

NomeNº ☐ ENGFIS
☐ FIS

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.

1. (2 valores) Determine a solução da equação diferencial

$$\dot{x} = 3x - 2.$$

com condição inicial $x(0) = 3$.

$$x(t) = \frac{7}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}$$

2. (2 valores) Determine a solução da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = 0$$

com condições iniciais $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = -2$

$$e^{-3t} (2 \cos(t) + 4 \sin(t)).$$

3. (2 valores) Determine uma solução da equação diferencial linear não homogénea

$$\ddot{x} + 9x = \cos(3t).$$

$$x(t) = \frac{1}{6} t \sin(3t)$$

4. (2 valores) Determine uma base ortonormada do plano $P \subset \mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 2)$.

Por exemplo,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

5. (2 valores) Calcule a matriz 3×3 que define, relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$, a projeção ortogonal sobre o plano P definido no exercício 4.

$$\begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix}$$

6. (2 valores) Calcule a fatorização QR (ou seja, determine uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tais que $A = QR$) da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

7. (2 valores) Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, os operadores $T(x, y) = (ix + y, -iy)$ e $S(x, y) = (x - iy, ix + y)$. Determine os operadores T^*T e $(ST)^*$.

$$(T^*T)(x, y) = (x - iy, ix + 2y) \quad \text{e} \quad (ST)^*(x, y) = (-ix - y, 0)$$

8. (2 valores) Sejam A e B dois operadores auto-adjuntos do espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$. Diga se os operadores $A + B$ e AB são auto-adjuntos, e justifique a sua resposta.

$A + B$ é auto-adjunto, AB pode não ser auto-adjunto.

9. (2 valores) Calcule valores e vetores próprios da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, e uns vetores próprios são $(1, i\lambda_{\pm})$, respetivamente.

10. (1 valor) Determine quais das seguintes matrizes são hermiticas e/ou hemi-hermiticas.

$$A = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 3 \end{pmatrix}$$

A é hemi-hermitica, C é hermitica.

11. (1 valor) Determine quais das seguintes matrizes são unitárias e/ou ortogonais.

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A é unitária, B é ortogonal.

NameNº

☐ ENGFIS
☐ FIS

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.

1. (1 valor) Identifique a matriz simétrica
- A
- que define a forma quadrática

$$Q(x, y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$$

e determine os seus valores próprios.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e os valores próprios são 1 e 6.

2. (1 valor) Determine uma matriz ortogonal
- U
- que diagonaliza a matriz simétrica
- A
- do exercício 1, ou seja, tal que
- $U^T A U$
- seja diagonal.

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (1 valor) Calcule os comprimentos dos semi-eixos principais do elipsoide definido pela equação cartesiana

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 \leq 1$$

1 e $1/\sqrt{6}$.

4. (1 valor) Determine os valores máximo e mínimo da função
- $f(x, y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$
- na circunferência unitária
- $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- .

1 e 6.

5. (1 valor) Determine, se existir, uma matriz simétrica
- B
- tal que
- $B^2 = A$
- , onde
- A
- é a matriz definida no exercício 1.

$$B = U^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} U$$

6. (1 valor) Calcule os valores singulares da matriz

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

1 e 2.

7. (1 valor) Dê uma definição do grupo
- $\mathbf{SO}(2)$
- , e determine a forma da sua matriz genérica.

 $\mathbf{SO}(2)$ é o grupo das matrizes A reais 2×2 que satisfazem $A^T A = A A^T = I$. O elemento genérico é uma rotação

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

com $\theta \in \mathbb{R}$.

8. (1 valor) Calcule o grupo a um parâmetro e^{tD} gerado pela matriz

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$e^{tD} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

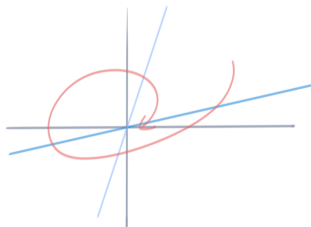
9. (1 valor) Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = -2q + p \\ \dot{p} = -q - 2p \end{cases}$$

com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (1, 1)$.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}(\cos t + \sin t) \\ e^{-2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}$$

10. (1 valor) Esboce o retrato de fases do sistema definido no exercício 9.



11. (1 valor) Se A é uma matriz quadrada real então $A^\top A$ é

☐ simétrica.

☐ anti-simétrica.

☐ ortogonal

12. (1 valor) Toda isometria linear do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é definida, numa base ortonormada, por uma matriz

☐ simétrica.

☐ ortogonal.

☐ anti-simétrica.

13. (1 valor) Se H é uma matriz quadrada hermitica, então e^{iH} é

☐ hermitica.

☐ unitária.

☐ ortogonal.

14. (1 valor) A forma quadrática xy é linearmente equivalente¹ à forma

☐ $x^2 + y^2$

☐ $-x^2 - y^2$

☐ $x^2 - y^2$

15. (1 valor) Os semi-eixos principais do elipsoide $3x^2 + 2y^2 \leq 1$ são

☐ $1/\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{2}$

☐ 3 e 2

☐ $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$

¹As formas quadráticas $Q(x, y)$ e $P(x, y)$ são linearmente equivalentes se existe uma transformação linear invertível $(x, y) \mapsto (x', y') = (ax + by, cx + dy)$ tal que $P(x', y') = Q(x, y)$

16. (1 valor) Se A é uma matriz quadrada com $\text{Tr}A = 0$ então

$$\bigcirc \text{ Det } (e^A) = 0$$
$$\bigcirc \quad e^{\text{Det} A} = 1$$
$$\bigcirc \text{ Det } (e^A) = 1$$

17. (1 valor) A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo ortogonal $\mathbf{SO}(3)$ é o espaço linear das matrizes reais 3×3

○ anti-simétricas.

○ simétricas.

○ com traço nulo.

18. (1 valor) Seja $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então e^{tB} é igual a

$$\circ e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\bigcirc \quad e^t \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix}$$
$$\circlearrowleft e^t \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19. (1 valor) O sistema linear

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = q \end{cases}$$

é equivalente à equação de Newton

$$\bigcirc \quad \ddot{q} = -q$$
$$\bigcirc \ddot{q} = q$$
$$\bigcirc \quad \ddot{q} = q + p$$

20. (1 valor) Considere o sistema linear definido por

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

A origem é

- um nodo instável.

○ um foco estável.

○ um ponto de sela.