1/4/2019 1º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica	ENGFIS FIS

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$.

$$x(t) = ae^{-t}\cos(t) + be^{-t}\sin(t)\,, \qquad \text{com } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

2. *(2 valores)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ com condições iniciais $x(0) = -1$ e $\dot{x}(0) = 1$.

$$x(t) = -e^{-t}\cos(t)\,.$$

3. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea $\ddot{x} + 9x = \cos(3t)$.

$$x(t) = \frac{1}{6}\,t\,\sin(3t)\,.$$

4. *(2 valores)* Seja $\mathbf{E}$ o espaço linear real das funções $f : [0,\pi] \to [0,\pi]$ infinitamente diferenciáveis e tais que $f(0) = f(\pi) = 0$, e seja $D : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ o operador linear definido por $(Df)(t) := f'(t)$. Determine valores e vetores próprios de $\Delta = D^2$.

$$\lambda_n = -n^2 \quad \text{e} \quad f_n(t) = \sin(nt)\,, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots\,.$$

5. *(2 valores)* Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = \sqrt{3}\,x$. Determine valores e vetores próprios de R.

$$\lambda_\pm = \pm 1 \quad \text{e} \quad v_+ = (1, \sqrt{3})\,, \quad v_- = (\sqrt{3}, -1)\,.$$

6. *(2 valores)* Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = \sqrt{3}\,x$. Determine a matriz que representa R na base canónica.

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

7. *(2 valores)* Seja $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear hermitiano (auto-adjunto). Prove que os valores próprios de L são reais.

Se $L^* = L$ e $Lv = \lambda v$ com $v \neq 0$, então

$$\lambda\,\|v\|^2 = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Lv, v\rangle = \langle v, Lv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\,\|v\|^2\,,$$

e portanto $\lambda = \overline{\lambda}$.

8. *(2 valores)* Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ complexas. Prove a seguinte afirmação ou apresente um contra exemplo: se A e AB são unitárias então também B é unitária.

Se $A^* = A^{-1}$ e $(AB)^* = (AB)^{-1}$, então

$$I = (AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*B$$

9. *(2 valores)* Diagonalize (ou seja, determine uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível U tais que $\Lambda = U^{-1}CU$) a matriz complexa

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

10. *(2 valores)* Dê exemplos não triviais (ou seja, diferentes da identidade) de uma transformação linear ortogonal $O : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e de uma transformação linear unitária $U : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

$$O(x, y) = (x, -y) \qquad \text{e} \qquad U(z, w) = (iz, iw)$$

7/6/2019 2º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha; se necessário, utilize uma folha de exame para apresentar mais cálculos.`

1. *(2 valores)* Identifique a matriz simétrica da forma quadrática

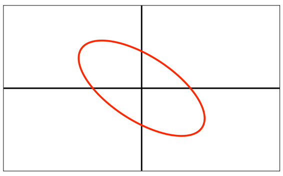
$$Q(x,y) = 2x^2 + 5y^2 + 4xy\,,$$

determine os seus valores próprios e uma matriz ortogonal diagonalizadora.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} U^\top \qquad \text{onde} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. *(2 valores)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$2x^2 + 5y^2 + 4xy - 1 = 0\,.$$



3. *(2 valores)* Determine, se existirem, umas matrizes reais A e B tais que

$$A^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e B não pode existir, porque $\det(e^B) = e^{\mathrm{tr} B} > 0$

4. *(2 valores)* Determine a matriz de uma rotação de um ângulo $\pi/4$ em torno do eixo x do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

5. *(2 valores)* Mostre que se A é uma matriz real anti-simétrica (ou seja, tal que $A^\top = -A$), então e^A é ortogonal.

$$\left(e^A\right)^\top = e^{A^\top} = e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$$

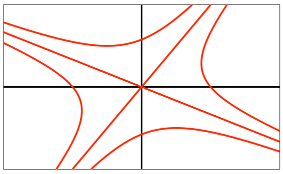
6. *(2 valores)* Calcule o grupo a um parâmetro das matrizes $G(t) = e^{tA}$, com $t \in \mathbb{R}$, gerado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. *(2 valores)* Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas órbitas) do sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad -2x + 5y \\ \dot{y} &= \quad -x + 3y \end{aligned}$$



8. *(2 valores)* Determine a solução com condições iniciais $(x(0), y(0)) = (2, 1)$ do sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad x + y \\ \dot{y} &= \quad y - x \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. *(2 valores)* Determine a solução (ou, pelo menos, uma fórmula integral para a solução) com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (0, 0)$ do sistema não homogéneo

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \quad -q \quad +p \\ \dot{p} &= \qquad\quad -p + t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e\ -t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\int_0^t \begin{pmatrix} e^s & -s\, e^s \\ 0 & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds \right)$$

10. *(2 valores)* Determine a solução geral da equação diferencial homogénea

$$\dddot{x} + x = 0$$

$$x(t) = a\, e^{-t} + b\, e^{t/2} \cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + c\, e^{t/2} \sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$