Thompson²⁴). São funções não lineares.

ex: Dê exemplos de funções lineares e de funções não lineares.

Formas lineares, espaço dual. Seja \mathbf{V} um espaço linear real (ou complexo). Uma função real $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou complexa $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$) é dita *aditiva* se $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$

$$f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$$

e é dita *homogénea* se $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\forall \lambda \in \mathbb{C}$)

$$f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$$

Uma função real $\xi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou complexa $\xi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$) aditiva e homogénea, ou seja, tal que

$$\xi(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \xi(\mathbf{v}) + \mu \xi(\mathbf{w})$$

é dita *forma linear*, ou *covetor* (ou *funcional linear* quando \mathbf{V} é um espaço de funções). Uma notação simétrica para o valor da forma linear ξ sobre o vetor \mathbf{v} é

$$\langle \xi, \mathbf{v} \rangle := \xi(\mathbf{v}).$$

O espaço $\mathbf{V}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ (ou $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}, \mathbb{C})$) das formas lineares, dito *espaço dual (algébrico)* de \mathbf{V} , é um espaço linear real (ou complexo) se a adição e o produto por um escalar são definidos por

$$\langle \xi + \eta, \mathbf{v} \rangle := \langle \xi, \mathbf{v} \rangle + \langle \eta, \mathbf{v} \rangle \quad \text{e} \quad \langle \lambda \xi, \mathbf{v} \rangle := \langle \xi, \lambda \mathbf{v} \rangle$$

respetivamente, e a forma nula $\mathbf{0}^* \in \mathbf{V}^*$ é definida por $\langle \mathbf{0}^*, \mathbf{v} \rangle = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Se o espaço vetorial \mathbf{V} tem dimensão finita, e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base de \mathbf{V} (por exemplo a base canónica de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$), então cada forma linear $\xi \in \mathbf{V}^*$ é determinada pelos seus valores $\xi_i := \langle \xi, \mathbf{e}_i \rangle$ nos vetores da base, pois

$$\langle \xi, \mathbf{v} \rangle = \langle \xi, v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n \rangle = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \dots + \xi_n v_n.$$

Portanto, também \mathbf{V}^* tem dimensão finita, e uma base de \mathbf{V}^* , dita *base dual*, é o conjunto ordenado dos covetores $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ definidos por²⁵

$$\langle \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

As coordenadas da forma linear $\xi = \xi_1 \mathbf{e}_1^* + \xi_2 \mathbf{e}_2^* + \dots + \xi_n \mathbf{e}_n^*$ relativamente à base dual são os números $\xi_i = \langle \xi, \mathbf{e}_i \rangle$, assim que $\langle \xi, \mathbf{v} \rangle = \sum_i \xi_i v_i$.

Para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, a função $\xi \mapsto \langle \xi, \mathbf{v} \rangle$ é uma forma linear em \mathbf{V}^* , e portanto existe um homomorfismo injetivo de \mathbf{V} em $(\mathbf{V}^*)^*$. Se \mathbf{V} tem dimensão finita, então todas as formas lineares $g \in (\mathbf{V}^*)^*$ podem ser representadas como $g(\xi) = \langle \xi, \mathbf{v} \rangle$ para algum $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ (basta definir $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ com $v_i = g(\mathbf{e}_i)$), e portanto o espaço dual do espaço dual é isomorfo a $(\mathbf{V}^*)^* \approx \mathbf{V}$ (mas o isomorfismo não é canónico, depende da escolha de uma base!).

²⁴D’Arcy Wentworth Thompson, *On growth and form*, 1917 and 1942.

²⁵O símbolo de Kronecker é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

ex: Mostre que uma função homogénea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é $f(x) = \lambda x$, com $\lambda = f(1) \in \mathbb{R}$. Deduza que uma função homogénea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é também aditiva, e portanto linear.

ex: Diga se as seguintes funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são ou não lineares.

$$\begin{aligned} x &\mapsto 3x & x &\mapsto 2x - 1 & x &\mapsto \sin(2\pi x) \\ (x, y) &\mapsto 3x - 5y & (x, y) &\mapsto x^2 - xy \\ (x, y, z) &\mapsto 2x - y + 3z & (x, y, z) &\mapsto 2x - y + 3z + 8 \\ (x, y, z) &\mapsto 0 & (x, y, z) &\mapsto \sqrt{3} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto 0 & (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto 66 \end{aligned}$$

ex: Mostre que, dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, a aplicação

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

é uma forma linear em \mathbb{R}^n .

Formas lineares no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Uma forma linear $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ é determinada pelos seus valores nos vetores de uma base de \mathbb{R}^n . Por exemplo, se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é a base canónica de \mathbb{R}^n , e $\xi_i := \langle \xi, \mathbf{e}_i \rangle$, com $i = 1, 2, \dots, n$, então o valor da forma $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ sobre o vetor genérico $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ é

$$\begin{aligned} \langle \xi, \mathbf{x} \rangle &= \langle \xi, x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \rangle \\ &= x_1 \langle \xi, \mathbf{e}_1 \rangle + x_2 \langle \xi, \mathbf{e}_2 \rangle + \dots + x_n \langle \xi, \mathbf{e}_n \rangle \\ &= x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n. \end{aligned}$$

Portanto, se $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\langle \xi, \mathbf{x} \rangle = \xi \cdot \mathbf{x}$$

A correspondência que associa a forma $\langle \xi, \mathbf{x} \rangle = \xi \cdot \mathbf{x}$ ao vetor $\xi \in \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo $\mathbb{R}^n \approx (\mathbb{R}^n)^*$ entre o espaço euclidiano \mathbb{R}^n e o seu dual $(\mathbb{R}^n)^*$ (que depende da estrutura euclidiana, ou seja, do produto escalar euclidiano!).

Uma outra maneira de representar a forma linear é usando o “produto linhas por colunas”

$$\langle \xi, \mathbf{x} \rangle = \Xi X = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

do vetor linha

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}$$

pelo vetor coluna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ex: Determine o vetor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ que define as seguintes formas lineares

$$\begin{aligned} x &\mapsto 3x & (x, y) &\mapsto 0 \\ (x, y) &\mapsto 5x + 9y & (x, y, z) &\mapsto -3x + 7y - z \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto 3x_k & \text{com } 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

ex: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear tal que $f(\mathbf{i}) = 5$ e $f(\mathbf{j}) = -2$. Determine $f(x, y)$.

ex: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear tal que $f(\mathbf{i}) = -3$, $f(\mathbf{j}) = 1$ e $f(\mathbf{k}) = 7$. Determine $f(x, y, z)$.

Núcleo e hiperplanos. O *núcleo/espço nulo* (em inglês *kernel*) da forma linear $\xi \in \mathbf{V}^*$ é o subespaço vetorial

$$\text{Ker}(\xi) := \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \langle \xi, \mathbf{x} \rangle = 0\} \subset \mathbf{V}.$$

Se $\xi \neq \mathbf{0}'$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \text{Ker}(\xi)$ (i.e. um vetor tal que $\langle \xi, \mathbf{v} \rangle \neq 0$), então cada vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ pode ser representado de uma única maneira como

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w} \in \text{Ker}(\xi)$. De fato, a condição $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{v} \in \text{Ker}(\xi)$, ou seja, $\langle \xi, \mathbf{x} - \lambda \mathbf{v} \rangle = 0$, obriga a escolher $\lambda = \langle \xi, \mathbf{x} \rangle / \langle \xi, \mathbf{v} \rangle$. Portanto, o núcleo $\text{Ker}(\xi)$ de uma forma $\xi \neq \mathbf{0}'$ é um *hiperplano* do espaço linear \mathbf{V} , ou seja, um subespaço linear de “co-dimensão” 1. Em particular, se \mathbf{V} tem dimensão finita,

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(\xi) + 1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}$$

O *hiperplano afim* que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ e é paralelo ao hiperplano $\text{Ker}(\xi)$ é

$$\mathbf{a} + \text{Ker}(\xi) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \langle \xi, \mathbf{v} \rangle = \lambda\} \quad \text{onde } \lambda = \langle \xi, \mathbf{a} \rangle.$$

ex: Mostre que o núcleo de uma forma linear $\xi \in \mathbf{V}^*$ é um subespaço linear de \mathbf{V} .

ex: Uma “equação linear”

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

define um hiperplano afim em \mathbb{R}^n . Mostre que o hiperplano afim é um subespaço linear de \mathbb{R}^n sse $b = 0$.

Interseções de hiperplanos/sistemas homogêneos. Se $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in \mathbf{V}^*$ são m formas lineares independentes num espaço linear de dimensão finita $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ (em particular, $m \leq n$), então a interseção dos núcleos $\mathbf{W} = \bigcap_{k=1}^m \text{Ker}(\xi_k)$, ou seja o conjunto dos vetores $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ que resolvem o “sistema homogêneo”

$$\langle \xi_1, \mathbf{x} \rangle = 0, \quad \langle \xi_2, \mathbf{x} \rangle = 0, \quad \dots \quad \langle \xi_m, \mathbf{x} \rangle = 0,$$

é um subespaço vetorial de co-dimensão m , e portanto de dimensão $n - m$. De fato, se completamos o sistema de formas independentes até obter uma base $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n$ de \mathbf{V}^* , e se $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ denota a base dual de \mathbf{V} (assim que $\langle \xi_i, \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij}$), então nas coordenadas relativas a esta base o sistema homogêneo é

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad x_m = 0,$$

e as soluções são todos os vetores $\mathbf{x} = \sum_{k=m+1}^n x_k \mathbf{b}_k \in \mathbf{W} \approx \mathbb{R}^{n-m}$.

Integral. O integral

$$f \mapsto I(f) := \int_a^b f(t) dt$$

é uma forma linear no espaço $\mathcal{C}^0([a, b])$ das funções contínuas no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. O seu núcleo é o hiperplano das funções com média nula no intervalo. Toda função contínua pode ser representada de forma única como soma $f(x) = c + g(x)$ onde $c = I(f)$ é uma constante (a média de f vezes o comprimento do intervalo) e $g(x) = f(x) - I(f)$ é uma função com média nula.

Delta de Dirac. A *delta de Dirac* (no ponto 0), definida por

$$f \mapsto \delta(f) := \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt \right] = f(0),$$

é uma forma linear no espaço $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ das funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O núcleo de δ é o conjunto das funções (contínuas) tais que $f(0) = 0$, que é um hiperplano do espaço $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Conjuntos convexos. Um subconjunto $C \subset \mathbf{V}$ de um espaço vetorial real é *convexo* se contém o segmento entre cada par de seus pontos, i.e. se

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C \quad \Rightarrow \quad (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in C \quad \forall t \in [0, 1]$$

O menor convexo que contém (ou seja, a interseção de todos os convexos que contém) um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado *envoltória/invólucro/fecho convexa/o* de A , e denotado por $\text{Conv}(A)$. Em particular, o menor convexo que contém o conjunto finito de pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$ é

$$\text{Conv}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}) := \{t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \dots + t_m\mathbf{x}_m \text{ com } t_i \geq 0 \text{ e } t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1\}$$

ex: As bolas $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}$ e $\overline{B_r(\mathbf{x})} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\}$ são convexas.

ex: Dados um vetor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $b \in \mathbb{R}$, os semi-espacos $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \geq b\}$ são convexas.

ex: Dada uma forma $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$ e um escalar $b \in \mathbb{R}$, os semiespacos $\{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle \geq b\}$ são convexas.

ex: A envoltória convexa de três pontos, A, B e C do plano \mathbb{R}^2 é o triângulo de vértices A, B e C .

ex: Translações e homotetias preservam os convexas, i.e. se $C \subset \mathbf{V}$ é convexo, então também $T_{\mathbf{a}}(C) = C + \mathbf{a}$ e $H_{\lambda}(C) = \lambda C$ são convexas, $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

ex: Se $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}^*$, então $\{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } \boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) < 0\}$ é convexo.

Medidas de probabilidades. Uma (*medida de*) *probabilidade* num “espaço dos acontecimentos” finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ é uma função $\mathbb{P} : 2^\Omega := \{\text{subconjuntos } A \subset \Omega\} \rightarrow [0, 1]$ aditiva, i.e. tal que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{se } A \cap B = \emptyset,$$

(a probabilidade do evento “ A ou B ” é igual à probabilidade do evento A mais a probabilidade do evento B se A e B são eventos mutuamente exclusivos) que verifica $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (a probabilidade do “evento impossível” é nula) e $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (a probabilidade do “evento certo” é um).

Cada vetor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas estão limitadas por $0 \leq p_i \leq 1$ e tal que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ define uma probabilidade \mathbb{P} , por meio de

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

ou seja, $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$. Portanto, o espaço das medidas de probabilidades em Ω é o *simplexo (unitário)*

$$\Delta^{n-1} := \{\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \text{ com } 0 \leq p_i \leq 1 \text{ e } p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Observe que o simplexo unitário é o fecho convexo dos vetores da base canônica de \mathbb{R}^n , i.e. $\Delta^{n-1} = \text{Conv}(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\})$.

Wild additive functions in the real line. For real valued functions of a real variable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, homogeneity implies additivity, since $x + y = (1 + y/x)x$ (if $x \neq 0$, of course), and therefore an homogeneous function satisfies

$$f(x + y) = f((1 + y/x)x) = (1 + y/x)f(x) = f(x) + (y/x)f(x) = f(x) + f(y).$$

Surprisingly, there exist additive functions which are not homogeneous (hence not linear), at least if we accept the axiom of choice. Indeed, additivity only implies linearity on “rational lines” $\mathbb{Q}x \subset \mathbb{R}$, i.e.

$$f(rx) = rf(x) \quad \forall r = p/q \in \mathbb{Q} \text{ and } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Therefore, if we could choose a different slope $\lambda_{\mathbb{Q}x}$, hence a different homogeneous function $rx \mapsto \lambda_{\mathbb{Q}x}rx$, for any orbit $\mathbb{Q}x$ of the quotient space $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{R}$, the resulting function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ would be additive but not homogeneous. Any such wild additive but not homogeneous function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cannot be continuous, and indeed has a dense graph.

Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be an homogeneous function, and $x \in \mathbb{R}$. For $r = p/q \in \mathbb{Q}$ with $p, q \in \mathbb{Z}$ and $q \neq 0$, show that $f(rx) = f(px/q) = pf(x/q)$ and also $f(x) = f(qx/q) = qf(x/q)$. Deduce that $f(rx) = rf(x)$ for all $r \in \mathbb{Q}$. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be an additive but not homogeneous function, so that there exists two points $a, b \in \mathbb{R}$ where $f(a)/a \neq f(b)/b$. This implies that $\mathbf{v} = (a, f(a))$ and $\mathbf{w} = (b, f(b))$ are linearly independent vectors, hence a basis, of \mathbb{R}^2 . From $\mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w} = \mathbb{R}^2$, deduce that the “rational plane” $\mathbb{Q}\mathbf{v} + \mathbb{Q}\mathbf{w}$ is dense in \mathbb{R}^2 , i.e. any point $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ may be approximated with arbitrary precision by a point in $\mathbb{Q}\mathbf{v} + \mathbb{Q}\mathbf{w}$, i.e. for any $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ and any $\varepsilon > 0$ there exist rationals $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}$ such that $\|\mathbf{r} - (\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{w})\| < \varepsilon$. Use again the additivity of f to show that this implies the existence of a point $c \in \mathbb{R}$ such that $\|\mathbf{r} - (c, f(c))\| < \varepsilon$.

12 Espaços euclidianos

ref: [Ap69] Vol. 2, 1.11-17; [La87] Ch. V

27 fev 2020

Espaços euclidianos. Um *espaço euclidiano* é um espaço vetorial \mathbf{E} , real ou complexo, munido de um *produto interno* (também dito *hermítico* se o espaço é complexo), uma aplicação que associa a cada par de vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$ um escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , satisfazendo os axiomas

$$\mathbf{E1} \text{ (simetria hermítica)} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E2} \text{ (linearidade)} \quad \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{E} \text{ e } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

$$\mathbf{E3} \text{ (positividade)} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \text{ se } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Se o espaço é real o axioma E1 diz simplesmente que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$. O axioma E2 diz que o produto interno é linear na segunda variável, e o axioma E1 então implica que é “anti-linear” na primeira variável, ou seja, que $\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \bar{\mu} \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ (mas há textos, em particular de matemática, onde acontece o contrário). Esta propriedade é também chamada “sesquilinearidade”. Pela E1, o produto escalar de um vetor com si próprio é um número real, e a E3 diz que este número é não negativo, i.e. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, e nulo apenas quando \mathbf{x} é o vetor nulo. O axioma E3 também implica que o único vetor \mathbf{x} tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$ é o vetor nulo $\mathbf{0}$.

Os espaços euclidianos \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n . Os arquétipos de espaços euclidianos de dimensão finita são os seguintes. O espaço euclidiano real \mathbb{R}^n , munido do produto interno “usual”

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

(se representamos \mathbf{x} e \mathbf{y} como vetores colunas). O espaço euclidiano complexo \mathbb{C}^n , munido do produto interno “usual”

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \cdots + \bar{x}_n y_n = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$$

onde o asterisco denota o “transposto conjugado”, ou seja, $\mathbf{x}^* := \bar{\mathbf{x}}^\top$ e seguimos a tradição de físicos e engenheiros de usar produtos internos lineares na segunda variável e anti-lineares na primeira.

Em particular, os espaços euclidianos mais simples são os próprios corpos \mathbb{R} e \mathbb{C} .

Matriz de Gram. Seja \mathbf{E} um espaço euclidiano de dimensão finita n , e seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ uma sua base. Pela linearidade, o produto interno entre dois vetores arbitrários $\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$ e $\mathbf{y} = \sum_k y_k \mathbf{e}_k$ é determinado pelos produtos internos

$$g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$$

entre os vetores da base. Estes números formam uma matriz $G = (g_{ij})$, chamada *matriz de Gram*, ou *matriz da métrica*. De fato, a E2 implica que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{ij} \bar{x}_i g_{ij} y_j = \bar{\mathbf{x}}^\top G \mathbf{y}.$$

Pelo axioma E1 esta matriz satisfaz $G^\top = G$ no caso real, e $\bar{G}^\top = G$ no caso complexo. O axioma E3 implica que a matriz G é “definida positiva”, no sentido em que $\mathbf{x}^* G \mathbf{x} > 0$ para todo vetor não nulo \mathbf{x} . Em particular, as entradas diagonais são positivas, i.e. $g_{ii} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle > 0$.

Norma euclidiana. A *norma (euclidiana)* do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ é a raiz quadrada não negativa

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

ou seja, o quadrado da norma de \mathbf{x} é $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ (é mais fácil “calcular” o quadrado da norma, que é apenas uma soma de produtos, do que a própria norma, que envolve uma raiz quadrada). É

claro que $\|\mathbf{x}\| \geq 0$. Pelas E2 e E3, o único vetor com norma 0 é o vetor nulo $\mathbf{0}$. Pelas propriedades E1 e E2, $\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Isto significa que a norma é “positivamente homogênea”, ou seja, satisfaz

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$$

É importante observar que o produto escalar pode ser reconstruído a partir da norma euclidiana que define, de acordo com a *identidade de polarização*

$$4 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + i \|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 - i \|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2. \quad (12.1)$$

Se o espaço euclidiano é real, logo os valores dos produtos escalares são reais, a identidade de polarização é mais simples, apenas

$$4 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \quad (12.2)$$

Um vetor é dito *unitário* se a sua norma é igual a um. Todo vetor não nulo \mathbf{x} é proporcional a um vetor unitário, por exemplo $\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Este processo é chamado “normalização” (observe que se o espaço é real, apenas podemos multiplicar \mathbf{u} por ± 1 , enquanto se o espaço é complexo temos ainda a liberdade de multiplicar \mathbf{u} por uma fase arbitrária $e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$).

Um cálculo elementar mostra que a norma euclidiana satisfaz a *identidade do paralelogramo*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$$

Ortogonalidade e projeções. Os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} de \mathbf{E} são ditos *ortogonais/perpendiculares* quando $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, e uma notação é $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, e esta relação é claramente simétrica. Pela E3, o único vetor ortogonal a todos os vetores de um espaço euclidiano, ou seja, tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$, é o vetor nulo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Um cálculo elementar mostra que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2$ é igual a parte real de $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Vale então o *teorema de Pitágoras*: se \mathbf{x} e \mathbf{y} são ortogonais então

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Seja $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ um vetor não nulo. Todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ pode ser representado de maneira única como soma

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

de um vetor $\lambda \mathbf{v}$ proporcional a \mathbf{v} e um vetor \mathbf{w} ortogonal a \mathbf{v} . De fato, a condição de ortogonalidade $\langle \mathbf{x} - \lambda \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ obriga a escolher

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

O vetor $\lambda \mathbf{v}$ é dito *projeção (ortogonal)* do vetor \mathbf{x} sobre (a reta definida pelo) vetor \mathbf{v} , e o coeficiente λ é dito *componente* de \mathbf{x} ao longo de \mathbf{v} . Em particular, a componente de \mathbf{x} ao longo de um vetor unitário \mathbf{u} é o produto escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle$.

Se \mathbf{x} não é proporcional ao vetor não nulo \mathbf{v} , então a norma da diferença $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{v}$ entre o vetor \mathbf{x} e a sua projeção $\lambda \mathbf{v}$ sobre \mathbf{v} é estritamente positiva. Consequentemente,

Teorema 12.1 (desigualdade de Schwarz). *O módulo do produto escalar entre dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$ é limitado por*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

e a igualdade verifica-se sse os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são linearmente dependentes.

Se o espaço euclidiano é real, é então possível definir o *ângulo* θ entre dois vetores não nulos \mathbf{x} e \mathbf{y} pela identidade

$$\cos \theta := \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|},$$

sendo o último um número real entre -1 e 1 .

Métrica euclidiana. Consequência importante da desigualdade de Schwarz é que a norma satisfaz a *desigualdade do triângulo* (ou seja, é subaditiva),

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

A *distância* entre os vetores/pontos \mathbf{x} e \mathbf{y} de \mathbf{E} é definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

que satisfaz a desigualdade do triângulo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Dual de um espaço euclidiano. O axioma E2 implica que, fixado $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$, a função $\xi_{\mathbf{y}} : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ é uma forma linear, e pela desigualdade de Schwarz 12.1 a sua norma é $\|\mathbf{y}\|$. Em particular, a correspondência $\mathbf{y} \mapsto \xi_{\mathbf{y}} := \langle \cdot, \mathbf{y} \rangle$ define uma inclusão $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}^*$, que é anti-linear (ou seja, $\xi_{\lambda\mathbf{y}} = \bar{\lambda}\xi_{\mathbf{y}}$). Se o espaço euclidiano tem dimensão finita, esta inclusão é claramente uma bijeção.

ex: Verifique a identidade de polarização.

ex: Mostre que num espaço euclidiano real a identidade de polarização é

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 4 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

e deduza que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ sse $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

ex: Mostre que num espaço euclidiano real vale a *lei dos cosenos*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{x} e \mathbf{y} .

ex: Mostre que a norma, e portanto a distância, satisfazem a *desigualdade do triângulo* (calcule $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ e use a desigualdade de Schwarz ...).

ex: [Ap69] 15.12.

Sistemas ortonormados. Num espaço euclidiano, há uma relação simples entre ortogonalidade e independência. Uma família (finita ou infinita) de vetores não nulos \mathbf{v}_k 's dois a dois ortogonais, i.e. tais que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, é dita *família ortogonal*.

Teorema 12.2. *Uma família ortogonal de elementos não nulos de um espaço euclidiano \mathbf{E} é independente.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vetores não nulos e (dois a dois) ortogonais, i.e. tais que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\|\mathbf{v}_k\| \neq 0$ para todo k . A igualdade $\lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ implica, ao calcular os produtos internos com os vetores \mathbf{v}_k , que $\lambda_k\|\mathbf{v}_k\|^2 = 0$ para todos os k , ou seja, sendo os $\|\mathbf{v}_k\| > 0$, que todos os λ_k são nulos. \square

Em particular, todo o conjunto ortogonal de n vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ não nulos num espaço euclidiano \mathbf{E} de dimensão n é uma base. Os vetores $\mathbf{u}_k := \mathbf{v}_k/\|\mathbf{v}_k\|$ formam então uma *base ortonormada*, ou seja, uma base formada por vetores unitários ortogonais.

Conjuntos independentes, não necessariamente finitos, podem ser feitos ortogonais, de acordo com o seguinte algoritmo.

Teorema 12.3 (ortogonalização de Gram-Schmidt). *Seja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$, um conjunto independente de vetores do espaço euclidiano \mathbf{E} . Então existe um conjunto ortogonal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ tal que os espaços $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ gerados pelo primeiros n vetores coincidem com o espaços $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, para todo o n .*

Demonstração. Basta definir o conjunto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \dots$ recursivamente por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 & \dots \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{v}_{n+1} - \left(\frac{\langle \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_n \rangle}{\|\mathbf{u}_n\|^2} \mathbf{u}_n \right) & \dots \end{aligned}$$

Ou seja, \mathbf{u}_{n+1} é obtido retirando de \mathbf{v}_{n+1} a soma das suas projeções sobre os $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$. É imediato verificar que \mathbf{u}_{n+1} é ortogonal ao subespaço $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, e portanto a todos os \mathbf{u}_k com $k \leq n$. \square

Em particular,

Teorema 12.4. *Todo espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormada.*

Isometrias. Uma transformação linear $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ de um espaço euclidiano \mathbf{E} num espaço euclidiano \mathbf{F} , reais ou complexos, é uma *isometria (linear)* se preserva os produtos internos, i.e. se

$$\langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle_{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{E}}$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$. É evidente que uma isometria preserva a ortogonalidade (i.e. se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ então também $T\mathbf{x} \perp T\mathbf{y}$), preserva as normas (i.e. $\|T\mathbf{x}\|_{\mathbf{F}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{E}}$ para todos $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$), e Consequentemente as distâncias. Em particular, envia sistemas ortonormados em sistemas ortonormados. Toda isometria é injetiva (pois preserva as normas), Consequentemente invertível na sua imagem, e a sua inversa $T^{-1} : \text{Im}(T) \rightarrow \mathbf{E}$ é também uma isometria.

Se existir uma isometria bijetiva $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ (observe que a inversa $T^{-1} : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E}$ é também uma isometria), os espaços euclidianos \mathbf{E} e \mathbf{F} são ditos *isomorfos*.

Sejam $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ duas bases ortonormadas dos espaços euclidianos de dimensão finita \mathbf{E} e \mathbf{F} , respetivamente, e seja $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$. É imediato verificar que T é uma isometria bijetiva. O teorema 12.4 então implica

Teorema 12.5. *Todo espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormada, e Consequentemente é isomorfo a \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , dependendo se real ou complexo, munidos do produto interno usual.*

ex: Uma “inclusão” $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ é uma isometria de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 , que não é sobrejetiva.

ex: Uma projeção ortogonal $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ não é uma isometria de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 .

Polinômios de Legendre. Seja \mathbf{E} o espaço euclidiano das funções contínuas $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt.$$

Os polinômios homogêneos $v_0(t) = 1$, $v_1(t) = t$, $v_2(t) = t^2$, \dots , $v_n(t) = t^n$, \dots formam uma família independente de \mathbf{E} . A ortogonalização de Gram-Schmidt produz a família dos *polinômios de Legendre*,

$$\ell_0(t) = 1, \quad \ell_1(t) = t, \quad \ell_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad \ell_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, \quad \dots$$

ℓ^2 spaces. The simplest infinite dimensional Euclidean space is the space ℓ^2 of those infinite sequences $\mathbf{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ of complex numbers $x_k \in \mathbb{C}$ with finite norm $\|\mathbf{x}\|^2 := \sum_k |x_k|^2 < \infty$, equipped with the inner product

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

(convergence of the inner product comes from Cauchy-Schwarz inequality applied to finite sums and convergence of the infinite sums defining the norms of the two vectors). The infinite system $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, \dots is made of pairwise orthogonal unitary vectors. By definition, any vector $\mathbf{x} \in \ell^2$ is a sum $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n$.

In some precise sense, any reasonable (complete and separable) infinite dimensional complex Euclidean space is isomorphic to ℓ^2 .

Also useful are spaces of two-sided sequences $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, equipped with the obvious inner product.

L^2 spaces. Typical Euclidean spaces of interest in analysis of PDEs (and in physics) are spaces \mathbf{E} made of continuous (or at least integrable) functions $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ or \mathbb{C} , defined in some domain X which may be an interval like $[-\pi, \pi]$, the whole real line \mathbb{R} , some domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (or more sophisticated objects called “manifolds”, and so on), equipped with the L^2 inner product defined as

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(t) \overline{g(t)} dt.$$

For this to make sense we must require finiteness of the norm, i.e.

$$\|f\|^2 = \int_X |f(t)|^2 dt < \infty.$$

In some sense this space is too small, and one should “complete” it in order to include the limits of its fundamental sequences, and then one should restore positivity identifying functions differing by something that has zero norm. The result is a complete Euclidean space called $L^2(X)$. In some other sense it is too large, since interesting linear operators, such as differential operators, may only be defined in strict subspaces made of those functions which admit a sufficient number of derivatives. For example, one may consider the subspace $\mathcal{C}_c^\infty(X) \subset L^2(X)$ of infinitely differentiable functions with compact support. It turns out that this subspace is “dense” in $L^2(X)$ (this means that for any $f \in L^2(X)$ and any precision $\varepsilon > 0$ we may find a smooth function with compact support $g \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ such that $\|f - g\| < \varepsilon$).

When $f(t)$ is a time-dependent “signal”, as for example an electric current or the amplitude of a sound wave, then its squared modulus $|f(t)|^2$ is a “power”, hence its time integral $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ has the meaning of an “energy”.

If a continuous-time signal $f(t)$ is “sampled” at integer multiples of some sampling time $\tau > 0$, we get a discrete-time signal $z_n := f(n\tau)$, with $n \in \mathbb{N}$ or \mathbb{Z} , which is a sequence. The L^2 inner product is then approximated/replaced by the ℓ^2 inner product.

Complemento ortogonal, projeção ortogonal. Seja \mathbf{E} um espaço euclidiano, real ou complexo. O complemento ortogonal do subconjunto $X \subset \mathbf{E}$ (não necessariamente um subespaço) é o subespaço linear

$$X^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbf{E} \text{ t.q. } \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{x} \in X\}$$

Seja $S \subset \mathbf{E}$ um subespaço de dimensão finita do espaço euclidiano \mathbf{E} . Então cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ pode ser representado de maneira única como soma

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$$

de um vetor $\mathbf{s} \in S$ e um vetor $\mathbf{t} \in S^\perp$, ou seja, o espaço \mathbf{E} é uma soma direta $\mathbf{E} = S \oplus S^\perp$. De facto, se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada de S (que existe pelo teorema de Gram-Schmidt), basta escolher

$$\mathbf{s} = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$$

e verificar que $\mathbf{t} := \mathbf{v} - \mathbf{s}$ é ortogonal a todos os vetores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, e portanto a todos os vetores de S . O vetor \mathbf{s} é dito *projeção (ortogonal)* de \mathbf{v} sobre S , e o operador $P_S : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, definido por $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{s}$, é dito *projeção ortogonal* sobre o subespaço S .

Teorema 12.6 (teorema de aproximação). *A projeção ortogonal realiza a distância entre \mathbf{v} e S , ou seja, para todo $\mathbf{s}' \in S$,*

$$\|\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{s}'\|.$$

Demonstração. A vetor $\mathbf{s}' - \mathbf{s}$, que pertence ao subespaço S , é ortogonal ao vetor $\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{s}$, e portanto, pelo teorema de Pitágoras, $\|\mathbf{v} - \mathbf{s}'\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{s}' - \mathbf{s}\|^2 \geq \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2$. \square

Em dimensão infinita, este resultado é falso em geral. Projeções ortogonais, e portanto decomposições como somas diretas $\mathbf{E} = S \oplus S^\perp$ são possíveis apenas quando o subespaço S é fechado.

ex: Mostre que X^\perp é um subespaço linear de \mathbf{E} .

ex: Verifique que $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{t}\|^2$.

ex: Verifique que $P_S(\mathbf{E}) = S$, e que $P_S P_S = P_S$.

Bases ortonormadas e coeficientes de Fourier. Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$ um conjunto/sistema ortonormado do espaço euclidiano \mathbf{E} (ou seja, $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, e $\|\mathbf{e}_i\| = 1$). Os *coeficientes de Fourier* do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ (relativamente ao conjunto ortonormado $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$) são os escalares

$$x_k := \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle$$

A projeção ortogonal de um vetor \mathbf{x} sobre o subespaço de dimensão finita $\mathbf{E}_N \subset \mathbf{E}$, gerado pelos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$, é o vetor $\mathbf{x}_N = \sum_{k=1}^N x_k \mathbf{e}_k$. Da desigualdade $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N\|^2 \geq 0$ segue que $\sum_{k=1}^N |x_k|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$. Em particular, a série de termos não-negativos $\sum_k |x_k|^2$ é convergente. No limite quando $N \rightarrow \infty$, segue a

Teorema 12.7 (desigualdade de Bessel). *Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$ um sistema ortonormado do espaço euclidiano \mathbf{E} . Se $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ e $x_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle$ são os seus coeficientes de Fourier, então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

Se \mathbf{E} tem dimensão finita e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada, então cada vetor \mathbf{x} pode ser representado de maneira única como $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k$. Então, vale o análogo do eorema de Pitágoras,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_k|^2$$

e o produto escalar entre os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} é dado pela *identidade de Parseval*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_k \overline{y_k}$$

ex: Mostre que se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada do espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{E} \approx \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n , então todo o vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ é igual a

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k$$

onde $x_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle$.

ex: [Ap69] 15.12.

Séries de Fourier. O produto interno L^2 no espaço \mathbf{H} das funções contínuas (ou simplesmente integráveis) $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Não é difícil verificar que $1, \cos(t), \cos(2t), \dots, \sin(t), \sin(2t), \dots$ é um conjunto ortogonal. Mais fácil é verificar que a família $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ das “harmônicas”

$$\mathbf{e}_n(t) := e^{int},$$

com $n \in \mathbb{Z}$, é um conjunto ortonormado.

Uma combinação linear $\sum_{-N}^N c_n e^{int}$ é chamada “polinômio trigonométrico” de grau N , e o espaço \mathbf{E}_N dos polinômios trigonométricos de grau N é um subespaço de dimensão finita de \mathbf{E} , gerado pelas harmônicas \mathbf{e}_n com $|n| \leq N$.

Seja $f(t)$ uma função integrável (por exemplo, seccionalmente contínua) no intervalo $[-\pi, \pi]$. A sua projeção ortogonal sobre \mathbf{E}_N é o polinômio trigonométrico

$$S_N f(t) := \sum_{-N}^N \hat{f}(n) e^{int},$$

onde os *coeficientes de Fourier* de f são definidos por

$$\hat{f}(n) := \langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

A *série de Fourier* de $f(t)$ é a série formal

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

(a segunda é obtida da primeira usando a fórmula de Euler, e os coeficientes a_n e b_n são combinações lineares dos $\hat{f}(\pm n)$). Se a função $f(t)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável com continuidade), a série de Fourier converge para a própria função.

Hilbert spaces and Dirac's notation. Physicists are interested in certain (typically infinite dimensional) complex Euclidean spaces \mathbf{H} called *Hilbert spaces*. They are characterized by a “completeness condition” and by the fact of having an “infinite countable basis” $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots$. Each vector may be written as an infinite sum $\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$, with Fourier coefficients $x_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle$, and (the square of) its norm is the sum of the series $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_k |x_k|^2$. It happens that the inner product induces an isomorphism between \mathbf{H} and its dual \mathbf{H}^* . Paul Dirac, one of the fathers of quantum mechanics, invented the following notation²⁶: a generic vector is denoted by $|\psi\rangle$ and called *ket*, while a generic co-vector is denoted by $\langle\phi|$ and called *bra*, so that their pairing $\langle\phi|\psi\rangle$, the inner product, is a *bra-ket*.

Polarized photons and qubits. The smallest non-trivial quantum system has a two-dimensional state space $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. A physical example is polarization of light. A photon may be left or right polarized, hence may be in one of the orthogonal states $|\circ\rangle$ or $|\ominus\rangle$. A vector in \mathcal{H} is also called *qubit*, being the building block of quantum computation.

We may change basis, and consider horizontally or vertically polarized photons,

$$|\leftrightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\circ\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\ominus\rangle \quad \text{and} \quad |\updownarrow\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} |\circ\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\ominus\rangle,$$

or else left-diagonal or right-diagonal polarized photons,

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\leftrightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\updownarrow\rangle \quad \text{and} \quad |\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\leftrightarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\updownarrow\rangle.$$

²⁶P.A.M. Dirac, A new notation for quantum mechanics, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **35** (3) (1939), 416-418.

P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1930.

13 Transformações lineares*

ref: [Ap69] Vol 2, 2.1-9 ; [La87] Ch. III

Transformações lineares. Uma *transformação/aplicação/operador linear* entre os espaços vectoriais reais (ou complexos) \mathbf{V} e \mathbf{W} é uma função $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ aditiva e homogênea, ou seja, tal que

$$L(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{v}') \quad \text{e} \quad L(\lambda\mathbf{v}) = \lambda L(\mathbf{v})$$

ou seja, tal que

$$\boxed{L(\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{v}') = \lambda L(\mathbf{v}) + \lambda' L(\mathbf{v}')}$$

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ e $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ (ou $\in \mathbb{C}$). É usual omitir as parêntesis, e denotar a imagem do vetor \mathbf{v} simplesmente por $L\mathbf{v}$.

O espaço $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ (ou $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$) das transformações lineares de \mathbf{V} em \mathbf{W} é um espaço linear real (ou complexo) se a adição e a multiplicação por um escalar são definidas por

$$(L + M)(\mathbf{v}) := L(\mathbf{v}) + M(\mathbf{v}) \quad (\lambda L)(\mathbf{v}) := \lambda L(\mathbf{v})$$

O elemento neutro é a transformação nula, que envia todo vetor no vetor nulo. Em particular, é um espaço linear o espaço $\text{End}(\mathbf{V}) := \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ dos *endomorfismos* de \mathbf{V} . Uma transformação linear bijetiva $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é dita *isomorfismo (linear)* entre os espaços lineares \mathbf{V} e \mathbf{W} .

Se o espaço linear é uma soma direta $\mathbf{V} = X \oplus Y$ de dois subespaços, e $L \in \text{End}(X)$ e $M \in \text{End}(Y)$ são dois endomorfismos, é definido o endomorfismo “soma direta” $L \oplus M$ de acordo com

$$(L \oplus M)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) := L(\mathbf{x}) + M(\mathbf{y})$$

ex: A transformação *identidade* $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ é linear.

ex: Se $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é uma transformação linear, então $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $L(-\mathbf{v}) = -L(\mathbf{v})$.

ex: Uma transformação linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ envia retas afins $\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbf{V}$ em retas afins $\mathbf{b} + \mathbb{R}\mathbf{w} \subset \mathbf{W}$, se $\mathbf{b} = L(\mathbf{a})$ e $\mathbf{w} = L(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, ou em pontos \mathbf{b} , se $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Em particular, envia retas $\mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbf{V}$ passando pela origem em retas $\mathbb{R}\mathbf{w} \subset \mathbf{W}$ passando pela origem.

ex: A inversa de uma transformação linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ bijetiva é uma transformação linear $L^{-1} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$.

ex: Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (T_1(x_1, x_2, \dots, x_n), T_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, T_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

é linear sse todas as suas “coordenadas” $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, m$, são lineares.

ex: Diga se as seguintes aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m são lineares.

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (3x - 5y, x - y) & (x, y) &\mapsto (x^2, xy) \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y + z, 2) & (x, y, z) &\mapsto (x, y + z, 0) \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y, z + y, 3x + 2y - z) & (x, y, z) &\mapsto (1, 2, 3) \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto (0, 0, 1) & (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

ex: Diga se as seguintes aplicações de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são lineares.

T transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $y = 0$

T transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $y = x$

T transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares $(2r, \theta)$

T transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares $(r, \theta + \pi/2)$

ex: Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $L(1, 1) = (1, 4)$ e $L(2, -1) = (-2, 3)$. Determine $L(5, -1)$ (observe que $1 + 2 \cdot 2 = 5$ e $1 + 2 \cdot (-1) = -1$).

ex: Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(\mathbf{i}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{e} \quad T(\mathbf{j}) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

ex: Se $X \subset \mathbf{V}$ é um subespaço linear de \mathbf{V} e $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é uma transformação linear, então a imagem $L(X)$ é um subespaço linear de \mathbf{W} .

ex: As translações de \mathbb{R}^n , as transformações $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{a}$ com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, são transformações lineares?

ex: As homotetias de \mathbb{R}^n , as transformações $\mathbf{v} \mapsto \lambda \mathbf{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, são transformações lineares?

ex: [Ap69] 16.4.

Núcleo e imagem. Seja $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ uma transformação linear. O *núcleo/espço nulo* (em inglês, *kernel*) de L é o subespaço vetorial

$$\text{Ker}(L) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \subset \mathbf{V}$$

A *imagem* de L é o subespaço vetorial

$$\text{Im}(L) := L(\mathbf{V}) = \{L(\mathbf{v}) \text{ com } \mathbf{v} \in \mathbf{V}\} \subset \mathbf{W}$$

A dimensão do núcleo é dita *nulidade* de L , e a dimensão da imagem é dita *ordem* de L . Acontece que estes dois números satisfazem um “princípio de conservação”.

Teorema 13.1. *Seja $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ uma transformação linear. Se \mathbf{V} tem dimensão finita, então também a imagem $L(\mathbf{V})$ tem dimensão finita e*

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(L) + \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(L) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}$$

Demonstração. Seja $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}) = n$. Se os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ formam uma base de $\text{Ker}(L)$, e se juntamente com os vetores $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ formam uma base de \mathbf{V} (se $k < n$, caso contrário o teorema é trivial), então é imediato verificar que os vetores $\mathbf{w}_1 = L(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, \mathbf{w}_{n-k} = L(\mathbf{v}_n)$ geram $\text{Im}(L)$ e são independentes. \square

ex: Mostre que $\text{Ker}(L)$ é um subespaço de \mathbf{V} e que $\text{Im}(L)$ é um subespaço de \mathbf{W} .

ex: Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a ordem das seguintes transformações lineares

$$L(x, y) = (x + y, x - y) \quad L(x, y) = (y, -x) \quad L(x, y) = (x + y, 3x - 2y)$$

$$L(x, y, z) = (2x, 3y, 0) \quad L(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$$

$$L(x, y, z) = (0, 0, 0) \quad L(x, y, z) = (x, y)$$

ex: Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a ordem da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $x = 0$

ex: Determine o núcleo, a imagem, a nulidade e a ordem da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto no seu simétrico em relação à origem.

ex: [Ap69] 16.14.

Operadores. Seja \mathbf{V} um espaço linear (de dimensão não necessariamente finita!). Um *operador (linear)* em \mathbf{V} é uma transformação linear $A : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{V}$ definida num subespaço linear $\mathbf{D} \subset \mathbf{V}$, dito *domínio* do operador A (esta definição é importante em análise, quando \mathbf{V} é um espaço de dimensão infinita e o operador apenas pode ser definido num subespaço próprio de \mathbf{V}). Um subespaço linear $\mathbf{W} \subset \mathbf{D}$ é *invariante* se $A(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$ (ou seja, se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ implica $A\mathbf{v} \in \mathbf{W}$), e portanto a restrição de A a \mathbf{W} é um endomorfismo $A|_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$.

Operadores derivação, multiplicação e primitivação. O operador *derivação* envia uma função derivável $f(x)$ na função

$$(Df)(x) := f'(x).$$

Pode ser pensado como um operador $D : \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, ou também como um endomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. O operador *multiplicação* envia uma função $f(x)$ na função

$$(Xf)(x) := x \cdot f(x).$$

O operador *primitivação* envia uma função integrável (na reta real ou num intervalo da reta) $f(x)$ na função

$$(Pf)(x) := \int_c^x f(t) dt$$

Pode ser pensado como um operador $P : \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$, ou como um endomorfismo de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

ex: Determine o núcleo e a imagem do operador derivação $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,

ex: O subespaço $\text{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómios é um subespaço invariante de $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. O subespaço $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R}) \subset \text{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau $\leq n$ é um subespaço invariante do operador derivação $D : \text{Pol}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}(\mathbb{R})$?

ex: Determine o núcleo $\text{Ker}(P)$ e a imagem $\text{Im}(P) = P(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}))$.

Composição e álgebra dos endomorfismos. A composição de duas transformações lineares $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ e $M : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{Z}$, definida por $(ML)(\mathbf{v}) := M(L(\mathbf{v}))$, é uma transformação linear. Em particular, a composição de dois endomorfismos de um espaço vetorial \mathbf{V} é um endomorfismo de \mathbf{V} . A n -ésima iterada do endomorfismo $L \in \text{End}(\mathbf{V})$ é o endomorfismo L^n definido indutivamente por

$$L^0 = I_{\mathbf{V}}, \quad L^{n+1} = LL^n \quad \text{se } n \geq 1.$$

A composição de transformações lineares satisfaz as propriedades distributivas

$$(L + M)N = LN + MN \quad L(M + N) = LM + LN$$

(que justificam a notação “multiplicativa” LM em vez de $L \circ M$).

