

ENGFIS FIS

2022/23

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab: CG - Edifício 6 - 3.48, tel: 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

23 de Maio de 2023



Resumo

This is not a book! These are notes written for personal use while preparing lectures on “Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica” for students of FIS and ENGFIS during the a.y.’s 2013/14, 2014/15, 2017/18, 2018/19, 2019/20, 2020/21, 2021/22 and now 2022/23. They are rather informal and certainly contain mistakes (indeed, they are constantly actualised). I tried to be as synthetic as I could, without missing the observations that I consider important.

Most probably I will not lecture all I wrote, and did not write all I plan to lecture. So, I included sketched paragraphs or whole chapters (those marked with an *), about material that I think should/could be lectured within the same course, given enough time. Some chapters, on first order differential equations and on basic linear algebra, are included for completeness, being lectured in Calculus or in Linear Algebra during the previous semester.

References contain some introductory manuals that I like, some classics, books where I have learnt things in the past century, recent books which I find interesting. Almost all material can be found in [Ap69]. My favourite textbook on ordinary differential equations is [Si91], and I suggest to start with the nice video by 3blue1brown. A nice view os all (and much more) the topics is in the notes for Math 21b by Oliver Knill.

Everything about the course may be found in my web pages

<http://w3.math.uminho.pt/~scosentino/salteaching.html>

The notation is as follows:

e.g. means EXEMPLI GRATIA, that is, “for example”.

ex: means “exercise”, to be solved at home or in the classroom.

ref: means “references”, places where you can find and study what follows inside each section.

Black paragraphs form the main text.

Blue paragraphs deal with examples, applications and (often non rigorous) ideas relevant in physics, engineering or other sciences. They are the real reason why all this maths is worth studying.

Red paragraphs (mostly written in english) are more advanced or non trivial facts and results which may be skipped in a first (and also second) reading.

□ indicates the end of a proof.

Pictures were made with *Grapher*, *SketchBook* or *Paintbrush* on my MacBook, or taken from [Wikipedia](#), or produced with *Python* and *Matlab*.



This work is licensed under a
[Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License](#).

Conteúdo

1	Equações diferenciais ordinárias	7
1.1	Equações de Newton	7
1.2	Exponencial	9
1.3	Equações diferenciais ordinárias	13
1.4	Existência e unicidade	18
1.5	Simulações	20
2	Métodos elementares de integração	24
2.1	EDOs simples	24
2.2	EDOs autónomas	27
2.3	EDOs separáveis	32
2.4	EDOs lineares de primeira ordem	35
2.5	Substituições	39
3	EDOs lineares homogéneas	41
3.1	Exponencial complexo e oscilações	41
3.2	EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes	46
3.3	Soluções exponenciais e polinómio caraterístico	50
3.4	Oscilador harmónico	53
4	EDOs lineares não homogéneas	57
4.1	EDOs lineares não homogéneas	57
4.2	Quase-polinómios e método dos coeficientes indeterminados	59
4.3	Oscilações forçadas	62
4.4	Variação das constantes e funções de Green	67
5	Espaços euclidianos	74
5.1	Espaços euclidianos	74
5.2	Sistemas ortonormados	80
5.3	Projeções ortogonais	84
5.4	Coefficientes de Fourier	86
6	Operadores hermiticos e unitários	89
6.1	Adjunto de um operador	89
6.2	Operadores auto-adjuntos	92
6.3	Operadores normais	95
6.4	Operadores unitários/ortogonais	97
7	Teorema espectral	101
7.1	Operadores diagonalizáveis	101
7.2	Teorema espectral para operadores auto-adjuntos	102
7.3	Teorema espectral para operadores normais	106
7.4	Diagonalização simultânea e desigualdade de Heisenberg	112
7.5	Operadores positivos	115
7.6	Funções de operadores.	121
8	Formas quadráticas e pequenas oscilações	125
8.1	Formas quadráticas reais	125
8.2	Formas quadráticas em espaços euclidianos	128
8.3	Princípios min-max	130
8.4	Formas quadráticas positivas e elipsoides	133
8.5	Decomposição polar e valores singulares	137
8.6	Pequenas oscilações e frequências próprias	140
8.7	Cónicas e quádricas	145

9	Grupos e grupos de matrizes	153
9.1	Grupos	154
9.2	Homomorfismos, subgrupos e quocientes	157
9.3	Isometrias e grupos ortogonais ou unitários	164
9.4	Outros grupos da física-matemática	170
10	Exponencial e álgebras de Lie	174
10.1	Normas de operadores	174
10.2	Exponencial de um operador	176
10.3	Grupos a um parâmetro de matrizes	179
10.4	Cálculo do exponencial	182
10.5	Grupos de matrizes e espaço tangente na identidade	184
10.6	Álgebras de Lie dos grupos de matrizes	187
11	Sistemas lineares	197
11.1	Campos e fluxos lineares	197
11.2	Campos lineares no plano	198
11.3	Forma normal de Jordan	204
11.4	Campos lineares hiperbólicos	209
11.5	Sistemas lineares forçados	211

Notações

Conjuntos. $a \in A$ quer dizer que a é um elemento do conjunto A . $A \subset B$ quer dizer que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B . $A \cap B$ é a interseção dos conjuntos A e B , e $A \cup B$ é a reunião dos conjuntos A e B . $A \times B$ é o produto cartesiano dos conjuntos A e B , o conjunto dos pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

Números. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais. $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ denota o anel dos números inteiros. $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ denota o corpo dos números racionais. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

Funções. Uma *função* $f : X \rightarrow Y$, com *domínio* o conjunto X e *conjunto de chegada* o conjunto Y , é um subconjunto $R \subset X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe um único $y := f(x) \in Y$, dito *imagem* de x , tal que $(x, y) \in R$. Quando domínio e contradomínio são claros, uma função pode ser denotada apenas por $x \mapsto f(x)$, ou seja, identificada com a “regra” que determina $y = f(x)$ a partir de x . A *imagem* do subconjunto $A \subset X$ é o conjunto $f(A) := \{f(a) \text{ com } a \in A\} \subset Y$. Em particular, a *imagem/contradomínio* da função $f : X \rightarrow Y$ é o conjunto $f(X) := \{f(x) \text{ com } x \in X\} \subset Y$ dos valores da função. O *gráfico* da função $f : X \rightarrow Y$ é o subconjunto

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.q. } y = f(x)\} \subset X \times Y$$

do produto cartesiano do domínio e o conjunto de chegada. A função *identidade* $I_X : X \rightarrow X$ é definida por $I_X(x) = x$, e o seu gráfico é a *diagonal* $\{(x, x) \text{ com } x \in X\} \subset X \times X$.

A *restrição* da função $f : X \rightarrow Y$ ao subconjunto $A \subset X$ é a função $f|_A : A \rightarrow Y$ definida por $f|_A(a) := f(a)$.

A *composição* das funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : f(X) \subset Y \rightarrow Z$ é a função $g \circ f : X \rightarrow Z$ definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, ou seja,

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$$

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *injetiva* se $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$, e portanto a imagem $f(X)$ é uma “cópia” de X . Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *sobrejetiva* se todo $y \in Y$ é imagem $y = f(x)$ de algum $x \in X$, ou seja, se $Y = f(X)$. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *bijetiva/invertível* se é injetiva e sobrejetiva, e portanto admite uma função *inversa* $f^{-1} : Y \rightarrow X$, que verifica $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todos os $x \in X$ e $y \in Y$.

Espaço euclidiano. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço euclidiano de dimensão n . Fixada a base canónica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são os vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

de coordenadas $x^i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

O *produto interno Euclidiano/canónico* é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{ij} \delta_{ij} x_i y_j.$$

(onde (δ_{ij}) é a matriz/símbolo de Kronecker igual a $\delta_{ii} = 1$ na diagonal e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$). O produto interno Euclidiano realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico) $(\mathbb{R}^n)^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e o próprio $\mathbb{R}^n$: o valor da forma linear (ou co-vetor) $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ no vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$.

A norma Euclidiana do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. A distância Euclidiana entre os pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A bola aberta de centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto $B_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ se cada seu ponto $\mathbf{a} \in A$ é o centro de uma bola $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Os pontos e as relativas coordenadas no plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço Euclidiano 3-dimensional $\mathbb{R}^3$ (ou seja, as posições dos pontos materiais da física) são também denotados, conforme a tradição, pelas letras $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então $r := \|\mathbf{r}\|$ denota o comprimento do vetor $\mathbf{r}$, ou seja, a distância do ponto $\mathbf{r}$ da origem do referencial.

Caminhos. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável do “tempo” $t \in I \subset \mathbb{R}$, ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$ com valores no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, a primeira derivada $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ é dita *velocidade*, e a sua norma $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$ é dita *velocidade escalar* (*speed*, em inglês). A segunda derivada $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$ é dita *aceleração*.

Campos. Um *campo escalar* é uma função real $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* é uma função $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$, cujas coordenadas $F^i(\mathbf{x})$ são k campos escalares.

A derivada do campo diferenciável $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a aplicação linear $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma $\|\mathbf{v}\|$ suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana $\text{Jac } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := (\partial F^i / \partial x^j(\mathbf{x})) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$. Em particular, o *diferencial* do campo escalar $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a forma linear $du(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$du(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n$$

(onde dx_k , o diferencial da função coordenada $\mathbf{x} \mapsto x_k$, é a forma linear que envia o vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ na sua k -ésima coordenada $dx_k(\mathbf{v}) := v_k$). A derivada do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na direção do vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicado) no ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = du(\mathbf{x}) \mathbf{v}.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vetorial $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$du(\mathbf{x}) \mathbf{v} = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

para todos os vetores (tangentes) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicados no ponto $\mathbf{x} \in X$).

1 Equações diferenciais ordinárias

ref: [Ap69] Vol. 1, 8.1-7

As equações diferenciais ordinárias (ODEs) são a linguagem da física newtoniana. Formalizam a nossa ideia de “determinismo”: o presente de um sistema físico determina, por meio de algumas “leis da natureza”, o seu futuro. Estas leis têm a forma de equações diferenciais.

1.1 Equações de Newton

O arquétipo de uma equação diferencial é a equação de Newton.

