

NomeN^o ☐ ENGFIS
☐ FIS

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.

1. (1 valor) Determine uma base do espaço linear das soluções da equação diferencial homogénea

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0.$$

2. (1 valor) Determine a solução da equação diferencial linear

$$\dot{x} + x = e^{2t}.$$

com condição inicial $x(0) = 2$.

3. (1 valor) Determine a solução da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$$

com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$.

4. (1 valor) Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear não homogénea

$$\ddot{x} + x = 2 \sin(t).$$

5. (1 valor) Determine a matriz que define, na base canónica, a projeção ortogonal
- $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- sobre o plano
- $P = \{x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- .

6. (1 valor) Calcule a fatorização QR (ou seja, determine uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tais que $A = QR$) da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7. (1 valor) Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, o operador $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por $T(x, y) = (x + iy, ix - y)$. Determine o operador adjunto T^* e a composição T^*T .

8. (1 valor) Determine a matriz que define, relativamente à base canónica, um operador ortogonal $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $R^2(x, y) = (-x, -y)$.

9. (1 valor) Identifique a matriz simétrica A que define a forma quadrática

$$Q(x, y) = 4x^2 - 6xy + 4y^2$$

e determine os seus valores próprios.

10. (1 valor) Determine uma matriz ortogonal U que diagonaliza a matriz simétrica A do exercício 9, ou seja, tal que $U^T A U$ seja diagonal.

11. (1 valor) Calcule os comprimentos dos semi-eixos do elipsoide definido por $5x^2 - 4xy + 2y^2 \leq 1$.

12. (1 valor) Calcule os valores e os vetores próprios da matriz

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

13. (1 valor) Calcule os valores singulares da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

14. (1 valor) Calcule o grupo a um parâmetro e^{tB} gerado pela matriz definida no exercício 13.

15. (1 valor) Determine as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = -2q \\ \dot{p} = 3p \end{cases}$$

16. (1 valor) Considere o sistema não homogêneo

$$\begin{cases} \dot{q} = -2q \\ \dot{p} = 3p + e^t \end{cases}$$

Determine a solução com condições iniciais $(q(0), p(0)) = (0, 0)$.

17. (1 valor) Dê uma definição de operador/matriz hermítico.

18. (1 valor) Dê uma definição do grupo unitário $\mathbf{U}(n)$.

19. (1 valor) Identifique a álgebra de Lie (ou seja, o espaço tangente na identidade) do grupo das rotações $\mathbf{SO}(n)$.

20. (1 valor) Esboce o retrato de fases do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \dot{q} = -2q + p \\ \dot{p} = -q + 2p \end{cases}$$

e identifique o tipo de equilíbrio.