12/04/2018
1^o teste

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

1. *(2 valores)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$.

2. *(2 valores)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

3. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea $\ddot{x} + x = \cos(2t)$.

4. *(2 valores)* Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (y, x)$. Determine a matriz de T relativamente à base formada pelos vetores $\mathbf{u} = (2, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 1)$.

5. *(2 valores)* Seja $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ o espaço linear real das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis, e seja $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $(Df)(x) := f'(x)$. Determine valores e vetores próprios de D e de D^2.

6. *(2 valores)* Considere, no espaço euclidiano real $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno canónico, a reflexão $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na reta $y = -x$. Determine valores e vetores próprios de R.

7. *(2 valores)* Seja $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear unitário do espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno canónico. Prove que os valores próprios de U têm módulo um, ou seja, satisfazem $|\lambda| = 1$.

8. *(2 valores)* Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ reais. Prove a seguinte afirmação ou apresente um contra exemplo: se A e AB são ortogonais então também B é ortogonal.

9. *(2 valores)* Diagonalize, se possível, a matriz complexa
$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} ,$$
ou seja, determine uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível U tais que $\Lambda = U^{-1}AU$.

10. *(2 valores)* Dê um exemplo, se existir, de um operador linear normal $N : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ que não seja nem hermítico, nem hemi-hermítico, nem unitário.

29/05/2018 2º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

1. *(2 valores)* Identifique a matriz simétrica da forma quadrática

$$Q(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy\,,$$

determine os seus valores próprios e uma matriz ortogonal diagonalizadora.

2. *(2 valores)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 2 = 0\,.$$

3. *(2 valores)* Determine, se existir, uma matriz $A \in \mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$, diferente da matriz identidade, tal que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *(2 valores)* Dê um exemplo de duas matrizes $A, B \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ tais que $AB \neq BA$.

5. *(2 valores)* Mostre que se A é uma matriz hermítica então e^{iA} é unitária.

6. *(2 valores)* Existe uma matriz quadrada A tal que

$$e^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Justifique a sua resposta.

7. *(2 valores)* Calcule o grupo a um parâmetro das matrizes $G(t) = e^{tA}$, com $t \in \mathbb{R}$, gerado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. *(2 valores)* Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas órbitas) do sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - y \\ \dot{y} &= x - 2y \end{aligned}$$

9. *(2 valores)* Determine a solução do sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - y \\ \dot{y} &= x - 2y \end{aligned}$$

com condições iniciais $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

10. *(2 valores)* Considere o oscilador harmónico forçado

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q + \sin(2t) \end{aligned}$$

Determine uma fórmula integral para a solução com condições iniciais triviais $q(0) = 0$ e $p(0) = 0$.