14 fev 2023

Equação de Newton. A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma partícula de massa própria m num referencial inercial é modelada pela “equação/segunda lei de Newton” ¹

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{p}$ é o *momento linear*, definido por

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

sendo $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ a *velocidade*, $v = \|\mathbf{v}\|$ a *velocidade escalar* (em inglês, *speed*), e $c \simeq 299\,792\,458$ m/s a velocidade da luz, e onde $\mathbf{F}$ é o *campo de forças* que age sobre a partícula. Em geral, a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ depende da posição $\mathbf{r}$ da partícula, da sua velocidade $\mathbf{v}$, e possivelmente (em sistemas que não são isolados) também explicitamente do tempo t .

No regime não relativístico, quando $v \ll c$, o momento linear é $\mathbf{p} \simeq m\mathbf{v}$, e portanto, se a massa m é constante (isto não acontece com um foguetão que queima combustível ou um corredor que transpira!), a equação de Newton assume a forma mais conhecida

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ denota a *aceleração* da partícula.

Este é o arquétipo de uma “equação diferencial”, que físicos e engenheiros querem aprender a resolver, analiticamente ou numericamente, para calcular trajetórias e fazer previsões. Uma sua “solução” é uma trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, também chamada “lei horária”, que substituída na equação produz uma identidade, ou seja, tal que $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)$ para todo tempo t num certo intervalo. Tipicamente, estamos interessados em soluções com certas “condições iniciais”, valores da posição $\mathbf{r}(t_0)$ e do momento linear $m\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ num instante inicial, por exemplo $t_0 = 0$. A arbitrariedade das condições iniciais reflete a invarância galileiana. Por outro lado, a unicidade das soluções dadas as condições iniciais é uma expectativa (realizada se o campo de forças é razoável) que define o “determinismo” das leis da mecânica.

Partícula livre. A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de uma partícula livre (não relativística) de massa m num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\dot{\mathbf{p}} = 0 \quad \text{ou seja,} \quad m\mathbf{a} = 0, \quad (1.1)$$

Em particular, o *momento linear* $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ é uma constante do movimento, de acordo com o “princípio de inércia de Galileo” ² ou a “primeira lei de Newton” ³. As soluções da equação de

¹“Lex segunda: Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.” [Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

²“... il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, né erta né china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo” [Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1623.]

³“Lex prima: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare” [Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

Newton (1.1) da partícula livre, ou seja, as trajetórias com aceleração nula, são as retas afins

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{v}t,$$

onde $\mathbf{s} = \mathbf{r}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a posição inicial e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade (inicial).

ex: Determine a trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $\mathbf{r}(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2, 3)$.

ex: Determine a velocidade inicial da trajetória de uma partícula livre que passa pela posição $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 2)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $\mathbf{r}(2) = (3, 4, 5)$ no instante $t_1 = 2$.

Queda livre. A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = -mg \quad (1.2)$$

onde $q(t) \in \mathbb{R}$ denota a altura da partícula no instante t , m é a massa da partícula, e $g \simeq 980$ cm/s² é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre. É um fato experimental que a “massa inercial” (o factor de $\ddot{q}$ na (1.2)) e a “massa gravitacional” (o fator de g na (1.2)) são iguais. Consequentemente, a equação de Newton reduz-se a $\ddot{q} = -g$, ou seja, a lei horária da queda livre não depende da massa da partícula! As soluções da equação de Newton (1.2) da queda livre, ou seja, as trajetórias com aceleração constante, são as parábolas

$$q(t) = s + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

onde $s = q(0) \in \mathbb{R}$ é a altura inicial e $v_0 = \dot{q}(0) \in \mathbb{R}$ é a velocidade inicial. Neste caso a velocidade $v(t) = \dot{q}(t) = v_0 + gt$ não é constante, mas cresce linearmente no tempo.

A *energia* da partícula é a soma

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgq$$

da energia cinética e da energia potencial. Um cálculo mostra que é uma constante do movimento, ou seja, que

$$\frac{dE}{dt} = mv(\ddot{q} + g) = 0$$

e portanto é constante ao longo das soluções da equação de Newton (1.2). Esta observação permite de tirar conclusões úteis sobre o movimento sem calcular explicitamente a lei horária.

ex: Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.

ex: Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?

ex: Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?

ex: Determine soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = 1.$$

ex: Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = F_0 \cos(\omega t)$$

de uma partícula de massa $m > 0$ num campo de forças periódico. Calcule as trajetórias, dependendo das condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$.

Movimento uniformemente acelerado relativístico. Podem querer saber como aparece o movimento uniformemente acelerado na relatividade especial.⁴ A equação de Newton relativística (por exemplo ao longo do eixo x de um referencial inercial) com aceleração própria constante a é

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = a. \quad (1.3)$$

A solução com velocidade inicial nula é

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2/c^2}}$$

como podem verificar ao substituir esta expressão na (1.3). Ao integrar,

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + a^2 t^2/c^2} - 1 \right)$$

se também consideramos uma posição inicial nula. Observem que para tempos pequenos (logo velocidades pequenas) $x(t) \simeq at^2/2$, como esperado, pois estamos no caso newtoniano. Este é chamado “movimento hiperbólico”, pois as trajetórias vivem num ramo da hipérbole

$$\left(\frac{ax}{c^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{at}{c} \right)^2 = 1$$

no espaço-tempo, cujas assíntotas são as retas $x + c^2/a = \pm ct$, com velocidades $\pm c$ (os raios de luz). Uma parametrização mais natural da hipérbole é

$$x(s) = \frac{c^2}{a} \left(\cosh \left(\frac{a}{c} s \right) - 1 \right) \quad t(s) = \frac{c}{a} \sinh \left(\frac{a}{c} s \right)$$

onde o parâmetro s é o “tempo próprio” da partícula em movimento, pois $(ds)^2 = (dt)^2 - (dx^2)/c^2$.

CHECK!

ex: Verifique, a posteriori, as fórmulas acima.

ex: Estime, como sugerido por David Mumford no seu post [Ruminations on cosmology and time](#), o tempo (próprio) necessário a uma astronave, munida de um hipotético propulsor que fornece uma aceleração constante igual a 1G, para percorrer a distância entre a Terra e o buraco negro no centro da nossa Galaxia ...

1.2 Exponencial

Equações diferenciais também definem funções.

O exponencial. O *exponencial*, de acordo com Rudin [Ru87] “the most important function in mathematics”, é a função definida pela série de potências

$$\begin{aligned} \exp(t) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} |1/n!|^{1/n} = 0$, o raio de convergência é $R = \infty$, portanto a série converge uniformemente em cada intervalo limitado da reta real.

⁴C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.

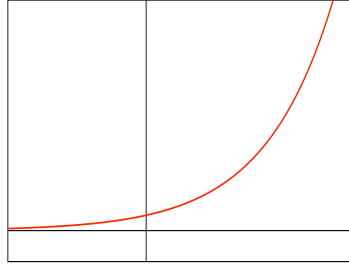


Gráfico do exponencial.

É imediato verificar que $\exp(0) = 1$. A derivada do exponencial é o próprio exponencial, como se pode ver derivando a série de potências

$$\frac{d}{dt} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots \right) = 0 + 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots$$

(e usando resultados sobre a derivação de séries convergentes). Em outras palavras, a função exponencial $x(t) = \exp(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\boxed{\dot{x} = x} \quad (1.5)$$

com condição inicial $x(0) = 1$.

Vice-versa o exponencial pode ser definido como “a única solução analítica da equação diferencial (1.5) com condição inicial $x(0) = 1$ ”. De fato, a série de potências

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

(que assumimos convergente num intervalo em torno da origem) satisfaz (1.5) se

$$0 + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

Duas séries de potências definem a mesma função, dentro do disco de convergência suposto não vazio, sse têm todos os coeficientes iguais (pois os coeficientes são proporcionais às derivadas na origem). Igualando os coeficientes, temos então

$$a_1 = a_0 \quad 2a_2 = a_1 \quad 3a_3 = a_2 \quad \dots$$

e em geral $na_n = a_{n-1}$ se $n \geq 1$. A condição inicial $x(0) = 1$ fixa $a_0 = 1$. A equação diferencial (que agora é uma equação recursiva para os coeficientes a_n 's) então implica que $a_1 = 1$, depois que $a_2 = 1/2$, logo que $a_3 = 1/6$, ... e finalmente que o coeficiente genérico é $a_n = 1/n!$. Consequentemente, a única série de potências que resolve a equação diferencial com condição inicial unitária é a (1.4).

Esta ideia, procurar uma solução que seja uma série de potências e depois deduzir os coeficientes, é um dos métodos mais importantes para resolver equações diferenciais “não lineares” (e que portanto definem funções desconhecidas, importantes se a própria equação diferencial é importante!).

Propriedades do exponencial. O exponencial “transforma somas em produtos” (ou seja, define um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+^\times$ dos números reais positivos). De fato, a derivada da função $f(t) = \exp(t) \exp(a - t)$ é nula, e portanto, pelo teorema do valor médio, a função $f(t)$ é constante, logo igual ao seu valor em $t = 0$, que é $\exp(a)$. Chamando $s = a - t$, temos portanto a identidade/equação funcional

$$\exp(t + s) = \exp(t) \exp(s) \quad (1.6)$$

para todos os $t, s \in \mathbb{R}$. Vice-versa, a equação diferencial (1.5) é uma consequência da equação funcional (1.6), assumindo a derivabilidade e o valor unitário da derivada quando $t = 0$. De fato,

$$\frac{d}{dt} \exp(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(t + \varepsilon) - \exp(t)}{\varepsilon} = \exp(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} = \exp(t)$$

se $\exp'(0) = 1$.

Em particular, como $\exp(0) = 1$,

$$\exp(-t) = \exp(t)^{-1}$$

e portanto $\exp(t) \neq 0$ para todos os $t \in \mathbb{R}$. Também, $\exp(nt) = \exp(t)^n$, para todo n inteiro, ou também racional. Isto justifica a notação tradicional $\exp(t) =: e^t$, onde

$$e := \exp(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \simeq 2.71828 \dots$$

é o *número de Euler*.

Exponenciais. Mais em geral, seja D o operador linear

$$f(t) \mapsto (Df)(t) := f'(t)$$

definido, por exemplo, no espaço linear real $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções reais $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis definidas na reta real. Então o exponencial $f(t) = e^{\lambda t}$, com λ real, é um vetor próprio do operador D com valor próprio λ , pois satisfaz

$$Df = \lambda f$$

de acordo com a regra da cadeia. Para cada λ , o espaço próprio tem dimensão um. Na linguagem das equações diferenciais, esta afirmação é o teorema de existência e unicidade seguinte.