A composição não é comutativa! Ou seja, em geral, não há razão para que LM seja igual a ML . Os endomorfismos $L, M \in \text{End}(\mathbf{V})$ *comutam entre si/são permutáveis* se $LM = ML$. A obstrução é o *comutador*, definido por

$$[L, M] := LM - ML,$$

que é igual a transformação nula sse L e M comutam.

ex: Calcule a composição ML quando

$$\begin{aligned} L(x, y) &= (x + y, x - y) & M(x, y) &= 2x - 3y \\ L(x, y, z) &= (x - y + z, z - y) & M(x, y) &= (x, y, x + y) \end{aligned}$$

ex: Verifique que cada endomorfismo comuta com si próprio, ou seja, $[L, L] = 0$

ex: Calcule o comutador entre os endomorfismos do plano $E_+(x, y) = (y, 0)$ e $E(x, y) = (x, -y)$.

ex: Se $[L, M] = 0$ e $[M, N] = 0$, é verdade que $[L, N] = 0$?

ex: Determine todos os endomorfismos do plano que comutam com $I(x, y) = (x, y)$.

ex: Calcule o comutador $[D, X]$ entre os operadores derivação e multiplicação definidos em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

ex: Seja $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ um endomorfismo de um espaço vetorial de dimensão finita \mathbf{V} . Mostre que $\text{Ker}(L^k) \subset \text{Ker}(L^{k+1})$. Sendo a dimensão finita, deduza que existe um inteiro minimal $m \geq 1$ a partir do qual $\text{Ker}(L^m) = \text{Ker}(L^{m+k})$ para todo $k \geq 1$. Deduza que o espaço é uma soma direta $\mathbf{V} = \text{Ker}(L^m) \oplus (\text{Im}L^m)$.

Transformações lineares invertíveis. A transformação linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é *invertível* se é *injetiva* (i.e. $L(\mathbf{x}) \neq L(\mathbf{x}') \text{ se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, e portanto a equação $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ admite uma e uma única solução para cada $\mathbf{y} \in \text{Im}(L)$), \Leftrightarrow existe uma transformação linear $L^{-1} : \text{Im}(L) \rightarrow \mathbf{V}$ (a *inversa* de L) tal que $L^{-1}L = I_{\mathbf{V}}$ e $LL^{-1} = I_{\text{Im}(L)}$ \Leftrightarrow o núcleo de L é trivial, i.e. $\text{Ker}(L) = \{\mathbf{0}\}$.

Em particular, se \mathbf{V} tem dimensão finita, a transformação linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é invertível $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(L) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V} \Leftrightarrow L$ transforma vetores independentes de \mathbf{V} em vetores independentes de $\mathbf{W} \Leftrightarrow L$ transforma bases de \mathbf{V} em bases de $\text{Im}(L)$.

Os *automorfismos* $\text{Aut}(\mathbf{V})$ de um espaço linear \mathbf{V} são os endomorfismos $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ invertíveis.

ex: Diga se L é injetiva e, caso afirmativo, determine a imagem $\text{Im}(L)$ e a transformação inversa L^{-1} .

$$\begin{aligned} L(x, y) &= (x, x) & L(x, y) &= (y, x) \\ L(x, y) &= (x - y, x + y) & L(x, y) &= (0, y) \\ L(x, y, z) &= (x + y, y + z, z + x) & L(x, y, z) &= (3x, 2y, z) \\ L(x, y, z) &= (y, z, 0) & L(x, y, z) &= (x + y + z, y, z) \\ L(x, y) &= (x, 0, y) & L(x, y) &= (x - x, x + y, 0) \end{aligned}$$

ex: [Ap69] 16.8.

ex: Mostre que se $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ é invertível então também L^n é invertível e $(L^n)^{-1} = (L^{-1})^n$.

ex: Mostre que se $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ e $M : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ comutam, então também as inversas L^{-1} e M^{-1} comutam, e $(LM)^n = L^n M^n$.

ex: Considere, no espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, o operador *derivação*, definido por $(Df)(t) := f'(t)$, e o operador *primitivação*, definido por $(Pf)(t) := \int_0^t f(s) ds$. Mostre que $DP = I$ mas $PD \neq I$. Descreva o núcleo e a imagem de PD .

ex: O operador *multiplicação*, definido por $(Xf)(x) := x f(x)$, em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, é invertível?

ex: O operador *deslocamento* $\sigma : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, definido por

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots),$$

é invertível?

Laplaciano, equação de Laplace e funções harmônicas. O *Laplaciano* (ou *operador de Laplace*) no espaço euclidiano \mathbb{R}^n é o operador diferencial $\Delta := \text{div} \circ \text{grad}$, definido, em coordenadas cartesianas (ou seja, relativamente à uma base ortonormal), por

$$(\Delta f)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^n)^2}(\mathbf{x})$$

se $f(\mathbf{x}) = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ é uma função real de classe C^2 definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O Laplaciano pode ser pensado como um operador $\Delta : C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. A *equação de Laplace* para o campo escalar $f(\mathbf{x})$, definido num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é

$$\Delta f = 0$$

As soluções da equação de Laplace, ou seja, os campos escalares contidos no núcleo do Laplaciano, são ditas *funções harmônicas*.

ex: Quais funções satisfazem a equação de Laplace $f''(x) = 0$ na reta?

ex: Determine as soluções da equação de Laplace $f''(x) = 0$ no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com condições de fronteira $f(a) = A$ e $f(b) = B$.

ex: Verifique que $f(\mathbf{r}) = \log \|\mathbf{r}\|$ é uma solução da equação de Laplace em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

ex: Verifique que (o potencial elétrico/gravitacional gerado por uma carga/massa unitária colocada na origem do espaço 3-dimensional) $f(\mathbf{r}) = 1/\|\mathbf{r}\|$ é uma solução da equação de Laplace em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Álgebra de Weyl-Heisenberg-Schrödinger. A álgebra do grupo de Weyl-Heisenberg²⁷ (em dimensão um) é gerada pelos operadores *multiplicação* e *derivação*

$$(Qf)(x) := x f(x) \quad \text{e} \quad (\partial f)(x) := f'(x),$$

definidos, por exemplo, no *espaço de Schwarz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ das funções complexa $f(x)$ infinitamente diferenciáveis tais que todas as derivadas decrescem mais rapidamente do que o inverso de qualquer polinômio²⁸. Os operadores Q e $P := -i\hbar\partial$ (onde \hbar é a constante de Planck reduzida) representam a *posição* e o *momento*, respetivamente, de uma partícula quântica livre na “representação de Schrödinger”. Os operadores P e Q não comutam, pois

$$[Q, P] = i\hbar$$

e está é a causa do “princípio de incerteza de Heisenberg”.

²⁷Os físicos dizem “grupo de Weyl”, que era um matemático (colega de Einstein em Zurich e depois em Princeton), e os matemático dizem “grupo de Heisenberg”, que era um físico, um dos pais da mecânica quântica.

²⁸Ou seja, uma função f está no espaço de Schwartz se para todos $n, m \in \mathbb{N}$ existem constantes $C_{n,m}$ tais que $\|Q^n \partial^m f\|_\infty \leq C_{n,m}$. Consequentemente, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então também $Q^n \partial^m f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todos n, m .

Equações diferenciais ordinárias lineares. Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n é uma lei

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

para a função $x(t)$, onde a_k são coeficientes (não necessariamente constantes) e $f(t)$ é uma função dada (uma força se $n = 2$). Pode ser escrita como

$$Lx = f$$

se $L : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ é o operador diferencial $L := a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$. A equação *homogénea* associada é a equação diferencial $Ly = 0$, ou seja,

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0.$$

O espaço das soluções da equação homogénea $Lz = 0$ é um subespaço vetorial de dimensão finita, tipicamente $\mathbf{H} = \text{Ker}(L) \approx \mathbb{R}^n$. Por exemplo, se os coeficientes a_k 's são constantes, uma base de \mathbf{H} é formada pelos exponenciais complexos $y_k(t) = e^{z_k t}$, onde z_1, z_2, \dots, z_n são as raízes (distintas, no caso genérico!) do polinómio característico $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. A “solução geral”, ou seja, o ponto genérico de \mathbf{H} , é portanto uma combinação linear

$$c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} + \cdots + c_n e^{z_n t}.$$

com $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ coeficientes arbitrários (a cada raiz z de multiplicidade m corresponde um “quase-polinómio” $(c_1 + c_2 t + \cdots + c_p t^{m-1}) e^{z t}$, assim que a solução geral no caso não-genérico de raízes múltiplas é uma soma de quase-polinómios). Se $z(t)$ é uma solução (apenas uma!) de $Lz = f$, então o espaço das todas as soluções de $Lx = f$ é o espaço afim $z + \mathbf{H}$, formado pelos pontos

$$z(t) + c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} + \cdots + c_n e^{z_n t}.$$

14 Transformações lineares e matrizes*

ref: [Ap69] Vol 2, 2.10-16 ; [La87] Ch. IV

Matrizes. Uma *matriz* real (ou complexa) $m \times n$ é uma tabela

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

de $m \cdot n$ números reais (ou complexos) dispostos em m linhas e n colunas. O número real (ou complexo) a_{ij} é dito *elemento/componente/entrada* ij da matriz A . Os vetores

$$A^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

são ditos *i-ésima linha* e *j-ésima coluna* da matriz A , respetivamente. Em particular, uma matriz com m linhas e apenas uma coluna é um vetor de \mathbb{R}^m representado como um vetor coluna, e uma matriz com n colunas e apenas uma linha é um vetor de \mathbb{R}^n representado como um vetor linha. Se o número de linhas é igual ao número de colunas, i.e. $n = m$, a matriz é dita “quadrada”.

Espaço linear das matrizes. O espaço $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ (ou $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$) das matrizes reais (ou complexas) $m \times n$ é um espaço linear real (ou complexo) se a adição e a multiplicação por um escalar são definidas por

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{e} \quad \lambda A := (\lambda a_{ij})$$

se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. O elemento neutro, ou vetor nulo, é a “matriz nula” $0 = (0)$, cujas entradas são todas nulas, e que satisfaz $A + 0 = A$ para toda a matriz A . A matriz “oposta” da matriz A é a matriz $-A := (-1)A$, tal que $A + (-A) = 0$. Então, podemos simplificar a notação e escrever $A - B := A + (-B)$.

É claro que a dimensão do espaço $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é o produto $m \cdot n$, o número de elementos das matrizes. De fato, uma base é o conjunto das matrizes I_{ij} , que têm 1 na entrada ij e 0 nas outras. Então toda matriz é uma combinação linear única $A = \sum_{ij} a_{ij} I_{ij}$, com coordenadas a_{ij} 's, e esta representação define um isomorfismo $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{m \cdot n}$.

ex: Verifique que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma base do espaço linear $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

ex: [Ap69] 16.16.

Álgebra das matrizes. Se $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times s}(\mathbb{R})$, o *produto (linhas por colunas)* AB é a matriz $AB = C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times s}(\mathbb{R})$ definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Ou seja, o elemento c_{ij} de $C = AB$ é o produto escalar $c_{ij} = A^i \cdot B_j$ da i -ésima linha de A e a j -ésima coluna de B . Observe que o produto AB apenas pode ser definido quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B .

A “matriz identidade” é a matriz quadrada $I \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$I = (\delta_{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(também denotada por I_n quando é necessário lembrar a dimensão). É claro que $IA = A$ e $BI = B$ para todas as matrizes A e B (quando o produto faz sentido). O produto é “associativo”,

$$\boxed{A(BC) = (AB)C}$$

e satisfaz as “propriedades distributivas” à esquerda e à direita,

$$\boxed{A(B+C) = AB + AC \quad \text{e} \quad (A+B)C = AC + BC}$$

ex: Existem matrizes $A \neq 0$ e $B \neq 0$ tais que $AB = 0$?

ex: [Ap69] 16.16.

Matriz de uma transformação linear. Uma transformação linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ definida num espaço de dimensão finita \mathbf{V} é determinada pelos seus valores nos vetores de uma base. De fato, se $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ é uma base ordenada de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$, e definimos os vetores $\mathbf{w}_j := L(\mathbf{b}_j) \in \mathbf{W}$, com $j = 1, 2, \dots, n$, então o valor de L sobre o vetor genérico $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$ é

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= L(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_n\mathbf{b}_n) \\ &= x_1L(\mathbf{b}_1) + x_2L(\mathbf{b}_2) + \dots + x_nL(\mathbf{b}_n) \\ &= x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \dots + x_n\mathbf{w}_n. \end{aligned}$$

Em particular, os vetores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ geram $\text{Im}(L) \subset \mathbf{W}$. Se também \mathbf{W} tem dimensão finita, e $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m)$ é uma base ordenada de $\mathbf{W} \approx \mathbb{R}^m$, e definimos os números a_{ij} como sendo as coordenadas dos \mathbf{w}_j 's relativamente à base \mathcal{C} , i.e.

$$L(\mathbf{b}_j) = \mathbf{w}_j = a_{1j}\mathbf{c}_1 + a_{2j}\mathbf{c}_2 + \dots + a_{mj}\mathbf{c}_m$$

com $j = 1, 2, \dots, n$, então o valor de L sobre o vetor genérico $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$ é

$$L(\mathbf{x}) = L\left(\sum_j x_j\mathbf{b}_j\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j\right)\mathbf{c}_i,$$

Portanto, as coordenadas do vetor $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ na base escolhida \mathcal{C} são

$$\boxed{y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad i = 1, 2, \dots, m.}$$

Os números a_{ij} são os elementos de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, a matriz que representa L nas bases escolhidas.

Transformação linear definida por uma matriz. Em particular, fixadas as bases canônicas dos espaços \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m (ou quaisquer outras bases), uma matriz $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ define uma transformação linear $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se X e Y denotam os “vetores coluna” (matrizes com apenas uma coluna)

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

e

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}),$$

então a transformação linear $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é representada pela equação matricial

$$\boxed{X \mapsto Y = L_A(X) := AX}$$

ou seja, explicitamente,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Característica. Seja $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação linear $X \mapsto AX$ definida pela matriz $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Se E_1, E_2, \dots, E_n denotam os vetores coluna da base canônica de \mathbb{R}^n , ou seja,

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad E_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

então o produto $AE_k = A_k$ é a k -ésima coluna da matriz A , que representa portanto a imagem $L_A(E_k)$ do vetor E_k . A imagem do vetor genérico X é portanto uma combinação linear

$$AX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

das colunas da matriz A . A dimensão de $\text{Im}(L_A) \subset \mathbb{R}^m$, ou seja, o número de colunas linearmente independentes de A , é dita *característica* da matriz A , e denotada por $\text{rank}(A) := \dim \text{Im}(L_A)$.

Por outro lado, o vetor $X \in \mathbb{R}^n$ pertence ao espaço nulo $\ker(L_A)$ da transformação linear L_A se $AX = 0$, ou seja, se

$$A^1 \cdot X = 0, \quad A^2 \cdot X = 0, \quad \dots, \quad A^m \cdot X = 0,$$

onde $A^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ é a i -ésima linha da matriz A . O espaço nulo é portanto o espaço ortogonal ao subespaço vetorial $\text{Span}(A^1, A^2, \dots, A^m) \subset \mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A , ou seja,

$$\text{Ker}(L_A) = \text{Span}(A^1, A^2, \dots, A^m)^\perp.$$

A sua dimensão é igual a $n - k$, se k é o número de linhas linearmente independentes de A . Em particular, sendo $\dim \ker(L_A) + \dim \text{Im}(L_A) = n$, a característica da matriz $\text{rank}(A)$ é também igual ao número de linhas linearmente independentes de A .

Produto e composição. Se a matriz $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ define a transformação linear $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, e se uma segunda matriz $B = (b_{ij}) \in \text{Mat}_{p \times m}(\mathbb{R})$ define a transformação linear $L_B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, então a matriz produto $BA \in \text{Mat}_{p \times n}(\mathbb{R})$ define a composição $L_B L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. De fato, se as coordenadas de $Y = L_A(X)$ são $y_k = \sum_j a_{kj} x_j$ e as coordenadas de $Z = L_B(Y)$ são $z_i = \sum_k b_{ik} y_k$, então

$$z_i = \sum_k \sum_j b_{ik} a_{kj} x_j = \sum_j \left(\sum_k b_{ik} a_{kj} \right) x_j \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

Em notação matricial,

$$\boxed{\text{se } Y = AX \text{ e } Z = BY \text{ então } Z = BAX}$$

Ou seja, o produto linhas por colunas representa a composição das transformações lineares.

ex: Determine a matriz que define a transformação

$$\begin{aligned} L(x, y) &= (x - y, 2x - 3y) & L(x, y, z) &= (3x + y - z, -x + 2y + z) \\ L(x, y, z) &= (3x, 3y, 3z) & L(x, y) &= (x + y, x - y, 2x - 7y) \\ L(x, y, z) &= (x, y) & L(x, y, z) &= (x, z) \end{aligned}$$

ex: Determine a transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Determine a matriz 2×2 que define a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que

transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $x = 0$

transforma cada ponto no seu simétrico em relação à reta $y = -x$

transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares $(r/2, \theta)$

transforma o ponto de coordenadas polares (r, θ) no ponto de coordenadas polares $(r, \theta - \pi/2)$

ex: [Ap69] 16.12.

Einstein's notation. It is often important to take care of the distinction between vectors and co-vectors, and then different types of tensors, as well as to shorten formulas and computations. One possibility is the convention introduced by Einstein. We denote vectors using upper indices as $\mathbf{x} = (x^i) \in \mathbb{R}^n$, and denote co-vectors using lower indices as $\boldsymbol{\xi} = (\xi_j) \in (\mathbb{R}^n)^*$. The pairing between a co-vector $\boldsymbol{\xi}$ and a vector \mathbf{x} reads $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_n x^n$, and is shortened as $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \xi_i x^i$, Einstein's convention being that a repeated index which appears once as an upper index and once as a lower index implies summation. Using Einstein's sum convention, the coordinates of the image of a linear transformation represented by the matrix $T = (t^i_j)$ are given by $y^i = t^i_j x^j$. The composition of $T = (t^i_j)$ followed by $S = (s^i_j)$ is then represented by the matrix $ST = (s^i_k t^k_j)$.

Endomorfismos e matrizes quadradas. Fixada uma base (por exemplo, a base canónica de \mathbb{R}^n), o espaço linear $\text{End}(\mathbf{V}) := \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ dos *endomorfismos* de um espaço linear $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ é isomorfo ao espaço linear $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ das matrizes “quadradas” $n \times n$, os seus elementos sendo as transformações lineares

$$\boxed{X \mapsto Y = AX}$$

ou seja, $x_i \mapsto y_i = \sum_j a_{ij} x_j$, com $X \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. O caso complexo é análogo.

A composição de dois endomorfismos corresponde ao produto de matrizes. Em particular, a k -ésima iterada $L^k = L \circ L \circ \dots \circ L$ (k vezes) do endomorfismo $L : X \mapsto AX$ é representada pela *potência* k -ésima de A , definida recursivamente por

$$A^0 = I \quad \text{e} \quad A^{k+1} = AA^k \quad \text{se } k \geq 0.$$

A matriz quadrada A (ou o endomorfismo $L : X \mapsto AX$) é *nilpotente* se existe um inteiro k tal que $A^k = 0$. A matriz quadrada A é *unipotente* se $A - I$ é nilpotente, e portanto existe um inteiro k tal que $(A - I)^k = 0$.

A *diagonal* da matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto ordenado dos elementos “diagonais” $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. O *traço* (em inglês, *trace*) de A é a soma dos elementos da diagonal,

$$\text{Tr}(A) := \sum_i a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

É imediato verificar que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Uma matriz quadrada é uma *matriz diagonal* se os elementos que não pertencem à diagonal são nulos, ou seja, se é da forma

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ex: Determine a matriz da transformação “identidade” $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ e da transformação “nula” $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}$.

ex: Determine a matriz da homotetia $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e calcule o seu traço.

ex: Mostre que

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

ex: Calcule $A^0, A^1, A^2, A^3, \dots, A^k, \dots$ quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ex: Determine as matrizes $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = 0$.

ex: Determine as matrizes $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = I$.

ex: Mostre que (a matriz que representa) uma projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre um subespaço $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ (por exemplo, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$) é unipotente.

ex: Mostre que (a matriz que representa) o operador derivação $Df := f'$ no espaço $\text{Pol}_{\leq n} \approx \mathbb{R}^{n+1}$ dos polinômios de grau $\leq n$ é nilpotente.

Comutador. A composição de transformações lineares, e portanto o produto de matrizes, não são comutativos! Ou seja, em geral, $AB \neq BA$. As matrizes quadradas $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ (e portanto os endomorfismos que representam), *comutam entre si/são permutáveis* se

$$AB = BA.$$

A obstrução é o *comutador*, definido por

$$[A, B] := AB - BA$$

O comutador satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

ex: Mostre que cada matriz quadrada A comuta com si própria, i.e. $[A, A] = 0$.

ex: Mostre que duas matrizes diagonais comutam.

ex: Mostre que um múltiplo λI da matriz identidade comuta com toda matriz.

ex: Considere as matrizes 2×2

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule $[E, E_+]$, $[E, E_-]$ e $[E_+, E_-]$.

Rotações do plano. Uma rotação anti-horária de um ângulo θ envia o ponto do plano de coordenadas polares (ρ, φ) no ponto de coordenadas polares $(\rho, \varphi + \theta)$, e fixa a origem. Então envia o ponto de coordenadas cartesianas $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ no ponto de coordenadas cartesianas $(r \cos(\varphi + \theta), r \sin(\varphi + \theta))$. As fórmulas de adição das funções trigonométricas implicam que

$$\begin{pmatrix} r \cos(\varphi + \theta) \\ r \sin(\varphi + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) \\ r(\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

e portanto que a rotação é uma transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida, nas base canônica, pela matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Em particular, uma rotação de um ângulo nulo, ou múltiplo inteiro de 2π , é a transformação identidade, definida pela matriz $R_0 = I$. As fórmulas de adição também mostram que as potências de uma rotação são rotações, e de fato

$$R_\theta^2 = R_{2\theta} \quad R_\theta^3 = R_{3\theta} \quad \dots \quad R_\theta^n = R_{n\theta}.$$

Também é imediato verificar que

$$R_\theta R_{-\theta} = R_{-\theta} R_\theta = I,$$

o seja, as rotações são invertíveis, e a inversa de uma rotação anti-horária de um ângulo θ é uma rotação anti-horária de um ângulo $-\theta$. Em geral, a composição de duas rotações de ângulos θ e ϕ é uma rotação de um ângulo $\theta + \phi$, ou seja,

$$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}.$$

Esta fórmula também mostra que as rotações do plano comutam, i.e. $R_\theta R_\phi = R_\phi R_\theta$.

Reflexões no plano. Uma reflexão $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ao longo de uma reta passando pela origem satisfaz a identidade $T^2 = I$. Por exemplo, as matrizes $\pm E$, com

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

definem reflexões nos eixos dos x e dos y , respetivamente. A reflexão numa reta genérica de equação cartesiana $y \cos \theta = x \sin \theta$ (ou seja, com declive $\tan \theta$) pode ser obtida como a composição

$$R_\theta E R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

ou seja, transformando a reta dada no eixo dos x , aplicando a reflexão no eixo dos x , e depois voltando a transformar o eixo dos x na reta dada.

Projeções no plano. Uma projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre um subespaço $V \subset \mathbb{R}^2$ satisfaz $P^2 = P$. Por exemplo, a projeção sobre a reta $y = 0$ é definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em geral, a projeção sobre a reta passando pelo vetor unitário $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ envia $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, e é nula, i.e. $P\mathbf{u}^\perp = 0$, sobre o vetor ortogonal $\mathbf{u}^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$. De fato, o seu valor sobre um vetor genérico $\mathbf{v} = (x, y)$ é dado por

$$P\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = (x \cos^2 \theta + y \cos \theta \sin \theta, x \cos \theta \sin \theta + y \sin^2 \theta)$$

e portanto a sua matriz na base canónica é

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Cisalhamentos. Um *cisalhamento* (em inglês, *shear*) horizontal é uma transformação do plano $(x, y) \mapsto (x + \alpha y, y)$, definida pela matriz

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ (fazer um desenho, para observar que o quadrado unitário de lados \mathbf{i} e \mathbf{j} é enviado no paralelogramo de lados \mathbf{i} e $\alpha\mathbf{i} + \mathbf{j}$). Analogamente é possível definir cisalhamentos verticais. É evidente que as potências de um cisalhamento são ainda cisalhamentos, e que de fato

$$C_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad C_\alpha^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes transpostas. Seja $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz. A *matriz transposta* é a matriz $A^\top = (a_{ij}^\top) \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$, definida por $a_{ij}^\top = a_{ji}$ (ou seja, as linhas de A^\top são as colunas de A e vice-versa). É imediato verificar que $(A^\top)^\top = A$ e que $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (quando o primeiro produto faz sentido).

Por exemplo, se X e Y são dois vetores/matrizes coluna de \mathbb{R}^n , então Y^\top é um vetor/matriz linha, e o produto linha por coluna $Y^\top X$ é igual ao produto escalar

$$Y^\top X = Y \cdot X.$$

Em geral, se X é um vetor coluna de \mathbb{R}^n e Y é um vetor coluna de \mathbb{R}^m , e se a matriz $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ define a transformação linear $X \mapsto AX$, então a matriz transposta define a transformação linear $Y \mapsto A^\top Y$ tal que

$$Y \cdot AX = (A^\top Y) \cdot X,$$

pois $Y \cdot AX = Y^\top (AX) = (A^\top Y)^\top X = (A^\top Y) \cdot X$.

Uma matriz quadrada A é dita *simétrica* se $A = A^\top$ e *anti-simétrica* se $A^\top = -A$.

ex: Verifique que $(A^\top)^\top = A$.

ex: Mostre que $\text{Tr}(A^\top) = \text{Tr}(A)$.

ex: Mostre que, se A é uma matriz quadrada, então $A + A^\top$ é simétrica, e $A - A^\top$ é anti-simétrica. Deduza que cada matriz quadrada pode ser decomposta como soma $A = A_+ + A_-$ de uma matriz simétrica $A_+ = (A + A^\top)/2$ com uma matriz anti-simétrica $A_- = (A - A^\top)/2$.

ex: Mostre que o traço de uma matriz (quadrada) anti-simétrica é nulo.

Inversão de transformações do plano. A matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

representa o endomorfismo genérico do plano $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. A transformação L é invertível se para cada vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ é possível encontrar um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $L_A(x, y) = (\alpha, \beta)$, ou seja, resolver o sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (ad - bc)x = d\alpha - c\beta \\ (ad - bc)y = a\beta - c\alpha \end{cases}$$

(o segundo sistema é obtido ao retirar b vezes a segunda equação de d vezes a primeira equação, e depois ao retirar c vezes a primeira equação de a vezes a segunda equação). Portanto, a transformação L_A é invertível sse $\text{Det}A := ad - bc \neq 0$, e a sua inversa é a transformação linear

$$L_A^{-1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{ad - bc}(d\alpha - c\beta, a\beta - c\alpha),$$

representada pela matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

ex: Calcule a inversa das transformações lineares do plano definidas pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Automorfismos e matrizes invertíveis. A matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é *invertível* (ou *não-singular*, ou *regular*) se existe uma matriz quadrada $A^{-1} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, dita *inversa* de A , tal que

$$\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = I}$$

A transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, representada pela equação matricial $X \mapsto Y = AX$, é invertível sse a matriz A é invertível, e a sua inversa é a transformação linear $Y \mapsto X = A^{-1}Y$. Se $A = (a_{ij})$, então as entradas da inversa $A^{-1} = (b_{ij})$ satisfazem as n^2 equações lineares

$$\sum_k b_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$$

Se A e B são invertíveis, então também AB é invertível e a sua inversa é

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Se A é invertível então também A^\top é invertível e

$$\boxed{(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top}$$

Se $AX = B$ é um sistema de n equações com n incógnitas, e se $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível, então o sistema admite uma solução única dada por $X = A^{-1}B$. Isto acontece quando o núcleo da transformação linear $X \mapsto AX$ é trivial, e portanto a característica da matriz (o número de linhas ou de colunas linearmente independentes) é n .

ex: Mostre que, se $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, então $BA = I \Rightarrow AB = I$ (ou seja, uma inversa esquerda é também uma inversa direita, logo uma inversa).

ex: Diga se as seguintes matrizes são invertíveis e, caso afirmativo, calcule a inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: [Ap69] 16.20.

Mudança de bases/coordenadas. Sejam $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_n)$ duas bases do espaço vetorial \mathbb{R}^n . Então existe uma matriz invertível $U = (u_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com inversa $U^{-1} = (v_{ij})$, tal que

$$\mathbf{b}'_j = \sum_i u_{ij} \mathbf{b}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_j = \sum_i v_{ij} \mathbf{b}'_i.$$

Se (x_i) são as coordenadas do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ relativamente à base \mathcal{B} , então as coordenadas do vetor \mathbf{x} relativamente à base \mathcal{B}' são

$$\boxed{x'_i = \sum_k v_{ik} x_k \quad \text{ou seja} \quad x_i = \sum_j u_{ij} x'_j}$$

pois $\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{b}_j = \sum_{j,k} v_{kj} x'_j \mathbf{b}_k$. A matriz

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

cujas colunas são as coordenadas dos vetores da base \mathcal{B}' relativamente à base \mathcal{B} , é a matriz que realiza a mudança de coordenadas. As matrizes U e U^{-1} podem ser pensadas como matrizes das derivadas parciais, pois $u_{ij} = \partial x_i / \partial x'_j$ e $v_{ij} = \partial x'_i / \partial x_j$. Nesta notação, as fórmulas para a mudança de coordenadas parecem tautológicas (o que explica o valor da notação de Leibniz para as derivadas):

$$x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} x_j \quad \text{e} \quad x_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} x'_j.$$

Na notação matricial, se X e X' são os vetores coluna de coordenadas x_i 's e x'_i 's respetivamente, a mudança de coordenadas assume a forma

$$X = UX' \quad \text{ou seja,} \quad X' = U^{-1}X.$$

Seja $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ a matriz de uma transformação $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ relativamente a certas coordenadas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , dada por $X \mapsto Y = AX$. Sejam $X' = UX$ e $Y' = VY$ umas mudanças de coordenadas em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , respetivamente, definidas pelas matrizes invertíveis $U \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $V \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R})$. Então a matriz da transformação L relativamente às novas coordenadas é

$$\boxed{A' = V^{-1}AU}$$

De fato, se $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$, então $y'_i = \sum_k t_{ik} y_k = \sum_{k,\ell} t_{ik} a_{k\ell} x_\ell = \sum_{k,\ell,j} v_{ik} a_{k\ell} u_{\ell j} x'_j$. Em notação matricial,

$$X \mapsto Y = AX \quad \Rightarrow \quad X' \mapsto Y' = V^{-1}Y = V^{-1}AX = (V^{-1}AU)X'.$$

Em particular, se $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz do endomorfismo $L \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ relativamente à base \mathcal{B} , então a matriz de L relativamente à base \mathcal{B}' é

$$\boxed{A' = U^{-1}AU}$$

e, Consequentemente,

$$\boxed{A = UA'U^{-1}}.$$

Matrizes A e A' relacionadas pelas identidades acima são ditas *semelhantes*. Representam o mesmo endomorfismo em bases possivelmente diferentes.

ex: Verifique que se $A' = U^{-1}AU$ então $A = UA'U^{-1}$.

ex: Use $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ para mostrar que $\text{Tr}(U^{-1}AU) = \text{Tr} A$, ou seja, o traço de uma matriz quadrada apenas depende da transformação linear definida pela matriz, e não da base usada.

ex: Determine a matriz de $L(x, y) = (3x, 2y)$ relativamente à base $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.

ex: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = x$. Determine a matriz de T relativamente à base canônica e relativamente à base $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

ex: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = \sqrt{3}x$. Determine a matriz de T relativamente à base canônica.

ex: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projecção ortogonal sobre a reta $x + y = 0$. Determine a matriz de T relativamente à base canônica.

ex: Determine a matriz que representa o operador derivação $D : \text{Pol}_{\leq 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}_{\leq 2}(\mathbb{R})$, definido por $(Df)(t) := f'(t)$, relativamente às bases ordenadas $(1, t, t^2, t^3)$ e $(1, t, t^2)$. Determine umas bases de $\text{Pol}_{\leq 3}(\mathbb{R})$ e $\text{Pol}_{\leq 2}(\mathbb{R})$ tal que o operador $D : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ seja diagonal.

15 Valores e vetores próprios*

ref: [Ap69] Vol 2, 4.1-10 ; [La87] Ch. VIII

13 mar 2020

Subespaços invariantes e matrizes em blocos. Seja $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ um operador linear definido no espaço vetorial \mathbf{V} , real ou complexo. Um subespaço linear $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ é *invariante*, ou *estável*, (subentendido para o operador L) se $L(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$, ou seja, se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ implica $L\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, i.e. a imagem de um vetor de \mathbf{W} também está em \mathbf{W} . Subespaços invariantes triviais são o subespaço nulo $\{\mathbf{0}\}$ e o próprio \mathbf{V} .

Se $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ é um subespaço invariante não trivial (para que a ideia seja interessante) do operador $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, então é possível definir a restrição $L|_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ do operador L ao subespaço \mathbf{W} , que é naturalmente um operador linear. Se o subespaço invariante tem dimensão finita, por exemplo $\mathbf{W} \approx \mathbb{C}^n$, e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ (vetores de \mathbf{V}) é uma sua base, então a restrição $L|_{\mathbf{W}}$ é definida, nesta base, por uma matriz $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Se também \mathbf{V} tem dimensão finita, por exemplo $\mathbf{V} \approx \mathbb{C}^{n+m}$, é então possível completar o sistema a uma base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{n+m}$ do próprio \mathbf{V} . Nesta base, o operador L é definido por uma matriz em blocos

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (15.1)$$

onde $C \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{C})$ e $B \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{C})$. O espaço quociente \mathbf{V}/\mathbf{W} , o espaço das classes de equivalência $[\mathbf{v}] := \mathbf{v} + \mathbf{W}$ (ou seja, dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{v}' estão na mesma classe, e portanto são indistinguíveis, se diferem por um vetor de \mathbf{W} , i.e. se $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ com $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$), admite uma base formada pelas classes $[\mathbf{e}_{n+1}], [\mathbf{e}_{n+2}], \dots, [\mathbf{e}_{n+m}]$, e é portanto isomorfo a $\mathbf{V}/\mathbf{W} \approx \mathbb{R}^m$. O operador L induz um “operador quociente” $M : \mathbf{V}/\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}/\mathbf{W}$, definido por

$$M[\mathbf{v}] := [L\mathbf{v}] \quad \text{ou seja,} \quad M(\mathbf{v} + \mathbf{W}) := L\mathbf{v} + \mathbf{W}$$

(a definição é bem posta justamente porque $L(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$, e portanto a imagem de M não depende do representante \mathbf{v} da classe de equivalência). A matriz que representa o operador quociente M na base $[\mathbf{e}_{n+1}], [\mathbf{e}_{n+2}], \dots, [\mathbf{e}_{n+m}]$ é precisamente a matriz B .

ex: Mostre que o núcleo $\text{Ker}(L)$ e a imagem $\text{Im}(L)$ são subespaços invariantes.

ex: Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à reta $y = x$.

ex: Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação ao plano $z = 0$.

ex: Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua projecção ortogonal sobre a reta $y = x$.

ex: Para quais valores de θ existem subespaços invariantes não triviais de uma rotação do plano de um ângulo θ ?

ex: Determine os subespaços invariantes de um “cisalhamento” (em inglês, *shear*) horizontal, a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, y)$ e induzida pela matriz .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores e vetores próprios. Seja $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ um operador linear definido num espaço vetorial \mathbf{V} , real ou complexo. Um *vetor próprio/autovetor* (em inglês *eigenvector*, do alemão *eigen* = próprio) de L é um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ que gera um subespaço invariante $\mathbb{R}\mathbf{v}$ (ou $\mathbb{C}\mathbf{v}$) de dimensão um para L , ou seja, tal que

$$L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$) é um escalar, chamado *valor próprio/autovalor* (em inglês *eigenvalue*) do operador L (associado ao vetor próprio \mathbf{v}).

Teorema 15.1. *Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são vetores próprios de $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ e se os correspondentes valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são dois a dois distintos (i.e. $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$), então os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são linearmente independentes.*

Demonstração. A prova é por indução. O caso $k = 1$ é trivial. Seja $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$. Aplicando o operador L ou multiplicando por λ_{k+1} , e depois calculando a diferença, obtemos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \dots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Pela hipótese indutiva todos os coeficientes são nulos, e portanto, sendo os valores próprios distintos, $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Então também $c_{k+1} = 0$ (pois $\mathbf{v}_{k+1} \neq \mathbf{0}$). \square

Se λ é um valor próprio de $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, o conjunto

$$\mathbf{V}_\lambda := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\} = \text{Ker}(\lambda - L)$$

($\lambda - L$ denota o operador $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v} - L(\mathbf{v})$) é um subespaço invariante não trivial, dito *subespaço próprio* associado ao valor próprio λ . A dimensão de \mathbf{V}_λ é chamada *multiplicidade geométrica* do valor próprio λ . A restrição do operador linear L a cada espaço próprio \mathbf{V}_λ é uma homotetia $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v}$. Em particular, os vetores próprios associados ao valor próprio λ são as soluções não triviais do sistema homogêneo

$$(\lambda I - A)\mathbf{v} = 0$$

(que é possível e indeterminado, pois vetores próprios existem e são determinados a menos de um fator não nulo).

Em particular, se existe uma decomposição de \mathbf{V} como soma direta finita $\mathbf{V} = \bigoplus_k \mathbf{V}_k$ de espaços próprios \mathbf{V}_k associados aos valores próprios distintos λ_k de L (ou seja, todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é uma sobreposição única $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$ de vetores $\mathbf{v}_k \in \mathbf{V}_k$ tais que $L\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k$), então o operador é uma soma direta $L = \bigoplus_k \lambda_k$ de homotetias. Em outras palavras, se $P_k : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_k$ denota a projeção sobre \mathbf{V}_k (definida por $P_k(\mathbf{v}) := \mathbf{v}_k$), então $L = \sum_k \lambda_k P_k$. Tais operadores são chamados “diagonalizáveis”. De fato, se \mathbf{V} tem dimensão finita, são representados por matrizes diagonais

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

numas bases formadas por vetores próprios.

ex: Todo vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um vetor próprio da transformação identidade $I_{\mathbf{V}}\mathbf{v} := \mathbf{v}$, com valor próprio $\lambda = 1$. Todo vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um vetor próprio da transformação nula $0_{\mathbf{V}}\mathbf{v} := \mathbf{0}$, com valor próprio $\lambda = 0$. Em geral, todo vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um vetor próprio de uma homotetia $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, de valor próprio λ .

ex: Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à reta $y = 2x$.

ex: Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua projeção ortogonal sobre a reta $3y = x$.

ex: Uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida no espaço vetorial real \mathbb{R}^2 por

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

não admite vetores próprios se o ângulo θ não é um múltiplo inteiro de π . No entanto, a mesma rotação pode ser pensada como a transformação $z \mapsto e^{i\theta}z$ definida no espaço vetorial complexo $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, onde $z = x + iy \approx (x, y)$. Neste caso, todo vetor $z \neq 0$ é um vetor próprio, de valor próprio $e^{i\theta}$.

ex: Determine os valores e os vetores próprios das transformações

$$\begin{aligned} L(x, y) &= (x, 0) & L(x, y) &= (x/2, 3y) & L(x, y) &= (-y, x) \\ L(x, y) &= (x, x + y) & L(x, y) &= (x + \lambda y, y) & L(x, y) &= (x + \alpha y, y) \\ L(x, y, z) &= (0, y, -z) & L(x, y, z) &= (y, z, x) \end{aligned}$$

ex: Se λ é um valor próprio do operador L e k é um inteiro positivo, então λ^k é um valor próprio da potência L^k (o vetor próprio é o mesmo). No entanto, L^k pode ter também outros valores próprios, que não são potências dos valores próprios de L . Por exemplo, uma rotação $R_{\pi/2}$ de um ângulo $\pi/2$ no plano não tem valores próprios, mas o seu quadrado $R_{\pi/2}^2 = R_\pi$ admite o valor próprio -1 (cuja raiz quadrada não é um número real!), e a sua quarta potência $R_{\pi/2}^4 = I$ admite um valor próprio 1 .

ex: Em particular, os valores próprios de um operador nilpotente (um operador tal que alguma potência L^n é o operador nulo) não podem ser diferentes de zero.

ex: Se $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ é um automorfismo (i.e. uma transformação linear invertível) e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é um vetor próprio de L com valor próprio λ , então \mathbf{v} é um vetor próprio de L^{-1} com valor próprio λ^{-1} . Em particular, um operador invertível não pode ter valores próprios nulos.

Anti-partículas. Seja A uma matriz $n \times n$, e sejam D e P as matrizes $(2n) \times (2n)$ em blocos definidas por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Verifique que $P^2 = I$ e que P e D anti-comutam, i.e. satisfazem $PD + DP = 0$. Mostre que se \mathbf{v} é um vetor próprio de D com valor próprio λ , ou seja, $D\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, então $\mathbf{w} = P\mathbf{v}$ é também um vetor próprio de D com valor próprio $-\lambda$.

ex: [Ap69] 4.4.

Resolvente e espectro. Se λ é um valor próprio do operador linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, então o operador

$$L_\lambda := \lambda - L$$

não é invertível (pois um autovetor \mathbf{v} associado a λ está no seu núcleo). O *espectro* do operador L é o conjunto

$$\sigma(L) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \lambda - L \text{ não é invertível} \} \subset \mathbb{C},$$

ou seja, o conjunto dos valores complexos de $z \in \mathbb{C}$ fora dos quais existe o operador *resolvente*

$$R_z := (z - L)^{-1}$$

O número $\rho(L) := \sup_{z \in \sigma(L)} |z|$ é dito *raio espectral* do operador L . Em particular, se λ é um valor próprio de L , então o seu módulo é limitado por $|\lambda| \leq \rho(L)$.

Quando \mathbf{V} tem dimensão finita, o espectro $\sigma(L)$ coincide com o conjunto (finito) dos valores próprios. De fato, se L_λ não é invertível, então o seu núcleo $\ker(L_\lambda)$ não é vazio, e um vetor não nulo do núcleo de L_λ é, por definição, um vetor próprio de L com valor próprio λ .

Em geral, em dimensão infinita, o espectro pode conter pontos/números que não são valores próprios.

Deslocamento. O operador *deslocamento à direita* (em inglês, *right shift*)

$$R : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots),$$

definido no espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ das sucessões reais $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, não é invertível (não sendo sobrejetivo), portanto $0 \in \sigma(R)$. No entanto, 0 não é um valor próprio de R , pois a única solução de $R\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$ é a sucessão nula $(0, 0, 0, \dots)$.

Operadores derivação e multiplicação. O operador *derivação* envia uma função derivável $f(x)$ na função

$$(\partial f)(x) := f'(x).$$

Pode ser pensado como um endomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, o espaço linear das funções infinitamente diferenciáveis definidas em \mathbb{R} com valores reais ou complexos. O produto $P := -i\hbar\partial$, onde $\hbar \simeq 1.054 \cdot \dots \times 10^{-34}$ J · s é a constante de Planck reduzida, é o *operador momento* na “representação de Schrödinger” da mecânica quântica. O operador *multiplicação* envia $f(x)$ em

$$(Xf)(x) := x f(x).$$

Observe que ∂ e X não comutam. De fato, $\partial X - X\partial$ é o operador identidade.

Todo $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio do operador derivação, e o espaço próprio associado ao valor próprio λ é gerado pela função exponencial $e^{\lambda x}$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são distintos, então as funções $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ são linearmente independentes.

Polinômios. O subespaço $\text{Pol}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dos polinômios é um subespaço invariante de ∂ . O subespaço $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R}) \subset \text{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau $\leq n$ é um subespaço invariante do operador derivação? E do operador multiplicação?

ex: Mostre que os vetores próprios do operador $L = X\partial$, definido em $\text{Pol}(\mathbb{R})$, são os monômios $f(x) = x^n$.

Quase-polinômios. Fixada uma “frequência” λ , real ou complexa, o espaço dos *quase-polinômios*, $p(x)e^{\lambda x}$, com $p \in \text{Pol}(\mathbb{R})$, é um subespaço invariante para qualquer operador diferencial com coeficientes constantes $L = a_n\partial^n + \dots + a_1\partial + a_0$. Esta observação justifica o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular de uma EDO linear $Lf = g$ quando a “força” $g(x)$ é um quase-polinômio.

Operador primitivação. O operador *primitivação* envia uma função integrável $f(x)$ numa das suas primitivas $F(x)$, por exemplo a função

$$(\mathcal{P}f)(x) := \int_0^x f(t) dt$$

Pode ser pensado como um endomorfismo do espaço linear real $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente diferenciáveis.

ex: Mostre que o operador $\mathcal{P} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ não tem valores próprios (derive a identidade $\mathcal{P}f = \lambda f$ para obter uma equação diferencial para o suposto vetor próprio $f(x)$, e observe que a mesma identidade também implica uma condição inicial $f(0) \dots$).

ex: Mostre que $\partial\mathcal{P}$ é o operador identidade. Calcule o comutador $\partial\mathcal{P} - \mathcal{P}\partial$.

