13/6/2025
recurso

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

FIS
ENGFIS

Nome ....**N^o** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial
$$\dot{x} = x - 1\,.$$
com condição inicial $x(0) = 2$.
$$x(t) = 1 + e^t$$

2. *(1 valor)* Determine uma base do espaço vetorial das soluções da equação diferencial linear homogénea
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$$
$$e^t \cos(2t) \qquad \text{e} \qquad e^t \sin(2t)$$

3. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$$
com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 2$
$$e^t \left(\cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right).$$

4. *(1 valor)* Determine uma solução da equação diferencial linear não homogénea
$$\ddot{x} + 2x = \sin(t)\,.$$
$$x(t) = \sin(t)$$

5. *(1 valor)* Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na reta $y = 2x$. Determine os valores e os vetores próprios de R.
Os valores próprios são $\lambda_\pm = \pm 1$, e uns vetores próprios são $\mathbf{v}_+ = (1, 2)$ e $\mathbf{v}_- = (-2, 1)$, respetivamente.

6. *(1 valor)* Determine a matriz que representa o operador R, definido no exercício 5, na base canónica.
$$\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

7. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, os operadores $T(x,y) = (2x, iy)$ e $S(x,y) = (-iy, 3x)$. Determine os operadores T^*T e $(ST)^*$.

$$(T^*T)(x,y) = (4x, y) \qquad \text{e} \qquad (ST)^*(x,y) = (y, 6x)$$

8. *(1 valor)* Identifique a matriz simétrica A que define a forma quadrática $Q(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$ e determine os seus valores próprios.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e os valores próprios são 1 e 3.

9. *(1 valor)* Determine uma matriz ortogonal U que diagonaliza a matriz simétrica A do exercício anterior, ou seja, tal que $U^\top AU$ seja diagonal.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. *(1 valor)* Calcule os comprimentos dos semi-eixos principais do elipsoide definido pela equação cartesiana $2x^2 + 2xy + 2y^2 \leq 3$.

1 e $\sqrt{3}$.

11. *(1 valor)* Determine um operador ortogonal $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $B^2(x,y) = (-x, -y)$.

Por exemplo, $B(x,y) = (y, -x)$.

12. *(1 valor)* Calcule os valores singulares da matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 e $\sqrt{3}$.

13. *(1 valor)* Calcule o grupo a um parâmetro e^{tD} gerado pela matriz

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tD} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

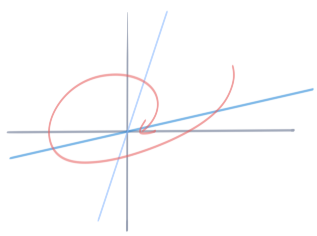
14. *(1 valor)* Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = & -q - 2p \\ \dot{p} = & 2q - p \end{cases}$$

com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (1, 1)$.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos(2t) - \sin(2t)) \\ e^{-t}\,(\cos(2t) + \sin(2t)) \end{pmatrix}$$

15. *(1 valor)* Esboce o retrato de fases do sistema linear homogéneo definido no exercício 14.



16. *(0.5 valores)* As funções $\cosh(t)$ e $\sinh(t)$ são soluções da equação diferencial

○ $\ddot{x} + x = 0$ ○ $\ddot{x} - x = 0$ ○ $\dot{x} + x = 0$

17. *(0.5 valores)* O operador A, definido no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$, é hermítico se

○ $A^*A = AA^*$ ○ $A^* = -A$ ○ $A^* = A$

18. *(0.5 valores)* O operador B, definido no espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$, é ortogonal se

○ $B^\top B = BB^\top$ ○ $B^\top = B$ ○ $BB^\top = I$

19. *(0.5 valores)* Se A é uma matriz quadrada real então a matriz $B = A^\top - A$ é

○ simétrica. ○ anti-simétrica. ○ ortogonal.

20. *(0.5 valores)* Uma matriz ortogonal $A \in \mathbf{O}(n)$ tem determinante

○ $|\mathrm{Det} A| = 1$ ○ $\mathrm{Det} A = 1$ ○ $\mathrm{Det} A = 0$

21. *(0.5 valores)* Se H é uma matriz quadrada hermítica, então e^{iH} é

○ hermítica. ○ unitária. ○ ortogonal.

22. *(0.5 valores)* Os semi-eixos principais do elipsoide $5x^2 + y^2/7 \leq 1$ são

○ $\sqrt{5}$ e $1/\sqrt{7}$ ○ 5 e 7 ○ $1/\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$

23. *(0.5 valores)* Se A é uma matriz quadrada com $\mathrm{Tr} A = 0$ então

○ $\mathrm{Det}\left(e^A\right) = 0$ ○ $\mathrm{Det}\left(e^A\right) = 1$ ○ $e^{\mathrm{Det} A} = 1$

24. *(0.5 valores)* Seja $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Então e^{tB} é igual a

○ $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

25. *(0.5 valores)* Considere o sistema linear definido por

$$\begin{cases} \dot{x} = & 2x + 3y \\ \dot{y} = & x - 5y \end{cases}$$

A origem é

○ um nodo instável. ○ um foco estável. ○ um ponto de sela.