Teorema 1.1. *A função $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, com x_0 constante, é a única solução da equação diferencial*

$$\dot{x} = \lambda x \tag{1.7}$$

(ou seja, a única função diferenciável cuja derivada é igual a λ vezes a própria função) com condição inicial $x(0) = x_0$ (ou seja, tal que o seu valor quando $t = 0$ é igual a x_0).

Demonstração. Se $y(t)$ é uma (outra?) solução de (1.7) com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $q(t) = y(t)/e^{\lambda t}$ tem derivada $\dot{q} = (\dot{y} - \lambda y)e^{-\lambda t} = 0$. Pelo teorema do valor médio, $q(t)$ é constante e, em particular, igual ao seu valor em $t = 0$, que é x_0 . Consequentemente, $y(t) = x_0 e^{\lambda t}$. $\square$

Na linguagem da álgebra linear, este teorema também diz que o núcleo do operador $D - \lambda$ é a reta gerada por $e^{\lambda t}$. No caso particular quando $\lambda = 0$, diz que o núcleo do operador D é a reta formada pelas funções constantes, consequência do teorema do valor médio (uma função com derivada nula num intervalo é constante).

ex: Determine as soluções de

$$\dot{x} = 3x \quad \text{ou} \quad \dot{x} = -7x$$

com condição inicial $x(0) = 1/e$ ou $x(2) = e$.

ex: Mostre que a imagem do operador D é o próprio espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (e portanto o teorema nulidade-ordem não faz sentido quando a dimensão não é finita).

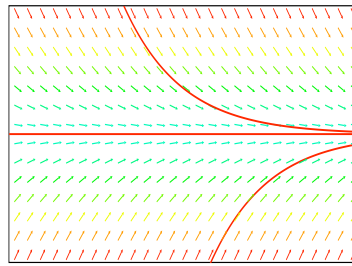
Decaimento radioativo. A taxa de decaimento de matéria radioativa é proporcional à quantidade de matéria existente, desde que a amostra seja suficientemente grande. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioativa existente no instante t satisfaz a lei

$$\dot{N} = -\beta N, \quad (1.8)$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a “vida média” dos núcleos⁵. A solução de (1.8) com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0 e^{-\beta t},$$

e “decai” para o equilíbrio $\bar{N} = 0$ quando $t \rightarrow \infty$.



Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante $\alpha > 0$, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei (decaimento com reposição)

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha. \quad (1.9)$$

A solução de equilíbrio de (1.9), ou seja, a solução que não dependem do tempo, é $\bar{N} = \alpha/\beta$. A diferença $x(t) := N(t) - \bar{N}$ satisfaz a equação diferencial $\dot{x} = -\beta x$ (ou seja, a (1.8)), e portanto a solução de (1.9) é

$$N(t) = (N(0) - \bar{N})e^{-\beta t} + \bar{N}.$$

Observe que $N(t) \rightarrow \bar{N}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (por exemplo no instante da criação do Universo!).

ex: O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioativa é o tempo τ necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial (ou seja, $N(\tau) = \frac{1}{2}N(0)$). Mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$, e determine a relação entre o tempo de meia-vida τ e o parâmetro β .

ex: O radiocarbono ^{14}C tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, assumindo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é conhecida⁶.

Crescimento exponencial. Um modelo do crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N, \quad (1.10)$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t , e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$). A solução estacionária é a solução trivial $N(t) = 0$ (população ausente). A solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

e diverge quanto $t \rightarrow \infty$ (explosão demográfica!).

⁵O tempo de vida de cada núcleo é modelado por uma variável aleatória exponencial X , com lei $\text{Prob}(X \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$ se $t \geq 0$, e 0 se $t < 0$, e média $\mathbf{E}X := \int_0^\infty t d\text{Prob}(X \leq t) = 1/\beta$. A equação diferencial, quando a quantidade N de núcleos é grande, é uma consequência da lei dos grandes números.

⁶J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

ex: Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?

ex: Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\gamma > 0$, então a população segue a lei

$$\dot{N} = \lambda N - \gamma.$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assintótico das outras soluções (veja a solução do problema do decaimento com reposição).

1.3 Equações diferenciais ordinárias

Equações diferenciais ordinárias. Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* de ordem n para uma função incógnita $y(x)$ de uma variável independente x é uma equação do género

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

onde F é uma função de $n + 1$ variáveis. As suas *soluções* são funções $x \mapsto y(x)$, definidas explicitamente ou implicitamente, que substituídas na equação juntamente com as suas primeiras n derivadas produzem uma identidade.

Campos de direções e EDOs de primeira ordem. Uma classe mais compreensível e suficientemente abrangente de EDOs é construída usando os seguintes ingredientes. Um intervalo $T \subset \mathbb{R}$, possivelmente a própria reta real, onde vive o *tempo* $t \in T$. Um *espaço de fases*, que pode ser um aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, possivelmente o próprio espaço $\mathbb{R}^n$ (ou mais em geral uma “variedade diferenciável”). Um *campo de direções*, ou seja, uma função $\mathbf{v} : T \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ suficientemente regular, que associa a cada ponto $(t, \mathbf{x})$ do *espaço de fases ampliado* $T \times X$ um vetor $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ de $\mathbb{R}^n$. Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem definida pelo campo de direções $\mathbf{v}$ é uma lei

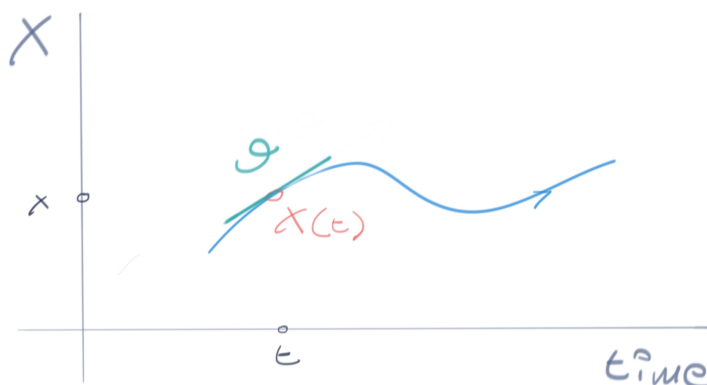
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (1.11)$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ de um sistema com espaço de fases X . O ponto $\mathbf{x}(t) \in X$ denota o *estado* do sistema no instante $t \in T$.

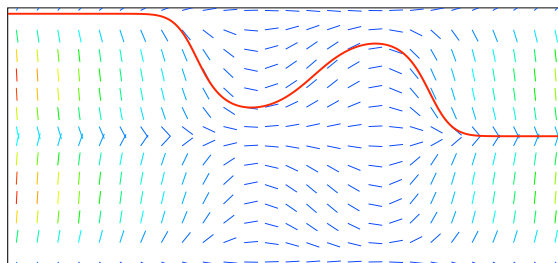
Uma *solução (local)* da EDO (1.11) é um caminho diferenciável $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, definido num intervalo aberto e não trivial $I \subset T$, cuja velocidade satisfaz $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$ para cada tempo $t \in I$. O gráfico $\Gamma := \{(t, \mathbf{x}(t)) \in I \times X \text{ com } t \in I\}$ de uma solução é dito *curva integral*.

Duas soluções definidas em intervalos $I, J \subset T$ e que coincidem na interseção $I \cap J$, suposta não vazia, definem uma solução no intervalo de tempos $I \cup J$. Uma solução $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ é dita *maximal* se não pode ser estendida a um intervalo maior $J \supset I$. Quando $T = \mathbb{R}$, uma solução definida para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é dita *solução global*.

De acordo com uma ideia de Euler, quando o espaço de fases tem dimensão um, é possível desenhar o campo de direções como (pequenos) segmentos de retas passando pelos pontos $(t, x) \in T \times X$ com direção $(1, v(t, x))$. Uma solução local é então uma função cujo gráfico é tangente ao campo de direções em cada seu ponto.



Um desenho com as direções em muitos pontos do espaço de fases ampliado pode sugerir o aspeto e até a assintótica das soluções de uma equação diferencial.



Campo de direções e uma solução de $\dot{x} = \sin(x)(1 - t^2)$.

Dados um tempo $t_0 \in T$ e um ponto $\mathbf{x}_0 \in X$, uma solução da EDO (1.11) com *condição inicial* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (ou solução do “Problema de Valores Iniciais”, P.V.I., ou solução do “problema de Cauchy”) é uma solução definida numa vizinhança de t_0 cujo gráfico contém o ponto $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

O *teorema de Peano*^{7 8} afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo, então existem sempre soluções locais, definidas em vizinhanças suficientemente pequenas do tempo inicial, do problema de Cauchy. Por outro lado, a continuidade do campo de direções não é suficiente para garantir a unicidade das soluções (um exemplo é o campo $v(x) = x^{2/3}$, como podem ver nos exercícios). O *teorema de Picard-Lindelöf*⁹ afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo e localmente Lipschitziano¹⁰ (por exemplo, diferenciável e com derivada contínua) na variável $\mathbf{x}$, então para cada ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$ passa uma única solução com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Uma prova do teorema de Picard-Lindelöf está na próxima sub-seção 1.4.

Também vale a pena mencionar que a forma mais geral de uma EDO de primeira ordem é

$$F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0.$$

onde F é uma função real arbitrária definida em $\mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}^n$. Então também existem EDOs que não têm solução por razões triviais, como por exemplo a equação $(\dot{x})^2 + 1 = 0$ no espaço das funções com valores reais. Por outro lado, uma equação diferencial deste género pode sempre ser escrita na forma (1.11) em regiões onde é possível aplicar o teorema da função implícita e resolver para a derivada.

Finalmente, existem equações diferenciais interessantes que modelam fenómenos em que a variável independente não é um tempo, mas outro observável físico. Exemplos famosos são problemas geométricos que tratam de curvas no plano. É então tradição, em particular nos manuais de matemática, usar a letra x para a variável independente e o símbolo $y(x)$ para a função incógnita, assim que uma EDO pode ser escrita $y' = v(x, y) \dots$

ex: Esboce o campo de direções das EDOs

$$\dot{x} = t \quad \dot{x} = -x + t \quad \dot{x} = \sin(t)$$

e conjecture sobre o comportamento qualitativo das soluções.

ex: Verifique que função $x(t) = t^3$ e a função constante $x(t) = 0$ são duas soluções da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$. Isto mostra que o campo de vetores $v(x) = x^{2/3}$, que não é derivável na origem (esboce o seu gráfico), não satisfaz o teorema de unicidade de Picard-Lindelöf.

⁷G. Peano, Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine, *Atti Accad. Sci. Torino* **21** (1886), 677-685.

