| | | |
|---|---|---|
| 20/4/2024<br>1º teste | Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica | FIS<br>ENGFIS |

**Nome** ........................................................................................**N$^o$** .................  ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Determine uma equação diferencial linear de segunda ordem que admita como soluções

$$x_+(t) = e^{2t} \qquad \text{e} \qquad x_-(t) = e^{-3t}$$

2. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear

$$\dot{x} + x = 2e^{-t} \; .$$

com condição inicial $x(0) = 3$.

3. *(1 valor)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} + 6\,\dot{x} + 13\,x = 0\,.$$

4. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea do exercício 3 com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

5. *(1 valor)* Determine uma solução da equação diferencial linear não homogénea

$$\ddot{x} + 4\,x = 3\,\cos(2t)\,.$$

6. *(1 valor)* Determine uma base ortonormada do plano $P = \{x + y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

7. *(1 valor)* Calcule a projeção ortogonal do vetor $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ sobre o plano $P$ definido no exercício 6.

8. *(1 valor)* Calcule a fatorização QR (ou seja, determine uma matriz ortogonal $Q$ e uma matriz triangular superior $R$ tais que $A = QR$) da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

9. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^3$ munido do produto escalar usual, o operador $S(x, y, z) = (x + iy - z, 2iy + 3z, iz)$. Determine o operador $S^*$ e a composição $S^*S$.

10. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, o operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por $T(x, y) = (2x - iy, ix + y)$. Determine uns operadores auto-adjuntos $X$ e $Y$ tais que $T = X + iY$.

11. *(1 valor)* Determine a matriz que define, relativamente à base canónica, um operador ortogonal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1, 0) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$.

12. *(1 valor)* Calcule valores e vetores próprios da matriz hermítica

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

13. *(1 valor)* Considere a matriz $C$ definida no exercício 12. Determine uma matriz unitária $U$ e uma matriz diagonal $\Lambda$ tais que $C = U\Lambda U^{-1}$.

14. *(1 valor)* Dê um exemplo, se existir, de um operador normal $N : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ que não seja nem hermítico, nem hemi-hermítico, nem unitário.

15. *(1 valor)* A função $y(x) = e^{x^2}$ é solução da equação diferencial

○ $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$ ○ $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ ○ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2xy = 0$

16. *(1 valor)* A matriz quadrada complexa $A$ é hermítica se

○ $A^* = A$ ○ $A^*A = I$ ○ $A^*A = AA^*$

17. *(1 valor)* Seja $H$ um operador hemi-hermítico. Então $H^2$ é

○ hermítico ○ hemi-hermítico ○ unitário

18. *(1 valor)* Toda matriz ortogonal $3 \times 3$ admite um vetor próprio.

○ Verdadeiro ○ Falso

19. *(1 valor)* Existe uma matriz ortogonal $R$ tal que

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

○ Verdadeiro ○ Falso

20. *(1 valor)* Se a matriz quadrada $A$ é hermítica, então os seus valores próprios $\lambda$ satisfazem

○ $i\lambda \in \mathbb{R}$ ○ $\lambda \in \mathbb{R}$ ○ $|\lambda| = 1$

| 29/5/2024<br>2º teste | Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica | FIS<br>ENGFIS |
|---|---|---|

**Name** ..................................................................................................**N$^o$** ................. ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.`

1. *(1 valor)* Identifique a matriz simétrica $A$ que define a forma quadrática

$$Q(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$$

e determine os seus valores próprios.

2. *(1 valor)* Determine uma matriz ortogonal $U$ que diagonaliza a matriz simétrica $A$ do exercício 1, ou seja, tal que $U^\top AU$ seja diagonal.

3. *(1 valor)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 1$$

4. *(1 valor)* Determine os valores máximo e mínimo da forma quadrática $f(x,y) = 2xy$ na circunferência unitária $\mathbf{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$.

5. *(1 valor)* Calcule os valores singulares da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. *(1 valor)* Calcule o grupo a um parâmetro $e^{tB}$ gerado pela matriz $B$ definida no exercício 5.

7. *(1 valor)* Dê uma definição do grupo $\mathbf{SU}(2)$, e um exemplo de uma matriz deste grupo.

8. *(1 valor)* Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = & 2q - p \\ \dot{p} = & q + 2p \end{cases}$$

com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (1, 1)$.

9. *(1 valor)* Esboce o retrato de fases do sistema definido no exercício 8.

10. *(1 valores)* Considere o sistema não homogéneo

$$\begin{cases} \dot{q} = & -2q - p \\ \dot{p} = & q - 2p + \cos(t) \end{cases}$$

Determine a solução com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (0, 0)$.

11. *(1 valor)* Se $A$ é uma matriz real simétrica e $U$ é uma matriz ortogonal então $U^\top AU$ é

○ anti-simétrica. ○ ortogonal. ○ simétrica.

12. *(1 valor)* Qual dos seguintes subconjuntos de $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ não é um subgrupo?

○ $\{A \in \mathbf{O}(n,\mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Det}A = -1\}$
○ $\{A \in \mathbf{O}(n,\mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Det}A > 0\}$
○ $\{A \in \mathbf{O}(n,\mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Det}A = 1\}$

13. *(1 valor)* Se $H$ é uma matriz quadrada hermítica, então $e^{iH}$ é

○ unitária. ○ hermítica. ○ positiva.

14. *(1 valor)* Se $A$ e $B$ são duas matrizes quadradas, então $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}e^{tB}\right)$ é igual a

○ $(A+B)e^{tA}e^{tB}$ ○ $e^{tA}(A+B)e^{tB}$ ○ $e^{tA}e^{tB}(A+B)$

15. *(1 valor)* A forma quadrática $2x^2+2xy+y^2$ é linearmente equivalente[1] à forma

○ $x^2+y^2$ ○ $x^2-y^2$ ○ $-x^2-y^2$

16. *(1 valor)* Os semi-eixos do elipsoide $3x^2-2xy+3y^2 \leq 2$ são

○ 1 e 2 ○ 1 e $\sqrt{2}$ ○ 1 e $1/\sqrt{2}$

17. *(1 valor)* Se $A$ é uma matriz quadrada com $\mathrm{Tr}A = 0$ então

○ $\mathrm{Det}\left(e^A\right) = 0$ ○ $\mathrm{Det}\left(e^A\right) = 1$ ○ $e^{\mathrm{Det}A} = 1$

18. *(1 valor)* A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo unitário $\mathbf{SO}(2)$ é

○ o espaço linear das matrizes reais $2 \times 2$ simétricas.
○ o espaço linear das matrizes reais $2 \times 2$ com traço nulo.
○ o espaço linear das matrizes reais $2 \times 2$ anti-simétricas.

19. *(1 valor)* Seja $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Então $e^{tB}$ é igual a

○ $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} \cosh(t) & -\sinh(t) \\ \cosh(t) & \sinh(t) \end{pmatrix}$

20. *(1 valor)* Considere o sistema linear definido por

$$\begin{cases} \dot{x} = & 2x+7y \\ \dot{y} = & x+3y \end{cases}$$

A origem é

○ um nodo instável. ○ um ponto de sela. ○ um foco estável.

[1] As formas quadráticas $Q(x,y)$ e $P(x,y)$ são linearmente equivalentes se existe uma transformação linear invertível $(x,y) \mapsto (x',y') = (ax+by, cx+dy)$ tal que $P(x',y') = Q(x,y)$