Operadores diferenciais, translações e ondas planas. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial complexo das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis. Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, de grau $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, o operador diferencial $\partial^\alpha : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ é definido por

$$(\partial^\alpha f)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x}).$$

As ondas planas $e_\xi(\mathbf{x}) := e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}$, com $\xi \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, são funções próprias dos operadores diferenciais ∂^α , com $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com valores próprios $(i\xi)^\alpha := (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n}$, ou seja,

$$\partial^\alpha e_\xi = (i\xi)^\alpha e_\xi.$$

O operador de *translação* $T_{\mathbf{a}}$, com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(T_{\mathbf{a}}f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{a}).$$

As ondas planas $e_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}$ são também funções próprias dos operadores de translação com valores próprios $\lambda_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) = e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{a}}$, ou seja,

$$T_{\mathbf{a}}e_{\boldsymbol{\xi}} = e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{a}}e_{\boldsymbol{\xi}}.$$

O operador de *modulação* $M_{\boldsymbol{\xi}}$, com $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(M_{\boldsymbol{\xi}}f)(\mathbf{x}) := e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}f(\mathbf{x}).$$

É imediato verificar que $T_{\mathbf{a}}M_{\boldsymbol{\xi}} = e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{a}}M_{\boldsymbol{\xi}}T_{\mathbf{a}}$. Os operadores translação e modulação geram o *grupo de Heisenberg*.

Polinómio caraterístico. Se λ é um valor próprio do operador linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, então o operador $L_{\lambda} := \lambda - L$ não é invertível, e os vetores próprios com valor próprio λ são os vetores não triviais do núcleo de L_{λ} . Se $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n tem dimensão finita, então, fixada uma base, o operador L é $X \mapsto AX$, onde $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ou $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é uma matriz quadrada (que depende da base escolhida). O escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} é um valor próprio da matriz quadrada A (ou do operador L) sse a matriz $\lambda I - A$ é singular, ou seja, sse

$$\text{Det}(\lambda I - A) = 0.$$

O *polinómio caraterístico* da matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é o polinómio

$$c_A(z) := \text{Det}(zI - A)$$

Consequentemente,

Teorema 15.2. *O escalar λ é um valor próprio da matriz A (ou do operador definido pela matriz A) sse é uma raiz do polinómio caraterístico de A , i.e. se $c_A(\lambda) = 0$.*

O polinómio caraterístico de uma matriz complexa $n \times n$ é um polinómio mónico de grau n . Pelo teorema de Gauss 7.1, admite pelo menos uma raiz. Consequentemente, todo operador de um espaço vetorial complexo de dimensão finita admite pelo menos um valor próprio. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.2, o polinómio caraterístico fatoriza num produto

$$P_A(z) = \prod_k (z - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

onde os λ_k 's são as raízes (logo os valores próprios) distintas, e os α_k 's são inteiros positivos que somam $\sum_k \alpha_k = n$. O inteiro α_k é chamado *multiplicidade algébrica* do valor próprio λ_k .

ex: Mostre que A e A^{\top} têm o mesmo polinómio caraterístico.

ex: Verifique que o polinómio caraterístico da matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é $P_A(z) = z^2 - (a + d)z + (ad - bc)$. Verifique que $P_A(A) = 0$, ou seja, que

$$A^2 - (\text{Tr}A)A + (\text{Det}A)I = 0$$

ex: Os valores próprios de uma matriz nilpotente (uma matriz A tal que alguma potência $A^n = 0$) não podem ser diferentes de zero.

ex: A matriz quadrada A é unipotente (ou seja, $A - I$ é nilpotente) sse o seu polinómio caraterístico é uma potência de $z - 1$, e portanto os seus valores próprios são todos iguais a 1.

ex: Determine valores e vetores próprios dos endomorfismos definidos pelas seguintes matrizes

$$\begin{array}{ccc}
 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
 \\
 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \\
 \\
 A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} & A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \\
 \\
 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} & A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & 0 & 3 \end{pmatrix} & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

ex: [Ap69] 4.10.

Matrizes semelhantes e diagonalização. As matrizes quadradas $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ são ditas *semelhantes* se existe uma matriz invertível $U \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$B = U^{-1}AU,$$

ou seja, se representam a mesma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em bases que podem ser diferentes. Se A e B são semelhantes então $\text{Det}A = \text{Det}B$. Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico, pois

$$\begin{aligned}
 \text{Det}(zI - U^{-1}AU) &= \text{Det}(zU^{-1}IU - U^{-1}AU) \\
 &= \text{Det}(U^{-1}(zI - A)U) = \text{Det}(zI - A)
 \end{aligned}$$

e portanto os mesmos valores próprios.

A matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é *diagonalizável* se é semelhante a uma matriz diagonal. Se (o operador linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido na base canónica pela) matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ admite n vetores próprios linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respetivamente (não necessariamente distintos), e se $U \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz (invertível, pela independência dos \mathbf{v}_k 's) cujas colunas são os vetores \mathbf{v}_k , então $U^{-1}AU$ é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são as raízes (em geral, complexas e distintas) do polinómio característico da matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, então

$$\begin{aligned}
 c_A(t) &= (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) \\
 &= z^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)z^{n-1} + \dots + (-1)^n(\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n)
 \end{aligned}$$

Mas $c_A(0) = \text{Det}A$, e portanto

$$\boxed{\text{Det}A = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n}$$

Também acontece que

$$\boxed{\text{Tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

(pois $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, e portanto $\text{Tr}(\Lambda) = \text{Tr}(U^{-1}AU) = \text{Tr}(A)$)

Gato de Arnold. Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida, na base canônica, pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ou seja, $L(x, y) = (2x + y, x + y)$. O polinômio característico é $P_A(z) = z^2 - 3z - 1$, e portanto os valores próprios são $\lambda_{\pm} = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Vetores próprios correspondentes, que satisfazem $L(\mathbf{v}_{\pm}) = \lambda_{\pm}\mathbf{v}_{\pm}$, são, por exemplo,

$$\mathbf{v}_+ = (\varphi, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_- = (1, -\varphi)$$

onde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.6180339887\dots$ é a “razão” dos gregos (a “divina proporcione” de Pacioli e Leonardo da Vinci, a “razão de ouro” de Kepler, ...), a raiz positiva do polinômio $\varphi^2 - \varphi - 1$. Observem que $\lambda_+ > 1$ e $0 < \lambda_- < 1$, e portanto L estica os vetores da reta $\mathbb{R}\mathbf{v}_+$ e contrae os vetores da reta $\mathbb{R}\mathbf{v}_-$. Observem também que $\text{Det}A = \lambda_+ \lambda_- = 1$. Em particular, L preserva as áreas. A matriz A é invertível, e a sua inversa A^{-1} tem também entradas inteira, pois $\text{Det}A = 1$. Observem também que $\text{Tr}A = 3 = \lambda_+ + \lambda_-$. A matriz que representa L na base formada pelos vetores próprios \mathbf{v}_+ e \mathbf{v}_- é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = U^{-1}AU$$

onde U é matriz mudança de base, a matriz ortogonal

$$U = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \begin{pmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{pmatrix}$$

cujas colunas são as coordenadas dos vetores próprios normalizados de A na base canônica.

ex: Mostre que se A e B são semelhantes então $\text{Det}A = \text{Det}B$.

ex: As matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são semelhantes?

ex: Diagonalize as seguintes matrizes, ou mostre que não é possível.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16 Operadores hermíticos e unitários

ref: [Ap69] Vol 2, 5.1-5, 5.7-8, 5.10, 5.19 ; [La87] Ch. VII

5 mar 2020

Representação matricial de operadores em espaços euclidianos de dimensão finita.

Seja \mathbf{H} um espaço euclidiano, real ou complexo, de dimensão finita. Fixada uma base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, podemos representar, cada vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ de maneira única como combinação linear $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$, sendo as “coordenadas” de \mathbf{x} os coeficientes de Fourier $x_i = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x} \rangle$.

O produto interno entre os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} do espaço euclidiano complexo $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, é portanto um produto linha por coluna

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i \bar{x}_i y_i = \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{y}$$

do transposto conjugado do vetor coluna \mathbf{x} (que é portanto um vetor linha!) vezes o vetor coluna \mathbf{y} . Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano real, então o produto interno é simplesmente $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$.

Seja $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador linear. A imagem de cada \mathbf{e}_j , com $1 \leq j \leq n$, é uma combinação linear $T\mathbf{e}_j = \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i$ dos elementos da base, onde os coeficientes a_{ij} são os coeficientes de Fourier

$$a_{ij} := \langle \mathbf{e}_i, T\mathbf{e}_j \rangle \quad (16.1)$$

Então a matriz que representa o operador T na base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é a matriz quadrada

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

De fato, a imagem do vetor $\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{e}_j$ pelo operador T é o vetor

$$T\mathbf{x} = T \left(\sum_j x_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_j x_j T\mathbf{e}_j = \sum_j x_j \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) \mathbf{e}_i$$

Em notação matricial, $T\mathbf{x}$ é representado pelo vetor coluna

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

As colunas da matriz A são as imagens dos vetores da base canônica pela transformação T , ou seja, a i -ésima coluna de A é o vetor coluna $T\mathbf{e}_i$.

Seja agora \mathbf{y} um outro vetor de \mathbf{H} . O produto interno $\langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle$, em notação matricial, é o escalar

$$\langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle = \bar{\mathbf{y}}^\top A\mathbf{x}$$

Mas $\bar{\mathbf{y}}^\top A\mathbf{x} = \overline{(\bar{\mathbf{A}}^\top \mathbf{y})}^\top \mathbf{x}$. Portanto, podemos escrever

$$\langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle = \langle T^* \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

se o operador $T^* : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é definido, na base ortonormada escolhida, pela matriz “transposta conjugada”

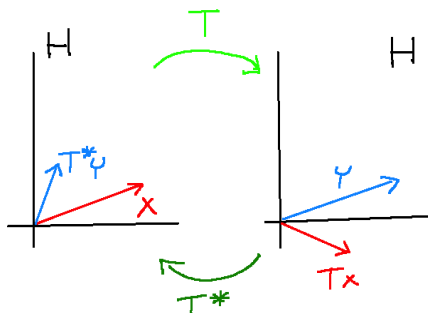
$$A^* := \overline{A}^\top$$

Se o espaço euclidiano \mathbf{H} é real, e portanto A é uma matriz real, então o operador T^* é definido pela matriz transposta A^\top .

Operador adjunto. Seja \mathbf{H} um espaço euclidiano, real ou complexo, de dimensão finita. O *adjunto* do operador linear $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ é o único operador $T^* \in \text{End}(\mathbf{H})$ (a notação dos físicos é T^\dagger) tal que

$$\langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle = \langle T^*\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$.



Se o espaço linear é real, fixada uma base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, podemos considerar que $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ munido do produto interno canônico $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i$. Se $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz que representa o operador T na base escolhida, então a *matriz transposta* $A^\top = (b_{ij})$, definida por $b_{ij} := a_{ji}$ (ou seja, as linhas de A^\top são as colunas de A e vice-versa), define o operador adjunto T^* . Se o espaço linear é complexo, fixada uma base ortonormada, podemos considerar que $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ munido do produto hermitico $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i \bar{x}_i y_i$. Se $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador T na base escolhida, então a matriz do operador adjunto T^* é a matriz *conjugada transposta* $\bar{A}^\top = (b_{ij})$, definida por $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Isto prova a existência do adjunto. A unicidade é um exercício.

Por outro lado, a existência do adjunto em espaços euclidianos de dimensão infinita é problemática.

É imediato verificar que

$$(T^*)^* = T \quad (T + S)^* = T^* + S^* \quad (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^* \quad (TS)^* = S^* T^*$$

ex: Mostre que o adjunto de um operador linear é único (lembre que o único vetor ortogonal a todos os vetores de um espaço euclidiano é o vetor nulo). Observe que esta prova não usa a dimensão finita do espaço, mas apenas a existência do adjunto.

ex: Mostre que $\ker T^* = (\text{Im} T)^\perp$ e que $(\ker T^*)^\perp = \text{Im} T$.

ex: Se T é invertível, então $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

ex: Um subespaço $V \subset \mathbf{H}$ é invariante para o operador T sse o subespaço ortogonal V^\perp é invariante para o operador adjunto T^* .

Operadores auto-adjuntos, valores médios e valores próprios. Um operador linear $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, definido num espaço euclidiano \mathbf{H} , é dito *auto-adjunto* ou *hermítico* (em inglês, *self-adjoint* ou *hermitian*) se

$$\langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = \langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (16.2)$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$, ou seja, se existe o operador adjunto T^* e se $T^* = T$ (mas observe que para definir um operador auto-adjunto não é necessário definir o adjunto de um operador!).

Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, e se $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador T numa base ortonormada, então T é auto-adjuntos sse a matriz é “hermítica”, i.e. se $\bar{A}^\top = A$, ou seja, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano real $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ é também dito *simétrico*, pois é representado, numa base ortonormada, por uma matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ que é *simétrica*, ou seja, tal que $A^\top = A$, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$.

Um operador auto-adjunto $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ define uma “forma quadrática”

$$\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$$

sobre os vetores $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$. O escalar $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$ é também chamado *valor médio* do T sobre \mathbf{x} . Se \mathbf{H} tem dimensão finita e A é matriz que representa o operador T numa base ortonormada, então o seu valor médio sobre o vetor coluna \mathbf{x} é $\bar{\mathbf{x}}^\top A \mathbf{x}$.

Se \mathbf{v} é um vetor próprio com valor próprio λ do operador T , ou seja, $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, então $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \lambda\|\mathbf{v}\|^2$, e portanto o valor próprio é dado pela expressão

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}. \quad (16.3)$$

Se T é auto-adjunto, também $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda}\|\mathbf{v}\|^2$, e portanto $\lambda = \bar{\lambda}$. Ou seja,

Teorema 16.1. *Os valores próprios de um operador auto-adjunto são reais.*

De fato, os operadores auto-adjuntos de um espaço euclidiano complexo podem ser caracterizados pela propriedade de ter valores médios, e a fortiori valores próprios, reais.

Teorema 16.2. *O único operador auto-adjunto $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano complexo que tem valores médios nulos $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ é o operador trivial $T = 0$.*

Demonstração. Se T é auto-adjunto, aplicando a identidade de polarização

$$\langle T(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle - \langle T(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = 2(\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle T\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle)$$

aos pares de vetores \mathbf{x}, \mathbf{y} e depois $\mathbf{x}, i\mathbf{y}$, obtemos $\Re \langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ e $\Im \langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$, respetivamente, e portanto $T\mathbf{x} = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$. \square

Teorema 16.3. *Um operador $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano complexo é auto-adjunto sse o valor médio $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$ é real para todos os $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.*

Demonstração. Se T é auto-adjunto, então $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \overline{\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Vice-versa, se $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ é real para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, então $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \langle T^*\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, ou seja, $\langle (T - T^*)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Sendo $i(T - T^*)$ auto-adjunto, o teorema 16.2 então implica que $T = T^*$. \square

Em geral, vetores próprios que correspondem a valores próprios distintos são linearmente independentes. No caso de operadores auto-adjuntos é possível dizer mais.

Teorema 16.4. *Vetores próprios com valores próprios distintos de um operador auto-adjunto são ortogonais.*

Demonstração. Se $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e $T\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$, com λ e μ reais e \mathbf{v} e \mathbf{w} diferentes de zero, então $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle$ implica que $(\lambda - \mu)\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. Portanto, se $\lambda \neq \mu$ então $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. \square

Operadores anti-hermíticos e normais. Se T é hermítico, e portanto tem valores médios reais, então o operador $S = iT$ tem valores médios imaginários puros. Um operador linear $S : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, definido num espaço euclidiano \mathbf{H} , é dito *hemi-hermítico* ou *anti-hermítico* (em inglês, *skew-hermitian*) se

$$\langle \mathbf{x}, S\mathbf{y} \rangle = -\langle S\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (16.4)$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$, ou seja, se $S^* = -S$. Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, e se $B = (b_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador S numa base ortonormada, então S é hemi-hermítico se $B^* = -B$, ou seja, $b_{ij} = -\overline{b_{ji}}$. Se o espaço é complexo, $S = iT$ é hemi-hermítico sse T é hermítico. Em particular, pelo teorema 16.3, os valores próprios de um operador hemi-hermítico num espaço euclidiano complexo são imaginários puros, i.e. estão no eixo imaginário $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Um operador hemi-hermítico de um espaço euclidiano real é também dito *anti-simétrico*, pois a sua matriz B numa base ortonormada satisfaz $B^T = -B$, ou seja, $b_{ij} = -b_{ji}$. Um operador anti-simétrico de um espaço euclidiano real não pode ter valores próprios diferentes de zero.

Assim como cada número complexo é uma soma de um número real e de um número imaginário puro, cada operador $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita pode ser decomposto, de maneira única, como soma

$$T = X + iY$$

de um operador hermítico X e um operador hemi-hermítico iY (ou seja, i vezes um operador hermítico Y). Basta escolher

$$X = (T + T^*)/2 \quad \text{e} \quad Y = (T - T^*)/2i.$$

Observe que $T^* = X - iY$ (uma fórmula que lembra o conjugado de um número complexo, ou seja, X e Y são moralmente a parte real e a parte imaginária do operador T).

O operador T é *normal* se comuta com o próprio adjunto, i.e. se $TT^* = T^*T$. É imediato verificar que $T = X + iY$, com X e Y auto-adjuntos, é normal sse $XY = YX$.

ex: A identidade é um operador auto-adjunto.

ex: Um operador auto-adjunto L num espaço euclidiano de dimensão um $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} é uma homotetia $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

ex: Se T é auto-adjunto, então também αT , com α real, é autoadjunto. Se T e S são auto-adjuntos, então também $\alpha T + \beta S$, com α e β reais, é auto-adjunto.

ex: Se T é auto-adjunto, então também as potências T^n , com $n = 1, 2, \dots$, são operadores auto-adjuntos. Consequentemente, se $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ é um polinómio com coeficientes reais, então o operador $p(T) := a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0$ é auto-adjunto.

ex: Se T é auto-adjunto e invertível, então o inverso T^{-1} é também auto-adjunto.

ex: Se $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é auto-adjunto e $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ é um subespaço invariante (por exemplo, o espaço próprio \mathbf{H}_λ dos vetores $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ tais que $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$), então também o complemento ortogonal \mathbf{V}^\perp é invariante.

ex: Sejam T e S dois operadores hermíticos de um espaço euclidiano \mathbf{E} . Em geral, a composição TS não é hermítico (dê exemplos). A composição TS é um operador hermítico sse T e S comutam, ou seja, se $TS = ST$.

ex: Se S é um operador anti-simétrico de um espaço vetorial real \mathbf{E} , então $\langle \mathbf{x}, S\mathbf{x} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.

ex: Dado um operador linear arbitrário $T \in \text{End}(\mathbf{E})$ num espaço euclidiano de dimensão finita \mathbf{E} , o operador T^*T é auto-adjunto. Se \mathbf{v} é um vetor próprio de T com valor próprio λ , então $\langle \mathbf{v}, T^*T\mathbf{v} \rangle = |\lambda|^2 \|\mathbf{v}\|^2$.

ex: Verifique a *identidade de polarização*

$$\langle A(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle - \langle A(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = 2(\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle A\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle) \quad (16.5)$$

válida para um operador genérico $A \in \text{End}(\mathbf{H})$.

ex: A inversão $T(x, y, z) = (-x, y, z)$ relativamente ao plano $y-z$ é simétrica? E a inversão relativamente a um plano genérico de \mathbb{R}^2 passando pela origem?

ex: [Ap69] Vol. 2 5.5.

Adjuntos e operadores auto-adjuntos em dimensão infinita. Quando o espaço euclidiano \mathbf{H} tem dimensão infinita, operadores lineares interessantes podem ser definidos apenas em subespaços próprios $\mathbf{D}(L) \subset \mathbf{H}$ (chamado “domínio” do operador), ou seja, são transformações lineares $L : \mathbf{D}(L) \rightarrow \mathbf{H}$. Quando \mathbf{H} é um espaço de Hilbert, um operador é dito *symmetric* ou *hermitian* se $\langle L\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}(L)$ (e tipicamente é pedido que o domínio seja denso em \mathbf{H}).

O termo *auto-adjunto* é reservado a operadores que estão definidos em todo o espaço de Hilbert, e que satisfazem $\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$. Acontece que tais operadores são também “limitados”, ou seja, satisfazem $\|T\mathbf{v}\| \leq K \|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ e algum número minimal $K := \|T\| < \infty$ chamado “norma” do operador T . De fato, a palavra *operator* é usualmente referida apenas a tais operadores limitados, e o termo *operador ilimitado* é usado nos outros casos.

Vice-versa, todo operador limitado $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ admite um operador adjunto T^* , definido, como no caso de dimensão finita, pela identidade $\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T^*\mathbf{y} \rangle$ (a sua existência, que não é evidente, segue do teorema de representação de Riesz). Assim, ser auto-adjunto é equivalente a $T = T^*$, como em dimensão finita.

Nevertheless, differential operators and most physically relevant operators (position, momentum, energy, ...) are not bounded! Self-adjointness for unbounded operators is a much subtler issue.

Deslocamentos. Um espaço euclidiano de dimensão finita importante é o espaço ℓ^2 das seqüências complexas (sinais discretos) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ de “energia” finita $\|\mathbf{x}\|^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, munido do produto interno

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} y_k$$

Os deslocamento esquerdo e direito são os operadores limitados

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots) \quad \text{e} \quad R(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots),$$

respetivamente. É imediato verificar que $R = L^*$.

Multiplicação e derivadas. Físicos e engenheiros que querem estudar/resolver equações diferenciais ordinárias ou parciais (como a equação das ondas, a equação do calor, a equação de Poisson/Laplace, a equação de Schrödinger, ...) devem lidar com derivadas de campos (campo gravitacional, campo elétrico-magnético, função de onda, ...), ou seja, com operadores diferenciais definidos em espaços de funções, que são espaços de dimensão infinita.

Por exemplo, podemos considerar o espaço euclidiano \mathbf{E} das funções contínuas reais ou complexas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, munido do produto interno $\langle f, g \rangle := \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$. O intervalo limitado $[a, b]$ pode ser substituído por um intervalo ilimitado como a reta real $(-\infty, \infty)$, ou com o espaço-tempo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, com algum cuidado ...

Toda função contínua $m(t)$ induz um *operador multiplicação* $M \in \text{End}(\mathbf{E})$, definido por

$$(Mf)(t) := m(t) f(t)$$

(esta fórmula lembra a ação de uma matriz diagonal, que envia o vetor de coordenadas x_k no vetor de coordenadas $m_k x_k$). É claro que $\langle f, Mg \rangle = \langle Mf, g \rangle$ para todo $f, g \in \mathbf{E}$, ou seja, M é auto-adjunto, se a função $m(t)$ tem valores reais. Num certo sentido preciso, estes são os modelos dos operadores auto-adjuntos.

Operadores diferenciais apenas podem operar em domínios mais restritos, por exemplo nos subespaços $\mathbf{E}^k \subset \mathbf{E}$ das funções que admitem $k = 1, 2, \dots$, ou ∞ derivadas contínuas. Nestes domínios, é possível definir o *operador derivada*

$$(\partial f)(t) := f'(t),$$

as suas potências ∂^k , e portanto polinómios $L = \sum_{k=0}^N a_k \partial^k$, chamados operadores diferenciais com coeficientes constantes. À procura do adjunto de ∂ , observamos que a integração por partes implica a identidade

$$\langle f, \partial g \rangle = f(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g(a)} - \langle \partial f, g \rangle$$

Ao escolher “condições de fronteira” apropriadas, por exemplo ao restringir o operador ∂ ao subespaço $\mathbf{E}_0^\infty \subset \mathbf{E}^\infty$ das funções tais que $f(a) = f(b)$, o operador ∂ é anti-simétrico, e portanto o operador *momento* $P := -i\partial$ é simétrico. Também importante é o *laplaciano* $\Delta := \partial^2$, que é simétrico se definido em \mathbf{E}_0^∞ .

ex: Seja $P : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ o *operador primitivação*, definido por

$$(Pf)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Mostre que é anti-simétrico se definido no núcleo $\ker(I)$ da forma linear $I(f) := \int_a^b f(t) dt$.

ex: Dada uma função contínua $q(t)$ e uma função derivável $p(t)$, considere, no subespaço $\mathbf{E}_p^2 \subset \mathbf{E}^2$ das funções duas vezes deriváveis que satisfazem a condição de fronteira $p(a)f(a) = p(b)f(b) = 0$, o *operador de Sturm-Liouville* $L : \mathbf{E}_p^2 \rightarrow \mathbf{E}$, definido por

$$Lf := (pf')' + qf.$$

Por exemplo, se $q = 0$ e $p = 1$, então $L = \Delta$, o laplaciano. Mostre que L é simétrico.

Observáveis e valores médios em mecânica quântica. O espaço dos estados de uma partícula quântica (não relativística) é um espaço de Hilbert $\mathbf{H} \approx \ell^2$, i.e. um espaço euclidiano complexo de dimensão infinita que é completo e que admite um subconjunto denso e numerável, e portanto uma base numerável. Os “observáveis” limitados são operadores auto-adjuntos A (o caso de observáveis não limitados, como “posição”, “momento”, “energia”, ... é mais delicado), cujos vetores próprios $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots$ formam uma base ortonormada de \mathbf{H} . Os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ (que são números reais) são os possíveis resultados das observações. Pelo teorema espectral, o operador é uma soma pesada

$$A = \sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k|$$

de projeções. O valor médio esperado, ao repetir a observação do observável A no estado unitário arbitrário $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle$ um número grande de vezes, é o valor médio

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_n \lambda_n |\psi_n|^2,$$

sendo $\|\psi\|^2 = \sum_n |\psi_n|^2 = 1$.

Operadores unitários/ortogonais. Seja \mathbf{H} um espaço euclidiano, real ou complexo. Se o operador $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ admite um adjunto U^* (por exemplo, se \mathbf{H} tem dimensão finita ou se U é limitado), então U é uma isometria, i.e.

$$\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$ sse $U^*U = I$. Um operador $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é dito *unitário* se

$$\boxed{U^*U = UU^* = I,}$$

ou seja, se é uma isometria bijetiva, e portanto $U^{-1} = U^*$. Um operador unitário de um espaço euclidiano real é também dito *ortogonal*.

Se \mathbf{H} é um espaço euclidiano de dimensão finita, então toda a isometria é unitária, pois envia uma base (finita) ortonormada numa base ortonormada, e portanto é bijetiva. De fato, os operadores unitários de um espaço euclidiano de dimensão finita podem ser caracterizados pelas seguintes condições equivalentes.

Teorema 16.5. *Seja $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador de um espaço euclidiano de dimensão finita. As seguintes condições são equivalentes, e portanto definem um operador unitário:*

- i) U preserva os produtos escalares, i.e. $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ par todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$,
- ii) U preserva as normas, i.e. $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$,
- iii) U envia vetores unitários em vetores unitários (ou seja, envia a esfera unitária na esfera unitária), i.e. se $\|\mathbf{u}\| = 1$ então também $\|U\mathbf{u}\| = 1$.

Demonstração. A equivalência entre ii) e iii) é evidente, basta dividir pela norma do vetor, se diferente do vetor nulo. A implicação i) \Rightarrow ii) é trivial, e a implicação contrária i) \Leftarrow ii) é uma consequência das identidades de polarização (12.1) ou (12.2). \square

Se o espaço é complexo, $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, então a matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ que define um operador unitário numa base ortonormada é uma “matriz unitária”, ou seja, tal que $A^*A = AA^* = I$. Se o espaço é real, $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$, então a matriz A que define um operador ortogonal numa base ortonormada é uma “matriz ortogonal”, ou seja, tal que $A^T A = AA^T = I$. Em particular, uma matriz que define um operador unitário tem determinante na circunferência unitária do plano complexo, e uma matriz que define um operador ortogonal tem determinante ± 1 (os pontos reais da circunferência unitária).

Teorema 16.6. *Os valores próprios de um operador unitário $U \in \text{End}(\mathbf{H})$ estão na circunferência unitária $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$, i.e. têm valor absoluto $|\lambda| = 1$. Em particular, um operador ortogonal só pode ter valores próprios ± 1 .*

Demonstração. Se U é unitário e $U\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, então $|\lambda|^2 \|\mathbf{v}\|^2 = \langle U\mathbf{v}, U\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2$. \square

ex: Se T e S são operadores unitários/ortogonais de um espaço euclidiano complexo/real, então também T^{-1} e TS são unitários/ortogonais.

ex: Os operadores unitários de \mathbb{C} são os (operadores multiplicação por) números complexos de módulo um, i.e. $e^{i\theta}$ com θ real. Os operadores ortogonais de \mathbb{R} são os (operadores multiplicação por) números ± 1 .

ex: Exemplo de operadores ortogonais de \mathbb{R}^2 são reflexões e rotações. Verifique que toda matriz ortogonal $O \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ com determinante $\det O = 1$ é da forma

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

para algum ângulo θ , ou seja, é uma rotação (anti-horária) de um ângulo θ . Verifique que se a matriz ortogonal A tem $\det A = -1$, então a matriz AJ tem $\det AJ = 1$, onde

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz que define a reflexão no eixo dos x . Consequentemente, toda matriz ortogonal é da forma R_θ ou $R_\theta J$, dependendo se o seu determinante é ± 1 .

ex: Mostre que $\|T\mathbf{x}\| = \|x\|$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ implica $\langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$ (aplique a primeira identidade aos vetores $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + i\mathbf{y}$).

ex: Se $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ é um subespaço invariante para o operador unitário $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, então também o subespaço ortogonal \mathbf{V}^\perp é invariante.

ex: As translações $T_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ são “isometrias” do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , no sentido em que preservam as distâncias (pois $\|T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$), mas não são transformações lineares, se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

ex: Em dimensão infinita existem isometrias $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ não sobrejetivas, e portanto não unitárias! Por exemplo, o *deslocamento à direita* $R : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, que envia

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

ex: Sejam $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ duas bases ortonormadas do espaço euclidiano de dimensão finita \mathbf{H} , e seja $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ o operador tal que $U(\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$, definido pela matriz cujas colunas são as componentes dos \mathbf{f}_k relativamente à base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Mostre que U é unitário, se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ é um espaço euclidiano complexo, ou ortogonal, se $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano real.

ex: Mostre que um operador $U \in \text{End}(\mathbf{H})$ de um espaço euclidiano de dimensão finita \mathbf{H} é unitário sse envia bases ortonormadas em bases ortonormadas.

ex: [Ap69] Vol. 2 5.11.

17 Teorema espectral

ref: [Ap69] Vol 2, 5.6, 5.11, 5.20 ; [La87] Ch. VIII

19 mar 2020

Operadores diagonalizáveis. O operador $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, definido num espaço vetorial de dimensão finita \mathbf{V} , real ou complexo, is *diagonalizável* se existir uma base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ de \mathbf{V} formada por vetores próprios de L . Isto significa que a matriz que representa o operador nesta base é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (17.1)$$

com valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tais que $L\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{e}_k$ (que em geral são números reais ou complexos). Se A é a matriz que representa o operador L na base canónica (ou em qualquer outra base), então $A = G\Lambda G^{-1}$, onde G é a matriz mudança de coordenadas, cujas colunas são os vetores próprios representados na base canónica.

Um operador “genérico” $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é diagonalizável. De fato, pelo teorema fundamental da álgebra, um polinómio mónico genérico de grau n (como o polinómio caraterístico da matriz que representa L numa base arbitrária) fatoriza como produto $(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$ de n raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, e vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes, pelo teorema 15.1.

Semi-simplicidade. A caraterização algébrica do algoritmo indutivo que permite diagonalizar operadores é a seguinte. Um operador $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ é dito *semi-simples* se todo subespaço invariante $\mathbf{E} \subset \mathbf{V}$ admite um complementar invariante, ou seja, um subespaço invariante $\mathbf{F} \subset \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{V} = \mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$.

Teorema 17.1. *Um operador $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ de um espaço vetorial complexo de dimensão finita é diagonalizável sse é semi-simples.*

Demonstração. Fixada uma base, podemos assumir que $\mathbf{V} \approx \mathbb{C}^n$. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.1, o polinómio caraterístico da matriz associada ao operador possui (pelo menos) uma raiz, e Consequentemente o operador admite um vetor próprio \mathbf{v} , logo um subespaço invariante de dimensão um $\mathbf{E} = \mathbb{C}\mathbf{v}$. Se o operador é semi-simples, então o espaço é uma soma direta $\mathbb{C}^n = \mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$, onde $\mathbf{F} \approx \mathbb{C}^{n-1}$ é um subespaço invariante de dimensão $n - 1$. A implicação \Rightarrow segue portanto por indução, sendo trivial em dimensão um. A implicação contrária \Leftarrow é óbvia, pois subespaços invariantes de operadores diagonalizáveis são gerados por vetores próprios. \square

ex: Toda transformação linear $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ entre espaços vetoriais de dimensão finita é “diagonal”, se temos a liberdade de escolher as duas bases! Ou seja, é sempre possível escolher uma base de \mathbf{V} e uma base de \mathbf{W} (não necessariamente a mesma se $\mathbf{W} = \mathbf{V}$) tais que T é representado por uma matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{kk} = 1$ ou 0 ([Ap69], Vol. 2, 2.11).

Diagonalização em espaços euclidianos. O teorema espectral, nas suas diferentes versões, aborda um problema mais específico no contexto dos espaços euclidianos. Decidir quais operadores $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano \mathbf{H} admitem uma base ortonormada de vetores próprios, e portanto, se o espaço tem dimensão finita, são representados nesta base ortonormada por uma matriz diagonal (17.1).

A resposta, em dimensão finita, é a classe dos “operadores normais”, os operadores que comutam com o próprio adjunto (isto é claramente o caso das matrizes diagonais). Esta classe contém as subclasses importantes dos operadores auto-adjuntos e dos operadores unitários, que têm valores próprios reais ou unitários, respetivamente. O caso dos operadores simétricos, que essencialmente

implica os outros, é devido a Cauchy²⁹, e foi motivado do problema de descrever as pequenas oscilações de sistemas mecânicos em torno de uma posição de equilíbrio.

Além de um argumento indutivo, que usa as propriedades geométricas dos operadores normais ou auto-adjuntos, o ingrediente principal da prova clássica do teorema espectral é a existência de pelo menos um valor próprio. Aqui é onde é preciso a análise, na forma do teorema fundamental da álgebra 7.1, ou na forma aparentemente mais simples do teorema de Weierstrass (uma função contínua definida num compacto atinge o seu máximo) juntamente com mais algum cálculo em várias variáveis.

O caso de dimensão infinita é muito mais sutil, e é importante na análise das equações diferenciais parciais e portanto na física dos campos. Este caso é tratado em manuais mais avançados de análise funcional (por exemplo, Reed e Simon, ...).

Teorema espectral para operadores auto-adjuntos. A semi-simplicidade dos operadores auto-adjuntos é consequência da seguinte observação, cuja prova é elementar.

Teorema 17.2. *Seja $A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano de dimensão finita \mathbf{H} . Um subespaço $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ é invariante sse \mathbf{V}^\perp é invariante.*

Demonstração. Se \mathbf{V} é invariante, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^\perp$, então $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ porque também $A\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, e portanto $A\mathbf{w} \in \mathbf{V}^\perp$. A implicação contrária é análoga. \square

O teorema espectral para operadores auto-adjuntos, ou simétricos no caso real, é o seguinte.

Teorema 17.3 (teorema espectral). *Seja A é um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano de dimensão finita \mathbf{H} . Existe uma base ortonormada de \mathbf{H} formada por vetores próprios de A , com valores próprios reais.*

Demonstração. Seja $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, e seja A a matriz que representa o operador numa base ortonormada. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.1, o polinómio característico $c_A(t) = \det(tI - A)$ possui (pelo menos) uma raiz λ , e portanto o operador admite um vetor próprio \mathbf{v} com valor próprio λ , que é real pelo teorema 16.3. Pelo teorema 17.2, o espaço ortogonal $\mathbf{v}^\perp \approx \mathbb{C}^{n-1}$ é um subespaço invariante de A , e a restrição de A a este subespaço é ainda um operador auto-adjunto. O teorema espectral segue por indução finita, sendo trivial num espaço de dimensão um $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}$. \square

Estrutura dos operadores auto-adjuntos. Seja A um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano de dimensão finita \mathbf{H} . Pelo teorema espectral 17.3 e pelo teorema 16.4, o espaço é uma soma direta ortogonal $\mathbf{H} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \mathbf{H}_\lambda$ de espaços próprios $\mathbf{H}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H} : A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$, com $\lambda \in \sigma(A)$, o espetro do operador (que em dimensão finita é o conjunto dos valores próprios). Se $P_\lambda : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_\lambda$ denota a projeção ortogonal de \mathbf{H} sobre o espaço próprio \mathbf{H}_λ , então o operador é uma soma direta de homotetias

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$$

Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ é uma base ortonormada composta por vetores próprios, com valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (não necessariamente distintos), então a matriz que representa o operador A nesta base é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

²⁹A.L. Cauchy, Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes, *Exercices de Mathématiques* 4 (1829), 140-160.

Em particular, se a matriz auto-adjunta $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ representa o operador auto-adjunto A numa base ortonormada arbitrária (por exemplo, a base canónica), então existe uma matriz unitária U tal que

$$A = U \Lambda U^* .$$

onde $\Lambda = U^* A U$ é uma matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ cujas entradas são os valores próprios (reais) de A , e as colunas de U são os vetores próprios normalizados \mathbf{u}_k de A representados na base ortonormal inicial. Vice-versa, toda matriz desta forma representa, numa base ortonormada, um operador auto-adjunto ou simétrico. Se o espaço euclidiano é real, então existe uma matriz ortogonal O tal que $A = O \Lambda O^T$. Isto mostra que um operador simétrico A é uma composição

$$\xrightarrow{X} \boxed{O^T} \xrightarrow{O^T X} \boxed{\Lambda} \xrightarrow{\Lambda O^T X} \boxed{O} \xrightarrow{O \Lambda O^T X = AX}$$

de uma rotação O^T , umas homotetias Λ , e uma rotação inversa O .

A projecção ortogonal sobre a reta gerada pelo k -ésimo vetor próprio (normalizado) \mathbf{u}_k é o operador $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_k$. Em termos de vetores coluna é representada pela matriz $P_k = \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*$ (sendo \mathbf{u}_k vetores coluna). A expressão $A = U \Lambda U^*$ então mostra que a matriz A é uma combinação linear

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*$$

de projecções ortogonais, pesadas com os valores próprios.

O “teorema fundamental da álgebra” (o resultado de análise que diz que um polinómio não constante tem pelo menos uma raiz no plano complexo) foi utilizado, na prova do teorema espectral, para deduzir a existência de pelo menos um valor próprio. Pode ser substituído pelo teorema de Weierstrass, que afirma que uma função contínua num compacto admite um máximo, e um pouco de cálculo vetorial elementar. Esta ideia, e portanto uma prova alternativa do teorema espectral, é utilizada na caracterização dos valores próprios mínimo e máximo de Rayleigh e Ritz.

e.g. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

define, na base canónica, um operador simétrico $L(x, y) = (y, x)$ do plano euclidiano \mathbb{R}^2 . Os valores próprios são $\lambda_{\pm} = \pm 1$, raízes do polinómio característico $c_A(z) = z^2 - 1$. Vetores próprios normalizados, satisfazendo $A \mathbf{u}_{\pm} = \pm \mathbf{u}_{\pm}$ e $\|\mathbf{u}_{\pm}\| = 1$, são $\mathbf{u}_+ = (1, 1)/\sqrt{2}$ e $\mathbf{u}_- = (-1, 1)/\sqrt{2}$, respetivamente. A mudança de coordenadas que diagonaliza A é portanto a matriz ortogonal (cujas colunas são as coordenadas de \mathbf{u}_+ e \mathbf{u}_-)

$$R_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

que representa uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/4$. A sua transposta, que é também a sua inversa, é a uma rotação horária de um ângulo $\pi/4$, ou seja, $R_{\pi/4}^T = R_{-\pi/4}$. Então a matriz A é igual ao produto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R_{\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{-\pi/4} .$$

Mas a matriz diagonal $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz de uma reflexão no eixo horizontal do plano. A diagonalização mostra portanto que o operador L é obtido ao fazer, nesta ordem, uma rotação horária de um ângulo $\pi/4$, uma reflexão no eixo horizontal, e uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/4$. Moral, o operador L , representado na base canónica pela matriz A , é uma reflexão na reta $y = x$.

ex: Seja \mathbf{v} um vetor próprio do operador auto-adjunto L . Mostre que $(\mathbb{C}\mathbf{v})^{\perp}$ é um subespaço invariante de L .

ex: Observe que um operador $L = iT$ é anti-hermítico sse T é hermítico. Enuncie o correspondente teorema espectral para operadores anti-hermíticos.

ex: Determine valores e vetores próprios e diagonalize as matrizes reais simétricas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Determine valores e vetores próprios e diagonalize as matrizes complexas hermíticas

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

ex: [Ap69] Vol. 2 5.11.

Teorema espectral para operadores normais. Seja $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ um espaço euclidiano complexo de dimensão finita. Um operador $N : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é *normal* se comuta com o próprio adjunto, ou seja, se

$$\boxed{N^* N = N N^*}$$

Operadores unitários são normais, pois satisfazem $UU^* = U^*U = I$. Operadores hermíticos e anti-hermíticos também são normais, pois o adjunto é proporcional ao próprio operador, $A^* = \pm A$. Um operador $T = X + iY$ é normal sse a sua parte hermítica $X = (T + T^*)/2$ e a sua parte anti-hermítica $iY = (T - T^*)/2$ comutam, pois $[T, T^*] = -2i[X, Y]$.

É claro que N é normal sse N^* é normal. Os operadores normais também pode ser caracterizados pela seguinte propriedade geométrica.

Teorema 17.4. Um operador N é normal sse

$$\|N\mathbf{v}\| = \|N^*\mathbf{v}\|$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$.

Demonstração. O comutador $A = [N^*, N] = N^*N - NN^*$ é um operador auto-adjunto, e a condição $\|N\mathbf{v}\| = \|N^*\mathbf{v}\|$ é equivalente a $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. O teorema é portanto consequência do teorema 16.2. \square

Ao aplicar este resultado ao operador $N - \lambda$ e ao seu adjunto $N^* - \bar{\lambda}$, concluímos que

Teorema 17.5. *Sea N um operador normal de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita \mathbf{H} . Um vetor \mathbf{v} é um vetor próprio de N com valor próprio λ sse é também um vetor próprio de N^* com valor próprio $\bar{\lambda}$.*

Um operador que admite uma base ortonormada de vetores próprios, com valores próprios arbitrários, é normal. De fato, a adjunta de uma matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal $\Lambda^* = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$, e duas matrizes diagonais comutam. A afirmação recíproca é a forma mais geral de teorema espectral (em dimensão finita).

Teorema 17.6 (teorema espectral). *Sea $N : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador normal de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita \mathbf{H} . Existe uma base ortonormada de vetores próprios de N .*

Consequentemente, um operador normal é uma soma direta $N = \oplus_k \lambda_k$ de homotetias relativamente a uma decomposição ortogonal $\mathbf{H} = \oplus_k \mathbf{H}_k$, onde os \mathbf{H}_k são os espaços próprios com valores próprios λ_k (que em geral são números complexos).

Este teorema é uma consequência do teorema espectral 17.3 (que vale para a parte hermítica X e a parte anti-hermítica iY de $N = X + iY$, que comutam) e do teorema 17.7. Uma prova alternativa e independente é a seguinte.

Demonstração. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.1, o operador N admite um valor próprio λ . Pelo teorema 17.5, o espaço próprio \mathbf{H}_λ é também um espaço próprio do operador adjunto N^* , com valor próprio $\bar{\lambda}$. O subespaço ortogonal $(\mathbf{H}_\lambda)^\perp$ é N -invariante (pois, se $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_\lambda$, então $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$ implica $\langle N\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, N^*\mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$ também), e tem dimensão estritamente inferior a dimensão de \mathbf{H} . O teorema segue por indução, sendo trivial em dimensão um. \square

ex: Determine valores e vetores próprios e diagonalize a matriz complexa normal

$$\begin{pmatrix} i & -i \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalização simultânea e comutadores. Sejam L e M são dois operadores lineares definidos num espaço linear \mathbf{V} . Se L e M comutam, e se \mathbf{V}_λ é um espaço próprio de L associado ao valor próprio λ , então \mathbf{V}_λ é invariante para M , i.e. $M(\mathbf{V}_\lambda) \subset \mathbf{V}_\lambda$. De fato, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$, então

$$L(M\mathbf{v}) = M(L\mathbf{v}) = \lambda M\mathbf{v},$$

o que significa que $M\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$.

Em particular,

Teorema 17.7. *Sejam L e M são dois operadores normais (por exemplo, auto-adjuntos), definidos num espaço euclidiano de dimensão finita \mathbf{H} . Existe uma base ortonormada de vetores próprios para os dois operadores sse L e M comutam.*

Demonstração. Seja \mathbf{H}_λ um espaço próprio de L . Se L e M comutam, a restrição de M a cada espaço próprio \mathbf{H}_λ é um operador auto-adjunto, que, pelo teorema espectral, admite uma base de vetores próprios, que são também vetores próprios de L . Mas o espaço \mathbf{H} é uma soma direta ortogonal de subespaços próprios de L . A outra implicação é trivial, pois duas matrizes diagonais comutam. \square

Consequentemente, se as matrizes hermiticas A e B comutam, existe uma matriz unitária U tal que U^*AU e U^*BU são diagonais.