⁸G. Peano, Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Mathematische Annalen* **37** (1890) 182-228.

⁹M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

¹⁰A função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *Lipschitziana* no domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ se existe uma constante L tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

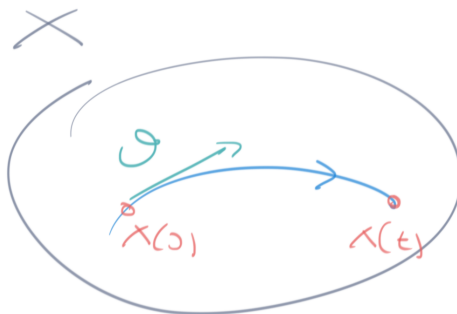
ex: Verifique que a equação diferencial $(\dot{x})^2 + x^2 = 0$ admite, no universo das funções reais, apenas a solução trivial $x(t) = 0$.

ex: Determine umas EDOs de primeira ordem e de segunda ordem que admitam como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

Campos de vetores e EDOs autônomas. Um *campo de vetores* $\mathbf{v} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ no espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$ define uma equação diferencial ordinária *autônoma* (que não depende explicitamente do tempo, como todas as leis fundamentais da física)

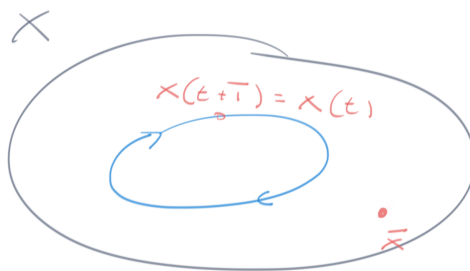
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (1.12)$$

As imagens $\mathbf{x}(I) = \{\mathbf{x}(t) \text{ com } t \in I\} \subset X$ das soluções/trajetórias $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ (com $I \subset \mathbb{R}$ intervalos) no espaço de fases são ditas *órbitas*, ou *curvas de fases*, do sistema autônomo.



Se $\bar{\mathbf{x}} \in X$ é um *ponto singular* do campo de vetores, ou seja, um ponto onde $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, então o caminho constante $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução da EDO autônoma (1.12). As soluções constantes são chamadas soluções de *equilíbrio*, ou *estacionárias*.

Soluções *periódicas* são soluções globais tais que $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$ para todo t e algum tempo $T > 0$ minimal, dito *período*. As órbitas correspondentes são curvas fechadas.



Se a EDO (1.12) satisfaz um teorema de existência e unicidade (pelo teorema de Picard-Lindelöf 1.17, é suficiente que o campo seja Lipschitziano, por exemplo diferenciável com continuidade), então para cada ponto do espaço de fases passa uma e uma única órbita (que pode ser o próprio ponto no caso de uma solução estacionária). Em particular, órbitas diferentes não têm interseções, e portanto as órbitas definem uma “partição” do espaço de fases.

ex: Esboce o campo de direções e o campo de vetores das EDOs autônomas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x & \dot{x} &= x-1 & \dot{x} &= x(1-x) \\ \dot{x} &= (x-1)(x-2)(x-3) & \dot{x} &= (x-1)^2(x-2)^2 \\ \begin{cases} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q \end{cases} & \begin{cases} \dot{q} &= 2q \\ \dot{p} &= -p/2 \end{cases} & \begin{cases} \dot{q} &= q-p \\ \dot{p} &= p-q \end{cases} \end{aligned}$$

determine as soluções de equilíbrio, e conjecture sobre o comportamento qualitativo das (outras) soluções (eventualmente, ao longo desta UC, estudaremos métodos para calcular soluções de quase todas estas equações diferenciais).

Campos completos e fluxos de fases. Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou numa variedade diferenciável). Se por cada ponto do espaço de fases passa uma e uma única solução global (i.e. definida para todos os tempos), então o campo de vetores é dito *completo*. Seja $\Phi_t(\mathbf{x}_0) := \varphi(t)$ é o estado no tempo t da solução que passa por $\mathbf{x}_0$ no instante 0. Um campo completo define/gera portanto um *fluxo de fases*, uma família de transformações $\Phi_t : X \rightarrow X$, com $t \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad \text{e} \quad \Phi_0 = \text{id}_X \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Vice-versa, um fluxo de fases diferenciável define um campo de vetores

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{t},$$

dito “gerador infinitesimal” do fluxo. As curvas $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$ são as soluções de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

ex: Determine os campos de vetores que geram os seguintes fluxos no plano $\mathbb{R}^2$

$$\Phi_t(x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\mu t} y)$$

$$\Phi_t(x, y) = (\cos(t)x - \sin(t)y, \sin(t)x + \cos(t)y)$$

$$\Phi_t(x, y) = (x + ty, y)$$

Reparametrizações. Consideramos a lei

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (1.13)$$

que determina a dinâmica de uma variável $\mathbf{x}(t)$, num espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$. A unidade de medida do tempo é, naturalmente, arbitrária. Pode ser por exemplo conveniente passar do tempo t a um tempo $\tau = kt$, onde k é um fator de conversão positivo (assim que não muda a orientação do tempo). Mais em geral, pode ser oportuno considerar uma *reparametrização* do tempo definida por

$$\tau = f(t) \quad (1.14)$$

onde f é uma função diferenciável e estritamente crescente, ou seja, com derivada estritamente positiva $d\tau/dt > 0$. Pelo teorema da função inversa, esta função admite uma inversa diferenciável $t = f^{-1}(\tau)$, com derivada $dt/d\tau = 1/(d\tau/dt)$. Então a dinâmica da variável $\mathbf{x}(t(\tau))$, dependente do tempo τ (uma notação pedante pode usar uma nova variável definida por $\mathbf{y}(\tau) := \mathbf{x}(t(\tau))$, mas parece-me desnecessária), é determinada pela EDO

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \mathbf{v}(f^{-1}(\tau), \mathbf{x})$$

obtida da (1.13) usando a regra da cadeia.

e.g. Por exemplo, consideramos a EDO

$$\frac{dx}{dt} = x/t \quad (1.15)$$

definida para tempos positivos $t > 0$. A reparametrização $t = e^\tau$ transforma a (1.15) em

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} x/e^\tau = x$$

cujas soluções são os exponenciais $x(\tau) = ce^\tau$. Consequentemente, as soluções de (1.15) são

$$x(t) = ct$$

onde $c = x(1)$.

Quase todas as EDOs têm ordem um. A forma tradicional de escrever a equação de Newton de uma partícula não relativística é

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

onde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ é a posição. No entanto, é conveniente e útil ler a definição do momento linear $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$ ao contrário, de direita para a esquerda, como uma equação diferencial para $\mathbf{q}$. Desta forma, a equação de Newton resulta equivalente ao par de equações de ordem um

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{p}/m \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}/m, t)\end{aligned}$$

ou seja, uma equação de ordem um para uma variável $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ que vive no espaço de fases $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Mais em geral, uma EDO de ordem $n \geq 2$ resolúvel para a n -ésima derivada é uma lei do género

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

para o observável $y(t) \in \mathbb{R}$, onde F é ua função (suficientemente regular) de n variáveis. É equivalente à EDO (ou sistema de EDOs) de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$$

para o observável $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$x_1 := y \quad x_2 := \dot{y} \quad x_3 := \ddot{y} \quad \dots \quad x_n := y^{(n-1)},$$

se o campo de direções é definido por $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) := (x_2, \dots, x_{n-1}, F(t, x_1, x_2, \dots, x_n))$.

ex: Determine os sistemas de ODEs de ordem 1 que traduzem as seguintes ODEs de ordem > 1

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x & \ddot{x} + \dot{x} &= 0 & \ddot{x} + \dot{x} + x &= 0 \\ \ddot{x} &= t - x & \ddot{x} + \dot{x} + x &= 0 & \ddot{x} &= x\end{aligned}$$

ex: Determine uma EDO de segunda ordem que admita como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

ex: Mostre que soluções da EDO $x^{(n)} = 0$ são os polinómios de grau $\leq n - 1$.

ex: **Soluções de Chandrasekhar da equação de Lane-Emden.** Um modelo do perfil de equilíbrio hidrostático de uma estrela é a equação de Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^p, \quad (1.16)$$

onde ξ é uma “distância adimensional” do centro da estrela, $\theta(\xi)$ é proporcional à densidade, e p é um parâmetro que depende da equação de estado $P = K\rho^{1+1/p}$ do gás que forma a estrela. O problema físico é determinar a solução com condições iniciais $\theta(0) = 1$ e $d\theta/d\xi(0) = 0$, e o menor zero de $\theta(\xi)$ com $\xi > 0$ é interpretado como sendo o raio da estrela.

Verifique que

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2, \quad \theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad \text{e} \quad \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}}$$

são soluções da equação de Lane-Emden (1.16) quando $p = 0, 1$ e 5 , respetivamente. ¹¹

¹¹S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, 1958.

1.4 Existência e unicidade

É natural colocar a questão de decidir se as equações diferenciais, que usamos como modelos de fenômenos físicos, realizam as nossas expectativas sobre o determinismo. Ou seja, se realmente as condições iniciais determinam, e univocamente, o futuro de um sistema (e eventualmente também o passado, sendo muitas leis fundamentais indiferentes à direção do tempo). Do ponto de vista matemático, isto significa provar teoremas de existência e unicidade para as soluções.

Iterações de Picard. Uma função diferenciável $t \mapsto \varphi(t)$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e com valores num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ com condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$ se e só se

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \varphi(s)) ds,$$

ou seja, se $\varphi(t)$ é um ponto fixo do mapa de Picard $\mathcal{P} : \mathcal{C}(I, X) \rightarrow \mathcal{C}(I, X)$, que envia uma função $\phi(t)$ na função

$$(\mathcal{P}\phi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \phi(s)) ds. \quad (1.17)$$

Se a sucessão de funções $\phi, \mathcal{P}\phi, \mathcal{P}^2\phi := \mathcal{P}(\mathcal{P}\phi), \dots, \mathcal{P}^n\phi := \mathcal{P}(\mathcal{P}^{n-1}\phi), \dots$, obtidas iterando o mapa de Picard a partir de uma função inicial ϕ , é convergente (numa topologia apropriada definida num subespaço $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(I, X) := \{ \phi : I \rightarrow X \text{ contínua} \}$ tal que $\mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ seja contínua), então o limite $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{P}^n\phi)(t)$ é um ponto fixo do mapa de Picard, e portanto uma solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ com a condição inicial dada $x(t_0) = x_0$.

e.g. EDOs simples. Se o campo de velocidades apenas depende do tempo, ou seja o problema é a EDO simples $\dot{x} = v(t)$, então o mapa de Picard envia toda função inicial $\phi(t)$ na solução

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

com $x(t_0) = x_0$.

e.g. O exponencial. Queremos resolver $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Começamos pela conjectura $\phi(t) = 1$, e depois calculamos

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = 1 + t \quad (\mathcal{P}^2\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} \quad (\mathcal{P}^3\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \quad \dots$$

Então a sucessão converge (uniformemente em intervalos limitados) para a série de Taylor da função exponencial

$$(\mathcal{P}^n\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} \rightarrow e^t,$$

que é a solução que já conhecemos.

