

1. (2 valores) Determine a solução da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.
2. (2 valores) Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea $\ddot{x} - x = e^{-t}$.
3. (2 valores) Considere, no espaço euclidiano real \mathbb{R}^2 munido do produto interno canónico, a reflexão $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ na reta $y = -2x$. Determine os valores e os vetores próprios de R .
4. (2 valores) Diagonalize, se possível, a matriz complexa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, determine uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível U tais que $\Lambda = U^{-1}AU$.

5. (2 valores) Identifique a matriz simétrica da forma quadrática

$$Q(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2,$$

determine os seus valores próprios e uma matriz ortogonal diagonalizadora.

6. (2 valores) Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$2x^2 + xy + 2y^2 - 4 = 0.$$

7. (2 valores) Dê um exemplo, se existir, de duas matrizes $A, B \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$, diferentes e diferentes da identidade, tais que $AB = BA$.

8. (2 valores) Calcule o grupo a um parâmetro das matrizes $G(t) = e^{tA}$, com $t \in \mathbb{R}$, gerado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. (2 valores) Determine e esboce a solução do sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 2y \\ \dot{y} &= 2x + 3y \end{aligned}$$

com condições iniciais $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

10. (2 valores) Considere sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q + p \\ \dot{p} &= p + e^{-t} \end{aligned}$$

Determine uma fórmula integral para a solução com condições iniciais triviais $q(0) = 0$ e $p(0) = 0$.