Laplacian in a bounded interval. Let \mathbf{E} be the space of continuous functions $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ or \mathbb{C} , equipped with the inner product $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$. Recall that the *Laplacian* is the differential operator $\Delta = \partial^2$, namely

$$(\Delta f)(x) := f''(x).$$

Let $\mathbf{E}_0^\infty \subset \mathbf{E}$ be the space of infinitely differentiable functions $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the boundary conditions $f(0) = f(\pi) = 0$ (for example, the space of transversal displacements of a vibrating string). As an operator $\Delta : \mathbf{E}_0^\infty \rightarrow \mathbf{E}$, the Laplacian is symmetric, i.e. $\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle$ for all $f, g \in \mathbf{E}_0^\infty$. It is a simple exercise in ordinary differential equations to show that the eigenvalues of the Laplacian are $\lambda_n = -n^2$, with $n = 1, 2, 3, \dots$, and the corresponding eigenfunctions are, for example,

$$\mathbf{v}_n(x) = \sin(nx).$$

Observe that the Laplacian is not bounded! One may actually show that such eigenfunctions form a “basis” of the Hilbert space \mathbf{H} obtained from \mathbf{E} by completion.

ex: Show that the “positive definite” Laplacian $-\Delta$ is positive, namely

$$\langle -\Delta f, f \rangle > 0$$

for all non-trivial $f \in \mathbf{E}_0^\infty$. Indeed, integrating by parts and using the boundary conditions, $f(0) = f(\pi) = 0$, show that

$$\langle -\Delta f, f \rangle = \langle \nabla f, \nabla f \rangle = \|\nabla f\|^2.$$

Self-adjoint operators with no eigenvalues and Dirac delta functions. The multiplication operator $(Xf)(x) := xf(x)$ is self-adjoint and bounded on the Euclidean space \mathbf{E} as above, but has no eigenvalues. Indeed, the eigenvalue equation reads $xf(x) = \lambda f(x)$, and says that $f(x) = 0$ for all $x \neq \lambda$, and therefore that $f(x)$ is the zero vector of \mathbf{E} .

Indeed, eigenvectors of the multiplication operators are *Dirac delta functions* $\delta(x - \lambda)$, with $0 \leq \lambda \leq \pi$, defined by the paradoxical equation

$$\int_0^\pi \delta(x - \lambda) f(x) dx := f(\lambda)$$

(saying that $\delta(x - \lambda)$ is equal to zero for all $x \neq \lambda$ and so large at the single point $x = \lambda$ that its integral over the whole interval is equal to one!), and live outside the space \mathbf{E} . The theory of distributions, inspired by the intuition of Paul Dirac and developed by Laurent Schwartz (and worth a Fields medal in 1950) will give a precise mathematical meaning to this physicists' idea.

Momentum and Laplacian on the line. Let \mathbf{H} be the complex Euclidean space of square-integrable functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, equipped with the inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$.

The “momentum operator” (in quantum mechanics) $P = -i\partial$ is symmetric when defined, for example, on the subspace $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}$ of infinitely differentiable functions with compact support (since ∂ is skew-symmetric). Nevertheless, it does not have any eigenvalue. Indeed, functions satisfying $Pf = \lambda f$ are the plane waves $e^{i\lambda x}$, but no such exponential is square-integrable (indeed, they can't even satisfy boundary conditions like $f(0) = f(\pi) = 0$ if we were in a bounded interval). Thus, the candidates to be eigenvectors of the momentum operator are outside the space where the operator is naturally defined.

The “kinetic energy” $P^2 = -\Delta$, the positive-definite Laplacian, is symmetric too, and of course should share its eigenvectors with P , the plane waves $e^{i\lambda x}$, with non-negative eigenvalues $\lambda^2 \geq 0$.

The theory of “Fourier transform” (to be studied next year) will reveal in which sense the Laplacian is unitarily equivalent to a multiplication operator (the prototype of a self-adjoint operator). Functions in \mathbf{H} will be integrals

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

of “eigenfunctions” of the Laplacian, and the Laplacian $-\Delta$ (or also the derivative operator ∂ as well as any constant coefficients differential operator) will act on their “coefficients/coordinates” $\widehat{f}(\lambda)$ as a multiplication operator $\widehat{f}(\lambda) \mapsto \lambda^2 \widehat{f}(\lambda)$.

Heisenberg uncertainty principle. The multiplication operator $X : f(x) \mapsto xf(x)$ is called “position operator” in quantum mechanics. The maximal subspace of \mathbf{H} where both X and $P = -i\hbar\partial$ can be iterated as operators is the *Schwartz space* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ of infinitely differentiable functions which decay, together with all their derivatives, faster than the inverse of any polynomial. A straightforward computation show that the position operator and the momentum operator do not commute, and indeed their commutator is proportional to the identity operator

$$[X, P] = i\hbar$$

This basic fact, together with some Fourier analysis, is responsible for the famous *Heisenberg uncertainty principle*, which says that position and momentum of a quantum particle cannot be simultaneously measured with arbitrary precision. More precisely, the product of the standard deviations of the measurements of the position and the momentum cannot be made smaller than some constant times \hbar .

Transformações de Cayley. A *transformação de Cayley*

$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

é um automorfismo da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Em particular, envia o semi-plano superior $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \Im(z) > 0\}$ no disco unitário $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < 1\}$, e a “circunferência”

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \bar{\mathbb{C}}$ (a fronteira ideal $\partial\mathbb{H}$ do “plano hiperbólico”) na circunferência unitária $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$. Esta ideia admite muitas generalizações.

Por exemplo, se S é uma matriz hemi-hermítica (ou hemi-simétrica), e portanto os seus valores próprios são imaginários puros, então $I \pm S$ são invertíveis. Em uma base ortonormada em que S é diagonal, $I \pm S$ são diagonais com valores próprios correspondentes (i.e. associados aos mesmos vetores próprios) da forma $1 \pm it$ com t real, ou seja, complexos conjugados. Mas os quocientes $(1 - it)/(1 + it)$ são unitários. Consequentemente, a *transformada de Cayley*³⁰

$$U := (I - S)(I + S)^{-1}$$

é uma matriz unitária (respetivamente, ortogonal).

ex: Mostre que se U é uma matriz unitária e se $I + U$ é invertível (i.e. se U não tem valor próprio -1) então $S = (I - U)(I + U)^{-1}$ é hemi-hermítica.

ex: Mostre que se A é uma matriz auto-adjunta então $U = (A - iI)^{-1}(A + iI)$ é unitária.

Forma normal de operadores ortogonais. Operadores unitários num espaço euclidiano real de dimensão finita são representados por matrizes ortogonais, matrizes $O \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ satisfazendo $O^T = O^{-1}$. Um operador ortogonal é unitário, logo normal, mas não é necessariamente diagonalizável, pois os seus valores próprios podem não ser reais. O teorema espectral para operadores normais implica o seguinte resultado sobre a estrutura de uma matriz ortogonal.

Teorema 17.8. *Seja $U : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ um operador ortogonal de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{E} \approx \mathbb{R}^n$, representado numa base ortonormada por uma matriz ortogonal O . Então o espaço é uma soma direta $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{E}_k$ de subespaços invariantes ortogonais de dimensão 1 ou 2, em cada um dos quais U é o operador $\pm 1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ do plano de um ângulo $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.*

Existe portanto uma base ortonormada na qual U é representado pela matriz ortogonal

$$O = \begin{pmatrix} O_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & O_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & O_k \end{pmatrix}$$

onde cada bloco não nulo O_i , de dimensão um ou dois, é uma das matrizes

$$(1) \quad (-1) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Em particular, um operador unitário do espaço euclidiano tri-dimensional \mathbb{R}^3 (ou de um espaço de dimensão ímpar) admite sempre uma reta invariante, ou seja, um “eixo de rotação”.

Demonstração. A prova é por indução. A matriz real O define também um operador unitário no espaço euclidiano complexo \mathbb{C}^n (a complexificação de \mathbb{R}^n), munido do produto interno usual, pois $\bar{O}^T = O^T = O^{-1}$. O teorema espectral para operadores normais diz que \mathbb{C}^n admite uma base ortonormada de vetores próprios de O , e os seus valores próprios são unitários, i.e. satisfazem $|\lambda| = 1$.

Seja $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ um vetor próprio com valor próprio $\lambda = e^{i\theta}$, ou seja,

$$O(X + iY) = e^{i\theta}(X + iY).$$

³⁰A. Cayley, Sur quelques propriétés des déterminants gauches, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **32** (1846), 119-123.

Se o valor próprio é real, ou seja $\lambda = e^{i\theta} = \pm 1$, então ou X ou Y (pois um dos dois não é nulo) é um vetor próprio real V com valor próprio λ . A restrição de O a reta \mathbf{E}_1 gerada por V é então uma multiplicação por ± 1 , e o espaço ortogonal a esta reta é um subespaço invariante de dimensão $n - 1$.

Se o valor próprio $\lambda = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ não é real (ou seja, θ não é um múltiplo inteiro de π), então é imediato ver que também $\bar{\lambda} = X - iY$ é um valor próprio de O , com valor próprio $\bar{\lambda} = e^{-i\theta}$. Sendo $\lambda \neq \bar{\lambda}$, também é imediato ver que X e Y são linearmente independentes. Mas a parte real e a parte imaginária da equação $OZ = e^{i\theta}Z$ dizem que

$$\begin{aligned} OX &= \cos \theta X - \sin \theta Y \\ OY &= \sin \theta X + \cos \theta Y \end{aligned}$$

A restrição de O ao plano $\mathbf{E}_1 \approx \mathbb{R}^2$ gerado por X e Y é portanto uma rotação de um ângulo θ , e o espaço ortogonal a este plano é um subespaço invariante de dimensão $n - 2$.

Nos dois casos, a indução pode funcionar. □

Operadores positivos e raízes quadradas. Um operador auto-adjunto $A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ definido num espaço euclidiano, real ou complexo, de dimensão finita é dito *positivo* ou *não-negativo*, notação $A \succ 0$ ou $A \succeq 0$, respetivamente, se os seus valores médios são positivos ou não-negativos, ou seja, se

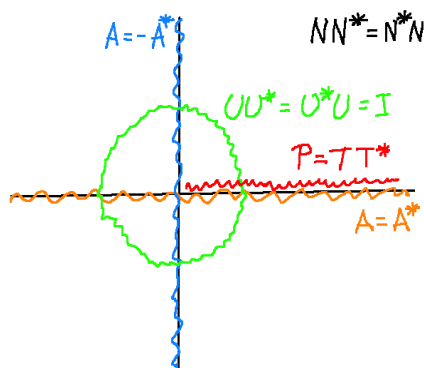
$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0 \quad \text{ou} \quad \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$$

para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ (atenção, esta definição/condição não faz sentido para operadores que não são auto-adjuntos!). Pelo teorema espectral, estas condições são equivalentes a A ter valores próprios $\lambda > 0$ ou $\lambda \geq 0$, respetivamente. É evidente que um operador positivo é invertível.

Se T é um operador arbitrário, então $P = T^*T$ é um operador auto-adjunto cujos valores médios são $\langle P\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \|T\mathbf{v}\|^2$. Portanto $P \succeq 0$, e $P \succ 0$ se T é invertível.

De fato, todo operador não-negativo P é desta forma. Numa base ortonormada em que a matriz que representa P é uma matriz diagonal $\text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ com $p_k \geq 0$, podemos definir um operador $Q := \sqrt{P}$, representado pela matriz diagonal $\text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n)$, onde $q_k = \sqrt{p_k}$. Então é claro que Q é auto-adjunto, não-negativo, comuta com P , e é uma “raiz quadrada” de P , i.e. satisfaz $Q^2 = P$. De forma análoga, é possível construir raízes quadradas positivas de operadores positivos.

Assim, a analogia entre operadores e números complexos é a seguinte. Os operadores normais são os operadores diagonalizáveis numa base ortonormada, e correspondem ao plano complexo, os possíveis valores próprios. Os operadores unitários correspondem à circunferência unitária. Os operadores hermíticos e anti-hermíticos correspondem à reta real e à reta imaginária, respetivamente. Os operadores positivos correspondem à semi-reta real positiva.



ex: Seja $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador arbitrário. Então $T^*T \succeq 0$ e Consequentemente admite uma raiz quadrada $|T| := \sqrt{T^*T}$, que é auto-adjunta. Mostre que

$$\|T\mathbf{v}\|^2 = \||T|\mathbf{v}\|^2$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$.

ex: Mostre que um operador A é (auto-adjunto e) positivo sse é da forma $A = T^*T$ com T invertível.

ex: Mostre que se A é (auto-adjunto e) positivo então A^2 e A^{-1} são também auto-adjuntos e positivos.

ex: A identidade I é uma raiz quadrada da identidade I , mas não é a única. Por exemplo, em dimensão dois, também as *matrizes de Pauli*,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são matrizes hermiticas que satisfazem $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$ (é usual também chamar σ_0 a matriz identidade I). Calcule valores e vetores próprios das matrizes de Pauli.

ex: Também existem raízes quadradas de operadores negativos. Por exemplo,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma raiz quadrada de $-I$, ou seja, $J^2 = -I$. Dê mais exemplos.

ex: Calcule uma raiz quadrada das seguintes matrizes hermiticas e não-negativas

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad \dots$$

ex: Seja $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ um operador positivo de um espaço euclidiano real \mathbf{E} . Mostre que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

é um produto interno em \mathbf{E} . Em particular, se o espaço \mathbf{E} tem dimensão finita, existe uma base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ de \mathbf{E} (ortonormada para o produto interno (\cdot, \cdot)) em que o operador A é representado pela matriz identidade I . Consequentemente, se $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, então

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Corda vibrante e harmônicas. As pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ , tensão k e densidade linear ρ são modeladas pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{17.2}$$

com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$, onde $u(x, t)$ denota o deslocamento transversal da corda na posição $x \in [0, \ell]$ e no tempo t , e $c = \sqrt{k/\rho}$.

O produto $u(x, t) = X(x)T(t)$ é uma solução “separável” de (17.2) se $XT''' = c^2X''T$, e portanto se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$X'' = \lambda X \quad \text{e} \quad T'' = \lambda c^2 T$$

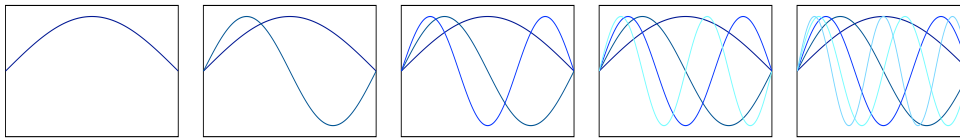
As únicas soluções não triviais da equação diferencial $X'' = \lambda X$ no intervalo $[0, \ell]$ com condições de fronteira nulas $X(0) = X(\ell) = 0$ são proporcionais a $X_n(x) = \sin(\pi nx/\ell)$ (as funções próprias do laplaciano no espaço das funções que se anulam nos pontos 0 e ℓ) e têm valores próprios $\lambda_n := -\pi^2 n^2/\ell^2$ com $n = 1, 2, 3, \dots$. Em correspondência de cada n , as soluções de $T'' = \lambda_n c^2 T$ são $T_n(t) = a_n \cos(\pi nct/\ell) + b_n \sin(\pi nct/\ell)$. As soluções separáveis do problema da corda vibrante são portanto as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(a_n \cos(2\pi\nu_n t) + b_n \sin(2\pi\nu_n t) \right) \sin(2\pi x/\ell_n) \\ &= A_n \sin(2\pi\nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x/\ell_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

onde os coeficientes a_n e b_n , ou a amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, e a fase $\tau_n = \arctan(a_n/b_n)$ são constantes arbitrárias, e as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n = \frac{c}{2\ell} n \quad \text{e} \quad \ell_n = \frac{2\ell}{n}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots,$$

respetivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = c/\ell_1$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = n\nu_1 = c/\ell_n$, com $n = 2, 3, 4, \dots$, são ditas n -ésimas *harmónicas* (ou *overtones*) da corda.



Primeiras 5 harmónicas de uma corda vibrante.

Por exemplo, se a fundamental é o A_4 de 440 Hz (é o caso da segunda corda de um violino), então a segunda harmónica é o A_5 de 880 Hz, a terceira está próxima do E_6 de 1318.5 Hz, a quarta é o A_6 de 1760 Hz, a quinta está próxima do $C\sharp_7$ de 2217.5 Hz, a sexta está próxima do E_7 de 2637 Hz, a sétima está próxima do G_7 de 3136 Hz, ... Em particular, as primeiras harmónicas contêm a “fundamental” A, a “quinta justa” E e a “terça maior” $C\sharp$, as três notas (“tríade maior”) do “acorde maior”!



Primeiras 12 harmónicas de uma corda cuja fundamental é C.

ex: A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq 7.1$ Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

Equação de Schrödinger estacionária. Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E \psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, e $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida ($h \simeq 6.262 \dots \times 10^{-34}$ J·s).

ex: Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

Matrizes densidade e entropia de von Neumann. Seja \mathbf{H} o espaço de Hilbert de um sistema quântico. Um *estado puro* é um vetor unitário $|\psi\rangle \in \mathbf{H}$, ao qual corresponde o projetor $P_\psi := |\psi\rangle \langle \psi|$ (que é um operador não-negativo com traço unitário $\text{Tr} P = 1$, e tal que $P^2 = P$). Um “ensemble estatístico” dos estados puros $|\psi_k\rangle$ (não necessariamente ortogonais nem independentes) com probabilidades p_k (i.e. números entre 0 e 1 com soma $\sum_k p_k = 1$) é descrito pela *matriz densidade*

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$$

É claro que ρ é também um operador não-negativo com traço unitário. O valor médio do observável A no *estado misto* ρ é

$$\langle A \rangle_\rho = \sum_k p_k \langle \psi_k | A | \psi_k \rangle = \text{Tr}(A\rho)$$

A *entropia de von Neumann* (que é a entropia termodinâmica) do ensemble quântico descrito pela matriz densidade ρ é

$$S(\rho) := -\text{Tr}(\rho \log \rho)$$

Pelo teorema espectral, ρ é diagonalizável, ou seja, existe uma base ortonormada $|\varphi_k\rangle$ tal que $\rho = \sum_k \lambda_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$, onde os valores próprios λ_k são também números não negativos (porque $\rho \succeq 0$) com soma $\sum_k \lambda_k = 1$ (porque $\text{Tr} \rho = 1$). Então, por definição,

$$\rho \log \rho := \sum_k (\lambda_k \log \lambda_k) |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$$

(sendo que $0 \log 0 := 0$), assim que

$$S(\rho) = -\sum_k \lambda_k \log \lambda_k$$

Determinant and zeta function. Let A be a positive self-adjoint operator, defined in some euclidean space of finite or infinite dimension, with eigenvalues $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. The logarithm of its determinant is the sum of the logarithms of its eigenvalues, since

$$\log \det A = \log(\lambda_1 \lambda_2 \dots) = \text{Tr} \log A = \log \lambda_1 + \log \lambda_2 + \dots$$

(which of course may be divergent, in infinite dimension!). Define the *zeta function* of the operator as the Dirichlet series

$$\zeta_A(s) = \text{Tr}(A^{-s}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^s}.$$

Here s is a complex variable, and it is understood that the zeta function is defined in a half-plane $\Re(s) > \sigma$ where the above sum is absolutely convergent. This is not an issue if the operator is finite-dimensional, since then $\zeta_A(s)$ is a finite sum, hence an entire function. In this case, a computation shows that

$$\left. \frac{d}{ds} \zeta_A(s) \right|_{s=0} = -\sum_n \log \lambda_n,$$

which extends to the remarkable identity

$$\log \det A = -\zeta'_A(0).$$

Physicists use this identity to “extract” a finite value out of an infinite product that would be otherwise divergent, and call this “zeta function regularization”^{31 32}.

Densidade das matrizes diagonalizáveis. Naturalmente, existem matrizes que não são diagonalizáveis. Uma matriz *diagonal superior* é uma matriz $S = (s_{ij})$ tal que $s_{ij} = 0$ se $i > j$, ou seja, da forma

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & * & \dots & * \\ 0 & s_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Observem que os s_{kk} 's são os valores próprios de S , pois o seu polinómio característico é $P_S(z) = \prod_k (z - s_{kk})$.

Teorema 17.9 (Schur). *Toda matriz quadrada complexa $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é unitariamente semelhante a uma matriz diagonal superior, i.e. existem uma matriz unitária U e uma matriz diagonal superior S tais que*

$$A = USU^*.$$

³¹S.W. Hawking, Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime, *Comm. Math. Phys.* **55**, (1977), 133-148.

³²N.M. Robles, *Zeta function Regularization*, M.Sc. thesis, Imperial College London, 2009.

Demonstração. A prova é por indução. O teorema é trivial em dimensão um. Assumimos o teorema verdadeiro em dimensão n . Seja $A \in \text{Mat}_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$. Pelo teorema fundamental da álgebra 7.1, o polinómio caraterístico de A admite uma raiz λ , e portanto A admite um vetor próprio \mathbf{v} unitário correspondente. A reta $\mathbb{C}\mathbf{v}$ é um subespaço invariante, e \mathbb{C}^{n+1} é uma soma direta ortogonal de $\mathbb{C}\mathbf{v}$ e o subespaço ortogonal \mathbf{v}^\perp , de dimensão n . Seja $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ uma base ortonormada de \mathbf{v}^\perp . A matriz que representa A na base ortonormada $\mathbf{v}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma matriz em blocos

$$\begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Pela hipótese indutiva, existem uma base ortonormada $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ de \mathbf{v}^\perp tal que a matriz que representa B nesta base é diagonal superior. Então é claro que também a matriz que representa A na base ortonormada $\mathbf{v}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ de \mathbb{C}^{n+1} é triangular superior. \square

Existem operadores/matrizes diagonalizáveis que não são normais, pois uma mudança de coordenadas diagonalizadora pode não ser unitária. Por exemplo, pelo teorema 15.1, toda matriz $n \times n$ que admite n valores próprios distintos é diagonalizável. Os valores próprios de uma matriz triangular superior são os elementos da diagonal. Perturbações pequenas $s_{kk} + \varepsilon_k$ das entradas diagonais de uma matriz triangular superior $S = U^*AU$ podem portanto produzir matrizes diagonalizáveis $A' = US'U^*$ arbitrariamente próximas de uma matriz dada A . A decomposição de Schur 17.9. implica então

Teorema 17.10. *O conjunto das matrizes complexas diagonalizáveis é denso em $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, ou seja, para toda matriz A e todo $\varepsilon > 0$ é possível encontrar uma matriz diagonalizável A' tal que $\|A - A'\| < \varepsilon$.*

Teorema de Cayley-Hamilton. Se $p \in \mathbb{C}[z]$ é um polinómio na variável z , por exemplo $p(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0$, e A é uma matriz $n \times n$, real ou complexa, então é possível definir a matriz $p(A)$ como

$$p(A) := a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

Por exemplo, é possível considerar o polinómio caraterístico $P_A(z)$ da própria matriz A , e tentar calcular $P_A(A)$.

Se $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ é uma matriz diagonal, um cálculo elementar (as potências de Λ são também diagonais, e as entradas são as potências dos valores próprios de Λ) mostra que $c_\Lambda(\Lambda) = 0$. Uma matriz diagonalizável $D = U^{-1}\Lambda U$ tem potências da forma $D^k = U^{-1}\Lambda^k U$, e Consequentemente também satisfaz $P_D(D) = U^{-1}P_\Lambda(\Lambda)U = 0$, pois $P_D = P_\Lambda$.

De acordo com o teorema ??, para cada matriz A , real ou complexa, é possível encontrar seqüências $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de matrizes complexas diagonalizáveis tais que $D_m \rightarrow A$. Por continuidade,

Teorema 17.11 (Cayley-Hamilton). *Toda matriz quadrada A satisfaz o próprio polinómio caraterístico, i.e.*

$$\boxed{P_A(A) = 0}$$

Se A é uma matriz $n \times n$ invertível, então é possível multiplicar ambo os membros da identidade $P_A(A) = 0$ por A^{-1} , e obter uma fórmula para a matriz inversa A^{-1} em função das potências $A^0, A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

ex: Por exemplo, mostre que a inversa de uma matriz invertível 2×2 é

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}A} ((\text{Tr}A)I - A).$$

18 Formas quadráticas e pequenas oscilações

ref: [Ap69] Vol 2, 5.12-18 ; [La87] Ch. VIII

26 mar 2020

Formas quadráticas reais. Uma *forma quadrática* em n variáveis reais é um polinómio homogêneo $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de grau 2 nas coordenadas de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ou seja, um polinómio $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de grau 2 tal que $Q(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Esta condição diz que são nulos os coeficientes dos termos de grau um e zero, e que portanto o polinómio é da forma

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

com a_{ij} coeficientes reais.

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ define uma forma quadrática

$$Q(X) = X^\top A X$$

onde $X = \mathbf{x}^\top$ é um vetor coluna.

Dada uma forma quadrática Q , existem muitas matrizes A tais que $Q(X) = X^\top A X$, sendo apenas fixados os elementos diagonais a_{ii} , que são os coeficientes de x_i^2 , e as somas $a_{ij} + a_{ji}$, que são os coeficientes de $x_i x_j = x_j x_i$. Em particular, substituindo A por $(A + A^\top)/2$, toda forma quadrática é definida por uma única matriz simétrica. O espaço das formas quadráticas em n variáveis reais pode portanto ser identificado com o espaço $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ das matrizes simétricas reais $n \times n$.

e.g. A forma quadrática $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ é definida pela matriz identidade I .

e.g. A forma quadrática $2x_1 x_2$ é definida pela matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Determine a matriz simétrica que define a forma quadrática $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2$.

Mudança de coordenadas e congruências. Seja $Q(X) = X^\top A X$ uma forma quadrática em \mathbb{R}^n , definida pela matriz simétrica A . A mudança de coordenadas $X \mapsto Y = U^{-1} X$, onde $X = UY$ e U é a matriz invertível cujas colunas são as coordenadas dos vetores da nova base, transforma a forma quadrática $X^\top A X$ em

$$X^\top A X = (UY)^\top A (UY) = Y^\top (U^\top A U) Y = Y^\top B Y$$

com $B := U^\top A U$. Ou seja, a matriz simétrica que representa a forma quadrática $X^\top A X$ na nova base é a matriz

$$\boxed{B = U^\top A U}$$

e portanto, se $B = (b_{ij})$, nas coordenadas y_k 's a forma quadrática é $\sum_{i,j} b_{ij} y_i y_j$.

Dois matrizes quadradas A e B assim relacionadas são ditas (*linearmente*) *congruentes*, e representam a mesma forma quadrática em sistemas de coordenadas diferentes. É imediato verificar que “ser congruentes” é uma relação de equivalência no espaço das matrizes quadradas. Outro ponto de vista é pensar que duas formas quadráticas definidas por matrizes simétricas congruentes são (*linearmente*) *equivalentes*.

ex: Mostre que se A é simétrica então também $U^\top A U$ é simétrica.

Diagonalização de Jacobi. O fato fundamental sobre formas quadráticas é a possibilidade de reduzir toda forma quadrática a uma “forma normal”, e a existência de um número finito de possíveis formas normais.

Teorema 18.1. *Uma forma quadrática em n variáveis é linearmente equivalente a uma forma*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 \quad (18.1)$$

com $0 \leq p + q \leq n$.

Isto significa que toda matriz simétrica $n \times n$ é congruente a uma matriz diagonal do género

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(que define a forma normal (18.3)), onde I_p e I_q são matrizes quadradas identidade em dimensão p e q , respectivamente.

Este teorema é elementar, pois apenas usa a possibilidade de dividir por 2 e de calcular raízes quadradas de números positivos (e, de fato, generaliza a corpos de característica diferente de 2). A prova consiste em “completar recursivamente os quadrados” até eliminar todos os produtos mixtos do género $a_{ij}x_i x_j$ com $i \neq j$, e depois renormalizar as coordenadas para reduzir todos os coeficientes a_{ii} não nulos dos termos quadráticos $a_{ii}x_i^2$ a unidades, positivas ou negativas.

O teorema espectral (um resultado mais profundo, que usa a estrutura topológica da reta real) permite enunciar e provar um resultado mais preciso utilizando a estrutura euclidiana do espaço \mathbb{R}^n . Alguns exemplos são suficientes.

e.g. Por exemplo, a forma quadrática

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + 4x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (2x_2)^2 \end{aligned}$$

é equivalente à forma quadrática $y_1^2 + y_2^2$ nas coordenadas $y_1 = x_1 - x_2$ e $y_2 = 2x_2$.

e.g. A forma quadrática

$$\begin{aligned} 4x_1x_2 &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

é equivalente à forma quadrática $y_1^2 - y_2^2$ nas coordenadas $y_1 = x_1 + x_2$ e $y_2 = x_1 - x_2$.

ex: Determine a forma normal da forma quadrática $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2$.

Formas bilineares simétricas & formas quadráticas. Uma matriz simétrica A define uma *forma bilinear simétrica*, ou seja, uma função $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que é linear em cada variável e tal que $\mathcal{B}(X, Y) = \mathcal{B}(Y, X)$, por meio de

$$\mathcal{B}(X, Y) = X^\top AY.$$

Em coordenadas, $\mathcal{B}(X, Y) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$. Ou seja, se $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ denotam os vetores da base canónica de \mathbb{R}^n , então $a_{ij} = \mathcal{B}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Uma forma bilinear simétrica é também chamada *produto escalar*, pois satisfaz os axiomas E1 e E2 de um produto interno, embora não seja necessariamente definida positiva (produtos escalares não positivos aparecem, por exemplo, no espaço-tempo da relatividade especial). A função

$$\mathcal{Q}(X) = \mathcal{B}(X, X) = X^\top AX,$$

é então uma forma quadrática. A forma quadrática Q pode ser reconstruída usando uma das duas fórmulas

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(X, Y) &= \frac{1}{2} (Q(X + Y) - Q(X) - Q(Y)) \\ &= \frac{1}{4} (Q(X + Y) - Q(X - Y)),\end{aligned}\tag{18.2}$$

cujas verificações são elementares. O espaço das formas quadráticas em n variáveis reais pode portanto ser identificado também com o espaço dos produtos escalares em \mathbb{R}^n .

e.g. O produto escalar definido pela forma quadrática $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ é o produto interno canônico $X^\top Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ de \mathbb{R}^n .

e.g. A forma quadrática $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ define um produto escalar no espaço-tempo de coordenadas $(t, x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ que não é definido positivo.

Forma normal de formas bilineares. Uma prova conceptual do teorema 18.1, ou seja, uma versão geométrica da estratégia que consiste em completar os quadrados, usa a forma bilinear \mathcal{B} associada a uma forma quadrática Q , pensada como produto escalar (não necessariamente positivo) em \mathbb{R}^n .

Dois vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são ditos *\mathcal{B} -ortogonais* se $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Um vetor \mathbf{x} é dito *\mathcal{B} -nulo* se é ortogonal a todos os vetores de \mathbb{R}^n , i.e. se $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ para todo \mathbf{y} . É claro que o conjunto dos vetores \mathcal{B} -nulos forma um subespaço \mathbf{V}_0 de \mathbb{R}^n , chamado *núcleo* de Q , onde a forma bilinear \mathcal{B} , e portanto a forma quadrática Q , são identicamente nulas.

O teorema 18.1 é equivalente ao seguinte teorema.

Teorema 18.2. *Uma forma bilinear simétrica em n variáveis é linearmente equivalente a uma forma*

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - x_{p+2} y_{p+2} - \cdots - x_{p+q} y_{p+q}\tag{18.3}$$

com $0 \leq p + q \leq n$.

Isto significa que, num sistema de coordenadas conveniente, a forma é definida por uma matriz diagonal $I_{p,q}$.

Demonstração. Se $Q(\mathbf{x}) = 0$ para todo \mathbf{x} , então, pelas (18.2), a forma \mathcal{B} é identicamente nula, e portanto é a forma bilinear associada a uma matriz $I_{0,0}$ em qualquer base. Caso contrário, existe um vetor \mathbf{v}_1 tal que $Q(\mathbf{v}_1) \neq 0$. Seja \mathbf{V}_1 o subespaço dos vetores \mathcal{B} -ortogonais a \mathbf{v}_1 . Sendo definido pela equação homogênea não trivial $\mathcal{B}(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}) = 0$, tem dimensão $n - 1$. Consideramos agora a restrição da forma quadrática a \mathbf{V}_1 . Se é identicamente nula, paramos. Caso contrário, existe um vetor $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_1$ tal que $Q(\mathbf{v}_2) \neq 0$. Os vetores de \mathbf{V}_1 que são \mathcal{B} -ortogonais a \mathbf{v}_2 formam então um subespaço de dimensão $n - 2$. É claro que esta construção pode continuar, e produz uma sequência de vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, com $m \leq n$, sobre os quais a forma quadrática não é nula e que são \mathcal{B} -ortogonais dois a dois. É então possível renormalizar os \mathbf{v}_k 's (ou seja, dividir por $|\mathcal{Q}(\mathbf{v}_k)|$) e construir vetores \mathbf{w}_k 's tais que $\mathcal{B}(\mathbf{w}_i) = \pm 1$ e $\mathcal{B}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = 0$ se $i \neq j$. Se $m = n$, temos uma base de \mathbb{R}^n . Se $m < n$, então a forma quadrática é identicamente nula no subespaço \mathbf{V}_m , que tem dimensão $n - m$. É possível então completar uma base $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ escolhendo uma base arbitrária $\mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ de \mathbf{V}_m . \square

Diagonalização de formas quadráticas em espaços euclidianos. Seja $Q(X) = X^\top A X$ uma forma quadrática no espaço euclidiano \mathbb{R}^n , definida pela matriz simétrica $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ relativamente à base canônica $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (ou outra base ortonormal), onde $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$ e X denota o vetor coluna $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$. A matriz simétrica A define um operador simétrico (que denotamos, por simplicidade, com a mesma letra) $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e a forma quadrática é dada por $Q(X) = \langle AX, X \rangle$.

Pelo teorema espectral 17.3, existe uma base ortonormada $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ de \mathbb{R}^n formada por vetores próprios de A , com valores próprios (reais) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Portanto existe uma matriz ortogonal $U = (u_{ij})$, cujas colunas são os vetores próprios (ou seja, $\mathbf{v}_j = \sum_i u_{ij} \mathbf{e}_i$), tal que

$$U^\top A U = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Nesta base, a forma quadrática é “diagonal”. De fato, se $\mathbf{x} = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + \dots + y_n \mathbf{v}_n$ e portanto o vetor coluna das novas coordenadas é $Y = U^\top X$, então

$$\mathcal{Q}(X) = X^\top A X = (UY)^\top A (UY) = Y^\top \Lambda Y$$

Este é o conteúdo da seguinte versão do teorema espectral para formas quadráticas, usualmente atribuída a Lagrange³³.

Teorema 18.3 (Lagrange). *Seja \mathcal{Q} uma forma quadrática no espaço euclidiano \mathbb{R}^n , definida na base canônica pela matriz simétrica A . Existe uma base ortonormal, e portanto umas coordenadas ortonormadas correspondentes y_k 's, tais que a forma quadrática é uma soma de quadrados*

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

com coeficientes reais $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, que são os valores próprios de A .

Uma forma normal mais simples é possível se admitimos a possibilidade de usar bases ortogonais mas não necessariamente ortonormadas. Sejam $d_k = \sqrt{|\lambda_k|}$, se $\lambda_k \neq 0$, ou $d_k = 1$ se $\lambda_k = 0$. A mudança de coordenadas $y_k \mapsto z_k = d_k y_k$, definida por $Y \mapsto Z = D^{-1}Y$ com $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ matriz diagonal com entradas positivas (que não é ortogonal se pelo menos um dos valores próprios tem módulo $|\lambda_k| \neq 1$), transforma a matriz Λ numa matriz diagonal

$$\Lambda' = D^\top \Lambda D = (UD)^\top A (UD)$$

com valores próprios nulos ou iguais a $\lambda_k/|\lambda_k| = \pm 1$. Nestas coordenadas, a forma quadrática assume portanto a forma $X^\top A X = Z^\top \Lambda' Z$, que é uma soma de quadrados com coeficientes unitários, positivos ou negativos, ou nulos. Assim, a menos de reordenar os elementos da base, a matriz A é congruente a uma matriz diagonal

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com p valores próprios iguais a 1 (a cardinalidade dos valores próprios positivos de A), q valores próprios iguais a -1 (a cardinalidade dos valores próprios negativos de A), e $n - (p + q)$ valores próprios nulos (a dimensão do núcleo de A). Em particular,

Teorema 18.4 (Gauss-Jacobi-Sylvester). *Seja \mathcal{Q} uma forma quadrática no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Existe uma base ortogonal (não necessariamente ortonormada), e portanto umas coordenadas ortogonais z_k 's, tais que a forma quadrática é*

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - \dots - z_{p+q}^2. \quad (18.4)$$

Lei de inércia de Sylvester. As dimensões p e q na forma normal (18.4), sujeitas à condição $0 \leq p + q \leq n$, têm o seguinte significado. Seja \mathcal{Q} a forma quadrática definida por $I_{p,q}$. Então o espaço é uma soma direita $\mathbb{R}^n = \mathbf{V}_+ \oplus \mathbf{V}_- \oplus \mathbf{V}_0$ de um subespaço $\mathbf{V}_+ \approx \mathbb{R}^p$ de dimensão p (gerado pelos primeiros p vetores da base canônica) onde a forma quadrática é positiva, i.e. $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) > 0$, um subespaço $\mathbf{V}_- \approx \mathbb{R}^q$ de dimensão q onde a forma quadrática é negativa, i.e. $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) < 0$, e um subespaço complementar $\mathbf{V}_0 \approx \mathbb{R}^{n-(p+q)}$ onde a forma quadrática é nula, i.e. $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = 0$.

³³J. Lagrange, Recherches sur la méthode de maximis et minimis. *Miscellanea Taurinensia* 1 (1759), 18-32

É claro que as dimensões p e q , e Consequentemente $n_0 = n - (p + q)$, são invariantes da forma quadrática, ou seja, apenas dependem da classe de congruência da matriz simétrica A que define a forma quadrática, e não do sistema de coordenadas usado, ortogonal ou não. Este é o conteúdo da *lei de inércia* de Sylvester³⁴, Jacobi³⁵, e do próprio Gauss.

Teorema 18.5 (lei de inércia de Sylvester). *Toda matriz real simétrica $n \times n$ é congruente a uma única matriz $I_{p,q}$ com $0 \leq p + q \leq n$.*

Demonstração. Seja \mathcal{Q} a forma quadrática definida pela matriz simétrica $I_{p,q}$. Então existe um subespaço $\mathbf{V}_{\leq 0} = \mathbf{V}_- \oplus \mathbf{V}_0 \approx \mathbb{R}^{n-p}$, de dimensão $n - p$, onde a forma quadrática é não-positiva, i.e. $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) \leq 0$ se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\leq 0}$. Assumimos que num outro sistema de coordenadas a forma quadrática é definida pela matriz simétrica $I_{p',q'}$, com $p' > p$, e seja $\mathbf{V}'_+ \approx \mathbb{R}^{p'}$ o subespaço gerado pelas primeiras p' coordenadas, onde a forma é positiva. Por razões dimensionais $(p' + (n - p)) > n$ existe um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\leq 0} \cap \mathbf{V}'_+$. Neste vetor, $\mathcal{Q}(\mathbf{v}) > 0$, o que é uma contradição. \square

A cardinalidade dos pares de inteiros não negativos p e q tais que $0 \leq p + q \leq n$ é portanto o número de classes de equivalências lineares das formas quadráticas em n variáveis. Este número é $(n+1)(n+2)/2$.

ex: Diagonalize as seguintes formas quadráticas no plano euclidiano

$$\begin{array}{cccccc} x^2 + 2y^2 & xy & x^2 - 2xy + y^2 & x^2 + xy + y^2 & 5x^2 - 6xy + 5y^2 & \\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy & & 2x^2 + 5y^2 - 4xy & 5x^2 + 6xy + 5y^2 & x^2 + y^2 - 2xy & \\ 5x^2 - 4xy + 2y^2 & & 2x^2 - 4xy - y^2 & 2x^2 + xy + 2y^2 & 11x^2 + 4xy + 14y^2 & \end{array}$$

ex: Diagonalize as seguintes formas quadrática no espaço euclidiano

$$2x^2 - yz \quad x^2 - 2xy + 4yz + 6xz - 3z^2$$

ex: [Ap69] Vol. 2 5.15.

Quociente de Rayleigh-Ritz Seja A um operador simétrico de um espaço euclidiano real de dimensão finita \mathbf{H} . Fixada uma base ortormada, podemos assumir que $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ e que o operador é definido pela matriz simétrica A , que define a forma quadrática $\mathcal{Q}(X) = X^\top AX$.

Sendo números reais, os seus valores próprios podem ser ordenados, por exemplo em ordem crescente

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$$

(valores próprios iguais sendo repetidos de acordo com a multiplicidade geométrica). É também conveniente denotar $\lambda_{\min}(A) := \lambda_1(A)$ e $\lambda_{\max}(A) := \lambda_n(A)$ o menor e o maior valor próprio, respetivamente.

O gradiente da forma quadrática é $\nabla \mathcal{Q}(X) = 2AX$. A esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é a superfície de nível 1 da função $f(X) = X^\top X$, cujo gradiente é $\nabla f(X) = 2X$. Os dois gradientes são proporcionais nos pontos da esfera unitária onde $AX = \lambda X$ para algum λ . Mas isto significa que λ é um valor próprio, X é um vetor próprio, e nestes pontos $\mathcal{Q}(X) = \lambda$. De acordo com a teoria dos multiplicadores de Lagrange,

Teorema 18.6. *Os vetores e os valores próprios de A são os pontos e os valores críticos da restrição da forma quadrática $\mathcal{Q}(X) = X^\top AX$ na esfera unitária \mathbf{S}^{n-1} .*

³⁴J. Sylvester, A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitution to the form of a sum of positive and negative squares. *Philosophical Magazine* **IV** (1852), 138-142.

³⁵C.G. Jacobi, Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **53** (1857), 275-280.

Uma prova alternativa, que não usa os multiplicadores de Lagrange, é a seguinte.

Demonstração. Seja $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^{n-1}$ um ponto da esfera unitária. Os “equadores” que passam por \mathbf{x} são os caminhos $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{x} + \sin(t)\mathbf{v} \in \mathbf{S}^{n-1}$, onde \mathbf{v} é um vetor unitário do hiperplano \mathbf{x}^\perp (observe que $\mathbf{x} + \mathbf{x}^\perp$ é o plano tangente à esfera unitária no ponto \mathbf{x}). Um cálculo elementar, que usa a simetria de A , mostra que a derivada da função $f(t) := \mathcal{Q}(\mathbf{r}(t))$ é $f'(t) = 2\langle \dot{\mathbf{r}}(t), A\mathbf{r}(t) \rangle$, onde $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin(t)\mathbf{x} + \cos(t)\mathbf{v}$. Em particular, no instante $t = 0$, esta derivada é $f'(0) = 2\langle \mathbf{v}, A\mathbf{x} \rangle$. Se \mathbf{x} é um extremo local da restrição de \mathcal{Q} na esfera unitária, então $f'(0)$ é igual a zero para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{x}^\perp$, e isto implica que $A\mathbf{x}$ é proporcional a \mathbf{x} . Isto significa que \mathbf{x} é um vetor próprio de A . Mas o valor da forma quadrática num vetor próprio unitário é igual ao valor próprio associado. \square

Sendo a esfera unitária compacta, o teorema de Weierstrass garante a existência de um máximo e um mínimo da restrição da forma quadrática, e de conseqüência a existência de dois valores próprios, λ_{\max} e λ_{\min} . Este raciocínio oferece uma prova alternativa do teorema espectral (sempre baseada no teorema de Weierstrass, como a prova que usa o teorema fundamental da álgebra) e também a seguinte caracterização variacional dos valores próprios mínimo e máximo.

Teorema 18.7 (Rayleigh-Ritz). *Seja A um operador simétrico de um espaço euclidiano real de dimensão finita \mathbf{H} . Para todos $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$*

$$\lambda_{\min}(A) \|\mathbf{x}\|^2 \leq \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle \leq \lambda_{\max}(A) \|\mathbf{x}\|^2.$$

Os valores próprios mínimo e máximo de A são

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad e \quad \lambda_{\max}(A) = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

O quociente de Rayleigh-Ritz^{36 37} é a função $\mathcal{R}_A : \mathbf{H} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{R}_A(\mathbf{x}) := \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

O quociente de Rayleigh-Ritz calculado num vetor próprio é o valor próprio correspondente, pois, se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ então $\mathcal{R}_A(\mathbf{v}) = \lambda$. O teorema 18.7 então diz que

$$\lambda_{\min}(A) \leq \mathcal{R}_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}(A), \quad (18.5)$$

e que o menor e o maior dos valores próprios podem ser calculados minimizando ou maximizando o quociente de Rayleigh-Ritz sobre todos os vetores não nulos.

ex: Determine máximo e mínimo das seguintes funções na circunferência unitária do plano \mathbb{R}^2 .

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2 \quad f(x, y) = x^2 + 2xy \quad f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2$$

Princípio min-max de Courant-Fischer. Os outros valores próprios também podem ser caracterizados/calculados usando um princípio variacional.