Contrações e teorema de ponto fixo de Banach. Seja (X, dist) um espaço métrico. Uma transformação $f : X \rightarrow X$ é dita *contração* se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz inferior a um, ou seja, se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todos $x, x' \in X$

$$\text{dist}(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot \text{dist}(x, x').$$

As *trajetórias* da transformação $f : X \rightarrow X$ são as sucessões (x_n) definidas recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$, se $n \geq 0$, a partir de uma condição inicial $x_0 \in X$. Os *pontos fixos* de f são os pontos $p \in X$ tais que $f(p) = p$.

Um espaço métrico é *completo* se toda sucessão fundamental é convergente.

Teorema 1.2 (princípio das contrações, teorema de ponto fixo de Banach). *As trajetórias de uma contração $f : X \rightarrow X$ são sucessões de Cauchy, e a distância entre cada duas trajetórias decai exponencialmente no tempo. Se X é completo, então f admite um único ponto fixo p , e a trajetória de todo ponto converge exponencialmente para o ponto fixo.*

Demonstração. Seja $f : X \rightarrow X$ uma λ -contração. Seja $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, e seja (x_n) a sua trajetória, a sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$. Usando k -vezes a contratividade ve-se que $\text{dist}(x_{k+1}, x_k) \leq \lambda \text{dist}(x_1, x_0)^k$, e portanto que

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \text{dist}(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq \text{dist}(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\leq \text{dist}(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot \text{dist}(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Em particular, (x_n) é uma sucessão de Cauchy, pois para todo $\varepsilon > 0$ existe $\bar{n}$ tão grande que se $n \geq \bar{n}$ então $\lambda^n/(1-\lambda) < \varepsilon$.

Se (y_n) é a trajetória de um outro ponto $y_0 \in Y$, a contratividade também implica que

$$\text{dist}(x_n, y_n) \leq \lambda^n \cdot \text{dist}(x_0, y_0),$$

ou seja que a distância entre duas trajetórias decai exponencialmente.

O limite $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, que existe se X é completo, é um ponto fixo de f , porque f é contínua, e

$$f(p) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p.$$

Se p e p' são pontos fixos, então $d(p, p') = d(f(p), f(p')) \leq \lambda d(p, p')$ com $\lambda < 1$ implica que $d(p, p') = 0$, o que mostra que o ponto fixo é único. Comparando a trajetória de x_0 e do ponto fixo p (que é a sucessão constante), ve-se que

$$\text{dist}(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot \text{dist}(x_0, p),$$

ou seja, que a convergência $x_n \rightarrow p$ é exponencial. $\square$

ex: Utilize o teorema do valor médio para mostrar que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ é uma contração sse existe $\lambda < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

ex: Mostre que uma transformação $f : X \rightarrow X$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$ distintos pode não ter pontos fixos, mesmo se o espaço métrico X for completo.

Teorema de Picard-Lindelöf. ¹² O teorema de existência e unicidade básico para equações diferenciais ordinárias é o seguinte.

Teorema 1.3 (Picard-Lindelöf). *Seja $v(t, x)$ um campo de velocidades contínuo definido num domínio D do espaço de fases estendido $\mathbb{R} \times X$. Se v é localmente Lipschitziana (por exemplo, diferenciável com continuidade) com respeito a segunda variável $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma e uma única solução local da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ que passa por cada ponto $(t_0, x_0) \in D$.*

¹²M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

Demonstração. Seja $I \times B = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_\delta(x_0)$ uma vizinhança suficientemente pequena de (t_0, x_0) , onde $B = \overline{B}_\delta(x_0)$ denota o disco fechado de centro x_0 e raio δ in X . Pela continuidade do campo de velocidades $v(t, x)$ existe $K > 0$ tal que $|v(t, x)| \leq K$ se $(t, x) \in I \times B$. Pela condição de Lipschitz, existe $M > 0$ tal que $|v(t, x) - v(t, y)| \leq M|x - y|$ se $t \in I$ e $x, y \in B$. Podemos reduzir, se necessário, o raio ε de I de maneira tal que $K\varepsilon \leq \delta$ e $M\varepsilon < 1$. Seja $\mathcal{C} = C^0(I, B)$ o espaço das funções contínuas $t \mapsto \phi(t)$ que enviam I em B . Munido da norma do supremo, $\|\phi - \varphi\|_\infty := \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|$ este é um espaço métrico completo (de fato, um espaço de Banach). O mapa de Picard (1.17) envia $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$, pois

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s))| ds \leq K\varepsilon \leq \delta.$$

Finalmente, dadas duas funções $\phi, \varphi \in \mathcal{C}$, acontece que

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}\phi)(t) - (\mathcal{P}\varphi)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s)) - v(s, \varphi(s))| ds \\ &\leq M\varepsilon \cdot \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|\mathcal{P}\phi - \mathcal{P}\varphi\|_\infty < M\varepsilon \cdot \|\phi - \varphi\|_\infty.$$

Sendo $M\varepsilon < 1$, o mapa de Picard é uma contração. O teorema segue do princípio das contrações 1.2. $\square$

1.5 Simulações

Ainda mais importante, para físicos e engenheiros, é a possibilidade de simular, ou seja aproximar, soluções, na impossibilidade praticamente certa de encontrar as soluções exatas das equações diferenciais que descrevem os fenômenos interessantes do mundo real.

Soluções exatas e simulações. Exceto poucos casos importantes, resolvidos por matemáticos e físicos famosos (como a queda livre, a lei de Hooke/oscilador harmônico, o problema de Kepler, ...), não há nenhuma esperança de resolver “analiticamente” as equações diferenciais que descrevem fenômenos interessantes do mundo real (leis da física, problemas de engenharia, ...). É necessário fazer “simulações”, ou seja, calcular valores aproximados das soluções. Naturalmente, as simulações são credíveis se conseguimos controlar os erros introduzidos.

Por outro lado, sabemos hoje, depois dos trabalhos de Poincaré, que em muitos casos fisicamente interessantes (famoso é o problema dos 3 corpos) é ilusório pensar que soluções exatas sejam de alguma ajuda para fazer previsões. A moderna teoria dos sistemas dinâmicos consiste então em substituir a procura das soluções com uma análise qualitativa ou estatística das possíveis soluções.

Método de Euler/diferenças finitas. Consideramos o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x) \tag{1.18}$$

O *método de Euler* consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) \simeq x(t) + v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo” $dt = \tau$ suficientemente pequeno. A solução $x(t_n)$, nos tempos $t_n = t_0 + n\tau$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é estimada pela sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot \tau.$$

Por exemplo, em [Python](#)

```

10
11 # scientific libraries
12 import numpy as np
13 import matplotlib.pyplot as plt
14
15 # parameters and initial conditions
16 q0 = 1 # initial position
17 t0, T = 0, 1 # initial and final times
18 dt = 0.001 # time step for integration
19
20 # vector field
21 def vectorfield(x, t):
22     dqdt = x
23     return dqdt
24
25 # Euler integration
26 t = np.arange(t0, T, dt) # times
27 q = np.zeros(len(t)) # positions
28 q[0] = q0
29 for i in range(0, len(t)-1):
30     q[i+1] = q[i] + vectorfield(q[i], t[i]) * dt
31
32 # picture
33 plt.figure()
34 plt.plot(t, q, label='trajectory')
35 plt.title("Euler method")
36 plt.xlabel('time')
37 plt.ylabel('position')
38 plt.legend()

```

Se a solução verdadeira admite segunda derivada, é natural esperar, pela fórmula de Taylor com resto, que o erro

$$\varepsilon_n := x(t_n) - x_n$$

introduzido em cada passo seja da ordem de τ^2 . Num intervalo de tempo fixado $[t_0, t_0 + T]$, dividido em N subintervalos de comprimento τ (assim que $T = N\tau$), o erro acumulado deve ser então da ordem de $N\tau^2 \sim T\tau$, que converge para zero quando $\tau \rightarrow 0$.

Estimação dos erros no método de Euler. Este argumento pode ser feito rigoroso, com algumas hipóteses a priori sobre a solução.

Usa o seguinte lema, de interesse independente, que descreve um crescimento quase-exponencial em tempos discretos. Observe que a equação recursiva $y_{n+1} = \lambda y_n + \beta$, com λ positivo mas $\neq 1$, descreve um crescimento/decaimento (dependendo se λ é superior ou inferior a 1) exponencial com reposição/recolha (dependendo se β é positivo ou negativo), e a sua solução é $y_n = \lambda^n(y_0 - \bar{y}) + \bar{y}$, sendo $\bar{y} = \beta/(1 - \lambda)$ o equilíbrio.

Teorema 1.4. *Seja (y_n) uma sucessão de números não negativos que verifica*

$$y_{n+1} \leq \lambda y_n + \beta$$

com $\lambda, \beta > 0$ e $\lambda \neq 1$. Então

$$y_n \leq \lambda^n y_0 + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \beta.$$

A demonstração é simples, por indução.

Assumimos então que exista e seja única a solução de $\dot{x} = v(t, x)$ no intervalo $I = [t_0, t_0 + T]$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Assumimos também que a sua segunda derivada seja uniformemente limitada, i.e.

$$|\ddot{x}(t)| \leq M \quad (1.19)$$

e que o campo de velocidades seja Lipschitziano na segunda variável, i.e.

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leq K |x - y|, \quad (1.20)$$

também uniformemente em $t \in I$.