Teorema 18.8 (Courant-Fischer). *Sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ os valores próprios de um operador simétrico A de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$. Então o k -ésimo valor próprio λ_k é igual ao mínimo, sobre todos os subespaços $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k , do maior quociente de Rayleigh $\mathcal{R}_A(\mathbf{x})$ calculado nos vetores não nulos de \mathbf{V} , ou seja,*

$$\lambda_k = \min_{\mathbb{R}^k \approx \mathbf{V} \subset \mathbf{H}} \max_{0 \neq \mathbf{x} \in \mathbf{V}} \mathcal{R}_A(\mathbf{x}) \quad (18.6)$$

e também aé igual ao máximo, sobre todos os subespaços $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $n - k + 1$, do menor quociente de Rayleigh $\mathcal{R}_A(\mathbf{x})$ calculado nos vetores não nulos de \mathbf{V} , ou seja,

$$\lambda_k = \max_{\mathbb{R}^{n-k+1} \approx \mathbf{V} \subset \mathbf{H}} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{V}, \mathbf{x} \neq 0} \mathcal{R}_A(\mathbf{x}). \quad (18.7)$$

³⁶J.W. Strutt (later Lord Rayleigh), In Finding the Correction for the Open End of an Organ-Pipe, *Phil. Trans.* **161** (1870) 77.

³⁷W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. reine angew. Math.* **135** (1908).

Demonstração. De acordo com o teorema espectral 17.3 existe uma base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ de \mathbf{H} formada por vetores próprios de A , i.e. $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$. Por razões dimensionais, todo subespaço $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ de dimensão k contém pelo menos um vetor não trivial do subespaço gerado pelos $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n$'s, ou seja, um vetor do género $\mathbf{x} = x_k \mathbf{u}_k + x_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + x_n \mathbf{u}_n$ com pelo menos um coeficiente $x_i \neq 0$. É claro que o valor do quociente de Rayleigh-Ritz neste vetor é $\mathcal{R}_A(\mathbf{x}) \geq \lambda_k$. Por outro lado, este valor minimal é certamente atingido no ponto \mathbf{u}_k , que pertence ao particular subespaço de dimensão k gerado pelos primeiros k vetores próprios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$. Isto prova o princípio variacional (18.6). O princípio dual, (18.7), é obtido ao substituir A com $-A$, e ao observar que $\lambda_k(-A) = \lambda_{n-k+1}(A)$. \square

Métodos de Monte Carlo. Estes princípios variacionais são fundamento teórico dos “algoritmos de Monte Carlo” para calcular/estimar os valores próprios de um operador simétrico. É possível gerar um número grande de pontos aleatórios na esfera unitária, e assim estimar o máximo de $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, ou seja, o maior valor próprio λ_n e o vetor próprio associado \mathbf{x}_n . Depois, é possível fazer a mesma coisa na esfera unitária \mathbf{S}^{n-2} ortogonal ao vetor próprio \mathbf{x}_n , e desta forma estimar λ_{n-1} . E assim a seguir.

Desigualdades de Weyl. O quociente de Rayleigh é uma função linear do operador. Em particular, se A e B são dois operadores auto-adjuntos de um espaço euclidiano, e \mathbf{v} um vetor não nulo, então $\mathcal{R}_{A+B}(\mathbf{v}) = \mathcal{R}_A(\mathbf{v}) + \mathcal{R}_B(\mathbf{v})$. As desigualdades de Rayleigh-Ritz (18.5) implicam então que

$$\mathcal{R}_A(\mathbf{v}) + \lambda_{\min}(B) \leq \mathcal{R}_{A+B}(\mathbf{v}) \leq \mathcal{R}_A(\mathbf{v}) + \lambda_{\max}(B).$$

Consequências imediata do princípio variacional de Courant-Fischer 18.8, são as *desigualdades de Weyl* (parte de uma família maior de desigualdades) seguintes.

Teorema 18.9 (Weyl). *Se A e B são dois operadores auto-adjuntos de um espaço euclidiano de dimensão finita, então*

$$\lambda_k(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_{\max}(B).$$

Em particular, se observamos que o raio espectral do operador auto-adjunto B é o seu valor próprio de módulo máximo, ou seja, $\rho(B) = \max\{|\lambda_{\min}(B)|, |\lambda_{\max}(B)|\}$, temos também

$$|\lambda_k(A+B) - \lambda_k(A)| \leq \rho(B).$$

O operador $A+B$ pode ser pensado como sendo uma perturbação do operador A , pequena se $\rho(B)$ é pequeno. Então esta desigualdade diz que os valores próprios são estáveis por perturbações pequenas.

Formas quadráticas positivas e elipsoides. Uma forma quadrática \mathcal{Q} é *positiva* se $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) > 0$ para todo vetor $\mathbf{x} \neq 0$.

Sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ os valores próprios da matriz simétrica A que define a forma quadrática $\mathcal{Q}(X) = X^\top AX$. De acordo com o teorema 18.3, nas coordenadas relativas a um sistema ortonormal de vetores próprios, definidas por $Y = U^\top X$ com U ortogonal, a forma quadrática é uma soma

$$X^\top AX = Y^\top \Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

onde $\Lambda = U^\top AU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Mas uma combinação linear de quadrados é positiva sse todos os coeficientes são positivo. Portanto, a forma quadrática definida pela matriz simétrica A é positiva sse todos os valores próprios de A são positivos, i.e. $\lambda_k > 0$ para todos os $k = 1, 2, \dots, n$, ou seja, sse o operador simétrico definido por A é positivo.

Se \mathcal{Q} é positiva, então a desigualdade $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) \leq 1$, ou seja, $X^\top AX \leq 1$, define um conjunto limitado do espaço, dito *elipsoide*, cuja fronteira é a superfície quadrática (também chamada elipsoide) de equação cartesiana $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = 1$, ou seja, $X^\top AX = 1$. Na base ortonormada que diagonaliza A , a equação que define o elipsoide tem a forma

$$\frac{y_1^2}{p_1^2} + \dots + \frac{y_n^2}{p_n^2} \leq 1$$

onde $p_k := 1/\sqrt{\lambda_k}$. Os números positivos $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ são chamados *semi-eixos (principais)* do elipsoide, e os vetores próprios de A são chamados *direções principais* do elipsoide.

É uma consequência imediata do princípio min-max de Courant-Fischer 18.8 que os semi-eixos principais podem ser caracterizados pelos seguintes princípios variacionais.

Teorema 18.10. *Seja $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ uma forma quadrática positiva em \mathbb{R}^n , e sejam $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ os semi-eixos principais do elipsoide $E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \leq 1\}$. Então o semi-eixo p_k é o máximo, sobre todos os subespaços $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k , da menor norma $\|\mathbf{x}\|$ de um vetor $\mathbf{x} \in E \cap V$, ou seja,*

$$p_k = \max_{\mathbb{R}^k \approx V \subset \mathbb{R}^n} \min_{\mathbf{x} \in V \cap E} \|\mathbf{x}\|$$

e.g. Por exemplo, a forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$ é definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

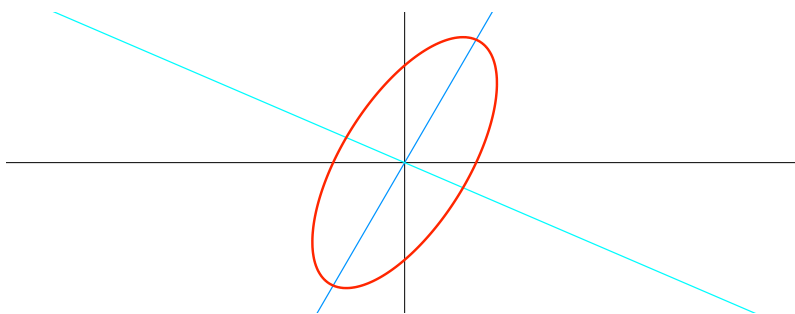
As raízes do polinómio característico $z^2 - 7z + 6$ são os valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$. Em particular, a forma quadrática é positiva. Vetores próprios normalizados, soluções dos sistemas homogêneos $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$, são $\mathbf{u}_1 = (1, 2)/\sqrt{5}$ e $\mathbf{u}_2 = (-2, 1)/\sqrt{5}$. Sejam (x', y') as coordenadas relativas a base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. A mudança de coordenadas $(x, y) \mapsto (x', y')$, é definida por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, onde U é a matriz ortogonal

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

cujas colunas são as coordenadas dos vetores \mathbf{u}_k na base canónica. Então a forma quadrática \mathcal{Q} nas coordenadas x' e y' é

$$x'^2 + 6y'^2$$

O elipsoide $\mathcal{Q}(x, y) \leq 1$ tem portanto semi-eixos $p_1 = 1$ e $p_2 = 1/\sqrt{6}$, e tem este aspeto:



ex: Mostre que uma forma quadrática em n variáveis é positiva sse existe uma base ortogonal (mas não necessariamente ortonormada) na qual a forma quadrática assume a forma

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2.$$

Em outras palavras, a forma quadrática $X^T A X$ é positiva sse existe uma matriz invertível C tal que $C^T A C = I$.

ex: Deduza que a forma bilinear $\mathcal{B}(X, Y) = X A^T Y$, associada a uma forma quadrática positiva $\mathcal{Q}(X) = X^T A X$ é um produto escalar.

Sistemas lineares e minimização de funções quadráticas. Se a é um número positivo e b um número arbitrário, então a única solução da equação linear $ax = b$ (ou seja, b/a) é também o único mínimo do polinómio quadrático $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx$. Esta observação trivial estende em dimensão superior.

Seja $Q(X) = X^T A X$ uma forma quadrática positiva, definida pela matriz simétrica positiva A . Dado um vetor coluna B , a função quadrática

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T A X - B^T X$$

atinge um (único) mínimo quando $AX = B$, ou seja, sendo A invertível, no ponto $X = A^{-1}B$. De fato, o gradiente de f é $\nabla f(X) = AX - B$, e é também claro que $|f(X)|$ é grande quando $\|X\|$ é grande, assim que o único ponto crítico deve ser um mínimo. Portanto, as soluções de um sistema linear, pelo menos quando a matriz dos coeficientes é uma matriz simétrica positiva, são soluções de um problema de minimização (assim como as equações de Euler-Lagrange!).

Teorema 18.11. *Se $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador positivo e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ um vetor arbitrário, então a solução da equação linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e o único mínimo da função quadrática $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$, e vice-versa.*

Esta observação “geométrica/analítica” motiva métodos probabilísticos ou iterativos para aproximar as soluções de equações lineares, particularmente úteis em dimensão grande, quando os métodos “algébricos” (como a eliminação de Gauss) são pouco práticos.

Quadrados mínimos e regressão linear. Sejam $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathbb{R}^m$. O problema linear

$$AX = B$$

para um vetor incógnito $X \in \mathbb{R}^n$ pode ser inconsistente, se $m > n$ ou se B não está na imagem de A . Uma *solução de quadrados mínimos* (uma ideia de Gauss) é um vetor $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ que minimiza a soma $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_m^2$ dos quadrados dos “erros” $\varepsilon_i := (\sum_j a_{ij} x_j) - b_i$, ou seja, o quadrado da distância euclidiana entre AX e B . Mas este número é

$$\|AX - B\|^2 = (AX - B)^T (AX - B) = X^T A^T A X - 2X^T A^T B + B^T B$$

Portanto, sendo o termo constante $B^T B$ irrelevante, a solução de quadrados mínimos minimiza a função quadrática

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T A' X - X^T B'$$

onde $A' = A^T A$ e $B' = A^T B$. Se as colunas de A são linearmente independentes, então é claro que a matriz $A^T A$ é invertível e positiva. Consequentemente, pelo teorema 18.11, a única solução de quadrados mínimos é

$$\boxed{\bar{X} = (A^T A)^{-1} A^T B}$$

ex: Mostre que se $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tem característica n então $A^T A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ também tem característica n , e portanto é invertível e positiva.

Integrais gaussianos. Uma forma quadrática positiva Q em n variáveis define uma *gaussiana*

$$\exp(-\frac{1}{2} Q(X)),$$

que é uma função absolutamente integrável no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . O primeiro passo no cálculo do seu integral impróprio é a fórmula mágica

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx = \sqrt{2\pi}}$$

em dimensão um. Pode ser verificada observando que o quadrado do integral da gaussiana $e^{-x^2/2}$ na reta é, pelo teorema de Fubini, igual ao integral da gaussiana $e^{-(x^2+y^2)/2}$ no plano, e o cálculo de este último integral é elementar em coordenadas polares. Os integrais impróprios das outras gaussianas em uma variável são facilmente calculados mudando variáveis: se $\lambda > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}. \quad (18.8)$$

Colocamos então o problema de calcular o integral impróprio da gaussiana generalizada (somar uma função linear à forma quadrática não estraga a integrabilidade)

$$e^{-\frac{1}{2}X^TAX+B^TX}$$

nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , onde A é uma matriz simétrica positiva $n \times n$ que define a forma quadrática, B um vetor (coluna) arbitrário de \mathbb{R}^n , e $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Pelo teorema 18.3, ou seja, pelo teorema espectral 17.3, existe uma matriz ortogonal U , e portanto uma mudança de coordenadas ortogonal $X \mapsto Y = U^T X$, que diagonaliza a forma quadrática. Se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ são os valores próprios de A , então $U^T A U$ é a matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. O determinante jacobiano é $\det(\partial y_i / \partial x_j) = \det U^T = 1$, pois a matriz é ortogonal. Então o integral fatoriza num produto de integrais gaussianas na reta

$$\begin{aligned} \iint \dots \int e^{-\frac{1}{2}X^TAX+B^TX} dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \iint \dots \int e^{-\frac{1}{2}Y^T\Lambda Y+C^TY} dy_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\int e^{-\frac{1}{2}\lambda_k y_k^2 + c_k y_k} dy_k \right) \end{aligned}$$

onde os c_k 's são as coordenadas do vetor $C = U^T B$. Estes integrais podem ser calculados completando os quadrados e usando a (18.8), o que resulta em

$$\int e^{-\frac{1}{2}\lambda_k y_k^2 + c_k y_k} dy_k = e^{\frac{1}{2}c_k^2/\lambda_k} \int e^{-\frac{1}{2}\lambda_k (y_k + c_k/\lambda_k)^2} dy_k = e^{\frac{1}{2}c_k^2/\lambda_k} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_k}}$$

Ao calcular o produto, observamos que $\prod_k \lambda_k = \det A$ e que $\sum_k c_k^2/\lambda_k = C^T \Lambda^{-1} C = B^T A^{-1} B$. Portanto, o resultado final é a fórmula

$$\boxed{\iint \dots \int e^{-\frac{1}{2}X^TAX+B^TX} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}B^T A^{-1} B}}$$

23 abr 2020

Decomposição polar e valores singulares. Todo número complexo pode ser decomposto como produto $z = \rho e^{i\theta}$ de um número real não-negativo $\rho = \sqrt{z\bar{z}}$ e uma “fase” $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, de forma única se $z \neq 0$. Esta decomposição estende aos operadores.

Seja $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador linear definido num espaço euclidiano de dimensão finita \mathbf{H} , real ou complexo. O operador T^*T é não-negativo, e pelo teorema espectral admite n valores próprios não-negativos $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ (não necessariamente distintos). Podemos definir o operador auto-adjunto não-negativo

$$|T| := \sqrt{T^*T}.$$

Os valores próprios de $|T|$ são as raízes quadradas $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$ dos valores próprios de T^*T , e são chamados *valores singulares* do operador T .

Sendo

$$\|T\mathbf{v}\|^2 = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*T\mathbf{v} \rangle = \langle \sqrt{T^*T}\mathbf{v}, \sqrt{T^*T}\mathbf{v} \rangle = \|\sqrt{T^*T}\mathbf{v}\|^2$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, temos que $\ker(T) = \ker(|T|)$. Em particular, se T é invertível, também $|T|$ é invertível, e portanto positivo. Neste caso, é imediato verificar que o operador $U := T|T|^{-1}$ é unitário, pois

$$\|U\mathbf{v}\|^2 = \langle T|T|^{-1}\mathbf{v}, T|T|^{-1}\mathbf{v} \rangle = \langle |T|^{-1}\mathbf{v}, T^*T|T|^{-1}\mathbf{v} \rangle = \langle |T|^{-1}\mathbf{v}, |T|\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Consequentemente, o operador T fatoriza como um produto $T = U|T|$ de um operador unitário e de um operador positivo (ou também, se definimos o operador unitário $V = |T|^{-1}T$, como $T = |T|V$). Se T não é invertível, o argumento é menos elementar.

Teorema 18.12 (decomposição polar). *Todo operador $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano de dimensão finita complexo/real, pode ser decomposto num produto*

$$T = U|T|$$

de um operador unitário/ortogonal U e um operador não-negativo $|T| = \sqrt{T^*T}$. Se T é invertível, então $|T|$ é positivo.

Demonstração. No caso geral, podemos definir um operador $U' : \text{Im}(|T|) \rightarrow \text{Im}(T)$ de acordo com $U'(|T|\mathbf{v}) := T\mathbf{v}$. Então para todo $\mathbf{u} = |T|\mathbf{v} \in \text{Im}(|T|)$, com $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$,

$$\|U'\mathbf{u}\|^2 = \|T\mathbf{v}\|^2 = \|\sqrt{T^*T}\mathbf{v}\|^2 = \||T|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2.$$

Logo, U' é uma isometria de $\text{Im}(|T|)$ sobre $\text{Im}(T)$ (pois estes dois espaços têm a mesma dimensão). O operador U' pode ser estendido a um operador unitário $U = U' \oplus U''$ de $\mathbf{H} = \text{Im}(|T|) \oplus \text{Im}(|T|)^\perp$ sobre $\mathbf{H} = \text{Im}(T) \oplus \text{Im}(T)^\perp$, escolhendo uma isometria arbitrária U'' de $\text{Im}(|T|)^\perp$ sobre $\text{Im}(T)^\perp$ (que existe pelo teorema 12.5, pois estes espaços têm a mesma dimensão). \square

Pelo teorema espectral 17.3, existe uma base ortonormada de vetores próprios de $|T|$, com valores próprios os valores singulares $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$. Então a matriz que representa o operador $|T|$ na base canônica é igual a $K^{-1}PK$, onde $P = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ é a matriz diagonal com valores próprios iguais aos valores singulares de T , e K é uma matriz unitária. A decomposição polar 18.12, chamando $K' = UK^{-1}$, então implica (e é equivalente) a *decomposição em valores singulares* de uma matriz quadrada arbitrária.

Teorema 18.13 (decomposição em valores singulares). *A matriz que representa um operador $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano de dimensão finita complexo/real, pode ser decomposta como produto*

$$T = K' P K$$

onde K e K' são matrizes unitárias/ortogonais e $P = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ é uma matriz diagonal não-negativa com valores próprios iguais aos valores singulares de T .

O significado é que existem duas bases ortonormadas, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ (as colunas e as linhas de K e K' , respetivamente), relativamente as quais o operador é diagonal, ou seja $T\mathbf{e}_k = \sigma_k\mathbf{f}_k$, com elementos diagonais $\sigma_k \geq 0$. Portanto, um operador arbitrário T é uma composição

$$\xrightarrow{X} \boxed{K} \xrightarrow{KX} \boxed{P} \xrightarrow{PKX} \boxed{K'} \xrightarrow{K'PKX=TX}$$

de uma rotação K , umas homotetias reais e não negativas P , e uma rotação K' .

No caso real e invertível, toda matriz $T \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertível pode ser decomposta como o produto

$$T = O |T|$$

de uma matriz simétrica e positiva $|T| = \sqrt{T^*T}$ e uma matriz ortogonal $O = A|T|^{-1}$, ou como produto

$$T = K' P K$$

de uma matriz diagonal positiva $P = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ e duas matrizes ortogonais K e K' .

Estas decomposições admitem uma interpretação, e uma demonstração, geométricas mais transparentes. Um operador linear/matriz invertível T envia a esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ num elipsoide com semi-eixos iguais aos valores singulares σ_k . De fato, se \mathbf{x} é um vetor unitário e $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$, então

$$1 = \|\mathbf{x}\|^2 = \|T^{-1}\mathbf{y}\|^2 = \langle T^{-1}\mathbf{y}, T^{-1}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, |T|^{-2}\mathbf{y} \rangle$$

é a equação cartesiana de um elipsoide centrado na origem definido pela forma quadrática associada à matriz positiva $|T|^{-2}$. Portanto, na base que diagonaliza $|T|$, a equação é

$$\frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{z_n^2}{\sigma_n^2} = 1.$$

Vice-versa, seja $E = T(\mathbf{S}^{n-1})$ o elipsoide imagem da esfera unitária pelo operador linear invertível T , e sejam $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ os eixos de E (ortogonais dois a dois e unitários). Existe uma única transformação ortogonal K' que envia a base canônica de \mathbb{R}^n nos eixos de E , i.e. $(K')^{-1}(\mathbf{f}_k) = \mathbf{e}_k$.

Existe uma única matriz diagonal positiva P^{-1} que envia o elipsoide $(K')^{-1}(E)$ na esfera unitária \mathbf{S}^{n-1} . Então a composição $K := P^{-1}(K')^{-1}T$ envia a esfera unitária na esfera unitária, ou seja é uma transformação ortogonal. Consequentemente, $T = K'PK$.

Assim, um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ou seja, uma matriz $n \times n$ (formada por n^2 números arbitrários) consiste na escolha de duas bases ortonormadas (cada base ortonormada consiste na escolha de $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$ parâmetros, portanto duas bases equivalem a $n^2 - n$ parâmetros) e n números não-negativos (os semi-eixos do elipsoide imagem da esfera unitária pela transformação).

e.g. O operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido, na base canónica do plano, pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

não é simétrico. Possui apenas o valor próprio $\sqrt{2}$ (escolhi este número para ter fórmulas razoavelmente simples à seguir) e um espaço próprio 1-dimensional, gerado pelo vetor $(1, 0)$. O operador $T^\top T$ é simétrico e positivo (pois T é invertível), e é definido pela matriz

$$T^\top T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Os seus valores próprios são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$, e a matriz ortogonal diagonalizadora é

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

assim que

$$T^\top T = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} V^\top$$

Consequentemente, os valores singulares de T são $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = 2$, e a raiz quadrada de $T^\top T$ é a matriz simétrica e positiva

$$|T| = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} V^\top = \begin{pmatrix} 5/6 & -\sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Se definimos a matriz ortogonal

$$U = T|T|^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} V^\top = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

então a representação polar de T resulta ser

$$T = U|T| = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/6 & -\sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Consequentemente, a representação em valores singulares é

$$T = K' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

sendo $K' = UV$ e $K = V^\top$.

ex: Verifique que T^*T e TT^* possuem os mesmos valores próprios.

Forma normal de um par de formas quadráticas. Sejam $\mathcal{K}(X) = X^\top KX$ e $\mathcal{P}(X) = X^\top PX$ duas formas quadráticas em \mathbb{R}^n , representadas (por exemplo, na base canônica) pelas matrizes simétricas K e P , respectivamente. Se \mathcal{K} é positiva, então a matriz simétrica K define um produto interno $\langle X, Y \rangle_{\mathcal{K}} := Y^\top KX$ em \mathbb{R}^n , e portanto existe uma base ortogonal (ortonormada para este produto interno) na qual \mathcal{K} é representada pela matriz identidade. Ou seja, existe uma matriz invertível $C = UD$, igual ao produto de uma matriz diagonal positiva D e uma matriz ortogonal U , tal que, se $X = CY$, então $C^\top KC = I$ e portanto $X^\top KX = Y^\top Y$. Nesta base, a segunda forma quadrática é representada pela matriz simétrica $P' = C^\top PC$, pois $X^\top PX = Y^\top P'Y$. Pelo teorema espectral, existe uma matriz ortogonal O que diagonaliza P' , i.e. tal que $\Lambda = O^\top P'O$ é diagonal. Observe que a primeira forma quadrática continua sendo definida pela matriz identidade, pois $O^\top IO = I$. Portanto, nas coordenadas $Z = (CO)^{-1}X$, as formas quadráticas \mathcal{K} e \mathcal{P} são $Z^\top Z$ e $Z^\top \Lambda Z$, respectivamente.

Teorema 18.14 (forma normal de um par de formas quadráticas). *Sejam \mathcal{K} e \mathcal{Q} duas formas quadráticas em \mathbb{R}^n . Se \mathcal{K} é positiva, então existe uma base ortogonal de \mathbb{R}^n em que as formas são definidas pela matriz identidade e por uma matriz diagonal, respectivamente, ou seja, existem coordenadas ortogonais z_1, \dots, z_n nas quais as formas quadráticas \mathcal{K} e \mathcal{Q} assumem a forma*

$$\mathcal{K} = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \quad e \quad \mathcal{Q} = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$$

respectivamente, onde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Os λ_k 's (que não são os valores próprios da matriz simétrica que define \mathcal{Q} !) são chamados “valores próprios” da forma \mathcal{Q} relativamente à forma positiva \mathcal{K} .

Cuidado! Este resultado não diz que as matrizes K e P são simultaneamente diagonalizáveis (caso que implica $KP = PK$), mas apenas que as formas quadráticas que definem são diagonais numa base comum! O que acontece é que são diagonais simultaneamente as matrizes $(CO)^\top K(CO)$, que de fato é a matriz identidade, e $(CO)^\top P(CO)$ (e estas fórmulas usam transpostas de CO e não inversas!).

Pequenas oscilações e frequências próprias. Numa vizinhança de um ponto de equilíbrio (um ponto onde a força, ou seja, o gradiente do potencial, é nula), que podemos assumir ser a origem do sistema de coordenadas generalizadas \mathbb{R}^n , a energia potencial de um sistema mecânico pode ser aproximada por uma forma quadrática

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top A \mathbf{q},$$

onde $A = (a_{ij}) := (\partial^2 \mathcal{U} / \partial q_i \partial q_j)(0)$ é a matriz Hessiana do potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ na origem (que é positiva se a origem é um mínimo local). Por outro lado, a energia cinética é uma forma quadrática positiva

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top K \dot{\mathbf{q}}$$

nas velocidades generalizadas, definida por uma matriz simétrica e positiva $K = (k_{ij})$. A Lagrangiana do sistema é $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$, e as equações de Euler-Lagrange 4.1 (ou seja, as equações de movimento de Newton) são, nesta aproximação,

$$\frac{d}{dt} K \dot{\mathbf{q}} = -A \mathbf{q}$$

Pelo teorema 18.14, existe uma transformação linear (não necessariamente ortogonal!) de coordenadas $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{z} = C^{-1} \mathbf{q}$, tal que $C^\top KC = I$ e $C^\top AC = \Lambda$ é uma matriz diagonal, com valores próprios $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Nas coordenadas z_k 's, a lagrangiana é $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_k \dot{z}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k z_k^2$. Se a origem for um mínimo local não degenerado do potencial, os valores próprios são positivos, i.e. $\lambda_k > 0$. Consequentemente, as equações de movimento assumem a forma

$$\ddot{\mathbf{z}} = -\Lambda \mathbf{z},$$

ou seja, ficam decompostas nas n equações independentes

$$\ddot{z}_k = -\omega_k^2 z_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

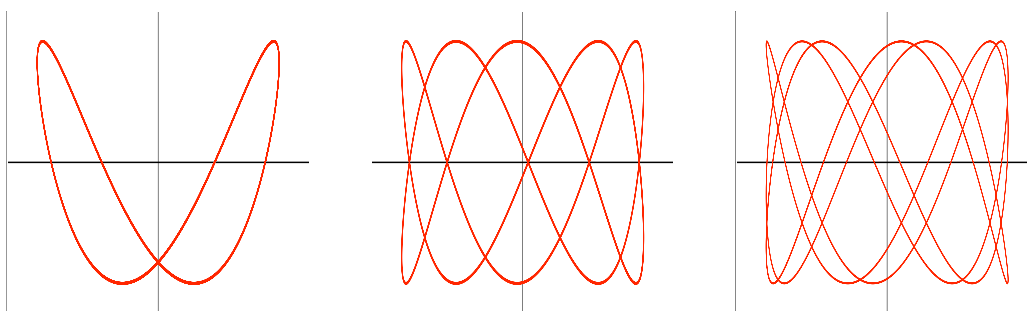
que são n osciladores harmônicos com *frequências próprias* $\omega_k := \sqrt{\lambda_k}$. Na prática, estas oscilações características podem ser obtidas assumindo que as soluções das equações de Euler-Lagrange são da forma $\mathbf{q}(t) = e^{i\omega_k t} \boldsymbol{\xi}_k$, assim que

$$(A - \omega_k^2 K) \boldsymbol{\xi}_k = 0.$$

A equação característica $\det(A - \lambda K) = 0$ determina os valores próprios $\lambda_k = \omega_k^2$. A estes valores próprios correspondem vetores dois a dois ortogonais $\boldsymbol{\xi}_k$. As soluções genéricas são combinações lineares de n oscilações

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \Re \left(\sum_k C_k e^{i\omega_k t} \boldsymbol{\xi}_k \right) \\ &= \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \boldsymbol{\xi}_k \end{aligned}$$

com certas amplitudes A_k e fases iniciais ϕ_k . Os movimentos são periódicos (e desenharam figuras de Lissajous no espaço das configurações) ou quase-periódicos, dependendo se as frequências próprias $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ são racionalmente dependentes ou não.



Algumas figuras de Lissajous.

ref: [Ar87] V.23. ou [LL78] V.23

Osciladores acoplados. O exemplo clássico é o sistema formado por dois osciladores iguais, com lagrangianas $\mathcal{L}_k = \frac{1}{2} \dot{x}_k^2 - \frac{1}{2} \omega^2 x_k^2$, sendo $k = 1$ ou 2 , acoplados com uma energia de interação $\frac{1}{2} \varepsilon (x_1 - x_2)^2$ dependente de um parâmetro positivo ε , a “força” da interação. É o caso de dois pêndulos unidos por uma mola (em repouso quando os dois pêndulos estão nas respectivas posições de equilíbrio). A lagrangiana do sistema é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} \varepsilon (x_1 - x_2)^2.$$

Neste caso, a energia cinética é a forma quadrática definida pela matriz identidade $K = I$, e a energia potencial é a forma quadrática positiva definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} \omega^2 + \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \omega^2 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

A equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$ tem raízes ω^2 e $\omega^2 + 2\varepsilon$. As frequências normais são portanto $\omega_1 = \omega$, a frequência comum dos osciladores, e $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\varepsilon}$. Vetores próprios normalizados são $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$ e $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$, respetivamente. Consequentemente, nas coordenadas normais $z_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ e $z_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$, as equações de Euler-Lagrange são dois osciladores desacoplados

$$\ddot{z}_1 = -\omega_1^2 z_1 \quad \text{e} \quad \ddot{z}_2 = -\omega_2^2 z_2.$$

As soluções com $z_2 = 0$ são oscilações sincronizadas dos dois osciladores. Quando a força de interação é fraca, ou seja, $\varepsilon \ll \omega^2$ e portanto $\omega_2 \simeq \omega + \varepsilon/\omega$ é muito próximo de ω_1 , as soluções genéricas apresentam o fenómeno dos batimentos. Como explicado em [Ar87], a energia é transferida periodicamente de um oscilador ao outro, com um período $T \simeq 2\pi\omega/\varepsilon$.

ex: Determine as frequências normais do sistema de osciladores iguais acoplados descrito pela lagrangiana ([LL78] V.23)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon x_1 x_2.$$

ex: Determine as frequências normais do sistema de osciladores acoplados descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \nu \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \beta^2 x_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon (x_1 - x_2)^2.$$

Oscilações das moléculas. [LL78] V.24

Semieixos principais e rigidez. O espaço das formas quadráticas positivas definidas num espaço euclidiano \mathbb{R}^n pode ser munido de uma ordem parcial natural: $Q' \succeq Q$ se $Q'(\mathbf{x}) \geq Q(\mathbf{x})$ para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Se $Q' \succeq Q$, é claro que o elipsoide E' definido por $Q'(\mathbf{x}) \leq 1$ está contido no elipsoide E definido por $Q(\mathbf{x}) \leq 1$. Vice-versa, se $E' \subset E$ então $Q' \succeq Q$.

Sejam $p'_1 \geq p'_2 \geq \dots \geq p'_n$ e $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ os semieixos principais dos elipsoides E' e E , respetivamente. O princípio min-max de Courant-Fischer 18.8, na forma do teorema 18.10, implica então as desigualdades

$$p'_1 \leq p_1 \quad p'_2 \leq p_2 \quad \dots \quad p'_n \leq p_n$$

entre os respetivos semieixos.

Se a energia cinética de um sistema mecânico é a forma quadrática definida pela estrutura euclidiana de \mathbb{R}^n (ou seja, se a estrutura euclidiana é definida pela forma quadrática da energia cinética), então a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{1}{2} Q(\mathbf{q})$$

descreve um sistema com energia potencial definida pela forma quadrática positiva Q . Nas coordenadas ortonormadas z_k 's que diagonalizam o operador simétrico A que define a forma quadrática, as equações de Euler-Lagrange 4.1 assumem a forma

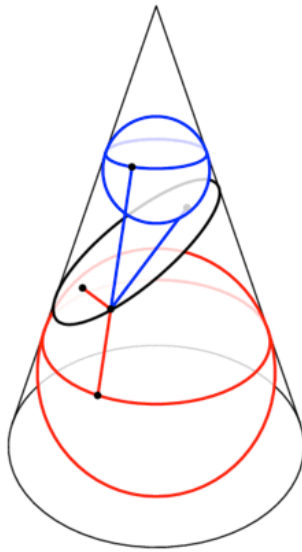
$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{z}} = -\Lambda \mathbf{z}$$

onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal dos valores próprios da matriz simétrica A . O movimento é portanto decomposto em n osciladores harmónicos $\ddot{z}_k = -\omega_k^2 z_k$ de frequências próprias $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} = 1/p_k$.

Se $Q' \succeq Q$, o sistema definido pela energia potencial Q' é dito mais *rígido* do sistema definido pela energia potencial Q . As frequências próprias então satisfazem as desigualdades $\omega'_k \geq \omega_k$. Ou seja, os períodos das oscilações do sistema decrescem com a rigidez.

Conic sections. The first, tautological, definition is the following: a *conic section* is the intersection between a (right circular) cone $C \subset \mathbb{R}^3$ and a plane $P \subset \mathbb{R}^3$ (not passing through the vertex, for otherwise we have the degenerate cases of a point, a line or two lines).

There are other definitions, much more useful in physical applications, which were already known to Apollonius of Perga and Pappus of Alexandria. The modern route to the understanding of them passes through the construction of the *Dandelin spheres*. These are spheres tangent to both the cone C and the plane P , inside the cone itself. There are two of them, say S_{\pm} , in the case of an ellipse (one on each side of the plane) or an hyperbola (one in each branch of the hyperbola), and only one for a parabola (say, the one with “+”). The points where the Dandelin spheres touch the plane P , say $F_{\pm} := S_{\pm} \cap P$, are called *foci* of the conic section. It is clear that when the plane P is orthogonal to the axis of the cone, the two foci coincide and the conic section is a circle. Each Dandelin sphere touches the cone at a circle C_{\pm} , belonging to a certain plane P_{\pm} (perpendicular to the axis of the cone, hence horizontal in the picture), and the intersection of each of those planes with P determines a line $D_{\pm} := P_{\pm} \cap P$, called *directrix* of the conic section.



Dandelin spheres of an ellipse.

Second definition: *focal properties*. Consider a moving point \mathbf{r} in the Euclidean plane $P \approx \mathbb{R}^2$. Let $f_{\pm} := d(\mathbf{r}, F_{\pm})$ denote the distances between \mathbf{r} and the foci F_{\pm} , and let $\delta_{\pm} := d(\mathbf{r}, D_{\pm})$ denote the distances between \mathbf{r} and the directrices D_{\pm} . Then, the moving point \mathbf{r} describes

- an *ellipse* iff $f_+ + f_- = \text{constant}$;
- an *hyperbola* iff $|f_+ - f_-| = \text{constant}$;
- a *parabola* iff $f_+ = \delta_+$.

Third definition: *eccentricity*. The three conditions above may be merged into one single condition relating the distances between the moving point and one focus or one directrix, respectively. A moving point \mathbf{r} in the plane describes a conic section if the ratio $e := f_+/\delta_+$ is constant, i.e.

$$f_+ = e \delta_+. \quad (18.9)$$

The constant ratio e is called *eccentricity* of the conic section. One has an ellipse if $e < 1$, an hyperbola if $e > 1$, and a parabola if $e = 1$.

Polar equation. Consider the Euclidean plane \mathbb{R}^2 , with coordinates x - y . Modulo a translation, we may assume that one of the foci is at the origin, say $F_+ = (0, 0)$. Modulo a rotation, we may also assume that the directrix is a vertical line $D_+ = \{x = d\}$, for some $d = d(F_+, D_+) > 0$. Then, if the moving point has polar representation $\mathbf{r} = re^{i\theta} = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, the defining equation (18.9) reads

$$r = e |r \cos(\theta) - d|.$$

Solving for r , we get

$$r = \frac{ed}{e \cos(\theta) \pm 1}$$

If $e \leq 1$, the only solution is the one with the $+$ sign, and the curve is an ellipse ($e < 1$) or a parabola ($e = 1$). If $e > 1$, the curve is a hyperbola, with the two solutions corresponding to its two branches. It is this form of the conics which appears when solving Kepler's problem.

Cartesian equations. Good looking Cartesian equations are those which are symmetric w.r. to the origin, i.e. such that \mathbf{r} and $-\mathbf{r}$ both belong to the curve. The canonical form of an ellipse or a hyperbola is then

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

The foci are $F_{\pm} = (\pm ae, 0)$, while the directrices are the vertical lines $D_{\pm} = \{x = \pm a/e\}$. If $e < 1$, hence it is an ellipse, we may write

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (18.10)$$

where $a > 0$ and $b = a\sqrt{1-e^2} \leq a$ are the semi-axis, and $F_{\pm} = (\pm c, 0)$, with $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, are the foci. The case $e = 0$, hence $a = b$ and $c = 0$, is a circle centered at the origin (an ellipse seen from a large distance). If $e < 1$, hence it is a hyperbola, we may write

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (18.11)$$

with $a > 0$ and $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. The foci are $F_{\pm} = (\pm c, 0)$ with $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. The canonical form of a parabola, with focus at $F = (h, 0)$ and directrix $D = \{x = -d\}$ is

$$\boxed{y^2 = 4dx} \quad (18.12)$$

ex: Use the Dandelin spheres to prove that the tautological definition of the conic sections implies their focal properties.

ex: Check that the canonical Cartesian equations (18.10), (18.11) and (18.12) of the conic sections satisfy the focal properties as well as (18.9).

ex: Compute the area of the region bounded by the ellipse of (18.10).

Equações de grau 2 no plano e cónicas. Uma equação de grau 2

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad (18.13)$$

no plano de coordenadas x e y , onde a, b, \dots, γ são coeficientes reais, define uma *cónica*. Uma mudança de coordenadas oportuna pode reduzir a equação (18.13) a uma “forma canónica”.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

a matriz simétrica que define a forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Pelo teorema espectral 17.3, esta pode ser diagonalizada por uma mudança ortogonal de coordenadas. Ou seja, existe uma matriz ortogonal C , que pode ser uma rotação $R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ou uma reflexão $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vezes uma rotação R_{θ} , tal que nas novas variáveis x' e y' , definidas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

a equação (18.13) é transformada em

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \alpha'x' + \beta'y' + \gamma' = 0,$$

onde λ_1 e λ_2 são os valores próprios de A . Observe que o produto dos valores próprios é igual ao determinante da matriz simétrica, i.e.

$$\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 = \det A.$$

Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, ou seja, de $\det A \neq 0$, então é possível completar os quadrados, ou seja, fazer umas translações do género $x'' = x' - \xi$ e $y'' = y' - \eta$, deduzir

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 = \delta,$$

Esta é a equação de uma *elipse* se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ e δ tem o sinal correto (oposto), de uma *hipérbole* se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ e $\delta \neq 0$, ou de alguma cónica degenerada como um ponto (como $x^2 + y^2 = 0$), duas retas (como $x^2 - y^2 = 0$) ou o conjunto vazio (como $x^2 + y^2 = -1$). Se um dos valores próprios é igual a zero, por exemplo $\lambda_1 = 0$, então temos uma *parábola*

$$\lambda_2(y'')^2 = \delta x'',$$

ou uma reta se também $\delta = 0$. Se os dois valores próprios são nulos, então temos apenas uma equação de grau um do género $\alpha'x' + \beta'y' + \gamma' = 0$, ou seja, uma reta afim.

Se sabemos a priori que a cónica definida pela (18.13) não é degenerada, então o género é determinado pelo sinal do determinante $d := \det A = ac - b^2 = \lambda_1 \lambda_2$ da matriz que define a forma quadrática: é uma elipse se $d > 0$, uma hipérbole se $d < 0$, e uma parábola se $d = 0$.

e.g. Colocamos o problema de identificar a cónica definida pela equação cartesiana

$$2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0.$$

A forma quadrática $2x^2 - 4xy - y^2$ é definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} U^\top,$$

com valores próprios 3 e -2 , onde a matriz ortogonal diagonalizadora é

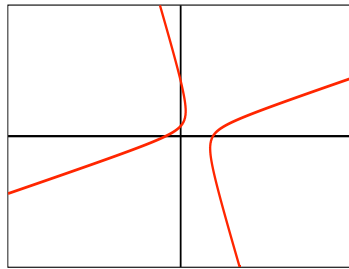
$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nas variáveis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^\top \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix}.$$

a equação define a hipérbole

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{6} = 1$$



ex: Identifique e esboce as cónicas definidas pelas equações

$$\begin{array}{lll} x^2 + xy + 2x = 0 & 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 2 = 0 & 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 1 = 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 10\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0 & x^2 + y^2 - 2xy - 3x - y - 1 = 0 & \\ 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6 = 0 & 2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0 & \\ 2x^2 - 6xy + 2y^2 - 8x + 12y - 10 = 0 & 2x^2 + xy + 2y^2 - 4 = 0 & \end{array}$$

ex: [Ap69], vol. 2, 5.15.

Quadrics. *Quadrics* are surfaces defined, in the Euclidean space \mathbb{R}^3 , by a degree 2 Cartesian equation like

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

A similar procedure, diagonalization of the quadratic form $Q(x, y, z)$ (the degree 2 part of the polynomial above) and then a translation (completing squares), shows that any non-degenerate quadric (not reduced to the empty set, a point, lines or planes, conics times lines, ...) is equivalent, modulo an isometry, to one of the following models:

an *ellipsoid*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

an *hyperbolic hyperboloid*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

and *elliptic hyperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

an *elliptic paraboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

an *hyperbolic paraboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

(above, of course, all the parameters a, b, c are positive numbers).

ex: You may play with [surfer](#) to visualize quadrics, or create new amazing surfaces.

Motion in a central force and Kepler problem. Consider the Newton equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (18.14)$$

describing the motion of a particle/planet of mass $m > 0$ in a central force field $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$. Above, we use the traditional notation $r := \|\mathbf{r}\|$ for the length of the vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. If $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ denotes the velocity vector, then a computation shows that the angular momentum $\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ is a constant of the motion. If at some (initial) time the vectors \mathbf{r} and \mathbf{v} are not parallel, then $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ and the motion occurs in the plane orthogonal to \mathbf{L} . We may therefore choose a reference Cartesian system $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ in which $\mathbf{L} = L \mathbf{k}$ for some $L > 0$, and write the position vector as $\mathbf{r}(t) = \rho \cos(\theta) \mathbf{i} + \rho \sin(\theta) \mathbf{j}$ for some time-dependent angle θ and length $\rho = \|\mathbf{r}\|$. In polar coordinates Newton equation (18.14) reads

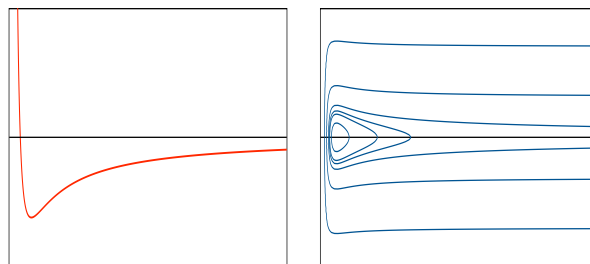
$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 &= F(\rho)/m \\ \rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (18.15)$$

The second equation (18.15) says that the “areal velocity” (“velocidade areal”) $\ell := \rho^2 \dot{\theta}$ is a constant of the motion, and this is *Kepler’s second law* (which therefore holds for all central forces). We specialize now to Newton’s gravitational force $F(\rho) = -\frac{GmM}{\rho^2}$, where M is the mass of the Sun and G is the gravitational constant. It may be observed that the first equation (18.15) then reads

$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} V_\ell(\rho),$$

where we defined the “effective potential energy” as

$$V_\ell(\rho) := \frac{1}{2}m\ell^2/\rho^2 - GmM/\rho.$$



Kepler’s effective potential and some energy level sets.

The conserved energy is therefore

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2/\rho^2 - GmM/\rho.$$

Now we set $\rho = 1/x$ and look for a differential equation for x as a function of θ . Computation shows that $dx/d\theta = -\dot{\rho}/\ell$, and, using conservation of ℓ , that $d^2x/d\theta^2 = -\rho^2\ddot{\rho}/\ell^2$. There follows that the first Newton equation (18.15) reads

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{GM}{\ell^2}.$$

This is an harmonic oscillator with unit frequency forced by a constant force, and its general solution is

$$x(\theta) = \frac{GM}{\ell^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

for some constants e and θ_0 . Back to the original radial variable we get the solution

$$\rho(\theta) = \frac{\ell^2/GM}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)},$$

Hence, orbits are conic sections with eccentricity e and focus at the origin. We get an ellipse for $0 \leq e < 1$, corresponding to negative energy, hence to planets, and this is *Kepler's first law*. We get a parabola for $e = 1$, corresponding to zero energy, or an hyperbola for $e > 1$, corresponding to positive energy.