Teorema 1.5. *Seja $x(t)$ a única solução de $\dot{x} = v(t, x)$ no intervalo $[t_0, t_0 + T]$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Se o campo satisfaz (1.20) e a solução satisfaz (1.19), então a diferença entre os $x(t_n)$, com $t_n = t_0 + n\tau$ e $0 \leq n \leq N$, e os termos da sucessão $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$, obtida usando o método de Euler com passo $\tau = T/N$, é limitada por*

$$|x(t_n) - x_n| \leq M \frac{(1 + K\tau)^n}{2K} \tau.$$

Demonstração. Usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange e a própria equação diferencial $\dot{x}(t_n) = v(t_n, x(t_n))$, podemos escrever

$$\begin{aligned} |x(t_{n+1}) - x_{n+1}| &= |x(t_n + \tau) - x_n - v(t_n, x_n) \tau| \\ &= |x(t_n) + \dot{x}(t_n) \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}(t_n + \delta) \tau^2 - x_n - v(t_n, x_n) \tau| \\ &= |x(t_n) - x_n + (v(t_n, x(t_n)) - v(t_n, x_n)) \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}(t_n + \delta) \tau^2| \end{aligned}$$

onde $0 < \delta < \tau$. Pela desigualdade do triângulo e as hipóteses (1.19) sobre a segunda derivada da solução e (1.20) sobre o campo vetorial,

$$\begin{aligned} |x(t_{n+1}) - x_{n+1}| &\leq |x(t_n) - x_n| + |v(t_n, x(t_n)) - v(t_n, x_n)| \tau + \left| \frac{1}{2} \ddot{x}(t_n + \delta) \tau^2 \right| \\ &\leq |x(t_n) - x_n| + K\tau |x(t_n) - x_n| + M\tau^2/2. \end{aligned}$$

Portanto, a sucessão dos erros $\varepsilon_n = x(t_n) - x_n$ satisfaz

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1 + K\tau) |\varepsilon_n| + \frac{M\tau^2}{2}$$

Pelo teorema 1.4, com $\varepsilon_0 = 0$, $\lambda = (1 + K\tau)$ e $\beta = M\tau^2/2$, temos

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{(1 + K\tau)^n - 1}{K\tau} M\tau^2/2$$

e portanto o resultado. $\square$

Convergência do método de Euler. Como natural esperar, a cota superior aos erros no teorema 1.5 é máxima quando $n = N$, o número total de passos no intervalo $[t_0, t_0 + T]$. Quando o passo $\tau \rightarrow 0$, o número de passos $N = T/\tau$ tende para o ∞ . Mas

$$M \frac{(1 + K\tau)^N}{2K} = M \frac{\left(1 + \frac{KT}{N}\right)^N}{2K} \rightarrow M \frac{e^{KT}}{2K}$$

quando $N \rightarrow \infty$. Consequentemente, nas hipóteses do teorema 1.5, os erros são uniformemente limitados por

$$|\varepsilon_n| \leq M \frac{e^{KT}}{2K} \tau,$$

logo convergem para zero uniformemente quando $\tau \rightarrow 0$.

e.g. Exponencial. Consideramos a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$, que define a função exponencial. Se o passo é $\tau > 0$ e o tempo final é $t = n\tau$ com $n \in \mathbb{N}$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq x_n = (1 + \tau)^n$$

onde $n = t/\tau$ é o número de passos. No limite quando o passo $\tau \rightarrow 0$, as aproximações convergem para a solução $x(t) = e^t$, pois

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (1 + \tau)^{t/\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t.$$

ex: Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...

ex: Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

Método RK-4. O método de Runge-Kutta (de ordem) 4 para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \quad \text{com condição inicial} \quad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um “passo” dt , e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dt}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$, e os coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)$$

ex: Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.

Simulações. Existem software livres e proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinárias e parciais.

Por exemplo, a livreria **SciPy** de **Python** contém a função **odeint**

```

9
10 # scientific libraries
11 import numpy as np
12 import matplotlib.pyplot as plt
13 from scipy.integrate import odeint
14
15 # parameters and initial conditions
16 q0 = 0.3 # initial position
17 p0 = 0.3 # initial momentum
18 beta = 0.1 # friction coefficient
19 omega = 1 # proper frequency
20 t0, T = 0, 10 # initial and final times
21 dt = 0.001 # time step
22
23 # vector field
24 def oscillator(y, t, beta, omega):
25     q, p = y
26     dqdt = p
27     dpdt = - (omega ** 2) * q - beta * p
28     return dqdt, dpdt
29
30 # integration
31 t = np.arange(t0, T, dt) # times
32 y0 = q0, p0 # set initial conditions
33 trajectory = odeint(oscillator, y0, t, args=(beta, omega))
34 q, p = trajectory.T
35
36 plt.figure()
37 plt.plot(q, p, label='orbit')
38 plt.title("ODE integration")
39 plt.xlabel('position')
40 plt.ylabel('momentum')
41 plt.legend()

```

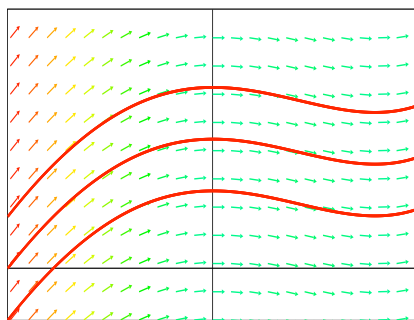
2 Métodos elementares de integração

2.1 EDOs simples

Integração de EDOs simples. A equação diferencial mais simples é do gênero

$$\dot{x} = v(t) \quad (2.1)$$

onde o campo de direções $v(t)$ depende apenas do tempo t , e não da própria função incógnita x . Se $x(t)$ é solução de (2.1) então também $x(t) + c$ é solução, para todas as constantes $c \in \mathbb{R}$. Consequentemente, as soluções diferem por uma constante aditiva, determinada pela condição inicial.



Três soluções da EDO simples $\dot{x} = t^3 \sin(t)$ que diferem por uma constante aditiva.

O teorema (fundamental do cálculo) de Newton e Leibniz¹³ afirma que a derivada do integral indefinido $F(t) := \int_a^t f(s) ds$ de uma função contínua $f(t)$ existe e é igual a $F'(t) = f(t)$. Portanto,

Teorema 2.1. Se $v(t)$ é um campo de direções contínuo definido num intervalo de tempos, então a solução da EDO simples (2.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja, é dada por

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds \quad (2.2)$$

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo, a derivada da (2.2) é $\dot{x}(t) = v(t)$, e o seu valor no instante t_0 é $x(t_0) = x_0$, pois o integral $\int_{t_0}^{t_0} v(s) ds$ é nulo. A unicidade é um exercício. $\square$

Por causa deste teorema, as equações diferenciais simples são ditas *integráveis*, e “integrar” (uma equação diferencial) é usado como sinónimo de “resolver”.

ex: Integre (ou seja, determine a solução geral) as seguintes EDOs, definidas em oportunos intervalos de tempo

$$\dot{x} = 2 - t + 3t^2 + 5t^6 \quad \dot{x} = e^{-t} \quad \dot{x} = \cos(3t) \quad \dot{x} = 1/t$$

ex: Determine $x(t)$ sabendo que

$$\dot{x} = e^{2t} \quad \text{e} \quad x(0) = 6$$

$$\dot{x} = \sin(t) \quad \text{e} \quad x(\pi) = 0$$

¹³A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é “*Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*”.

ex: Mostre que a solução do teorema 2.2 é única (considere duas soluções, calcule a derivada da diferença, e utilize o teorema do valor médio ...)

Foguetão. Se um foguetão de massa $m(t)$ no espaço vazio (ou seja, sem forças gravitacionais!) expulsa combustível a uma velocidade relativa constante $-V$ e a uma taxa constante $\dot{m} = -\alpha$, (com $\alpha > 0$) então a sua trajetória num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = \dot{m}(v - V), \quad \text{e portanto} \quad , \quad m\dot{v} = -\alpha V.$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$ é a velocidade e $q(t)$ a posição.

ex: Resolva a EDO $\dot{m} = -\alpha$ para a massa do foguetão, com massa inicial $m(0) = m_0$, e substitua o resultado na equação de Newton, obtendo

$$\dot{v} = \frac{\alpha V}{m_0 - \alpha t}$$

(desde que $0 \leq t < m_c/\alpha$, onde $m_c < m_0$ é a massa inicial do combustível). Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = 0$ e posição inicial $q(0) = 0$, válida para tempos t inferiores ao tempo necessário para acabar o combustível.

ex: Se $q(t)$ representa a altura e o foguetão está sujeito à força gravitacional próximo da superfície da Terra, então a equação de movimento fica

$$m\dot{v} = -\alpha V - mg$$

Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = 0$ e posição inicial $q(0) = 0$, e determine a altura atingida no instante $\bar{t} = m_c/\alpha$ em que o combustível acaba.

Elementos R , C ou L num circuito alimentado com tensão alternada. Consideramos um circuito alimentado por uma fonte de tensão alternada (AC), com uma força electromotriz

$$V(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

de frequência angular ω e amplitude E_0 . Se o circuito é composto apenas de uma resistência R , então a corrente $I(t)$ satisfaz a equação $V = RI$, e portanto é uma oscilação

$$I(t) = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t)$$

em fase com a tensão. Se o circuito é composto por apenas um condensador de capacidade C e tem resistência (praticamente) nula, então a carga $Q = \int I$ no condensador, suposta inicialmente nula, satisfaz $V = Q/C$. Consequentemente, a corrente satisfaz a equação $\frac{1}{C}I(t) = \dot{V}$. Isto diz que a corrente é uma oscilação

$$I(t) = -\omega C E_0 \sin(\omega t) = \omega C E_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

avanzada $\pi/2$ em relação à tensão. Finalmente, se o circuito é composto por apenas uma bobina de indutância L e tem resistência (praticamente) nula, então a corrente $I(t)$ satisfaz a EDO

$$L\dot{I} = V$$

A solução com condição inicial nula é uma oscilação

$$I(t) = \frac{E_0}{\omega L} \sin(\omega t) = \frac{E_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

atrasada de um ângulo $\pi/2$ relativamente à tensão.