Hodograph and Hamilton's theorem. ^{38 39}

Kepler & Hooke. ^{40 41}

³⁸W.R. Hamilton, The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction, *Proc. Roy. Irish Acad.* **3** (1846), 344-353.

³⁹J. Milnor, On the geometry of the Kepler problem, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 353-365.

⁴⁰V.I. Arnold, *Huyghens & Barrow, Newton & Hooke*, Birkhäuser, 1990.

⁴¹T. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Math.* **42** (1920), 99-144.

19 Simetrias, grupos e grupos de matrizes

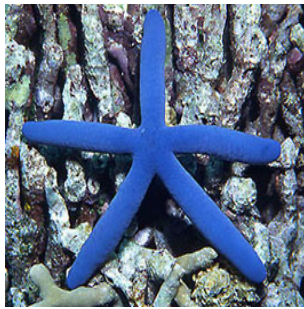
ref: [Ap69] Vol 2, 5.11, 5.20

24 abr 2020

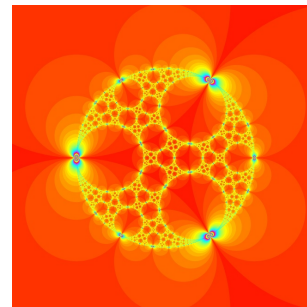
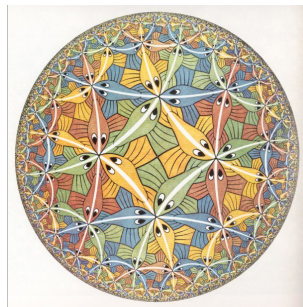
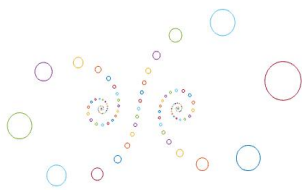
Simetrias e grupos de transformações. As “simetrias” são, grosso modo, movimentos do espaço ambiente (seja o que for) que deixam invariada uma figura ou um padrão no qual estamos interessados. A estrutura matemática que captura esta ideia é a noção de “grupo” (descoberta/inventada por Lagrange, Abel, Ruffini, Galois, ... no início do século XIX para compreender a fatorização dos polinômios, e enraizada na geometria moderna graças às intuições de Klein, Hilbert, Poincaré, ...).

A ideia básica e concreta de um grupo é simples. Uma família de “transformações”, de algum espaço ou conjunto, que podem ser “compostas” (ou seja, podem agir uma após outra) para produzir mais transformações, e que podem ser “desfeitas”. A transformação que desfaz uma transformação dada é chamada (transformação) “inversa”. Em particular, uma transformação e a sua inversa podem ser compostas para formar a (transformação) “identidade”, a transformação que não faz nada.

ex: Descreva as simetrias das seguintes figuras.



ex: Tente descrever as simetrias destas outras figuras (sem ficar triste se não conseguir!).



Simetrias em física. As simetrias também têm um papel fundamental na nossa descrição e compreensão da Natureza.

Na mecânica clássica, são responsáveis pelas leis de conservação, de acordo com o famoso teorema de Noether⁴². Por exemplo, a invariância da lagrangiana por translações temporais implica a conservação da energia, a invariância por translações espaciais implica a conservação do momento linear, a invariância por rotações implica a conservação do momento angular, ...

Grupos de isometrias do espaço euclidiano de dimensão 3 também descrevem as simetrias dos cristais (e são por isto chamados “grupos cristalográficos”), dos flocos de neve, ou de outras estruturas biológicas ou químicas.

Ainda mais fundamental é o papel das simetrias de “gauge” na teoria quântica de campos, desde a eletrodinâmica quântica às teoria não-abelianas de Yang e Mills. Por exemplo, no Modelo Padrão aparece o grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, os fatores sendo responsáveis pelas três interações fundamentais, forte, fraca e eletromagnética.

⁴²E. Noether, Invariant Variationsprobleme, *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse.* (1918), 235-257.

Grupos. Um *grupo* é um conjunto G munido de uma operação binária/lei de composição interna $G \times G \rightarrow G$, que associa a cada par ordenado $(a, b) \in G \times G$ um elemento $a \cdot b \in G$ (ou simplesmente ab), que verifica os seguintes axiomas:

G1 (*propriedade associativa*) $(ab)c = a(bc)$, para todos $a, b, c \in G$.

G2 (*existência do elemento neutro*) existe um elemento $e \in G$, chamado “elemento neutro”, tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.

G3 (*existência do inverso*) para todo $g \in G$ existe um elemento $g^{-1} \in G$, chamado “inverso de g ”, tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Se a lei de composição satisfaz também o axioma

G4 (*comutatividade*) $ab = ba$, para todos $a, b \in G$,

então o grupo é dito *comutativo*, ou *abeliano* (em homenagem a Abel). Em um grupo abeliano costuma ser usada a notação “aditiva” $a + b$ para a composição de a e b , assim, $-g$ denota o inverso de g , e 0 denota o elemento neutro.

A propriedade associativa diz essencialmente que as parêntesis são desnecessárias. Assim que, por exemplo, o elemento $(a(bc))d$, obtido pela série de operações $c \mapsto bc \mapsto a(bc) \mapsto (a(bc))d$, pode ser simplesmente denotado por $abcd$.

Em um grupo (abeliano ou não), as equações (na incógnita x , dados $a, b \in G$)

$$ax = b \quad \text{e} \quad ya = b$$

admitem sempre soluções únicas, dadas por $x = a^{-1}b$ e $y = ba^{-1}$, respetivamente (que são iguais se o grupo é abeliano). Em particular, o elemento neutro é único, assim como o inverso de cada $g \in G$.

Dado um elemento g de um grupo, é possível definir as suas potências g^n , com $n \in \mathbb{Z}$. basta definir $g^0 = e$ e $g^{n+1} := g \cdot g^n$ se $n \geq 0$, e as potências negativas por $g^{-n} := (g^{-1})^n$. É imediato verificar que vale a lei dos expoentes $g^n g^m = g^{n+m}$.

Na prática, os elementos de um grupo podem ser “parametrizados” por um conjunto de “parâmetros” $\alpha \in \mathcal{A}$, que podem ser números, ângulos, ..., assim que um grupo concreto aparece como um conjunto $G = \{g_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$, e regras para calcular os produtos $g_\alpha g_\beta = g_\gamma$.

Em particular, pode acontecer que um grupo seja *finito*, ou seja, formado por um número finito de elementos, $G = \{g_0 = e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$. Neste caso, o número $|G| := n$ dos seus elementos é chamado *ordem* do grupo (finito) G . A lei de composição de um grupo finito pode ser apresentada na forma de uma “tabuada de multiplicar”, uma matriz quadrada $n \times n$ onde no elemento da i -ésima linha e da j -ésima coluna aparece o produto $g_i g_j$.

e.g. Os conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} , munidos da lei “adição” $a, b \mapsto a + b$, são grupos abelianos.

e.g. Todo espaço vetorial \mathbf{V} é um grupo abeliano, se munido da lei “adição” $\mathbf{v}, \mathbf{w} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

e.g. Os conjuntos $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, munidos da lei “multiplicação” $a, b \mapsto a \cdot b$, são grupos abelianos.

ex: Determine a tabuada de multiplicar do mais simples dos grupos não triviais, um grupo formado por apenas dois elementos, a identidade e e um outro elemento $g \neq e$.

ex: Mostre que na tabuada de multiplicar de um grupo finito cada coluna ou cada linha contém cada elemento do grupo exatamente uma vez.

e.g. As rotações do plano \mathbb{R}^2 formam um grupo comutativo. De fato, a composição de duas rotações anti-horárias R_θ e R_ϕ é uma rotação $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$.

ex: As rotações do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 também formam um grupo. Mostre com um exemplo, abstrato ou físico, que o grupo das rotações em dimensão 3 não é comutativo.

Permutações. Seja X um conjunto não vazio. As *permutações* de X são as transformações invertíveis $f : X \rightarrow X$. O conjunto $\text{Per}(X)$ das permutações, munido da lei de composição $fg := f \circ g$, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, é um grupo (a associatividade do produto num grupo é a propriedade natural da composição entre transformações). A identidade de $\text{Per}(X)$ é a transformação identidade, definida por $e(x) = x$ para todo $x \in X$. O elemento inverso de f é a transformação inversa $f^{-1} : X \rightarrow X$, tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Grupo simétrico. Por exemplo, se $X_n \approx \{1, 2, \dots, n\}$ é um conjunto finito formado por n elementos, então $S_n := \text{Per}(X_n)$ é um grupo finito chamado *grupo simétrico*. É claro que o grupo simétrico S_n é formado por $n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$ elementos (n possibilidades para escolher a imagem de 1, $n-1$ possibilidades para escolher a imagem de 2, \dots).

ex: Calcule a tabuada de multiplicar do grupo S_2 .

ex: Mostre que o grupo S_3 não é comutativo.

Grupo diedral. O grupo das simetrias de um polígono regular de $n \geq 3$ lados é chamado *grupo diedral* (em inglês, *dihedral*), e denotado por D_n . Contém as n rotações de ângulos $2\pi k/n$, com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ (ou seja, a rotação r de um ângulo $2\pi/n$ e as suas potências $r^2, r^3, \dots, r^n = e$), e n reflexões nos eixos de simetria do polígono (as n medianas, quando n é ímpar, ou as $n/2$ diagonais e as $n/2$ retas que unem os pontos médios dos lados opostos, quando n é par). Consequentemente, D_n é um grupo finito de ordem $2n$.

ex: Verifique que a composição de duas reflexões é uma rotação, possivelmente trivial (pois as reflexões são “involuções”, i.e. o quadrado de uma reflexão g é $g^2 = e$).

ex: Verifique que o grupo diedral não é comutativo.

Grupo afim. Translações $z \mapsto z+a$ e homotetias $z \mapsto \lambda z$ geram o *grupo afim* do plano complexo, o grupo $\text{Aff}(\mathbb{C})$ das transformações

$$z \mapsto g_{\lambda,a}(z) := \lambda z + a,$$

com $a \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

ex: Calcule o inverso de $g_{\lambda,a}$, e a composição $g_{\lambda,a} g_{\mu,b}$.

ex: Verifique que o grupo afim não é comutativo.

Grupo linear geral. O grupo $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ dos *automorfismos* do espaço linear \mathbb{C}^n é o conjunto das aplicações lineares invertíveis $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, munido da lei de composição $L, M \mapsto L \circ M$. O elemento neutro é a aplicação identidade. Fixada uma base de \mathbb{C}^n (por exemplo, a base canónica), uma transformação linear invertível é definida por $Z \mapsto AZ$, onde A é uma matriz $n \times n$ invertível e $Z \in \mathbb{C}^n$ é um vetor coluna. A composição das transformações $Z \mapsto BZ$ e depois $Z \mapsto AZ$ é a transformação $Z \mapsto ABZ$, e corresponde portanto ao produto “linhas por colunas” entre as matrizes A e B .

$\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ pode portanto ser identificado (tecnicamente é “isomorfo”, no sentido explicado a seguir) ao conjunto $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ das matrizes $n \times n$ invertíveis A , munido do produto “linhas por colunas”

$$A, B \mapsto AB,$$

chamado *grupo linear geral complexo* em dimensão n . A condição que decide se uma matriz quadrada A é invertível é $\det A \neq 0$, portanto

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \text{ t.q. } \det A \neq 0\}.$$

Todo grupo formado por matrizes $n \times n$ é um “subgrupo” de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, no sentido, também explicado a seguir, que é um subconjunto que é ele próprio um grupo. Um exemplo é o *grupo linear geral real* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ das matrizes invertíveis reais $n \times n$.

Homomorfismos e isomorfismos. Um *homomorfismo* do grupo G no grupo H é uma transformação $\Phi : G \rightarrow H$ que “envia produtos em produtos”, ou seja, tal que

$$\Phi(g)\Phi(g') = \Phi(gg')$$

para todos os $g, g' \in G$. É evidente que a imagem da identidade é a identidade, i.e. $\Phi(e) = e$. Um homomorfismo invertível é chamado *isomorfismo*. A existência de um isomorfismo entre dois grupos, G e H , é uma relação de equivalência, denotada por $G \approx H$. Grupos isomorfos são indistinguíveis do ponto de vista da estrutura de grupo.

e.g. A função exponencial $x \mapsto e^x$ define um isomorfismo $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ entre o grupo aditivo \mathbb{R} e o grupo multiplicativo \mathbb{R}_+^\times dos reais positivos, e um homomorfismo $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ do grupo aditivo \mathbb{C} no grupo multiplicativo \mathbb{C}^\times .

Endomorfismos e automorfismos. Um homomorfismo de um grupo G no próprio grupo G é chamado *endomorfismo*. Um endomorfismo invertível é chamado *automorfismo*. É claro que a composição de dois automorfismos é também um automorfismo, assim que o conjunto $\text{Aut}(G)$ dos automorfismos de um grupo G , munido da lei “composição”, forma um grupo, chamado *grupo dos automorfismos* de G .

Um elemento a de um grupo G define dois automorfismos $L_a : G \rightarrow G$ e $R_a : G \rightarrow G$ (multiplicação à esquerda e à direita), definidos por

$$L_a(g) := ag \quad \text{e} \quad R_a(g) = ga,$$

respetivamente. As multiplicações à esquerda e à direita comutam, e a composição $\Psi_g := L_a R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} L_a$, que envia

$$g \mapsto aga^{-1}$$

é um automorfismo, chamado *conjugação* (observe que é a mesma fórmula que define matrizes semelhantes, ou seja, a mudança de coordenadas para uma matriz que representa um operador linear!).

ex: Verifique que um endomorfismo $\Psi : G \rightarrow G$ é um automorfismo sse $\Psi^{-1}(\{e\}) = \{e\}$, ou também sse $\Psi(G) = G$.

Subgrupos e quocientes. Um *subgrupo* do grupo G é um subconjunto $H \subset G$ que forma um grupo com respeito à lei de composição de G . Para que o subconjunto H seja um subgrupo é suficiente que $ab \in H$ e $a^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$. Subgrupos triviais são o próprio G e o subgrupo minimal $\{e\}$.

O *núcleo* do homomorfismo $\Phi : G \rightarrow H$ é $\Phi^{-1}\{e\}$, o conjunto dos $g \in G$ tais que $\Phi(g)$ é a identidade em H . É imediato verificar que o núcleo de Ψ é um subgrupo de G .

Seja $H \subset G$ um subgrupo do grupo G . A *coclasse à esquerda* e à *direita* (em inglês, *left or right coset*) de um elemento $g \in G$ são os subconjuntos

$$gH := \{gh, \text{ com } h \in H\} \quad \text{e} \quad Hg := \{hg, \text{ com } h \in H\},$$

respetivamente. Pertencer a mesma coclasse (esquerda ou direita) é uma relação de equivalência, ou seja, particiona o grupo em classes de equivalência. Consequentemente, é possível definir os espaços *quociente* G/H ou $H \backslash G$ das classes de equivalência esquerdas ou direitas, respetivamente. Em geral, os espaços quociente não possuem uma estrutura natural de grupo. Isto acontece, ou seja, é possível definir um produto

$$(aH) \cdot (bH) := (ab)H$$

em G/H e verificar que este produto faz de G/H um grupo, quando H é um subgrupo *normal*, ou seja, quando $gH = Hg$ para todo $g \in G$. O mesmo acontece para o espaço quociente $H \backslash G$. É claro que todo subgrupo de um grupo abeliano é normal.

O *centro* do grupo G é o conjunto $Z(G)$ dos elementos $h \in G$ que comutam, i.e. satisfazem $gh = hg$, com todos os elementos $g \in G$. É imediato verificar que $Z(G)$ é um subgrupo normal de G . É claro também que um grupo é abeliano sse é igual ao próprio centro.

ex: Mostre que o subconjunto $H \subset G$ é um subgrupo de G se $ab^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$.

ex: Seja G um grupo, $a \in G$, e L_a o automorfismo $g \mapsto ag$. Sendo L_a uma permutação de G , todo grupo G pode ser considerado um subgrupo de um grupo de permutações, por exemplo de $\text{Per}(G)$. Em particular, se G é um grupo finito composto de $|G| = n$ elementos, então $a \mapsto L_a$ define um homomorfismo injetivo de G no grupo simétrico $S_n \approx \text{Per}(G)$ (teorema de Cayley-Jordan).

ex: Seja H um subgrupo finito do grupo G . Mostre que cada classe gH de G/H contém exatamente $|H|$ elementos (ou seja, existe uma bijeção de H sobre cada classe gH). Deduza que se G é também finito, então $|H|$ divide $|G|$ (teorema de Lagrange). A cardinalidade de G/H , ou seja, o número de coclasses gH e G , é chamada *índice* de H em G , e denotada por $[G : H]$. O teorema de Lagrange assume então a forma “tautológica”

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

Se H é um subgrupo normal do grupo finito G , então $[G : H] = |G/H|$.

ex: Mostre que um subgrupo $H \subset G$ é normal sse $h \in H$ implica $ghg^{-1} \in H$ para todo $g \in G$

ex: Mostre que $\mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) : \det A > 0\}$ é um subgrupo de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

Toros. \mathbb{Z} é um subgrupo do grupo aditivo \mathbb{R} . Em geral, \mathbb{Z}^n é um subgrupo do grupo aditivo \mathbb{R}^n , formado pelos vetores de coordenadas inteiras. O quociente $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é chamado *toro* de dimensão n . Cada ponto do toro admite um (único) representante no “domínio fundamental” $[0, 1]^n$. Por exemplo, o toro \mathbb{T}^1 é obtido do segmento $[0, 1]$ ao identificar os pontos 0 e 1, ou seja, é uma circunferência. O toro \mathbb{T}^2 é obtido do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ ao identificar os lados opostos da forma natural. É portanto a superfície de um “doughnut”.

Circunferência. A circunferência unitária $\mathbf{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$ é um subgrupo do grupo multiplicativo \mathbb{C}^\times . A aplicação “exponencial” $\exp : x \mapsto e^{2\pi i x}$ é um homomorfismo do grupo aditivo \mathbb{R} sobre o grupo \mathbf{S} . O núcleo é o subgrupo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx \mathbf{S}$.

Aritmética modular. Seja $n \in \mathbb{N}$. Os múltiplos inteiros de n formam um subgrupo $n\mathbb{Z}$ do grupo aditivo \mathbb{Z} , e o quociente $Z_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um grupo finito de ordem n . Os elementos são as classes $[k] = k + n\mathbb{Z}$ com $k = 0, 1, \dots, n-1$, e o elemento neutro é a classe $[0]$. A lei “adição” é $(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z}$.

Esta é, por exemplo, a aritmética que utilizam os relógios, que medem o tempo módulo 12 horas.

Raízes da unidade. Seja $G_n := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z^n = 1\} \subset \mathbf{S} \subset \mathbb{C}^\times$ o grupo multiplicativo das raízes n -ésimas da unidade. A aplicação “exponencial” $\exp : k + n\mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i k/n}$ realiza um isomorfismo de $Z_n \approx G_n$.

ex: A multiplicação em \mathbb{Z} também passa ao quociente, e portanto define uma lei de composição interna em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Se p um número primo, então o conjunto $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ dos elementos não nulos (i.e. diferentes da classe $0 + p\mathbb{Z}$) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é um grupo abeliano multiplicativo se munido da lei “multiplicação” $(a + p\mathbb{Z}) \cdot (b + p\mathbb{Z}) = (a \cdot b) + p\mathbb{Z}$.

ex: Mostre que, se $n \geq 3$, o grupo cíclico Z_n é um subgrupo do grupo diedral (gerado pela rotação de um ângulo $2\pi/n$), que é um subgrupo do grupo simétrico, i.e.

$$Z_n \subset D_n \subset S_n.$$

Produtos. Dados dois grupos, H_1 e H_2 , é possível construir um *grupo produto* $G = H_1 \times H_2$ considerando pares ordenados (h_1, h_2) , com $h_1 \in H_1$ e $h_2 \in H_2$, e definindo o produto da maneira natural

$$(h_1, h_2) \cdot (h'_1, h'_2) := (h_1 h'_1, h_2 h'_2)$$

A identidade é o produto das identidades. $H'_1 = H_1 \times \{e\}$ e $H'_2 = \{e\} \times H_2$ são subgrupos normais isomorfos a H_1 e H_2 , respectivamente, e é claro que os grupos quocientes são $G/H'_1 \approx H_2$ e $G/H'_2 \approx H_1$.

Iterando esta a construção, é possível definir produtos finitos $\prod_{k=1}^n G_k$ de grupos.

ex: Mostre que o produto $Z_2 \times Z_3$ é isomorfo a Z_6 .

Grupo linear especial. O determinante de uma matriz quadrada, a aplicação $A \mapsto \det A$, é um homomorfismo

$$\det : \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

do grupo linear geral complexo sobre o grupo multiplicativo dos números complexos diferentes de zero (pois o determinante de um produto é igual ao produto dos determinantes). O seu núcleo, o conjunto

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \det A = 1\}$$

das matrizes com determinante igual a um, é portanto um subgrupo do grupo linear, chamado *grupo linear especial*.

Da mesma forma, o grupo *linear especial real*

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ t.q. } \det A = 1\}$$

é o subgrupo do grupo linear real formado pelas matrizes com $\det A = 1$. O determinante de uma matriz quadrada real A é igual ao quociente

$$\det A = \pm \frac{\text{Vol}(A(\square))}{\text{Vol}(\square)}$$

entre o volumes do hipercubo $\square := [0, 1]^n$ e o volume da sua imagem $A(\square)$ pela transformação linear definida por A , com sinal positivo ou negativo dependendo se A preserva ou inverte a orientação. Consequentemente, $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ representa o grupo dos automorfismos de \mathbb{R}^n que preservam o volume e também a orientação.

Isometrias. Seja X um espaço munido de uma *métrica*, ou seja, uma função “distância” $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz os axiomas:

M1 (*simetria*) $d(x, y) = d(y, x)$;

M2 (*positividade*) $d(x, x) = 0$, e $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

M3 (*desigualdade do triângulo*) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Uma permutação $f : X \rightarrow X$ é dita *isometria* se preserva as distâncias, i.e. se

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

para todos os $x, y \in X$. É imediato verificar que a identidade é uma isometria, a inversa de uma isometria é uma isometria, e a composição de duas isometrias é ainda uma isometria. Consequentemente, o espaço $\text{Isom}(X)$ das isometrias de X é um subgrupo do grupo $\text{Per}(X)$ das permutações de X .

Translações. O espaço vetorial \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) é um grupo abeliano relativamente à operação “soma”, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. O elemento neutro é a origem $\mathbf{0}$. Os seus elementos podem ser pensados como “translações” do próprio espaço \mathbb{R}^n . De fato, cada vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ define uma transformação invertível $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a},$$

com inversa $(T_{\mathbf{a}})^{-1} = T_{-\mathbf{a}}$. A composição é $T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$. O elemento neutro $\mathbf{0}$ define a translação trivial $\mathbf{x} \mapsto T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. O grupo $\mathbf{T}(n)$ das translações de \mathbb{R}^n representa as mudanças da origem do referencial. Se \mathbb{R}^n é munido da distância euclidiana $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, então o grupo das translações é um subgrupo do grupo das isometrias de \mathbb{R}^n .

Grupo ortogonal e rotações. O grupo das isometrias lineares do espaço euclidiano \mathbb{R}^n é o subgrupo dos automorfismos de \mathbb{R}^n que preservam o produto escalar canónico. Fixada a base canónica (ou outra base ortonormada), a transformação linear $X \mapsto AX$, onde $X \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, é uma isometria sse $A^{\top}A = AA^{\top} = I$ (ou seja, se A é invertível e a sua inversa é $A^{-1} = A^{\top}$). Portanto, o grupo das isometrias lineares de \mathbb{R}^n é isomorfo ao grupo ortogonal

$$\mathbf{O}(n) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ t.q. } A^{\top}A = AA^{\top} = I\}.$$

O grupo especial ortogonal é o subgrupo $\mathbf{SO}(n)$ formado pelas matrizes ortogonais com $\det A = 1$. É chamado grupo das rotações, ou grupo das isometrias lineares “diretas” de \mathbb{R}^n (ou seja, isometrias lineares que preservam a orientação).

ex: Mostre que o determinante de uma matriz $A \in \mathbf{O}(n)$ é $\det A = \pm 1$.

ex: Mostre que uma matriz $A \in \mathbf{SO}(2)$ é

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, e portanto define uma rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

ex: Se $B \in \mathbf{O}(2)$ tem determinante $\det B = -1$, então $A = BJ \in \mathbf{SO}(2)$ se $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Deduza que

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

ex: Diga se as seguintes matrizes são ortogonais.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: O conjunto das matrizes $A \in \mathbf{O}(n)$ com $\det A = -1$ é um subgrupo de $\mathbf{O}(n)$?

Isometrias euclidianas. O grupo das isometrias do espaço euclidiano real \mathbb{R}^n é também chamado $\mathbf{E}(n) = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Toda a isometria do espaço euclidiano \mathbb{R}^n é do género

$$\mathbf{x} \mapsto O\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $O \in \mathbf{O}(n)$, ou seja, é a composição de uma “isometria linear” (uma isometria que preserva a origem) e uma translação.

É claro que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria e se $f(\mathbf{0}) = \mathbf{a}$, então a transformação $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}$ é também uma isometria e fixa a origem, i.e. $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. A afirmação acima é portanto consequência do seguinte

Teorema 19.1. *Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação que preserva as distâncias euclidianas entre os pontos de \mathbb{R}^n e que envia a origem na origem, i.e. $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Então g é uma transformação linear que preserva os produtos escalares, logo definida por $\mathbf{x} \mapsto O\mathbf{x}$ com $O \in \mathbf{O}(n)$.*

Demonstração. Se g preserva as distâncias e fixa a origem, então também preserva as distâncias da origem, ou seja, as normas (pois $\|g(\mathbf{x})\|^2 = d(g(\mathbf{x}), \mathbf{0})^2 = d(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{0}))^2 = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^2 = \|\mathbf{x}\|^2$). Pelas identidades de polarização (12.2), g também preserva os produtos escalares, i.e. $\langle g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada, por exemplo a base canônica. Então também os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$, definidos por $\mathbf{f}_k = g(\mathbf{e}_k)$, formam uma base ortonormada, pois g preserva os produtos escalares. Se $\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$ é um vetor arbitrário, então

$$g(\mathbf{x}) = \sum_k \langle g(\mathbf{x}), \mathbf{f}_k \rangle \mathbf{f}_k = \sum_k \langle g(\mathbf{x}), g(\mathbf{e}_k) \rangle \mathbf{f}_k = \sum_k \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{f}_k$$

também porque g preserva os produtos escalares. Consequentemente, se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_k \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{f}_k \quad \text{e} \quad g(\lambda \mathbf{x}) = \sum_k \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{f}_k$$

A bilinearidade do produto escalar implica então a linearidade de g . □

Uma isometria $\mathbf{x} \mapsto O\mathbf{x} + \mathbf{a}$ é chamada *direita* se preserva a orientação, i.e. se $\det O = 1$ e portanto O é uma rotação. Observem que translações e isometrias lineares não comutam. Em geral, a composição de $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = O\mathbf{x} + \mathbf{a}$ e depois $\mathbf{y} \mapsto R\mathbf{y} + \mathbf{b}$, com $O, R \in \mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, é

$$\mathbf{x} \mapsto RO\mathbf{x} + (R\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

ex: Verifique que o grupo $\mathbf{T}(n)$ das translações $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ é um subgrupo normal de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, e que o quociente $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)/\mathbf{T}(n)$ é isomorfo ao grupo $\mathbf{O}(n)$.

Rotações do espaço de dimensão 3. O grupo das isometrias lineares do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 (o espaço onde acontece a física newtoniana) é o grupo dos operadores ortogonais, representados numa base ortonormada por matrizes do grupo ortogonal $\mathbf{O}(3)$.

Uma matriz ortogonal A , pensada como matriz complexa, é unitária. Consequentemente, os seus valores próprios (em quanto matriz complexa!) satisfazem $|\lambda| = 1$, ou seja, estão na circunferência unitária do plano complexo. O polinómio característico de A é um polinómio de grau 3 com coeficientes reais. Portanto, pelo menos uma das raízes é real, por exemplo $\lambda = \pm 1$ (os únicos pontos reais da circunferência unitária), e as outras duas raízes são complexas conjugadas, por exemplo $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Então $\det A = \lambda \lambda_+ \lambda_- = \lambda$.

Se $\lambda = \det A = -1$, então $\det(-A) = 1$, e portanto $-A \in \mathbf{SO}(3)$, ou seja, A é a composição $A = JR$ de uma rotação $R \in \mathbf{SO}(3)$ e a inversão $J := -I \in \mathbf{O}(3)$. Em particular, o grupo $\mathbf{O}(3)$ é a reunião disjunta do subgrupo $\mathbf{SO}(3)$ e da classe $-\mathbf{SO}(3) := J \cdot \mathbf{SO}(3)$ (que não é um subgrupo). Em quanto grupo, o grupo ortogonal $\mathbf{O}(3)$ é isomorfo ao produto $\mathbf{SO}(3) \times C_2$ do grupo das rotações vezes o grupo cíclico $C_2 = \{\pm I\}$. É suficiente portanto compreender as rotações.

Seja $R \in \mathbf{SO}(3)$. Se \mathbf{n} é um vetor próprio unitário de R associado ao valor próprio $\lambda = 1$, então o complemento ortogonal $\mathbf{n}^{\perp} \approx \mathbb{R}^2$ é um subespaço invariante para R , e a restrição $R|_{\mathbf{n}^{\perp}}$ é tamb' em uma rotação, representada por uma matriz de $\mathbf{SO}(2)$. Portanto, em um referencial ortonormado $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ tal que $\mathbf{k}' = \mathbf{n}$, a rotação R é representada pela matriz

$$R_{\theta \mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Se o ângulo θ não é um múltiplo de π , então a reta $\mathbf{n}\mathbb{R}$ é o único espaço próprio de R , e é chamada "eixo de rotação". Finalmente, R é da forma

$$O^{\top} R_{\theta \mathbf{k}} O$$

com $O \in \mathbf{SO}(3)$. A mudança de coordenadas ortogonal O que envia \mathbf{n} no eixo \mathbf{k}' é determinada por dois ângulos, por exemplo a longitude $\varphi \in [0, 2\pi]$ e a latitude $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ de \mathbf{n} (que é um ponto da esfera unitária $\mathbf{S}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$). Isto significa que as matrizes do grupo $\mathbf{SO}(3)$ podem ser parametrizadas por 3 ângulos.

Ângulos de Euler. Uma parametrização conveniente do grupo das rotações, usada para tratar problemas de física e engenharia como o corpo rígido, usa um sistema de ângulos chamados “ângulos de Euler” (mas tamb’ em existem variações).

Uma rotação $R \in \mathbf{SO}(3)$ envia o referencial canônico $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, que define as coordenadas cartesianas x, y, z , num outro referencial ortonormado $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$, que define coordenadas cartesianas X, Y, Z . Se $\mathbf{k}' \neq \pm \mathbf{k}$ (i.e. se R não é uma rotação à volta do eixo dos z), então a interseção entre os planos $x-y$ e $X-Y$ determina uma reta, chamada “linha dos nós”. Nesta reta, é possível individuar um vetor unitário \mathbf{n} de maneira tal que uma rotação anti-horária de um ângulo $0 \leq \alpha < 2\pi$ em torno de \mathbf{k} , definida pela matriz

$$R_{\alpha\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

envia \mathbf{i} em \mathbf{n} . Existe então um ângulo $0 \leq \beta \leq \pi$ tal que uma sucessiva rotação em torno de \mathbf{n} (que agora é o eixo \mathbf{i}), definida pela matriz

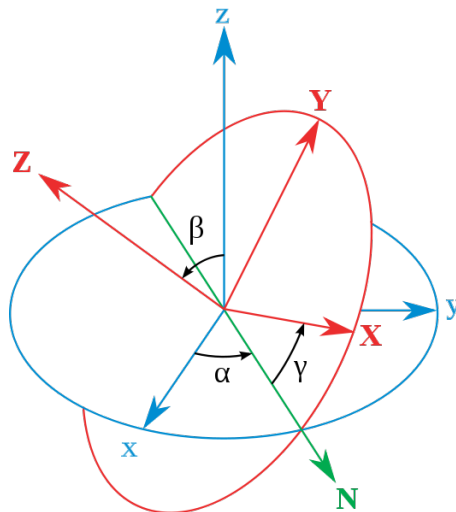
$$R_{\beta\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix},$$

envia \mathbf{k} em \mathbf{k}' . Finalmente, existe um ângulo $0 \leq \gamma < 2\pi$ tal que uma sucessiva rotação em torno de \mathbf{k}' (que agora é o eixo \mathbf{k}), definida pela matriz

$$R_{\gamma\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

envia \mathbf{n} em \mathbf{i}' . Assim, a rotação genérica é uma composição de três rotações

$$R = R_{\gamma\mathbf{k}} R_{\beta\mathbf{i}} R_{\alpha\mathbf{k}}.$$



ex: Diga se as seguintes matrizes são ortogonais e se representam rotações.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Grupo de Galilei. A equação de Newton $\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = 0$ de uma partícula livre não relativística de massa m em um referencial inercial é invariante para o grupo das isometrias euclidianas $\mathbf{E}(3)$, gerado pelas translações $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{q}$, com $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, e pelas isometrias lineares $\mathbf{r} \mapsto O\mathbf{r}$, com $O \in \mathbf{O}(3)$. Também é invariante, de acordo com o princípio de inércia de Galileo, se passamos de um referencial inercial a outro em movimento retilíneo uniforme relativamente ao primeiro, ou seja, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{V}t$, onde \mathbf{V} é uma velocidade constante. É subentendido que o tempo t não muda, sendo absoluto na física não relativística. Estas simetrias do espaço-tempo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, de coordenadas (\mathbf{r}, t) , formam o grupo de Galilei.

Grupo unitário. O grupo dos automorfismos unitários do espaço hermitico \mathbb{C}^n é o subgrupo dos automorfismos que preservam o produto hermitico. A transformação $Z \mapsto AZ$, onde $Z \in \mathbb{C}^n$ é um vetor coluna e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, é unitária sse $A^*A = AA^* = I$. O grupo dos automorfismos unitários de \mathbb{C}^n é portanto isomorfo ao grupo unitário

$$\mathbf{U}(n) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \text{ t.q. } A^*A = I\}.$$

O determinante de uma matriz unitária satisfaz $|\det A| = 1$. O grupo especial unitário é o subgrupo $\mathbf{SU}(n)$ formado pelas matrizes unitárias com determinante $\det A = 1$.

e.g. O grupo $\mathbf{U}(1)$ é o grupo multiplicativo dos números complexos $z = x + iy$ de módulo $|z| = 1$, ou seja, a circunferência unitária $\mathbf{S} \subset \mathbb{C}$. Todo número complexo de módulo um pode ser representado por $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. É imediato verificar que a correspondência

$$e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo $\mathbf{U}(1) \approx \mathbf{SO}(2)$.

e.g. As matrizes de $\mathbf{U}(2)$ são normais, logo diagonalizáveis sobre os complexos, e têm valores próprios unitários. Em particular, uma matriz $A \in \mathbf{SU}(2)$ tem valores próprios $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$ para algum ângulo θ , pois o produto é $\lambda_+ \lambda_- = \det A = 1$. Portanto, uma matriz genérica de $\mathbf{SU}(2)$ é da forma

$$A = U \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} U^*$$

com $U \in \mathbf{SU}(2)$. É também claro que, a menos de reordenar os vetores próprios, basta considerar valores $0 \leq \theta < \pi$ do parâmetro.

ex: Identifique $\mathbf{SU}(1)$.

ex: Mostre que o grupo $\mathbf{SU}(2)$ é o grupo das matrizes complexas

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Matrizes de Pauli. As *matrizes de Pauli* são as matrizes unitárias e auto-adjuntas

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

São utilizadas para descrever a interação de uma partícula quântica com spin 1/2 com o campo eletromagnético, no regime não relativístico.

É imediato verificar que $\det \sigma_i = -1$ e $\text{Tr} \sigma_i = 0$. Também

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Determine os valores próprios e os vetores próprios das matrizes de Pauli.

Grupos de Poincaré e de Lorentz. O *espaço-tempo de Minkowski*, o espaço-tempo da teoria da relatividade restrita⁴³, é o produto cartesiano $\mathbf{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, de coordenadas $(t, \mathbf{r}) = (t, x, y, z)$ (ou seja, uma coordenada temporal t e 3 coordenadas espaciais $\mathbf{r} = (x, y, z)$), munido da *métrica de Minkowski*, a métrica pseudo-euclidiana definida por

$$\langle (t, \mathbf{r}), (t', \mathbf{r}') \rangle := c^2 tt' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

onde $c > 0$ denota a “velocidade da luz”. A pseudo-norma do vetor (t, \mathbf{r}) é portanto

$$\|(t, \mathbf{r})\|^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Um ponto (t, \mathbf{r}) é de *tipo tempo* se $\|(t, \mathbf{r})\| > 0$, de *tipo espaço* se $\|(t, \mathbf{r})\| < 0$, e de *tipo luz*, ou *nulo*, se $\|(t, \mathbf{r})\| = 0$.

O grupo das isometrias de \mathbf{M} é chamado *grupo de Poincaré*. Translações, no tempo $t \in \mathbb{R}$ ou no espaço $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ fazem parte do grupo de Poincaré. As isometrias lineares, as transformações lineares de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ que preservam a pseudo-norma de Minkowski, formam o *grupo de Lorentz* $\mathbf{O}(1, 3)$. É claro que as isometrias do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , de coordenadas $\mathbf{r} = (x, y, z)$, são transformações de Lorentz, e em particular $\mathbf{O}(3) \subset \mathbf{O}(1, 3)$. O *grupo de Lorentz restrito* é o subgrupo $\mathbf{SO}^+(1, 3) \subset \mathbf{O}(1, 3)$ das transformações de Lorentz que preservam a direção do tempo e a orientação do espaço.

É claro que $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ contém o grupo as rotações $\mathbf{SO}(3)$. Mais interessantes são as transformações de Lorentz chamadas *boosts* (ou seja, “empurrões”), que descrevem as coordenadas (t', x', y', z') em um referencial em movimento retilíneo uniforme relativamente a um referencial inercial (t, x, y, z) . Se o eixo x é escolhido na direção da velocidade $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, então a transformação de Lorentz é

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

onde $|v| < c$. Em particular, a transformação linear que envia (ct, x) em (ct', x') é definida pela matriz dois por dois

$$H_\varphi = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

onde o “ângulo hiperbólico” φ (chamado, em inglês, *rapidity*) é definido por $\tanh \varphi = v/c$, ou seja,

$$\cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{e} \quad \sinh \varphi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Observe que $-\infty < \varphi < \infty$ se $-c < v < c$, e que $\varphi = 0$ se $v = 0$, que corresponde a $H_0 = I$. A matriz H_φ define uma “rotação hiperbólica” de um ângulo hiperbólico φ .

Para obter boost com velocidade em uma direção arbitrária $v\mathbf{v}$, é suficiente aplicar uma rotação do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 que envie \mathbf{v} em $v\mathbf{i}$.

⁴³A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17** (1905), 891-921. [On the electrodynamics of moving bodies, *The Principle of Relativity*, 1923]

ex: Verifique a lei de composição $H_\varphi H_\psi = H_{\varphi+\psi}$, que corresponde à lei de adição das velocidades (escalares)

$$(u, v) \mapsto w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}$$

Verifique que se $|u| < c$ e $|v| < c$ então também $|w| < c$.

Grupo de Weyl/Heisenberg. Em mecânica quântica, assim como em análise de Fourier, são importantes os operadores de *translação* $T_{\mathbf{q}}$, com $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, definidos por

$$(T_{\mathbf{q}}f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{q}).$$

e os operadores de *modulação* $M_{\mathbf{p}}$, com $\mathbf{p} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, definidos por

$$(M_{\mathbf{p}}f)(\mathbf{x}) := e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}).$$

O domínio dos operadores pode ser o espaço $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (onde vivem as funções próprias, que são as ondas planas), ou subespaços de $L^2(\mathbb{R}^n)$, onde é possível definir o produto interno L^2 , como o espaço das *funções de prova* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (as funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto) ou o *espaço de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (as funções infinitamente diferenciáveis tais que todas as derivadas decaem mais rapidamente que o inverso de qualquer polinômio quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$). Estes operadores são unitários relativamente ao produto L^2 , pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} + \mathbf{q})|^2 dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 dx_1 \dots dx_n$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x})|^2 dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 dx_1 \dots dx_n.$$

A composição $W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}$ é chamada *operador de Weyl*. Os operadores translação e modulação geram o *grupo de Weyl*, ou *grupo de Heisenberg reduzido*, $\text{Wey}_n \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{S}$, parametrizado por $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbf{S}$, de acordo com a identificação

$$M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}z \approx (\mathbf{p}, \mathbf{q}, z).$$

O produto, que corresponde a composição dos operadores $M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}z$, com $z \in \mathbf{S}$, é dado por

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) \cdot (\mathbf{p}', \mathbf{q}', z') \mapsto (\mathbf{p} + \mathbf{p}', \mathbf{q} + \mathbf{q}', zz'e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}'})$$

O *grupo de Heisenberg* (não reduzido) é o conjunto $\text{Heis}_n \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, munido do produto

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot (\mathbf{p}', \mathbf{q}', t') \mapsto (\mathbf{p} + \mathbf{p}', \mathbf{q} + \mathbf{q}', t + t' + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}')$$

e é claro que a aplicação $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \mapsto (\mathbf{p}, \mathbf{q}, e^{it})$ é um homomorfismo do grupo de Heisenberg sobre o grupo de Heisenberg reduzido. É possível realizar o grupo de Heisenberg como um grupo de matrizes. De fato, a correspondência $M : \text{Heis}_n \rightarrow \text{Mat}_{(n+2) \times (n+2)}(\mathbb{R})$, que envia $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ na matriz

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & \dots & p_n & t \\ 0 & 1 & \dots & 0 & q_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & q_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo do grupo de Heisenberg Heis_n no grupo $\mathbf{GL}(n+2, \mathbb{R})$.

ex: Verifique que $T_{\mathbf{q}}M_{\mathbf{p}} = e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}$.

ex: Verifique que o centro do grupo de Heisenberg é o subgrupo $Z(\text{Heis}_n) \approx \mathbb{R}$ dos elementos da forma $(0, 0, t)$, e que o quociente $\text{Heis}_n/Z(\text{Heis}_n)$ é (isomorfo a) o grupo aditivo abeliano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Plane waves and Pontryagin dual. A *plane wave* is a complex valued function $e_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ defined by

$$e_\xi(\mathbf{x}) := e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}}$$

for some “wave vector” $\xi \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ (an alternative definition omits the factor 2π). For example, a plane wave

$$e^{2\pi i(\omega t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

in the space-time $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ with coordinates (t, \mathbf{r}) , describes a (transversal) wave traveling in the direction of the vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ with frequency ω (observe that vectors and covectors have different dimensions, e.g. if t is time and \mathbf{r} is a length, then ω is a frequency while \mathbf{p} is the inverse of a length, hence the distinction between a linear space and its dual is real!).

Any plane wave is a continuous (actually infinitely differentiable) homeomorphism from the abelian additive group \mathbb{R}^n into the abelian multiplicative group $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$ of unit complex numbers, i.e.

$$e_\xi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = e_\xi(\mathbf{x}) e_\xi(\mathbf{y})$$

The set $\widehat{\mathbb{R}^n}$ of all plane waves, or, technically, the set of all continuous homomorphisms $e_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{S}$, equipped with the group law

$$(e_\xi \cdot e_{\xi'}) (\mathbf{x}) = e_\xi(\mathbf{x}) e_{\xi'}(\mathbf{x}),$$

is called *Pontryagin/topological dual* of the abelian (topological) group \mathbb{R}^n , and, as an abelian group, it is isomorphic to $\widehat{\mathbb{R}^n} \approx (\mathbb{R}^n)^*$, the isomorphism being $e_\xi \leftrightarrow \xi$.

Lattices and reciprocal lattices. A (*Bravais*) *lattice* is an additive subgroup

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{v}_n \\ &:= \{n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + \cdots + n_n\mathbf{v}_n \text{ with } n_1, n_2, \dots, n_n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

of the additive group \mathbb{R}^n , generated by n linearly independent vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$, called *primitive vectors*. A plane wave $e_\xi(\mathbf{x}) := e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}}$ in \mathbb{R}^n is Λ -periodic, i.e. satisfies $e_\xi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = e_\xi(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ and all $\mathbf{v} \in \Lambda$, provided the wave vector ξ belongs to the *reciprocal lattice*

$$\Lambda_* := \{\xi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ s.t. } \xi \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \quad \forall \mathbf{v} \in \Lambda\} \subset (\mathbb{R}^n)^*,$$

isomorphic to the *dual subgroup*

$$\Lambda^\perp := \{e_\xi \in \widehat{\mathbb{R}^n} \text{ s.t. } e_\xi(\mathbf{v}) = 1 \quad \forall \mathbf{v} \in \Lambda\} \subset \widehat{\mathbb{R}^n}.$$

For example, the reciprocal lattice of the one-dimensional lattice $\Lambda = \lambda\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, with $\lambda > 0$, is $\Lambda_* = \lambda^{-1}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^*$. Physicists are mainly interested in lattices $\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_3 \subset \mathbb{R}^3$ generated by three independent vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, since they describe (the positions of atoms in) crystals. The volume of a *fundamental domain* (or *primitive unit cell*) for such a lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ (a domain $F \subset \mathbb{R}^3$ such that $\cup_{\mathbf{v} \in \Lambda} T_{\mathbf{v}}(F) = \mathbb{R}^3$, and such that the different images $T_{\mathbf{v}}(F)$ and $T_{\mathbf{v}'}(F)$ for $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ in Λ have disjoint interiors), or, equivalently, the volume of the quotient space \mathbb{R}^3/Λ , is

$$\text{Vol}(\mathbb{R}^3/\Lambda) = |\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)|.$$

The reciprocal lattice is the lattice $\Lambda_* = \mathbb{Z}\xi_1 + \mathbb{Z}\xi_2 + \mathbb{Z}\xi_3 \subset (\mathbb{R}^3)^*$ generated by the co-vectors

$$\xi_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \quad \xi_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1)} \quad \xi_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}$$

(under the identification $(\mathbb{R}^3)^* \approx \mathbb{R}^3$ induced by the Euclidian scalar product).

20 Exponencial

ref: [Ap69] Vol. 2, 7.1-10, 7.12

The differential equation solved by the exponential. The exponential $x(t) = e^{\lambda t}$ is the unique solution of the differential equation $\dot{x} = \lambda x$ with initial condition $x(0) = 1$. Moreover, it satisfies the functional equation $x(t+s) = x(t)x(s)$, which says that x defines a homomorphism from the additive group \mathbb{R} into the multiplicative group \mathbb{C}^\times . If we try to solve a vector differential equation (i.e. a system of linear homogeneous differential equations) like

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

for $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^n$ and some $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, we are tempted to look for a solution as

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0).$$

In the following, we will give a meaning to such an expression, and prove that it really solve our problem. The functional equation will say that the curve $t \mapsto e^{tA}$ is a one-parameter subgroup of $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, “generated” by the matrix A , which is the velocity of the curve at $t = 0$.

Normas. Uma *norma* no espaço linear \mathbf{V} , real ou complexo, é uma função real não-negativa $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz os axiomas

N1 (*positividade*) $\|\mathbf{x}\| > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0.$

N2 (*homogeneidade*) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ e } \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$

N3 (*desigualdade do triângulo*) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}.$

Um *espaço normado* é um espaço vetorial \mathbf{V} munido de uma norma. A *distância* entre os pontos/vetores de \mathbf{V} é definida por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

É imediato verificar que

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$$

são normas no espaço \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . De fato, estas normas são os dois extremos de uma família de normas parametrizadas por um número $1 \leq p \leq \infty$, definidas por

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Quando $p = 2$ esta é a norma euclidiana usual $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, definida à custa do produto interno usual.

ex: Use N3 para deduzir a desigualdade do triângulo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

para a distância.

ex: Uma norma $\|\cdot\|$ é euclidiana (ou seja, é definida à custa de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usando $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$) sse satisfaz a identidade do paralelogramo.

ex: Dada uma norma $\|\cdot\|$ no espaço vetorial \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n), e um operador linear invertível $A \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$, verifique que $\|\mathbf{v}\|_A := \|A\mathbf{v}\|$ é uma norma.

Normas equivalentes. Duas normas $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ no mesmo espaço vetorial \mathbf{V} são *equivalentes* se existem constantes $c, C > 0$ tais que para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

$$c \|\mathbf{x}\|_\beta \leq \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq C \|\mathbf{x}\|_\beta$$

Normas equivalentes definem a mesma noção de limite, ou seja, a mesma “topologia”.

Teorema 20.1. *Todas as normas num espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes.*

Demonstração. Fixada uma base (arbitrária) $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n , é possível definir uma norma declarando que os \mathbf{e}_k 's formam uma base ortonormada. Basta dizer que a norma do vetor $\mathbf{v} = \sum_k v_k \mathbf{e}_k$ é $\|\mathbf{v}\|_2 := (\sum_k |v_k|^2)^{1/2}$ (esta é uma norma euclidiana, induzida pelo produto interno tal que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$). Seja $\|\cdot\|$ uma outra norma em \mathbf{V} . Se $\mathbf{v} = \sum_k v_k \mathbf{e}_k$, então

$$\|\mathbf{v}\| \leq \sum_k |v_k| \|\mathbf{e}_k\| \leq \left(\sum_k |v_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k \|\mathbf{e}_k\|^2 \right)^{1/2} = M \|\mathbf{v}\|_2$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e onde a constante $M > 0$ é

$$M = \left(\sum_k \|\mathbf{e}_k\|^2 \right)^{1/2}.$$

Por outro lado, a esfera unitária $S := \{\|\mathbf{v}\| = 1\}$ é compacta (porque estamos em um espaço de dimensão finita!), logo a função contínua $\|\cdot\|$ atinge um mínimo em S , que é necessariamente positivo. Ou seja, existe $m > 0$ tal que $\|\mathbf{v}\| \geq m$ se $\mathbf{v} \in S$. Se $\mathbf{v} \neq 0$ é um vetor genérico com norma $\|\mathbf{v}\|_2 = \lambda > 0$, então $\mathbf{v}/\lambda \in S$, e portanto

$$\|\mathbf{v}\| = \|\lambda(\mathbf{v}/\lambda)\| = \lambda \|\mathbf{v}/\lambda\| \geq \lambda m = m \|\mathbf{v}\|_2$$

Logo, $m \|\mathbf{v}\|_2 \leq \|\mathbf{v}\| \leq M \|\mathbf{v}\|_2$. □

Este resultado é importante porque diz que a topologia de um espaço linear de dimensão finita, ou seja, os conceitos de limites e vizinhanças, não dependem da particular norma usada na definição (desde que seja usada uma norma!).

Normas na álgebra das matrizes quadradas. O espaço $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ das matrizes quadradas $n \times n$ é um espaço linear isomorfo a \mathbb{C}^{n^2} . Como tal, admite muitas normas, todas equivalentes.

Por exemplo, a norma de uma matriz $A = (a_{ij})$ pode ser

$$\|A\|_1 := \sum_{i,j} |a_{ij}| \quad \|A\|_2^2 := \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \quad \dots \quad \|A\|_\infty := \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Outra possibilidade importante é considerar o operador $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$ do espaço euclidiano \mathbb{C}^n definido pela matriz A , e definir a *norma do operador* de A como

$$\|A\| := \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{z}\|=1} \|A\mathbf{z}\| = \sup_{0 \neq \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \frac{\|A\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|}$$

onde $\|\mathbf{z}\|$ denota a norma euclidiana de um vetor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. O operador A dilata ou contrai cada vetor não nulo \mathbf{z} de um fator $\|A\mathbf{z}\|/\|\mathbf{z}\|$. A norma do operador é o supremo destes fatores de dilatação. Ou seja, $\|A\|$ é o menor raio R tal que a imagem da bola unitária $B_1(0) = \{\|\mathbf{z}\| \leq 1\}$ pela transformação linear definida por A está contida na bola $B_R(0) = \{\|\mathbf{z}\| \leq R\}$. De acordo com a decomposição em valores singulares 18.13, $A(B_1(0))$ é um elipsoide com semieixos iguais aos valores singulares $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$ de A (as raízes quadradas dos valores próprios de A^*A). Consequentemente, $\|A\| = \sigma_n$, o maior dos valores singulares.

O produto linhas por colunas (ou seja, a composição das transformações lineares) faz do espaço das matrizes quadradas uma álgebra. É fácil provar que algumas de estas normas são “sub-multiplicativas”, ou seja,

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1 \quad \text{e} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (20.1)$$

Em particular, considerando $A = B$ e iterando,

$$\|A^k\|_1 \leq \|A\|_1^k \quad \text{e} \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

ex: Mostre que $\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n^2 \|A\|_\infty$.

ex: Mostre que $\|AB\|_1 \leq \|A\|_\infty \|B\|_1$. Deduza a primeira das desigualdades (20.1).

ex: Prove a segunda das desigualdades (20.1).

ex: Mostre que $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$. Deduza que

$$\|A^k\|_\infty \leq n^k \|A\|_\infty^k.$$

7 mai 2020

Exponencial de uma matriz. O *exponencial* da matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz quadrada e^A , ou $\exp(A)$, definida pela série de potências

$$\begin{aligned} e^A &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\ &= I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots \end{aligned} \quad (20.2)$$

A definição é bem posta porque cada entrada de e^A é a soma de uma série absolutamente convergente. De facto, se $a_{ij}^{(k)}$ são as entradas de A^k , então

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A^k\|_\infty \leq n^k \|A\|_\infty^k.$$

Portanto, as séries dos valores absolutos das entradas de e^A são limitadas pela série convergente

$$\left(\delta_{ij} + |a_{ij}| + \frac{|a_{ij}^{(2)}|}{2} + \frac{|a_{ij}^{(3)}|}{6} + \dots \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k \|A\|_\infty^k}{k!} = e^{n\|A\|_\infty}.$$

Em alternativa, basta observar que, pela (20.1), os termos da série que define o exponencial são limitados por

$$\|A^k/k!\| \leq \|A\|^k/k!$$

e que a série $\sum \|A\|^k/k! = e^{\|A\|}$ é convergente. Em particular, isto prova a desigualdade

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$$

Exponencial de um operador. Se A e B são matrizes semelhantes, ou seja, $A = U^{-1}BU$ com $U \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, então também os exponenciais são semelhantes, pois as potências de A são $A^n = U^{-1}B^nU$ para todo $n \geq 0$, e portanto

$$\begin{aligned} e^A &= I + U^{-1}BU + \frac{1}{2}U^{-1}B^2U + \dots \\ &= U^{-1} \left(I + B + \frac{1}{2}B^2 + \dots \right) U \\ &= U^{-1} e^B U. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Consequentemente, se $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ é um operador do espaço linear de dimensão finita $\mathbf{V} \approx \mathbb{C}^n$ ou \mathbb{R}^n , representado em uma base fixada pela matriz A , então a fórmula (20.2) define um operador

$$e^L = I + L + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{6}L^3 + \dots$$

Pela observação (20.3), esta definição não depende da base escolhida.

e.g. O exponencial da matriz nula

$$e^0 = I,$$

pois todos os outros termos da série de potências são nulos. Portanto, o exponencial do operador nulo é o operador identidade.

e.g. Uma matriz $N \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é nilpotente se alguma sua potência é nula, i.e. $N^k = 0$ para algum inteiro minimal $k \geq 0$. Sendo também nulas todas as potências superiores $N^{k'}$ com $k' \geq k$, a série de potência que define o seu exponencial é de fato uma soma finita

$$e^N = I + N + \frac{1}{2}N^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1}.$$

Exponencial de matrizes diagonalizáveis. Se $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é uma matriz diagonal, então o seu exponencial também é diagonal e

$$e^\Lambda = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

Consequentemente, se A é diagonalizável, ou seja, $A = U^{-1}\Lambda U$ com Λ diagonal, então o seu exponencial é semelhante a matriz diagonal e^Λ , ou seja,

$$e^A = U^{-1}e^\Lambda U.$$

Uma consequência importante é a relação entre o exponencial e os invariantes principais de uma matriz quadrada, o determinante e o traço:

$$\boxed{\det(e^A) = e^{\text{Tr}A}} \quad (20.4)$$

Esta fórmula é evidente se A é diagonalizável, e segue por continuidade no caso geral (porque, de acordo com o teorema 17.10, o conjunto das matrizes diagonalizáveis é denso no conjunto $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ das matrizes quadradas complexas).

ex: Mostre que

$$(e^A)^\top = e^{A^\top} \quad \text{e} \quad (e^A)^* = e^{A^*}$$

ex: Mostre que se λ é um valor próprio de A , então e^λ é um valor próprio de e^A .

Equação diferencial & subgrupos a um parâmetro. Dada uma matriz $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, podemos construir a família das matrizes

$$G(t) := e^{tA}, \quad \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

É imediato ver que $G(0) = I$. As séries de funções $t \mapsto (e^{tA})_{ij}$ que definem as entradas de e^{tA} convergem uniformemente em cada intervalo limitado da reta real, assim como as séries das derivadas das entradas. Portanto, $t \mapsto G(t)$ define uma curva $G: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, que passa pela identidade quando $t = 0$.

Em particular, as derivadas em ordem a t podem ser calculadas derivando cada termo. O resultado é que

$$\frac{d}{dt}G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = A G(t) = G(t) A \quad (20.5)$$

Em particular, A comuta com $G(t)$.

A derivada de $F(t) := e^{tA}e^{-tA}$ é igual, pela regra de Leibniz (aplicada a cada entrada do produto), a

$$\dot{F}(t) = AF(t) - F(t)A = 0$$

porque A comuta com $G(t)$. Pelo teorema do valor médio, $F(t) = F(0) = I$. Consequentemente, $G(t) = e^{tA}$ é invertível, e a sua inversa é $G(-t)$, ou seja,

$$\boxed{(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}}.$$

Em particular, o exponencial envia o espaço linear das matrizes, reais ou complexas, no grupo geral linear real ou complexo, respetivamente.

Teorema 20.2. *O exponencial envia $\exp(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})) \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ e $\exp(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})) \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.*

O exponencial também resolve umas equações diferenciais no espaço das matrizes, de acordo com o seguinte

Teorema 20.3. *Seja $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$. A única solução da equação diferencial*

$$\dot{X} = AX \quad \text{ou} \quad \dot{X} = XA$$

com condição inicial $X(0) = X_0 \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, é

$$X(t) = e^{tA} X_0 \quad \text{ou} \quad X(t) = X_0 e^{tA},$$

respetivamente.

Demonstração. As fórmulas (20.5) dizem que $e^{tA} X_0$ ou $X_0 e^{tA}$ são soluções. Para provar a unicidade, basta observar que, se $X(t)$ é uma solução, então a quociente $H(t) = e^{-tA} X(t)$ (ou $X(t)e^{-tA}$ no segundo caso) satisfaz, pela regra de Leibniz e as (20.5),

$$\dot{H}(t) = -Ae^{-tA} X(t) + e^{-tA} AX(t) = 0$$

pois A comuta com e^{-tA} . Pelo teorema do valor médio (aplicada a cada entrada da matriz), $H(t) = H(0) = X_0$, e portanto $X(t) = e^{tA} X_0$. \square

Em geral, se A e B não comutam, $e^{A+B} \neq e^A e^B \neq e^B e^A$ (e a expressão de Z tal que $e^Z = e^A e^B$, ou seja, moralmente “ $\log(\exp(A)\exp(B))$ ”, em termos dos comutadores iterados de A e B , é chamada *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*). O que é verdade é o seguinte

Teorema 20.4. *Se A e B comutam, ou seja, se $AB = BA$, então*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Demonstração. Se A comuta com B , então todas as potências A^k comutam com todas as potências B^j , e Consequentemente com os exponenciais e^{tB} e e^{tA} , respetivamente. Então a derivada de

$$H(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA} e^{tB}$$

é, usando as fórmulas 20.5,

$$\dot{H}(t) = (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}e^{tB}B = (A+B)H(t)$$

Pelo teorema 20.3, $H(t) = e^{t(A+B)} H(0)$. Mas $H(0) = 0$, logo $H(t) = 0$ para todo t , em particular para $t = 1$. \square

Em particular (sendo que todos os múltiplos tA de uma matriz quadrada A comutam),

$$\boxed{e^{0A} = I \quad \text{e} \quad e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}.}$$

Isto significa que a família dos $G(t) = e^{tA}$, com $t \in \mathbb{R}$, é um *subgrupo a um parâmetro* do grupo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, ou seja, a correspondência $t \mapsto G(t) = e^{tA}$ é um homomorfismo contínuo do grupo aditivo \mathbb{R} no grupo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Geometricamente, $t \mapsto G(t)$ é uma curva no grupo linear, passando pela identidade quando $t = 0$, e que resolve a equação diferencial $\dot{G} = AG$. A matriz A é dita *gerador (infinitesimal)* do subgrupo $\{G(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, e pode ser obtida calculando o limite

$$A = \dot{G}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t) - I}{t}.$$

É a derivada, ou seja, a “velocidade” da curva $G(t)$ no instante $t = 0$.

Vice-versa, é possível provar que

Teorema 20.5. *Todo subgrupo a um parâmetro $t \mapsto G(t)$ de matrizes de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ que seja diferenciável na origem é da forma e^{tA} para alguma matriz A .*

Demonstração. Seja $A = \dot{G}(0)$ a velocidade do subgrupo em $t = 0$, quando $G(0) = I$. A derivada nos outros pontos também existe e é igual, pelas propriedades de grupo, a

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(t + \varepsilon) - G(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(\varepsilon)G(t) - G(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(\varepsilon) - I}{\varepsilon} G(t) = \dot{G}(0) G(t) = A G(t). \end{aligned}$$

Pelo teorema 20.3, $G(t) = e^{tA}G(0) = e^{tA}$. □

ex: Verifique que as identidades $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$ são em geral falsas quando A e B não comutam. Por exemplo, considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Verifique que se A é simétrica/ então também e^A é simétrica.

ex: Verifique que se A é hermitica então também e^A é hermitica.

ex: Mostre que se A é anti-simétrica (real) então e^A é ortogonal.

ex: Mostre que se A é anti-hermitica então e^A é unitária. Deduza que se H é hermitica então e^{iH} é unitária.

ex: Use a identidade (20.4) para verificar que o exponencial de uma matriz A com traço nulo, $\text{Tr}A = 0$, é uma matriz do grupo linear especial, i.e. $e^A \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$.

ex: [Ap69] vol. 2, 7.12.

Exponencial de blocos de Jordan. Se $A = \lambda I + B$, então $e^A = e^\lambda e^B$, porque λI comuta com todas as matrizes. Em particular, é simples calcular o exponencial de um “bloco de Jordan”

$$A = \lambda I + N$$

onde N é uma matriz nilpotente. De fato, se N é nilpotente de ordem k , ou seja, verifica $N^k = 0$ (subentendido, com $N^j \neq 0$ se $j < k$), então o seu exponencial é um polinômio de grau $k - 1$ em N ,

$$e^N = I + N + \frac{1}{2}N^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1}.$$

Consequentemente,

$$e^{\lambda I + N} = e^\lambda \left(I + N + \frac{1}{2}N^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1} \right).$$

Rotações do plano. O exponencial de uma matriz anti-simétrica é uma matriz ortogonal. O caso mais simples é em dimensão 2. Seja

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que J não é diagonalizável sobre os reais, pois o polinômio característico é $z^2 + 1$, e a suas raízes complexas são $\pm i$. O quadrado de J é $J^2 = -I$, e portanto todas as suas potências são iguais a $\pm J$ ou $\pm I$, com periodicidade 4. A matriz J é o análogo do número imaginário i , cujo quadrado é $i^2 = -1$. A fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ sugere que também a matriz e^{tJ} seja relacionada com as funções trigonométricas. De fato, ao escrever as séries de potências de t que definem as entradas de e^{tJ} , é imediato reconhecer que

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots & -t + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{120}t^5 + \dots \\ t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots & 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

uma rotação do plano de um ângulo t no sentido anti-horário.

Rotações hiperbólicas. A matriz simétrica

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável sobre os reais, pois representa uma reflexão na reta $y = x$, e portanto tem valores próprios ± 1 . De fato, é imediato ver que

$$S = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^\top,$$

onde $U = R_{\pi/4}$ é uma rotação de um ângulo $\pi/4$. O seu exponencial é portanto

$$e^{tS} = U \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} U^\top$$

Mais interessante é calcular o exponencial usando diretamente a série de potências. O quadrado de S é $S^2 = I$, e portanto as potências são iguais a S ou a I , dependendo da paridade. Então

$$\begin{aligned} e^{tS} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \dots & t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \dots \\ t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \dots & 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esta é uma “rotação hiperbólica” do plano. O caminho $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ descreve um ponto que percorre um ramo da hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ do plano. As rotações hiperbólicas são, em uma interpretação conveniente das coordenadas, os “boost” do grupo de Lorentz da relatividade especial.

ex: Calcule o exponencial das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$B = \lambda I + A = \begin{pmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^B = e^\lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ex: Se P é uma projeção, i.e. satisfaz $P^2 = P$ (é “idempotente”), então

$$e^P = I + (e - 1)P.$$

ex: Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(observe que A é a soma de uma matriz nilpotente e um múltiplo da identidade).

ex: [Ap69] vol. 2, 7.12.

Grupos de matrizes. O determinante é uma função contínua $\det : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (de fato, um polinômio de grau n nas entradas da matriz, ou seja, nas coordenadas do espaço linear). O grupo linear geral real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ é portanto um aberto de \mathbb{R}^{n^2} , sendo o conjunto das matrizes com $\det A \neq 0$ (ou seja, uma matriz suficientemente próxima de uma matriz invertível é invertível). Da mesma forma, o grupo linear geral complexo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ é um aberto do espaço linear real $\mathbb{C}^{n^2} \approx \mathbb{R}^{2n^2}$.

14 mai 2020

Um *grupo de matrizes* é um subgrupo $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ ou $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ que é um conjunto fechado relativamente a topologia do grupo linear correspondente. Exemplos são os próprios grupos lineares gerais, e os subgrupos especiais, ortogonais e unitários considerados no capítulo anterior (e outros que não teremos tempo de considerar).

É possível provar, usando o teorema da função implícita, que todos estes grupos são “variedades diferenciáveis”, de fato, subvariedades do aberto $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ ou $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$. Também, as operações de grupo, o produto $(g, h) \mapsto gh$ e a inversão $g \mapsto g^{-1}$, são funções diferenciáveis de $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ e $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$.

e.g. O grupo linear especial $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo fechado de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ por ser a imagen inversa $\det^{-1}(\{1\})$ do ponto 1 pela função contínua “determinante” $\det : \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

e.g. O grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é um subgrupos fechado de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ por ser a imagen inversa $f^{-1}(\{0\})$ pelas função contínua $f : \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ definida por $f(A) = A^\top A - I$ (observe que cada coordenada desta função é um polinômio de grau 2 nas entradas da matriz A).

e.g. O grupo especial $\mathbf{SO}(n) = \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{O}(n)$ é também um subgrupo fechado de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ por ser uma interseção de dois fechados.

e.g. Da mesma forma, também $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ e $\mathbf{SU}(n)$ são subgrupos fechados de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, logo grupos de matrizes.

U(1) \approx SO(2) é uma circunferência \mathbf{S}^1 . O grupo unitário $\mathbf{U}(1)$ é o grupo multiplicativo dos números complexos de módulo um $e^{i\theta}$, que formam a circunferência unitária $\mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$ do plano complexo. É isomorfo ao grupo $\mathbf{SO}(2)$ das rotações do plano, através do isomorfismo

$$e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

SU(2) é uma esfera \mathbf{S}^3 . O espaço linear $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ é isomorfo a $\mathbb{C}^4 \approx \mathbb{R}^8$. O grupo especial unitário $\mathbf{SU}(2)$ é o grupo das matrizes complexas 2×2 da forma

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

onde $\alpha = x + iy$ e $\beta = u + iv$ são dois números complexos tais que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Esta condição define a esfera unitária $\mathbf{S}^3 = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1\}$ dentro do espaço euclidiano real $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$ de coordenadas $(\alpha, \beta) \approx (x, y, u, v)$. É claro que a aplicação $\mathbf{S}^3 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, definida por $(\alpha, \beta) \mapsto A(\alpha, \beta)$, é injetiva. Assim, o grupo especial unitário $\mathbf{SU}(2)$ é uma esfera de dimensão real três $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{R}^8$.

Espaço tangente na identidade. Seja \mathbf{G} um grupo de matrizes, real ou complexo, e seja $e = I$ a identidade. Consideramos curvas diferenciáveis $t \mapsto g(t)$ de matrizes $g(t) \in \mathbf{G}$, definidas num intervalo de tempos $(-\varepsilon, \varepsilon)$ em torno da origem, que passem pela identidade $g(0) = e$ quando $t = 0$. A velocidade de uma tal curva no tempo $t = 0$ é uma matriz $X = \dot{g}(0) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

O espaço de todas as possíveis velocidades $X = \dot{g}(0)$ da curvas diferenciáveis que passam pela identidade (ou melhor, as classes de equivalências das curvas que têm a mesma velocidade em e) é chamado espaço tangente ao grupo no ponto e , e denotado por $T_e \mathbf{G}$.

Este espaço tem uma estrutura natural de espaço vetorial real.

Teorema 20.6. *O espaço $T_e \mathbf{G}$ é um subespaço vetorial real de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ou de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, dependendo se \mathbf{G} é real ou complexo.*

De fato, se a curva $g(t)$ tem velocidade $X = \dot{g}(0)$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, então a curva $f(t) = g(\lambda t)$ também passa pela identidade, e com velocidade $\dot{f}(0) = \lambda X$. Em particular, a curva constante $c(t) = g(0 \cdot t) = e$ tem velocidade $\dot{c}(0) = 0$. Por outro lado, se $h(t)$ é outra curva que passa pela identidade $h(0) = e$ com velocidade $Y = \dot{h}(0)$, então também a curva $\ell(t) = g(t)h(t)$ passa pela identidade quando $t = 0$. Pela regra de Leibniz, a sua velocidade é

$$\dot{\ell}(t) = \dot{g}(t)h(t) + g(t)\dot{h}(t),$$

e portanto vale $X + Y$ quando $t = 0$. Observem também que se a curva $g(t)$ tem velocidade $X = \dot{g}(0)$, então a curva $g(t)^{-1}$ tem velocidade $-X$ na identidade, pois a velocidade da curva constante $g(t)g(t)^{-1} = e$ na identidade é 0. Esta observação também segue da fórmula

$$\frac{d}{dt} g^{-1}(t) = -g(t)^{-1} \dot{g}(t) g(t)^{-1},$$

que generaliza às matrizes a nota fórmula para a derivada da inversa.

ex: Verifique a fórmula acima para a derivada da curva $g(t)^{-1}$.

Parêntese de Lie. A estrutura multiplicativa do grupo se reflete em mais uma operação natural no espaço tangente. Todo $g \in \mathbf{G}$ define um automorfismo $\Psi_g := L_g \circ R_{g^{-1}} \in \text{Aut}(\mathbf{G})$, de acordo com

$$\Psi_g(h) = ghg^{-1}.$$

Como Ψ_g fixa a identidade, i.e. $\Psi_g(e) = e$, envia curva passando pela identidade em curvas passando pela identidade. O seu diferencial, calculado no ponto I , é portanto um automorfismo do espaço tangente na identidade, denotado por

$$\text{Ad}_g := d\Psi_g|_I \in \text{Aut}(T_e \mathbf{G})$$

Explicitamente, se $t \mapsto h(s)$ é uma curva passando por $h(0) = e$ com velocidade $\dot{h}(0) = Y$, então a velocidade da curva $s \mapsto \Psi_g(h(s)) = g h(s) g^{-1}$ quando $s = 0$ é

$$\text{Ad}_g Y = g Y g^{-1}.$$

O mapa $\text{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(T_e \mathbf{G})$, que envia g no automorfismo Ad_g , é chamado representação adjunta do grupo. O seu diferencial na identidade, $\text{ad} := d\text{Ad}|_e : T_e \mathbf{G} \rightarrow \text{End}(T_e \mathbf{G})$, define uma transformação bilinear $T_e \mathbf{G} \times T_e \mathbf{G} \rightarrow T_e \mathbf{G}$, chamada *parêntese de Lie*, de acordo com

$$\boxed{[X, Y] := \text{ad}_X Y}$$

Para calcular a parêntese de Lie, consideramos uma curva $g(t)$ com $\dot{g}(0) = X$. Então

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)} Y \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} g(t) Y g(t)^{-1} \right|_{t=0} \\ &= \dot{g}(0) Y g(0)^{-1} - g(0) Y g^{-1}(0) \dot{g}(0) g^{-1}(0) \\ &= XY - YX \end{aligned}$$

Assim a parêntese de Lie entre dois vetores do espaço tangente à identidade é simplesmente o “comutador” entre as matrizes (o que justifica ter utilizado a mesma notação). Esta derivação mostra que o comutador entre duas matrizes de $T_e \mathbf{G}$ é também uma matriz de $T_e \mathbf{G}$, coisa que não era evidente a priori. É imediato então verificar que a parêntese de Lie/comutador é anti-simétrica, i.e. satisfaz

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

e satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

ex: Verifique que Ψ_G é um automorfismo do grupo \mathbf{G} .

ex: Verifique que $\text{Ad}_{gh} = \text{Ad}_g \text{Ad}_h$.

ex: Verifique que o comutador satisfaz a identidade de Jacobi.

Álgebra de Lie de um grupo de matrizes. O espaço tangente $T_e \mathbf{G}$, munido da estrutura de espaço linear real e da parêntese de Lie $[\cdot, \cdot]$ (que é anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi), é chamado *álgebra de Lie* do grupo de matrizes \mathbf{G} . Costuma ser denotado pelas letras germânicas correspondentes às letras que denotam o grupo: por exemplo, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbf{G})$ denota a álgebra de Lie do grupo \mathbf{G} . A dimensão real de \mathfrak{g} é chamada dimensão (real) do grupo de matrizes \mathbf{G} .

Sendo um espaço linear de dimensão finita, a álgebra de Lie de um grupo de matrizes admite uma base finita X_1, X_2, \dots, X_m . Os comutadores são combinações lineares dos próprios elementos da base, logo expressões do género

$$[X_i, X_j] = \sum_{ijk} c_{ij}^k X_k,$$

com certos coeficientes c_{ij}^k que dependem da base escolhida e da estrutura do grupo, e são chamadas *constantes de estrutura*. Observe que se o grupo é comutativo então Ad é constante, e portanto a sua derivada é nula. Assim, a álgebra de Lie de um grupo abeliano é comutativa.

É claro que a álgebra de Lie do grupo linear geral real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ é

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

pois toda matriz X define um subgrupo a um parâmetro e^{tX} que passa pela identidade com velocidade X . Da mesma forma, a álgebra de Lie do grupo linear geral real complexo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ é $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, pensado como espaço vetorial real de dimensão $2n^2$.

Para compreender a álgebra de Lie dos grupos especiais é útil a seguinte observação, que revela o significado geométrico do traço de uma matriz: é o diferencial do determinante calculado na identidade. De fato, o determinante de uma pequena variação $I + \varepsilon X$ da matriz identidade tem um desenvolvimento

$$\det(I + \varepsilon X) \simeq 1 + \varepsilon \text{Tr} X + \dots$$

onde os outros termos são quadráticos em ε .

Teorema 20.7. *Seja $g(t)$ é uma curva derivável em $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ passando por $g(0) = I$. Então*

$$\left. \frac{d}{dt} \det g(t) \right|_{t=0} = \text{Tr} \dot{g}(0).$$

Teorema 20.8. *A álgebra de Lie do grupo especial linear $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ é o espaço linear das matrizes com traço nulo,*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{Tr} X = 0\}$$

Demonstração. O teorema 20.7 prova uma inclusão. Por outro lado, a identidade (20.4) mostra que se X é uma matriz com traço nulo então e^{tX} é uma curva em $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ que passa pela identidade com velocidade X . \square

E particular, $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ tem dimensão $n^2 - 1$. A mesma demonstração prova que

Teorema 20.9. *A álgebra de Lie do grupo especial linear $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ é o espaço linear das matrizes complexas com traço nulo,*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) : \text{Tr} X = 0\}$$

Assim, $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ tem dimensão real $2(n^2 - 1)$.

Teorema 20.10. *A álgebra de Lie do grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é o espaço linear das matrizes reais anti-simétricas,*

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : X + X^\top = 0\}$$

Demonstração. Seja $t \mapsto g(t) \in \mathbf{O}(n)$ uma curva que passa pela origem $g(0) = I$ com velocidade $\dot{g}(0) = X$. Sendo ortogonais, as matrizes satisfazem $g(t)g(t)^\top = I$. Derivando esta relação, e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\dot{g}(t)g(t)^\top + g(t)\dot{g}(t)^\top = 0,$$

que, quando $t = 0$, diz que $X + X^\top = 0$. Vice-versa, é um exercício verificar que se X é anti-simétrica então e^{tX} é uma curva em $\mathbf{O}(n)$ que tem velocidade X em I . \square

Em particular, $\mathbf{O}(n)$ tem dimensão $n(n-1)/2$.

Uma matriz anti-simétrica tem automaticamente traço nulo, portanto $\mathfrak{o}(n)$ é também a álgebra de Lie do grupo ortogonal especial $\mathbf{SO}(n) = \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$. De fato, a função determinante envia $\det : \mathbf{O}(n) \rightarrow \{\pm 1\}$. O grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é composto por duas componentes conexas: a componente conexa que contém a identidade I (por onde passam as curvas que definem a álgebra de Lie), que é claramente $\mathbf{SO}(n) = \det^{-1}(\{1\})$, e a componente conexa que contém $-I$, que é $-\mathbf{SO}(n)$, o subconjunto (que não é um grupo!) das matrizes ortogonais com determinante -1 .

Teorema 20.11. *A álgebra de Lie do grupo unitário $\mathbf{U}(n)$ é o espaço linear real das matrizes anti-hermíticas,*

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) : X + X^* = 0\}$$

Demonstração. Seja $t \mapsto g(t) \in \mathbf{U}(n)$ uma curva que passa pela origem $g(0) = I$ com velocidade $\dot{g}(0) = X$. Sendo unitárias, as matrizes satisfazem $g(t)g(t)^* = I$. Derivando esta relação, e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\dot{g}(t)g(t)^* + g(t)\dot{g}(t)^* = 0,$$

que, quando $t = 0$, diz que $X + X^* = 0$. Vice-versa, é um exercício verificar que se X é anti-hermítica então e^{tX} é uma curva em $\mathbf{U}(n)$ que tem velocidade X em I . \square

Teorema 20.12. *A álgebra de Lie do grupo especial unitário $\mathbf{SU}(n)$ é o espaço linear das matrizes anti-hermíticas com traço nulo,*

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) : X + X^* = 0, \text{Tr}X = 0\}$$

rotações infinitesimais do plano, álgebra de Lie de $\mathbf{SO}(2)$ e $\mathbf{U}(1)$. Uma rotação genérica do plano é uma matriz $R(\theta) \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, definida por

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

É claro que $\theta \mapsto R(\theta)$ é um grupo a um parâmetro, passando por $R(0) = I$, cuja imagem é todo o grupo $\mathbf{SO}(2)$. As sua derivada quando $\theta = 0$ é

$$\left. \frac{d}{d\theta} R(\theta) \right|_{t=0} = J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$ é portanto uma reta, gerada pelo vetor J . Toda rotação é do género $R(\theta) = e^{\theta L_z}$ para algum θ , definido a menos de múltiplos inteiros de 2π .

rotações infinitesimais do espaço, álgebra de Lie de $\mathbf{SO}(3)$. O espaço linear das matrizes 3×3 reais anti-simétricas tem dimensão 3, e uma base natural é formada pelas matrizes/vetores

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os exponenciais $e^{\theta X_1}$, $e^{\theta X_2}$ e $e^{\theta X_3}$ representam rotações anti-horárias de um ângulo θ em torno dos eixos \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , respetivamente. Os comutadores são

$$[X_1, X_2] = X_3 \quad [X_2, X_3] = X_1 \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

Uma rotação genérica de um ângulo ω em torno do eixo definido pelo vetor unitário $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ é $R = e^{\omega X}$, onde $X = n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3$. De fato, um cálculo elementar mostra que se \mathbf{v} é um vetor genérico do espaço, então

$$\left. \frac{d}{dt} e^{tX} \mathbf{v} \right|_{t=0} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$$

onde \times denota o produto vetorial em \mathbb{R}^3 . Então é claro que $\mathbb{R}\mathbf{n}$ é o eixo de rotação, e que a velocidade angular da rotação $t \mapsto e^{t\omega X} \mathbf{v}$ é ω .

É possível portanto associar a cada matriz/vetor Ω da álgebra de Lie de $\mathbf{SO}(3)$ um vetor do espaço \mathbb{R}^3 , de acordo com

$$\Omega = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \omega_3 X_3 \quad \mapsto \quad \mathbf{\Omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}, \quad (20.6)$$

de maneira tal que e^{Ω} é uma rotação anti-horária de um ângulo $\omega = \|\Omega\| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ em torno do vetor unitário $\mathbf{n} = \mathbf{\Omega}/\omega$. O vetor $\mathbf{\Omega}$ é chamado (*vetor*) *velocidade angular* da rotação

$t \mapsto e^{t\Omega}$. Esta correspondência, que é claramente um isomorfismo entre espaços lineares reais, envia os vetores da base X_1, X_2, X_3 nos vetores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, respetivamente. É imediato então verificar que as parênteses de Lie entre os vetores X_k correspondem aos produtos vetoriais entre os vetores da base canónica. Assim, a correspondência $\mathfrak{so}(3) \approx \mathbb{R}^3$, definida pela (20.6), é um isomorfismo entre a álgebra de Lie do grupo das rotações, munida da parêntese de Lie, e o espaço euclidiano real de dimensão três, munido do produto vetorial.

Sistemas não inerciais, força de Coriolis. [Ar87]

Pêndulo de Foucault. [Ar87]

Álgebra de Lie de $SU(2)$ e matrizes de Pauli. A álgebra de Lie do grupo especial unitário $SU(2)$ é formada por matrizes do género

$$\begin{pmatrix} ia & \beta \\ -\bar{\beta} & -ia \end{pmatrix}$$

com $\beta \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}$. Uma base do espaço linear $\mathfrak{su}(2)$ é formada por

$$X_1 = \frac{i}{2}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = -\frac{i}{2}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \frac{i}{2}\sigma_3 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}$$

onde as σ_k são as matrizes de Pauli. É imediato verificar que as relações e comutação são $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = X_1$ e $[X_3, X_1] = X_2$.

Estas são as mesmas relações entre os geradores canónicos de $\mathfrak{so}(3)$! ...

Álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$. O grupo $SL(2, \mathbb{R})$ é o subgrupo das matrizes invertíveis $A \in GL(2, \mathbb{R})$ com determinante $\det A = 1$. O espaço $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais dois por dois $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é um espaço linear real isomorfo a \mathbb{R}^4 , com coordenadas a, b, c e d , e o grupo $SL(2, \mathbb{R})$ é portanto a quádrlica definida pela equação cartesiana $ad - bc = 1$. As matrizes

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad H_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base do espaço linear $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^3$ das matrizes reais dois por dois com traço nulo, o hiperplano definido pela equação cartesiana $a + d = 0$ em $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Pela (20.4), os exponenciais

$$g(t) := e^{tX} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

e

$$h_+(x) := e^{xH_+} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad h_-(y) := e^{yH_-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix},$$

com $t, x, y \in \mathbb{R}$, definem subgrupos a um parâmetro de $SL(2, \mathbb{R})$. O exponencial

$$k(\theta) := e^{\theta(H_- - H_+)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, define o subgrupo a um parâmetro $SO(2, \mathbb{R}) \subset SL(2, \mathbb{R})$, o grupo das rotações.

ex: Verifique as relações de comutação

$$[G, H_{\pm}] = \pm H_{\pm} \quad [H_+, H_-] = 2G$$

e

$$g(t) h_{\pm}(x) g(-t) = h_{\pm}(e^{\pm t} x)$$

ex: Calcule $e^{t(H_+ + H_-)}$.

Geradores infinitesimais de grupos unitários. Seja A um operador auto-adjunto de um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Os operadores

$$U_t := e^{itA}$$

com t real (por exemplo, um “tempo”) formam uma família a um parâmetro de operadores unitários, ou seja, U_0 é a identidade, e $U_t U_s = U_{t+s}$. Isto é evidente em dimensão finita, mas não trivial em dimensão infinita, onde a própria definição de exponencial precisa de uma versão do teorema espectral para operadores auto-adjuntos não necessariamente limitados.

O *teorema de Stone*⁴⁴ afirma que toda família a um parâmetro de operadores unitários U_t , desde que “fortemente contínua”, é gerada por um operador auto-adjunto, possivelmente não limitado. Fortemente contínua significa que $\lim_{t \rightarrow s} \|U_t |\psi\rangle - U_s |\psi\rangle\| = 0$ para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. O *gerador infinitesimal* é definido pela fórmula natural

$$A|\psi\rangle := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t |\psi\rangle - |\psi\rangle}{it}$$

no domínio $D_A \subset \mathcal{H}$ onde o limite existe (e o que não é trivial é provar que este subespaço é suficientemente grande, ou seja, denso).

O teorema de Stone é particularmente importante em mecânica quântica, onde, por exemplo, o gerador da evolução temporal é o operador Hamiltoniano H , o observável que corresponde a energia do sistema. A evolução temporal de um sistema que é preparado no estado $|\psi(0)\rangle$ no tempo $t = 0$, é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itH/\hbar} |\psi(0)\rangle,$$

que é a solução da *equação de Shrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle.$$

Geradores infinitesimais do grupo de Weyl/Heisenberg. Outro exemplo clássico, importante em mecânica quântica ou mais em geral em análise de Fourier (vejam, por exemplo, [Fo89]), é o grupo de Weyl/Heisenberg, gerado pelas translações

$$(T_q f)(x) := f(x + q)$$

e pelas modulações

$$(M_p f)(x) := e^{ipx} f(x),$$

com $q \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^* \approx \mathbb{R}$. Translações e modulações são grupos a um parâmetro de operadores unitários de $L^2(\mathbb{R})$, pois são invertíveis e é claro que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x + q)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} |e^{ipx} f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

É possível provar que o gerador infinitesimal das translações é o operador momento $P = -iD$, definido, por exemplo, no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Ou seja,

$$T_q = e^{iqP} = e^{qD}$$

Este fato é razoável, interpretando a fórmula de Taylor como

$$\begin{aligned} f(x + q) &= f(x) + q f'(x) + \frac{q^2}{2} f''(x) + \frac{q^3}{6} f'''(x) + \dots \\ &= \left(\left(1 + qD + \frac{q^2}{2} D^2 + \frac{q^3}{6} D^3 + \dots \right) f \right) (x) \end{aligned}$$

⁴⁴M.H. Stone, On one-parameter unitary groups in Hilbert Space, *Annals of Mathematics* **33** (1932), 643-648.

(naturalmente, esta não é uma demonstração!). O gerador infinitesimal das modulações é o operador *posição* Q , definido por $(Qf)(x) := x f(x)$, também no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Ou seja, como parece natural,

$$\boxed{M_p = e^{ipQ}}$$

Assim como T_q e M_p , os operadores momento e posição não comutam. De fato, satisfazem a relação de comutação

$$[P, Q] = -iI$$

e geram a álgebra de Lie do grupo de Heisenberg.

ex: Determine a matriz $D \in \text{Mat}_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$ que representa o operador derivada $(Df)(x) = f'(x)$ na base $e_k(x) := x^k/k!$ de $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$, com $k = 0, 1, \dots, n$. Calcule e^{qD} , e verifique que

$$e^{qD} = T_q.$$

21 Sistemas lineares

ref: [Ap69] Vol. 2, 7.9, 7.16-17, [HS74]

21 mai 2020

Campos lineares. Um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes (real) é uma EDO autónoma $\dot{\mathbf{x}} = L\mathbf{x}$ para uma variável $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, definida por um campo de vetores linear $L \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$. Fixada uma base de \mathbb{R}^n , por exemplo a base canónica, o sistema pode ser escrito em notação matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (21.1)$$

onde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna e $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz que representa o campo linear na base escolhida.

A origem é uma solução de equilíbrio do sistema. É a única solução de equilíbrio de a matriz A é invertível.

Fluxos lineares. Pelo teorema 20.3 (ou melhor, pela demonstração deste teorema), a solução do sistema com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ é

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0.$$

A família a um parâmetro de operadores $\Phi_t = e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que a cada tempo $t \in \mathbb{R}$ e a cada ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder a solução $\Phi_t(\mathbf{x}) := e^{tA}\mathbf{x}$ do sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$, é dita *fluxo* do campo linear. Observe que $\Phi_0 = I$ e que $\Phi_{t+s} = \Phi_t\Phi_s$. Em particular, os Φ_t são invertíveis, e $\Phi_{-t} = (\Phi_t)^{-1}$.

Conjugações lineares. Naturalmente, é possível fazer mudanças lineares de coordenadas $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ com $U \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, que transformam o sistema (21.1) no sistema *linearmente equivalente* $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$, definido pela matriz semelhante $B = UAU^{-1}$. Os fluxos de dois sistemas linearmente equivalentes são *linearmente conjugados*, no sentido em que

$$e^{tB} = Ue^{tA}U^{-1}.$$

Esta identidade diz que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{e^{tA}} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow U & & \downarrow U \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{e^{tB}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Isto implica, em particular, que o automorfismo $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ envia bijectivamente trajetórias/órbita de um sistema em trajetórias/órbitas do outro, respeitando a direção do tempo.

É claro então que a compreensão das soluções passa pela compreensão do exponencial de uma matriz semelhante UAU^{-1} mais “simples” possível.

Fluxos de campos lineares diagonalizáveis. Se A é diagonalizável, ou seja, possui n valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (não necessariamente diferentes) com vetores próprios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ que formam uma base, então o sistema (21.1) é equivalente a um sistema definido pela matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. O exponencial $e^{t\Lambda}$ é uma matriz diagonal com valores próprios $e^{t\lambda_k}$. A solução é portanto uma sobreposição

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} c_k \mathbf{v}_k$$

onde $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ é o vetor das condições iniciais $\mathbf{x}(0)$ na base dos vetores próprios.