Braquistócrona. A **braquistócrona** é a curva ao longo da qual uma partícula inicialmente em repouso desliza, sem atrito e sujeita à gravidade, entre dois pontos de um plano vertical em um tempo menor possível (Bernoulli, Newton, Leibniz). De acordo com a solução genial de Johann Bernoulli (que podem ler em [Si91] ou também ver e ouvir em [3Blue1Brown](#) explicada por Steven Strogatz), a velocidade escalar v da partícula e o ângulo φ que a curva forma com a vertical satisfazem

$$\frac{\sin \varphi}{v} = \frac{1}{\alpha}$$

para alguma constante α (a velocidade escalar máxima atingida no ponto de altura mínima da curva, quando $\varphi = \pi/2$), por analogia com o “princípio de Fermat” da óptica geométrica, logo a “lei de Snell” sobre os ângulos de refração. Por outro lado, pela conservação da energia a velocidade escalar é proporcional a

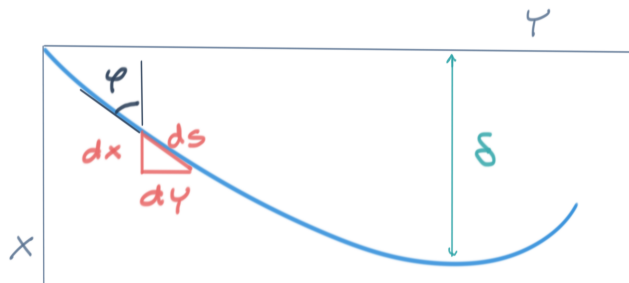
$$v = \sqrt{2gx}$$

se x denota a queda da partícula e g a aceleração gravitacional. Consequentemente, a braquistócrona é a curva que satisfaz a identidade

$$\sin \varphi = \sqrt{x/\delta}$$

onde $\delta = \alpha^2/2g$ denota a queda máxima, atingida quando a velocidade escalar é máxima. Se $y(x)$ denota a distância horizontal percorrida enquanto função da queda x , então $\sin \varphi = dy/ds$ com $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Finalmente, depois de alguma ginástica, a braquistócrona é definida pela EDO

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{\delta - x}} \quad (2.3)$$



ex: Use a substituição trigonométrica $x = \rho(1 - \cos \theta)$ com $\rho = \delta/2$ (observe que x varia entre 0 e δ) e a identidade $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ para calcular uma primitiva do segundo membro da (2.3). Deduza que a braquistócrona é a curva paramétrica

$$x(\theta) = \rho(1 - \cos \theta) \quad y(\theta) = \rho(\theta - \sin \theta)$$

ou seja, uma **cicloide** gerada por uma roda de raio ρ .

ex: A lei horária pode ser calculada integrando $dt = ds/v$. Verifique que a partícula, inicialmente em $x = 0$, atinge a posição $x = \delta$, o mínimo da curva, no tempo

$$t = \sqrt{\rho/g} \int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{\delta x - x^2}} = \pi \sqrt{\rho/g}$$

(para calcular o integral, é útil usar a substituição trigonométrica anterior).

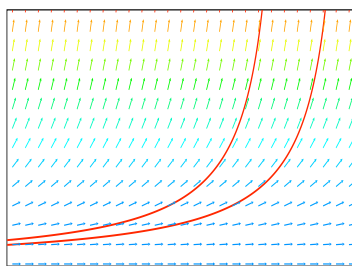
ex: Calcule a lei horária de uma partícula que se desloca ao longo de uma braquistócrona, a partir de um ponto arbitrário com velocidade inicial nula. Verifique que a partícula atinge o mínimo da curva no tempo $\pi \sqrt{\rho/g}$, independentemente da posição inicial (e portanto a cicloide é uma **curva tautocrônica**).

2.2 EDOs autônomas

Campos de vetores e EDOs autônomas na reta. Um campo de vetores $v : X \rightarrow \mathbb{R}$, definido num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, define uma EDO *autônoma*

$$\dot{x} = v(x). \quad (2.4)$$

A palavra “autônoma” indica que o campo $v(x)$ não depende explicitamente do tempo. Se $x(t)$ é solução de (2.4), então também $x(t-c)$ é solução, para todos os tempos $c \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a física modelada por uma EDO autônoma é invariante para translações no tempo. Em particular, podemos sempre considerar, sem perda de generalidade, as condições iniciais dadas no tempo $t_0 = 0$.

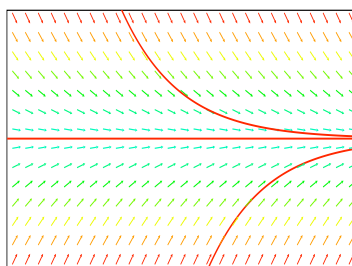


Duas soluções da EDO autônoma $\dot{x} = x^2$ que diferem por uma translação no tempo.

Se x_0 é um *ponto singular* do campo de vetores, ou seja, um ponto onde $v(x_0) = 0$, então a trajetória constante

$$x(t) = x_0$$

para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução *estacionária*, ou *de equilíbrio*, da equação diferencial autônoma (2.4).



Equilíbrio e outras duas soluções da EDO autônoma $\dot{x} = -x$.

Se x_0 é um ponto *regular* do campo contínuo $v(x)$, ou seja, se $v(x_0) \neq 0$ (e portanto, pela continuidade, $v(x)$ continua diferente de zero numa vizinhança de x_0), então uma solução local de (2.4) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada “separando as variáveis”, ou seja, fazendo formalmente

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{v(x)} = dt$$

e integrando os dois membros,

$$\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$$

entre limites de integração apropriados. Ou seja,

Teorema 2.2. Se x_0 é um ponto regular do campo contínuo $v(x)$, então uma solução local da EDO autônoma (2.4) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é dada implicitamente por

$$\boxed{\int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0} \quad (2.5)$$

num intervalo de tempos suficientemente pequeno em torno de t_0 . Se o campo $v(x)$ é diferenciável, esta solução é única.

Demonstração. Assumimos que o campo de velocidades v é contínuo, e seja $J = (x_-, x_+)$ o intervalo maximal contendo x_0 onde v é diferente de zero. Definimos a função $H : \mathbb{R} \times J \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$H(t, x) = t - t_0 - \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}.$$

Se $t \mapsto \varphi(t)$ é uma solução do problema de Cauchy, então um cálculo mostra que $\frac{d}{dt}H(t, \varphi(t)) = 0$ para todo tempo t . Consequentemente H é constante ao longo das soluções do problema de Cauchy. Sendo $H(t_0, x_0) = 0$, concluímos que o gráfico de toda solução pertence ao conjunto de nível $\Sigma = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times J \text{ s.t. } H(t, x) = 0\}$. A função H é derivável, e o seu diferencial $dH = dt + dx/v(x)$ não é nulo. De fato, as duas derivadas parciais $\partial H/\partial t$ e $\partial H/\partial x$ são sempre diferentes de zero. Pelo teorema da função implícita o conjunto de nível Σ é, numa vizinhança $I \times J$ do ponto (t_0, x_0) , o gráfico de uma função diferenciável $x \mapsto t(x)$, assim como o gráfico de uma função diferenciável $t \mapsto x(t)$, a função inversa de $t(x)$, que é uma solução do problema de Cauchy. De fato, a sua derivada é, pelo teorema da função inversa,

$$\dot{x}(t) = 1 / \left(\frac{dt}{dx}(x(t)) \right) = v(x)$$

e a condição inicial é $x(t_0) = x_0$. □

Observe que a função $t(x) - t_0$ tem a interpretação do “tempo necessário para ir de x_0 até x ”.

e.g. Exponencial. Consideramos a equação diferencial autônoma

$$\dot{x} = \lambda x$$

com $\lambda \neq 0$ (que já sabemos resolver). A solução de equilíbrio é $x(t) = 0$. A solução com condição inicial $x(t_0) = x_0 \neq 0$ é obtida separando as variáveis,

$$\frac{dx}{x} = \lambda dt$$

e integrando, de acordo com

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{y} = \lambda \int_{t_0}^t ds \quad \Rightarrow \quad \log |x/x_0| = \lambda(t - t_0)$$

Se $x_0 \neq 0$, então por continuidade o sinal de $x(t)$ é igual ao sinal de x_0 para tempos suficientemente pequenos (e também para tempos grande, pois pelo teorema de unicidade (1.3) a única solução que assume o valor nulo em algum tempo é a solução de equilíbrio). Podemos então tirar o valor absoluto, calcular o exponencial, e obter finalmente

$$x(t) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

Por acaso, esta fórmula também inclui a solução de equilíbrio quando $x_0 = 0$.

ex: Considere as seguintes EDOs autónomas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x & \dot{x} &= x - 1 & \dot{x} &= x^2 & \dot{x} &= x^2 + 1 & \dot{x} &= \sqrt{x} \\ \dot{x} &= e^x & \dot{x} &= (x-1)(x-2) & \dot{x} &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

definidas em intervalos convenientes. Encontre, caso existam, as soluções estacionárias. Desenhe os respectivos campos de vetores e conjecture sobre o comportamento das soluções. Integre, quando possível, as equações e calcule soluções. Determine, quando possível, umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

Atrito e tempo de relaxamento. O atrito pode ser modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. Portanto, a equação de Newton (em dimensão 1) de uma partícula livre de massa m em presença de atrito é

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$$

onde $\gamma > 0$ é o “coeficiente de atrito”. A velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v$$

onde $\tau = m/\gamma > 0$. A solução é $v(t) = e^{-t/\tau}v(0)$, assim que τ é um “tempo de relaxamento”, o tempo necessário para reduzir a velocidade de um fator $1/e$. A energia cinética $T := \frac{1}{2}mv^2$ da partícula satisfaz

$$\dot{T} = -\frac{2}{\tau}T,$$

e portanto decresce exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau/2$, ou seja, mais rapidamente.

ex: Calcule a solução de $m\ddot{q} = -\gamma q$ com posição inicial $q(0) = q_0$ e velocidade inicial $\dot{q}(0) = v_0$.

ex: Um modelo da queda de um paraquedista é

$$m\dot{v} = -\alpha v|v| - mg,$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$, $q(t)$ é a altura no instante t , $m > 0$ é a massa, $g \simeq 9.80$ m/s² é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\alpha > 0$ é uma constante que depende da atmosfera e do paraquedista (um valor realístico é $\alpha \simeq 30$ kg/m). Mostre que a velocidade $v(t)$ do paraquedista converge para o valor estacionário $\bar{v} = \sqrt{mg/\alpha}$ quando $t \rightarrow \infty$.

ex: A tensão sobre o capacitor num filtro/circuito RC é modelada pela lei de Kirchoff

$$C\dot{V} + \frac{1}{R}V = 0$$

Verifique que a solução com tensão inicial $V(0) = V_0$ é

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

onde o tempo característico do filtro é $\tau = 1/(RC)$.