O comportamento qualitativo assintótico das soluções é então determinado pelos sinais dos valores próprios. Por exemplo, se todos os valores próprios são negativos, i.e. $\lambda_k < 0$ para todo $k = 1, \dots, n$, então todas as soluções decaem exponencialmente, e em particular $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso a origem é um equilíbrio “assintoticamente estável”. Se todos os valores

próprios são positivos, i.e. $\lambda_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, n$, então todas as soluções com condição inicial $\mathbf{x}(0) \neq 0$ se afastam exponencialmente da origem, e em particular $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso, a origem é um equilíbrio “assimptoticamente instável”.

No caso geral, uma compreensão do comportamento qualitativo das trajetórias passa pela compreensão da forma normal de uma matriz genérica A , que nem sempre é diagonalizável.

Começamos pelo caso de dimensão dois, onde já são presentes todos os fenômenos típicos do caso geral e as provas são simples.

Sistemas lineares no plano. Um campo linear no plano é definido, na base canônica, por uma matriz quadrada 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

O sistema linear definido por A e

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (21.2)$$

Sejam λ_+ e λ_- os valores próprios de A pensada como matriz complexa, ou seja, as raízes complexas do polinômio característico $\det(zI - A)$. O produto $\lambda_+ \lambda_-$ dos valores próprios é igual ao determinante $q := \det(A) = ad - bc$, e a soma $\lambda_+ + \lambda_-$ dos valores próprios é igual ao traço $p := \text{Tr}(A) = a + d$. Os valores próprios são então

$$\lambda_{\pm} = \frac{p \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

onde $\Delta = p^2 - 4q$.

Três casos distintos são possíveis. Se $\Delta > 0$, o campo é diagonalizável, pois admite dois valores próprios reais e distintos. Se $\Delta = 0$, o campo admite apenas um valor próprio, cuja multiplicidade geométrica pode ser dois, e o operador é ainda diagonalizável, o um, e o operador não é diagonalizável. Se $\Delta < 0$, o campo não admite valores e vetores próprios reais, mas um par de valores próprios complexos conjugados.

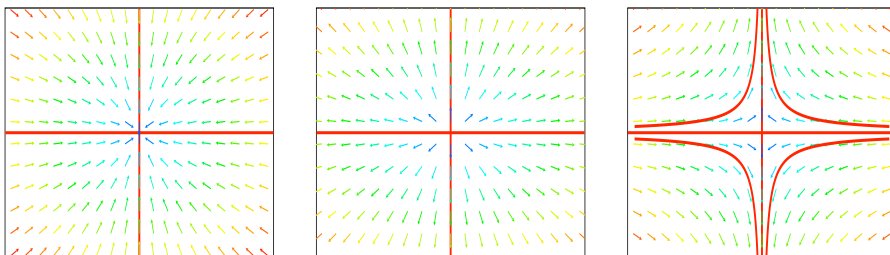
Campos lineares planares diagonalizáveis. Se a matriz é diagonalizável sobre os reais (e, em particular, $\Delta \geq 0$), ou seja, admite dois vetores próprios independentes \mathbf{v}_{\pm} , com valores próprios reais $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$, respetivamente (não necessariamente distintos), então o sistema (21.2) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A solução é

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

A origem é dita *nodo estável* se $\lambda_{\pm} < 0$, *nodo instável* se $\lambda_{\pm} > 0$, *ponto de sela* se $\lambda_- < 0 < \lambda_+$.



Nodos estável e instável, e sela.

Campos lineares planares com apenas um vetor próprio. Assumamos que a matriz A admite apenas um espaço próprio de dimensão um, contendo um vetor próprio \mathbf{v}_1 , com valor próprio $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja \mathbf{w} um vetor não nulo independente de \mathbf{v}_1 . Então a matriz que representa o campo linear na base \mathbf{v}_1, \mathbf{w} é uma matriz diagonal superior do género (15.1). As entradas diagonais são iguais a λ (pois uma segunda entrada diagonal diferente seria mais uma raiz do polinómio caraterístico, logo mais um valor próprio diferente e portanto mais um vetor próprio independente) e entrada superior direita é diferente de zero (pois caso contrário a matriz seria diagonalizável). Ou seja, o campo linear envia $L\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ e $L\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{w}$ com $a \neq 0$. Na base formada pelos vetores \mathbf{v}_1 e $\mathbf{v}_2 := a^{-1}\mathbf{w}$, o campo linear L é portanto definido pela matriz triangular superior

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (21.3)$$

Consequentemente, o sistema (21.2) é equivalente ao sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

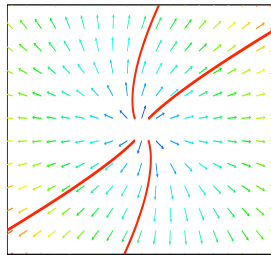
Sendo a matriz (21.3) uma soma $J_\lambda = \lambda I + N$ da matriz diagonal λI e a matriz nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que de fato satisfaz $N^2 = 0$, a série de potência que define o seu fluxo reduz-se a um polinómio de grau um em t ,

$$e^{tJ_\lambda} = e^{t\lambda} (I + tN)$$

As soluções do sistema são então, nesta base,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

A origem é dita *nodo degenerado*, estável ou instável, dependendo do sinal de λ .



Degenerate unstable node.

Blocos de Jordan no plano. Uma prova mais abstrata do fenómeno ilustrado acima introduz a ideia das “cadeias de Jordan”, os tijolos elementares da forma normal de Jordan de uma matriz.

Seja L o campo linear definido, na base canónica, pela matriz A . Assumimos que L admite apenas um espaço próprio de dimensão um, gerado pelo vetor próprio \mathbf{v}_1 com valor próprio λ . Isto significa que o núcleo do operador $L_\lambda := L - \lambda$ é $\text{Ker}(L_\lambda) = \mathbb{R}\mathbf{v}_1$. Por razões dimensionais, também a imagem de L_λ tem dimensão um. A interseção das duas retas não pode ser trivial, caso contrário o plano seria uma soma direta $\mathbb{R}^2 = \text{Im}(L_\lambda) \oplus \text{Ker}(L_\lambda)$ de dois subespaços invariantes, logo o operador L seria diagonalizável. Isto significa que $\text{Im}(L_\lambda) = \text{Ker}(L_\lambda)$, e em particular existe um vetor (não nulo) \mathbf{v}_2 tal que $L_\lambda\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Os vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , que formam uma “cadeia de Jordan”, são independentes. De fato, seja $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = 0$. Aplicando o operador L_λ obtemos $L_\lambda(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = a_2\mathbf{v}_1 = 0$ (pois $L_\lambda\mathbf{v}_1 = 0$ e $L_\lambda\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$), e portanto $a_2 = 0$. Mas então $a_1\mathbf{v}_1 = 0$ implica que também $a_1 = 0$. Finalmente, basta observar que, na base formada por \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 (chamada “base de Jordan”), o operador L é representado pela matriz (21.3), pois $L\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ and $L\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$.

Campos lineares planares sem vetores próprios. O terceiro e último caso é um campo linear L definido por uma matriz A sem valores próprios reais ($\Delta < 0$). Podemos pensar que a mesma matriz real A define um operador $L^{\mathbb{C}}$ no plano complexo \mathbb{C}^2 , a “complexificação do operador L definido no plano \mathbb{R}^2 ”. Este operador $L^{\mathbb{C}}$ admite dois valores próprios distintos e complexos conjugados

$$\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\omega.$$

com $\omega > 0$ (conjugados pelo teorema 7.3, pois o polinómio característico tem coeficientes reais, e diferentes porque o operador L não admite valores próprios reais). Se \mathbf{v}_+ é um vetor próprio associado ao valor próprio λ_+ , assim que $A\mathbf{v}_+ = \lambda_+\mathbf{v}_+$, então $\mathbf{v}_- = \overline{\mathbf{v}_+}$ é um vetor próprio com valor próprio λ_- , pois $A\mathbf{v}_- = A\overline{\mathbf{v}_+} = \overline{A\mathbf{v}_+} = \overline{\lambda_+\mathbf{v}_+} = \lambda_-\mathbf{v}_-$. Os vetores $\mathbf{e}_+ = \mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-$ e $\mathbf{e}_- = i(\mathbf{v}_- - \mathbf{v}_+)$ são independentes e reais, logo formam uma base de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$. Um cálculo mostra que

$$A\mathbf{e}_+ = \lambda_+\mathbf{v}_+ + \lambda_-\mathbf{v}_- = \alpha(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-) + i\omega(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) = \alpha\mathbf{e}_+ - \omega\mathbf{e}_-$$

e

$$A\mathbf{e}_- = i\lambda_-\mathbf{v}_- - i\lambda_+\mathbf{v}_+ = i\alpha(\mathbf{v}_- - \mathbf{v}_+) + \omega(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-) = \alpha\mathbf{e}_- + \omega\mathbf{e}_+$$

Portanto, a matriz que representa o campo linear L na base formada por \mathbf{e}_+ e \mathbf{e}_- é a matriz

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

soma de αI e da matriz anti-simétrica $\Omega = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como toda matriz comuta com os múltiplos da identidade, pelo teorema 20.4 podemos calcular separadamente os fluxos de αI e Ω e depois multiplicar. O fluxo da parte diagonal é simplesmente $e^{t\alpha I} = e^{\alpha t}I$. Por outro lado, um cálculo elementar (que usa a série de Taylor das funções trigonométricas) mostra que o fluxo de Ω é

$$e^{t\Omega} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

ou seja, uma rotação horária de um ângulo $t\omega$. O resultado é que

$$e^{t(\alpha I + \Omega)} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

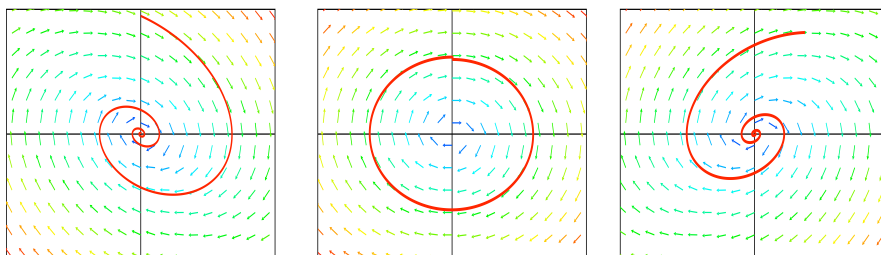
O resultado é que um sistema linear definido por uma matriz sem valores próprios reais é equivalente ao sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

com $\omega > 0$. A solução é

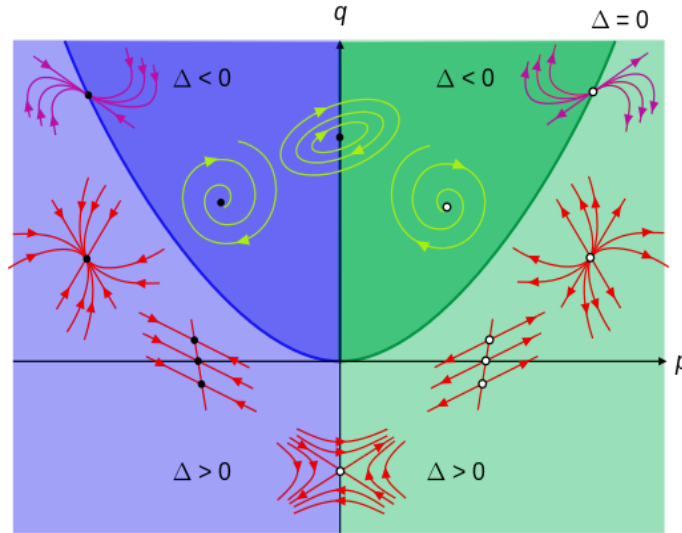
$$e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Se $\alpha = 0$, então as órbitas são elipses $x^2 + y^2 = \text{constante}$, e a origem é chamada *centro* (este caso corresponde a um oscilador harmónico de frequência ω). Se $\alpha \neq 0$, as órbitas são espirais logarítmicas, que saem da origem ou entram na origem, dependendo do sinal de α . A origem é dita *foco estável* se $\alpha < 0$ (este caso corresponde a um oscilador amortecido), e *foco instável* se $\alpha > 0$.



Focos estável, foco, e foco instável.

Desenho global. É claro que a estabilidade ou instabilidade de nodos ou focos é preservada para pequenas perturbações dos parâmetros, pois as partes reais dos valores próprios mantêm os seus sinais. Esta é uma figura famosa dos possíveis retratos de fase, dependendo do traço e do determinante da matriz A (vejam, por exemplo, o clássico [HS74]).



$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + By & p &= A + D \\ \frac{dy}{dt} &= Cx + Dy & q &= AD - BC \\ & & \Delta &= p^2 - 4q \end{aligned}$$

By Maschen, from [Wikimedia Commons](#).

ex: Discuta os casos degenerados quando um dos valores próprios é nulo (ou seja, $\det(A) = 0$).

ex: Considere o oscilador invertido

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= q \end{aligned}$$

Determine a natureza do equilíbrio. Determine a solução com condições iniciais genéricas $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.

ex: Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas órbitas à volta da posição de equilíbrio no espaço de fases) dos seguintes sistemas lineares homogêneos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} & \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} & \quad \begin{cases} \dot{x} = 4x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases} & \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = 3y \end{cases} & \quad \begin{cases} \dot{x} = -7x + y \\ \dot{y} = -4x - 3y \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x \end{cases} & \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + 5y \\ \dot{y} = -5x - y \end{cases} & \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 5y \\ \dot{y} = -5x + y \end{cases} \end{aligned}$$

Determine também a solução com condições iniciais genéricas $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.

ex: A corrente que circula num circuito LRC é solução da equação diferencial homogênea

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

Escreva o sistema linear correspondente, e esboce os possíveis retratos de fases dependendo dos valores dos parâmetros L , R e C .

ex: [Ap69] Vol. 2, 7.12

Ciclotrão. A força de Lorentz que age sobre uma partícula de carga q em um campo magnético \mathbf{B} é igual ao produto vetorial $\mathbf{F} = (q/c) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, onde \mathbf{v} é a velocidade da partícula e $c \simeq 299,792,458$ m/s denota a velocidade da luz. Consequentemente, a equação do movimento (de Newton) da partícula de massa m é

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Se o campo é homogêneo e constante, por exemplo $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ com B independente da posição e do tempo, então a componente vertical v_z da velocidade $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ é constante (pois tem derivada nula), e as componentes v_x e v_y satisfazem o sistema de EDOs lineares

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega v_y \\ \dot{v}_y &= -\omega v_x \end{aligned}$$

onde $\omega = qB/mc$ é chamada *frequência de ciclotrão*. As trajetórias da partícula são hélices

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + (A \cos(\omega t + \varphi), A \sin(\omega t + \varphi), v_z t)$$

onde os parâmetros $\mathbf{a}, v_z, A, \varphi$ dependem da posição e da velocidade iniciais.

Blocos de Jordan. Seja $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ um operador linear definido num espaço linear complexo de dimensão finita. Dado um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, denotamos por L_λ o operador $L - \lambda$. Se o núcleo de L_λ não é trivial, então λ é um valor próprio de L , e $\mathbf{V}_\lambda = \text{Ker}(L_\lambda)$ é o espaço próprio associado.

Um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é dito *vetor próprio generalizado* se está no núcleo de alguma potência de L_λ , ou seja, se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $L_\lambda^n \mathbf{v} = 0$ para algum inteiro minimal $n \geq 1$. Este inteiro n é dito *período* de \mathbf{v} , e o vetor \mathbf{v} é também dito *L_λ -cíclico* (a órbita de \mathbf{v} pela aplicação L_λ é formada por n vetores não nulos distintos).

Se o período é $n = 1$, então \mathbf{v} é um vetor próprio de L . Em geral, os n vetores

$$\mathbf{v}_1 = L_\lambda^{n-1} \mathbf{v} \quad \mathbf{v}_2 = L_\lambda^{n-2} \mathbf{v} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{n-1} = L_\lambda \mathbf{v}_n \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{v} \quad (21.4)$$

são vetores próprios generalizados, pois $L_\lambda^k \mathbf{v}_k = L_\lambda^k L_\lambda^{n-k} \mathbf{v} = L_\lambda^n \mathbf{v} = 0$, e \mathbf{v}_1 é um vetor próprio com valor próprio λ . O espaço gerado pelos \mathbf{v}_k 's é L -invariante porque

$$L\mathbf{v}_k = L(L_\lambda^{n-k} \mathbf{v}) = L_\lambda^{n-k+1} \mathbf{v} + \lambda L_\lambda^{n-k} \mathbf{v} = \mathbf{v}_{k-1} + \lambda \mathbf{v}_k$$

onde, naturalmente, $\mathbf{v}_0 = (L - \lambda I)^n \mathbf{v} = 0$.

Teorema 21.1. *Se \mathbf{v} é um vetor L_λ -cíclico de período n , então os n vetores (21.4) são linearmente independentes e geram um subespaço L -invariante de vetores próprios generalizados.*

Demonstração. Seja $a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n = 0$. Ao aplicar L_λ^{n-1} aos dois termos da igualdade, temos que $a_n \mathbf{v}_1 = 0$, logo $a_n = 0$. Ao aplicar L_λ^{n-2} aos dois termos da igualdade que sobra $a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} = 0$, temos que $a_{n-1} \mathbf{v}_1 = 0$, logo também $a_{n-1} = 0$. E assim a seguir. □

O núcleo $\text{Ker}(L_\lambda^k)$ é chamado *espaço próprio generalizado* de ordem k . É imediato ver que $\text{Ker}(L_\lambda) \subset \text{Ker}(L_\lambda^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(L_\lambda^n)$.

Se os vetores (21.4) geram o próprio espaço \mathbf{V} , que portanto é isomorfo a $\mathbf{V} = \text{Ker}(L_\lambda^n) \approx \mathbb{C}^n$, então o espaço \mathbf{V} é dito *cíclico*. O cálculo acima mostra que

$$L\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad L\mathbf{v}_k = \lambda \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1} \quad \text{se } 2 \leq k \leq n$$

Então, a matriz que representa L nesta base é

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (21.5)$$

Em particular, \mathbf{v}_1 é um vetor próprio com valor próprio λ . O espaço próprio $\mathbf{V}_\lambda = \text{Ker}(L_\lambda)$ é a reta $\mathbf{V}_\lambda = \mathbb{C}\mathbf{v}_1$, ou seja, a multiplicidade geométrica do valor próprio λ é igual a 1. A matriz (21.5) é dita *bloco de Jordan* de dimensão n , e a base (21.4) é dita *base de Jordan*, ou *cadeia de Jordan* de comprimento n .

Observe que um bloco de Jordan de dimensão n é da forma

$$J = \lambda I + N$$

onde N é a matriz nilpotente (triangular superior)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (21.6)$$

que verifica $NE_k = E_{k-1}$, se E_k denotam os vetores coluna da base canônica de \mathbb{C}^n , e $N^n = 0$. O operador definido pela matriz N , que envia $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_n, 0)$, é também chamado *deslocamento esquerdo*.

O polinômio característico de um bloco de Jordan J de comprimento n é $P_J(z) = (z - \lambda)^n$, e portanto a multiplicidade algébrica do valor próprio λ é n . O polinômio minimal (o polinômio mônico $p(t)$ de grau mínimo tal que $p(J) = 0$) é também $M_J(z) = (z - \lambda)^n$ (em quanto o polinômio minimal da matriz λI , com I matriz identidade de ordem n , é apenas $\mu_J(z) = (z - \lambda)$).

Quase-polinômios e derivada. O modelo de um bloco de Jordan é o operador derivação $\partial : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, definido por $(\partial f)(t) := f'(t)$, no espaço linear \mathbf{V} dos quase-polinômios $f(t) = p(t)e^{\lambda t}$ de grau $\deg(p) < n$. Se $\lambda = 0$, então $\partial^n = 0$, pois a n -ésima derivada de um polinômio de grau $< n$ é nula. Em geral, é imediato verificar que $(\partial - \lambda)^n = 0$. O vetor próprio é $f(t) = e^{\lambda t}$, com valor próprio λ . A base de Jordan é

$$e^{\lambda t} \quad t e^{\lambda t} \quad \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda t} \quad \dots \quad \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda t}$$

Nesta base, o operador ∂ é representado pela matriz (21.5).

Fluxo de um bloco de Jordan. Consideremos um bloco de Jordan J_λ de dimensão n , definido em (21.5). O exponencial de $t J_\lambda$ define o fluxo do sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = J_\lambda \mathbf{x}$$

cujos espaço de fases é um espaço cíclico \mathbb{C}^n . Como a parte nilpotente N comuta com λI , podemos calcular separadamente os exponencial e depois multiplicar. Sendo N nilpotente de período n , ou seja, $N^n = 0$, a série que define o exponencial de tN é de fato um polinômio de grau $n - 1$, pois

$$e^{tN} = I + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} N^{n-1}.$$

O exponencial da parte diagonal é $e^{t\lambda}I$, e portanto

$$e^{tJ_\lambda} = e^{t\lambda} \left(I + tN + \frac{t}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1} \right) \\ = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo uma correção polinomial desprezável se comparada com um crescimento ou um decaimento exponenciais, é claro que o comportamento assintótico das trajetórias do sistema linear apenas dependem do sinal da parte real de λ , desde que não seja nula.

Teorema 21.2. *Se $\Re(\lambda) < 0$, então para todo $0 < \alpha < |\Re(\lambda)|$ existe uma constante C tal que*

$$\|e^{tJ_\lambda} \mathbf{v}\| \leq C e^{-\alpha t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } t \geq 0.$$

Demonstração. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ é uma base de Jordan, então um vetor genérico é $\mathbf{v} = \sum_k a_k \mathbf{v}_k$. É claro que

$$e^{tJ_\lambda} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \left(\sum_i a_i p_{ik}(t) \right) \mathbf{v}_k$$

onde os $p_{ik}(t)$'s são certos polinômios de grau $< n$, que apenas dependem da dimensão n do bloco de Jordan. Seja $\Re(\lambda) = -\rho < 0$. Consideramos $0 < \alpha < \rho$, e definimos $\varepsilon = \rho - \alpha > 0$. Podemos definir uma norma no espaço cíclico gerado pelos \mathbf{v}_k 's de acordo com $\|\mathbf{v}\| := \max_k |a_k|$. Então, se $M = \max_{i,k} M_{ik}$ denota o valor máximo dos $M_{ik} = \sup_{t \geq 0} |e^{-t\varepsilon} p_{ik}(t)|$ (que são finitos porque $\varepsilon > 0$), é claro que

$$\|e^{tJ_\lambda} \mathbf{v}\| \leq M e^{-\alpha t} \|\mathbf{v}\|$$

para todos os tempos positivos $t \geq 0$. Como todas as normas de um espaço de dimensão finita são equivalentes, a mesma afirmação é verdadeira se usamos a norma euclidiana, possivelmente substituindo a constante M com alguma outra constante C . \square

Assim, se $\Re(\lambda) < 0$, todos os vetores são contraídos pelo fluxo de J_λ , e decaem exponencialmente para zero quando $t \rightarrow \infty$.

Invertendo a direção do tempo, é claro que se $\Re(\lambda) = \rho > 0$ e $\rho > \beta > 0$, então existe uma constante c tal que

$$\|e^{-tJ_\lambda} v\| \leq C e^{-\beta t} \|v\| \quad \forall t \geq 0$$

Assim, se $\Re(\lambda) > 0$, todos os vetores são dilatados pelo fluxo de J_λ , e decaem exponencialmente para zero quando $t \rightarrow -\infty$.

Forma normal de Jordan. Acontece que todo operador linear num espaço linear complexo de dimensão finita é uma soma direta de blocos de Jordan.

Teorema 21.3 (forma normal de Jordan). *Seja L é um operador linear de um espaço vetorial complexo de dimensão finita \mathbb{C}^n . O espaço é uma soma direta $\mathbb{C}^n = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_d$ de subespaços L -invariantes cíclicos.*

Se em cada subespaço invariante cíclico escolhemos uma base de Jordan, a matriz que representa L na base resultante é uma matriz diagonal em blocos

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_d \end{pmatrix} \quad (21.7)$$

onde cada $J_k = \lambda_k I + N_k$ é um bloco de Jordan da forma (21.5). Os λ_k são os valores próprios de L , ou seja, as raízes do polinómio caraterístico $P_A(z) = \det(zI - A)$, se A é a matriz que representa L na base canónica. De fato, o polinómio caraterístico é um produto $P_A(z) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (z - \lambda)^{\alpha_\lambda}$, onde α_λ é a *multiplicidade algébrica* do valor próprio λ , que é igual à soma das dimensões dos blocos de Jordan com $\lambda_k = \lambda$. A *multiplicidade geométrica* do valor próprio λ é a dimensão do espaço próprio $\text{Ker}(L_\lambda)$, que é igual a cardinalidade de blocos de Jordan com $\lambda_k = \lambda$. O polinómio minimal de A é um produto $M_A(z) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (z - \lambda)^{\mu_\lambda}$, sendo μ_λ a dimensão do maior bloco de Jordan com $\lambda_k = \lambda$.

Se A é a matriz que representa o operador L na base canónica (ou em qualquer outra base), então existe uma matriz invertível U (cujas colunas são os vetores das bases de Jordan) tal que $U^{-1}AU = J$. A *forma canónica* J é única a menos de permutações dos blocos. Em particular, a matriz pode ser representada como uma soma

$$A = \Lambda + N$$

de uma matriz semi-simples, ou seja, diagonalizável, $\Lambda = U(\lambda_1 I \oplus \lambda_2 I \oplus \dots)U^{-1}$ e uma matriz nilpotente $N = U(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots)U^{-1}$ que comutam.

As demonstrações clássicas do teorema 21.3 são elementares mas demoradas, e podem ser encontradas, por exemplo, em [Ax97, HS74, La87].

Forma normal de Jordan de matrizes reais. Consideramos agora um operador $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido, na base canónica, pela matriz real $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Podemos pensar em A como numa matriz complexa, que define a complexificação, $L^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, e como tal conjugada, de acordo com o teorema 21.3, a uma matriz diagonal em blocos (21.7). Como A é real, o seu polinómio caraterístico tem coeficientes reais. Pelo teorema 7.3, os valores próprios de A são números reais λ ou pares de números complexos conjugados $\lambda = \alpha + i\omega$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$.

Teorema 21.4 (forma normal de Jordan real). *Seja L um operador no espaço vetorial real \mathbb{R}^n . Então o espaço total é uma soma direta*

$$\mathbb{R}^n = \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathbf{E}_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}} \right).$$

de subespaços invariantes \mathbf{E}_λ , associados aos valores próprios reais λ 's, e $\mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}$, associados aos pares de valores próprios conjugados não reais $\lambda, \bar{\lambda}$.

Numa base apropriada, a restrição do operador L a cada subespaço invariantes \mathbf{E}_λ , com $\lambda \in \mathbb{R}$, é um bloco de Jordan da forma (21.5). Numa base apropriada, a restrição do operador L a cada subespaço invariante $\mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}$, com $\lambda = \alpha + i\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, é uma matriz da forma

$$J_{\lambda, \bar{\lambda}} = \begin{pmatrix} R_{\lambda, \bar{\lambda}} & I & & & \\ & R_{\lambda, \bar{\lambda}} & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R_{\lambda, \bar{\lambda}} & I \\ & & & & R_{\lambda, \bar{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (21.8)$$

com

$$R_{\lambda, \bar{\lambda}} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Consequentemente, numa base apropriada, o operador L é representado por uma matriz diagonal em blocos (21.7), onde cada bloco J_k é da forma (21.5) ou (21.8).

Demonstração. De acordo com o teorema 21.3, \mathbb{C}^n é uma soma direta de subespaços \mathbf{V}_λ invariantes para a complexificação do operador L . A matriz que define o operador complexificado numa base apropriada é uma soma direta de blocos de Jordan.

Consideramos um bloco de Jordan com valor próprio real λ . Se $\mathbf{x} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ é o vetor L_λ -cíclico que gera o espaço cíclico \mathbf{V}_λ , então x ou y é um vetor L_λ -cíclico real. Este vetor gera portando

um espaço cíclico real \mathbf{E}_λ , e portanto uma cadeia de Jordan de dimensão real igual à dimensão complexa de \mathbf{E}_λ .

Consideramos agora um bloco de Jordan associado a um espaço cíclico \mathbf{V}_λ , com valor próprio $\lambda = \alpha + i\omega$ que não é real (ou seja, com $\omega \neq 0$). Então o operador complexificado também admite o valor próprio conjugado $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$, e o correspondente espaço cíclico $\mathbf{V}_{\bar{\lambda}}$. É claro que as dimensões de \mathbf{V}_λ e $\mathbf{V}_{\bar{\lambda}}$ são iguais, pois se \mathbf{v} is L_λ -cíclico então $\bar{\mathbf{v}}$ é $L_{\bar{\lambda}}$ -cíclico, e vice-versa. Procedendo como no caso planar (i.e. usando um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do teorema 17.8), é então fácil verificar que o subespaço invariante $\mathbf{V}_\lambda \oplus \mathbf{V}_{\bar{\lambda}} \subset \mathbb{C}^n$ dá origem a um subespaço invariante real $\mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}} \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão real igual à dimensão complexa de \mathbf{V}_λ , onde o operador é um bloco do género (21.8). \square

Fatorização de operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes. De acordo com o teorema de Picard-Lindelöf 2.2, o espaço das soluções da EDO linear homogênea com coeficientes constantes de ordem n

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0 \quad (21.9)$$

é um subespaço linear $\mathcal{H} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ de dimensão $\dim \mathcal{H} = n$ do espaço $C^\infty(\mathbb{R})$ das funções $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente deriváveis. Pode ser caracterizado como sendo o núcleo $\mathcal{H} = \text{Ker}L$ do operador diferencial com coeficientes constantes

$$L = \partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_2\partial^2 + a_1\partial + a_0.$$

É claro que a EDO (21.9) é equivalente a um sistema linear em \mathbb{R}^n , a portanto pode ser estudado com os métodos ilustrados até agora. No entanto, existe também uma outra possibilidade, que revela o significado analítico dos blocos de Jordan.

As soluções de (21.9) são combinações lineares (finitas) de “quase-polinómios”. De fato, a conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução de (21.9) se z é uma raiz do *polinómio caraterístico*

$$P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0.$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinómio $P(z)$ é um produto

$$P(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} (z - \lambda_2)^{n_2} \cdots (z - \lambda_\ell)^{n_\ell}$$

de fatores $(z - \lambda_k)^{n_k}$, onde os $\lambda_k \in \mathbb{C}$ são as raízes (em geral, complexas) do polinómio, e os inteiros $n_k \geq 1$ as respetivas multiplicidades algébricas. As multiplicidades algébricas satisfazem $n_1 + n_2 + \cdots + n_\ell = n$.

A correspondência entre o polinómio $P(z)$ e o operador $L = P(\partial)$ é um isomorfismo da álgebra dos polinómios em uma variável z sobre a álgebra dos operadores diferenciais com coeficientes constantes. Ou seja, combinações lineares de polinómios são enviadas em combinações lineares de operadores diferenciais, e ao produto pontual entre dois polinómios corresponde o produto, i.e. a composição, dos operadores diferenciais (que é comutativa quando os coeficientes são constantes). Consequentemente, o operador L também fatoriza num produto

$$L = (\partial - \lambda_1)^{n_1} (\partial - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\partial - \lambda_\ell)^{n_\ell}.$$

Os operadores $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$, com λ_k 's diferentes, comutam. Consequentemente, o núcleo de L contém os núcleos de cada um dos fatores. O núcleo de $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$ é o espaço de dimensão n_k dos quase-polinómios $p(t)e^{\lambda_k t}$, onde $p(t)$ é um polinómio de grau $\deg(p) < n_k$. Portanto, a solução geral de (21.9) é uma sobreposição

$$x(t) = \sum_k p_k(t) e^{\lambda_k t},$$

onde $\lambda_k \in \mathbb{C}$ são as raízes do polinómio caraterístico, com multiplicidades algébricas n_k , e os $p_k \in \mathbb{C}[t]$ são polinómios arbitrários de grau $\deg(p_k) < n_k$.

Se os coeficientes a_k 's da equação diferencial linear (21.9) são números reais (como acontece frequentemente na física!), então o polinómio caraterístico possui raízes reais ou pares de raízes

complexas conjugadas. É então possível construir um espaço de dimensão real n de soluções reais, da forma seguinte.

A cada raiz real $\lambda_k \in \mathbb{R}$ com multiplicidade algébrica $n_k \geq 1$ está associado o espaço de dimensão real n_k dos quase-polinómios reais que anulam o operador $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$, ou seja, o espaço linear de dimensão real n_k dos

$$p(t) e^{\lambda_k t}$$

com $p \in \mathbb{R}[t]$ e $\deg(p_k) < n_k$.

A cada par de raízes complexas conjugadas $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$ e $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - i\omega_k \in \mathbb{C}$ (com $\omega_k > 0$), de multiplicidade algébrica n_k , ou seja, a cada fator

$$(\partial - \lambda_k)^{n_k} (\partial - \bar{\lambda}_k)^{n_k} = ((\partial - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)^{n_k}$$

de L , está associado o espaço linear de dimensão real $2n_k$ dos quase-polinómios

$$p(t) e^{\alpha_k t} \cos(\omega_k t) + q(t) e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t)$$

onde $p, q \in \mathbb{R}[t]$ são polinómios reais de grau $\deg(p) < n_k$ e $\deg(q) < n_k$.

ex: Verifique que o espaço das soluções de $\partial^n x = 0$ é o espaço linear $\text{Pol}_{<n}$ dos polinómios de grau $< n$.

ex: Verifique que o núcleo do operador linear $L_\lambda := \partial - \lambda$ é o espaço linear de dimensão 1 gerado pela função $e^{\lambda t}$.

ex: Seja M_λ o operador *modulação*, definido por $(M_\lambda x)(t) := e^{\lambda t} x(t)$. Verifique que

$$\partial - \lambda = M_\lambda \partial M_\lambda^{-1}$$

(ou seja, M_λ realiza uma conjugação entre os operadores ∂ e $\partial - \lambda$), e portanto

$$(\partial - \lambda)^n = M_\lambda \partial^n M_\lambda^{-1}.$$

Deduz a que o núcleo da potência $(\partial - \lambda)^n$, com $n \geq 1$, é o espaço linear (de dimensão n) dos quase-polinómios $p(t)e^{\lambda t}$ de grau $\deg(p) < n$.

ex: Determine a solução geral das seguintes ODEs lineares

$$\ddot{x} - \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \quad \ddot{x} = x \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x} = 0$$

ex: [Ap69] Vol. 2, 6.9.

Espaços estável, neutro e instável Seja $L \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ um campo linear, definido na base canónica pela matriz real A . O fluxo do sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

é dado por $\Phi_t = e^{tA}$. O comportamento assintótico do fluxo em cada subespaço invariante (ou, com abuso de linguagem, cadeia de Jordan) \mathbf{E}_λ ou $\mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}$ descrito no teorema 21.4 depende da parte real do valor próprio λ correspondente.

É possível representar o espaço de fases como soma direta de três subespaços invariantes

$$\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^- \oplus \mathbf{E}^0 \oplus \mathbf{E}^+$$

onde o *espaço estável* \mathbf{E}^- é a soma direta das cadeias de Jordan com $\Re(\lambda) < 0$, o *espaço instável* \mathbf{E}^+ é a soma direta das cadeias de Jordan $\Re(\lambda) > 0$, e finalmente o *espaço neutro* \mathbf{E}^0 é a soma direta das cadeias de Jordan com $\Re(\lambda) = 0$.

4 jun 2020

Poços e fontes. O sistema linear, ou, melhor, o ponto de equilíbrio 0 , é chamado *poço* (em inglês, *sink*) se todos os valores próprios têm parte real negativa, i.e. $\Re(\lambda) < 0$, assim que $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^-$. Por exemplo, nodos e focos estáveis no plano são poços.

O sistema linear é chamado *fonte* (em inglês, *source*) se todos os valores próprios têm parte real positiva, assim que $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^+$. Por exemplo, nodos e focos instáveis no plano são fontes.

É claro que uma inversão da direção do tempo transforma um poço numa fonte e vice-versa pois $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$. O seguinte teorema diz que os poços são os sistemas lineares cujas trajetórias decaem exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 21.5. *O sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ é um poço sse satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:*

- i) todos os valores próprios de A têm parte real negativa,
- ii) todas as soluções decaem $e^{tA}\mathbf{v} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$,
- iii) existe um expoente $\alpha > 0$ e uma constante C tais que para todos os $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\|e^{tA}\mathbf{v}\| \leq C e^{-\alpha t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } t \geq 0. \quad (21.10)$$

Demonstração. É óbvio que iii) \Rightarrow ii). É também claro que ii) \Rightarrow i), pois se algum valor próprio tem $\Re(\lambda) \geq 0$, então é fácil encontrar, na cadeia de Jordan correspondente, uma solução que não decai quando $t \rightarrow \infty$. Para provar que i) \Rightarrow iii), começamos por observar que iii) acontece em cada cadeia de Jordan, pelo teorema 21.2. Mas se fixamos uma norma em cada subespaço de uma soma direta (por exemplo a restrição da norma euclidiana), então podemos definir uma norma no espaço total considerando o máximo (ou a soma, ou a raiz quadrada da soma dos quadrados) entre as normas das componentes dos vetores. Relativamente a esta norma temos claramente a desigualdade (21.10) com algum expoente $\alpha > 0$ estritamente inferior ao menor dos $|\Re(\lambda)|$'s e alguma constante C . Pela equivalência de todas as normas em \mathbb{R}^n , a mesma desigualdade é verificada relativamente a toda outra norma, com possivelmente uma constante C diferente. \square

Mudando a direção do tempo, obtemos também uma caracterização das fontes. Todas as trajetórias não nulas de uma fonte divergem exponencialmente, ou seja, satisfazem

$$\|e^{tA}\mathbf{v}\| \geq C e^{\beta t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } t \geq 0,$$

para algum expoente $\beta > 0$, alguma constante C .

Campos lineares hiperbólicos. Um campo linear L é chamado *hiperbólico* se o espectro da sua complexificação é disjunto do eixo imaginário, ou seja, se todos os valores próprios λ , reais ou complexos, têm parte real $\Re(\lambda) \neq 0$. O espaço de fases de um campo hiperbólico é então uma soma direta

$$\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^- \oplus \mathbf{E}^+$$

apenas dos subespaços estável e instável.

É claro que poços e fontes são hiperbólicos, mas o caso mais interessante é quando ambos os espaços \mathbf{E}^\pm são não vazios. Um argumento análogo a prova do teorema 21.5 mostra a seguinte caracterização de um campo hiperbólico.

Teorema 21.6. *Seja A um campo hiperbólico em \mathbb{R}^n . O espaço de fase é uma soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^- \oplus \mathbf{E}^+$ dos subespaços invariantes estável e instável, e existem expoentes positivos $\alpha, \beta > 0$ e uma constante C tais que*

$$\|e^{tA}\mathbf{v}\| \leq C e^{-\alpha t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } \mathbf{v} \in \mathbf{E}^- \text{ e } t \geq 0$$

e

$$\|e^{-tA}\mathbf{v}\| \leq C e^{-\beta t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } \mathbf{v} \in \mathbf{E}^+ \text{ e } t \geq 0$$

O fluxo de um campo hiperbólico contrai os vetores do espaço estável e dilata os vetores do espaço instável. De fato, os espaços estável e instável podem ser caracterizados como os conjuntos dos vetores \mathbf{v} satisfazendo $e^{\pm tA}\mathbf{v} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, respetivamente. Se os dois subespaços não são vazios, trajetórias genéricas $e^{tA}\mathbf{v}$, que não começam em $\mathbf{E}^- \cup \mathbf{E}^+$, divergem quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Os campos lineares hiperbólicos são o modelos paradigmáticos de uma grande classe de sistemas dinâmicos, tratada pela área da teoria moderna dos sistemas dinâmicos chamada *teoria hiperbólica*. Uma introdução clássica é [HS74].

Sistemas forçados. Um *sistema linear não homogéneo*, ou *forçado*, é uma lei

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (21.11)$$

para o vetor $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, onde $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ é uma “força” dependente do tempo. As soluções da equação homogénea associada $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ são $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{z}$, onde \mathbf{z} é um vetor constante. A conjectura $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{z}(t)$ (obtida ao fazer “variar as constantes” da solução da homogénea) é solução de (21.11) sse

$$A e^{tA}\mathbf{z} + e^{tA}\dot{\mathbf{z}} = A e^{tA}\mathbf{z} + \mathbf{f}(t),$$

e portanto sse $\mathbf{z}(t)$ é solução do sistema simples

$$\dot{\mathbf{z}} = e^{-tA}\mathbf{f}(t).$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, aplicado a cada entrada da matriz,

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\tau A}\mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

Sendo $\mathbf{z}(t_0) = e^{-t_0 A}\mathbf{x}(t_0)$, a solução de (21.11) com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ é

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}\mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

Mais uma vez, mais fácil do que lembrar esta fórmula é útil lembrar o método.

ex: Considere o oscilador harmónico forçado

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q + f(t) \end{aligned}$$

Determine uma fórmula integral para a solução com condição inicial arbitrária $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$. Compare a resposta com a fórmula (9.4).

ex: Considere o sistema forçado

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q + p \\ \dot{p} &= p + e^{-t} \end{aligned}$$

Determine a solução com condição inicial arbitrária $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.

ex: Considere o sistema forçado

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -q + p \\ \dot{p} &= -p + t \end{aligned}$$

Determine a solução com condição inicial arbitrária $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.

Osciladores acoplados e forçados. Considere um sistema de dois osciladores acoplados e forçados, com lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} \varepsilon (x_1 - x_2)^2 + f_1(x_1, t) + f_2(x_2, t).$$

onde $\partial f_1/\partial x_1$ e $\partial f_2/\partial x_2$ são as forças externas que agem sobre o primeiro e o segundo oscilador, respectivamente.

Um caso simples é uma força constante, assim que $f_k(x_k, t) = x_k f(t)$. Nas coordenadas (não ortonormadas) $z_1 = (x_1 + x_2)/2$ e $z_2 = (x_1 - x_2)/2$ que diagonalizam a forma quadrática da energia potencial em ausência de força externa, as equações de Euler-Lagrange assumem a forma

$$\ddot{z}_1 = -\omega_1^2 z_1 + 2f(t) \quad \text{e} \quad \ddot{z}_2 = -\omega_2^2 z_2,$$

onde $\omega_1 = \omega$ e $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\varepsilon}$. Portanto, a força age sobre o centro de massa do sistema, de coordenada z_1 , mas não sobre as oscilações “internas” da coordenada z_2 .

ex: Determine a solução geral (pode assumir que $\omega = 1$).

ex: [Ap69] Vol. 2, 7.17.

Linear control theory.

Referências

- [Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, 1969 [*Cálculo*, Editora Reverté, 1999].
- [Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR, 1985. [*Ordinary Differential Equations*, Springer, 1992]
- [Ar87] V.I. Arnold, *Métodos matemáticos da mecânica clássica*, MIR, 1987. [*Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1989]
- [Ar89] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, 1989. [*Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1988]
- [Ax97] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, second edition, Springer, 1997.
- [Ba77] F. Banino, *Geometria per fisici*, Feltrinelli, 1977.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Bo89] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Algebra I*, Springer, 1989.
- [BR98] T.S. Blyth and E.F. Robertson, *Basic Linear Algebra*, McGraw Hill, 1998.
- [Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948. [*O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000].
- [Di47] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (2nd edition), Clarendon Press, 1947
- [Fe63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [Fo89] G.B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press, 1989.
- [Go96] R. Godement, *Cours d'algèbre* (Troisième édition mise à jour), Hermann Éditeurs, 1996.
- [Ha58] P.R. Halmos, *Finite dimensional vector spaces*, Van Nostrand, 1958.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [KKR62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics*, McGraw-Hill, 1962.
- [La87] S. Lang, *Linear Algebra*, Third Edition, UTM Springer, 1987.
- [La97] S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, UTM Springer, 1997.
- [LL78] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.
- [MW85] J.E. Marsden and A. Weinstein, *Calculus I & II*, Springer, 1985.
- [Me00] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.
- [MB99] S. MacLane and G. Birkhoff, *Algebra (Third Edition)*, AMS Chelsea Publishing, 1999.
- [Na06] P.J. Nahin, *Dr. Euler's fabulous formula: cures many mathematical ills*, Princeton University Press, 2006.
- [Pe05] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Knopf, 2005.

- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2006.
- [Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 2004.
- [Ru87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [Se89] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1989.
- [SG04] M. Stone and P. Goldbart, *Mathematics for Physics*, Cambridge University Press, 2004.
- [St98] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Hartcourt Brace Jonovich Publishers, 1998.
- [St09] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, fourth edition, Wellesley-Cambridge Press and SIAM 2009.
<http://math.mit.edu/linearalgebra/> , MIT Linear Algebra Lectures
- [Tr13] W.F. Trench, *Elementary Differential Equations*, 2013. Books and Monographs. Book 8.
<http://digitalcommons.trinity.edu/mono/8>
- [Wa91] B.L. van der Waerden, *Algebra*, Springer, 1991 [*Moderne Algebra*, 1930-1931].
- [We52] H. Weyl, *Space Time Matter*, Dover, 1952 [*Raum Zeit Materie*, 1921].
- [Ze16] A. Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists*, Princeton University Press, 2016.