Logística. Um modelo mais realista da dinâmica de uma população $N(t)$ num meio ambiente limitado é dado pela *equação logística*¹⁴

$$\dot{N} = \lambda N (1 - N/M)$$

¹⁴Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

onde a constante positiva M é a população máxima permitida e $\lambda > 0$. Observe que $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll M$, e que $\dot{N} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow M$. A “população relativa” $x(t) := N(t)/M$ satisfaz a equação logística “adimensional”

$$\dot{x} = \lambda x (1 - x). \quad (2.6)$$

As soluções de equilíbrio são $\bar{x} = 0$ (população ausente) e $\bar{x} = 1$ (ou seja, $\bar{N} = M$, população máxima). A solução de (2.6) com condição inicial $x(0) = x_0 \neq 0, 1$ pode ser determinada separando as variáveis e integrando, e é dada em forma implícita por

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{y(1-y)} = \int_0^t \lambda ds$$

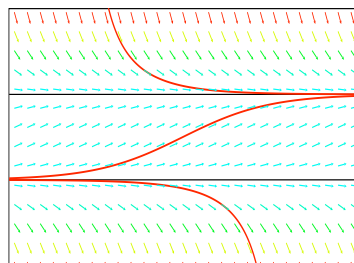
ex: Use a identidade

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

e deduza que a solução de (2.6) com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ (fora deste intervalo o modelo não faz sentido físico) é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}.$$

ex: Discuta o comportamento assintótico das soluções da equação logística.



Epidemias. Num surto epidémico, a taxa de crescimento do número $I(t)$ de indivíduos infetados, dentro de uma população total constante N , é proporcional ao produto do número de indivíduos infetados e o número $S(t) = N - I(t)$ de indivíduos saudáveis (e portanto susceptíveis de serem infetados), ou seja,

$$\dot{I} = \lambda I (N - I)$$

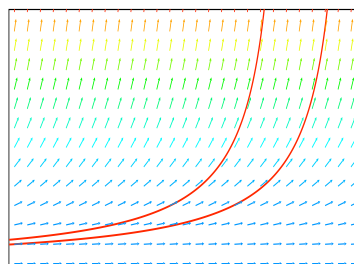
com $\lambda > 0$.

ex: Determine a lei de crescimento da população infectada relativa $x(t) := I(t)/N$, e discuta o comportamento assintótico de $x(t)$.

Crescimento super-exponencial/explosão. Um outro modelo de dinâmica de uma população em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N^2,$$

ou seja, a taxa de crescimento é proporcional aos pares de indivíduos contidos na população. A solução estacionária é a solução trivial $N(t) = 0$.



ex: Mostre que a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = \frac{1}{N_0^{-1} - \lambda t},$$

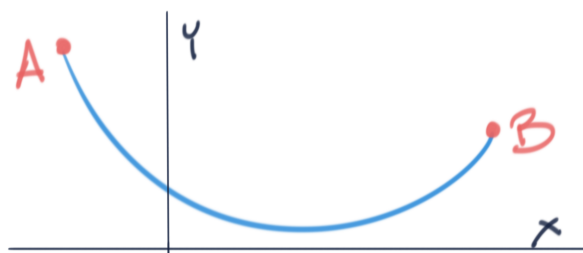
definida para tempos $t < 1/\lambda N_0$. Este modelo prevê uma catástrofe (população infinita, explosão) após um intervalo de tempo finito!

Catenária. A *catenária*, é a curva descrita, num plano vertical, por uma corrente flexível fixada pelas extremidades e sujeita apenas à gravidade (Leonardo da Vinci, Galileo, ... Huygens, Leibniz e os Bernoulli). A equação diferencial para a altura $y(x)$ é

$$\lambda \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde $\lambda = \alpha \rho g / t$ é uma constante que depende da seção α e da densidade ρ da corda, da aceleração gravitacional g e da tensão t . O declive $z = dy/dx$ satisfaz então a EDO de primeira ordem

$$\lambda \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$$



ex: Separe as variáveis e mostre que

$$\log(z + \sqrt{1 + z^2}) = \frac{x}{\lambda}$$

é a solução implícita com condição inicial $z(0) = y'(0) = 0$, assim que $x = 0$ é o ponto onde a altura atinge o mínimo. Deduza que $z = \sinh(x/\lambda)$ e portanto, ao integrar, que a catenária é um coseno hiperbólico

$$y(x) = \lambda \cosh(x/\lambda) + c$$

Tractrix. A *tractrix* é a curva descrita, num plano horizontal, por um objeto, sujeito ao atrito, fixado a uma extremidade de um segmento cuja outra extremidade desliza ao longo de uma reta (Perrault, Newton, Huygens e Leibniz). Num referencial conveniente, é o gráfico de uma função $y(x)$ determinada pela EDO

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\ell^2 - y^2}{y^2}$$

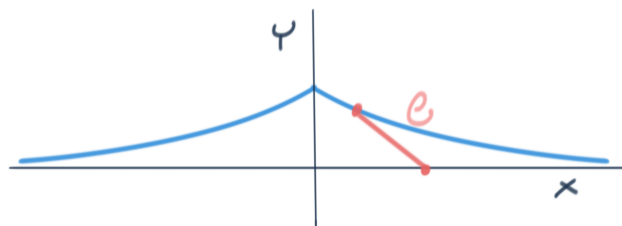
com condição inicial $y(\ell) = 0$, onde $\ell > 0$ denota o comprimento do segmento.

ex: Resolva para a derivada de acordo com

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\ell^2 - y^2}}{y}$$

separe as variáveis e mostre que a curva é descrita por

$$y(x) = \pm \left(\ell \log \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - x^2}}{x} - \sqrt{\ell^2 - x^2} \right)$$



Fazer modelos. Escreva equações diferenciais que modelam cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?

ex: A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá é proporcional à diferença entre a temperatura do quarto, suposta constante, e a temperatura do chá.

ex: A velocidade vertical de um foguetão é inversamente proporcional à altura atingida.

ex: A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.

ex: Uma esfera de gelo derrete a uma taxa proporcional à sua superfície.

ex: A taxa de crescimento de uma população de marcianos é proporcional ao número de trios que é possível formar com a dada população.

2.3 EDOs separáveis

Produto direto de EDOs. O *produto direto* das EDOs autónomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$ é o sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ \dot{y} = w(y) \end{cases} \quad (2.7)$$

definido no plano. As soluções do sistema são os caminhos $t \mapsto (x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são as soluções das EDOs autónomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$, respetivamente.

Se (x_0, y_0) é um ponto singular para o sistema (2.7), ou seja, um ponto onde $v(x_0) = 0$ e $w(y_0) = 0$, então $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ é uma solução estacionária do sistema. Se x_0 é um ponto singular para v e y_0 é um ponto regular para w , então é claro que as curvas de fases do sistema que passam por (x_0, y_0) são segmentos verticais no plano. Vice-versa, se x_0 é um ponto regular para v e y_0 é um ponto singular para w , então é claro que as curvas de fases do sistema que passam por (x_0, y_0) são segmentos horizontais no plano.

Consideramos finalmente o caso genérico de um ponto regular (x_0, y_0) para os dois campos, onde $v(x_0) \neq 0$ e $w(y_0) \neq 0$. A solução de (2.7) que passa no instante t_0 pelo ponto (x_0, y_0) é determinada implicitamente por

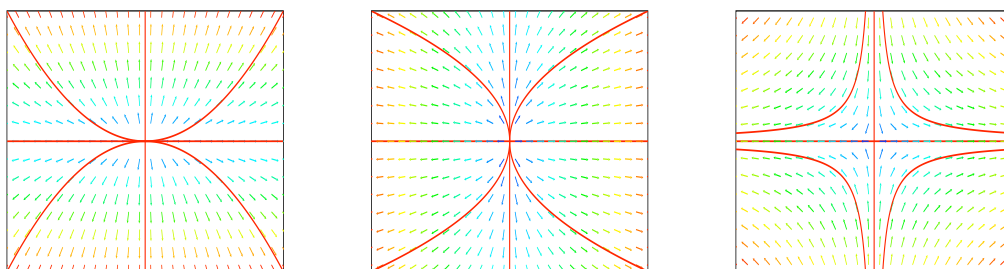
$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)} = t - t_0 \quad \text{e} \quad \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{w(\eta)} = t - t_0$$

A curva de fases é obtida eliminando o tempo $t - t_0$, e é portanto definida pela equação cartesiana

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{w(\eta)}$$

Pelo teorema da função implícita, esta curva é (localmente) o gráfico de uma função $x \mapsto y(x)$ ou de uma função $y \mapsto x(y)$ que satisfaz a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{v(x)}{w(y)}$$



ex: Determine as soluções e as curvas de fases do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

quando $\lambda = 0, \pm 1, 2, \dots$ e quando $\lambda = 1/2, 1/3, \dots$.

EDOs separáveis. Uma equação diferencial do género

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)} \tag{2.8}$$

onde o campo de direções é um produto de uma função da variável independente e uma função da variável dependente (a função incógnita) é dita *separável*. Casos particulares são EDOs simples e autónomas.

De acordo com a discussão anterior, estas equações diferenciais podem ser consideradas equações diferenciais que definem as curvas de fases de um produto direto de duas EDOs autónomas. A solução de (2.8) com condição inicial $y(x_0) = y_0$ tal que $v(x_0) \neq 0$ e $w(y_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\boxed{\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{w(\eta)}} \tag{2.9}$$

Assim, a integração de uma EDO separável consiste em calcular primitivas.

e.g. Por exemplo, consideramos a EDO separável

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\theta^2}$$

no primeiro quadrante, ou seja, com $r > 0$ e $\theta > 0$. As soluções são obtidas integrando

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{d\theta}{\theta^2} \quad \Rightarrow \quad \log r = c - 1/\theta$$

e são do género $r = Ce^{-1/\theta}$ para algumas constantes positiva $C = e^c$.

ex: Resolva as seguintes EDOs separáveis definidas em oportunos domínios.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{dy}{dx} = -x/y & \frac{dy}{dx} = x/y & \frac{dy}{dx} = kx^\alpha y^\beta & \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y} \\ \dot{x} = tx^3 & t\dot{x} + t = t^2 & \dot{x} = t^3/x^2 & x\dot{x} = e^{x+3t^2}t & \dot{x} = e^{t-x} \\ \dot{x} = \frac{t-1}{x^2} & \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 & (t^2+1)\dot{x} = 2tx & \dot{x} = t(x^2-x) \end{array}$$

Allometric laws. If two organs/tissues/components of a living body/organism/community grow with different (but both constant!) relative growth rates α and β , say

$$\dot{x} = \alpha x \quad \text{and} \quad \dot{y} = \beta y$$

(the independent variable t may be time, or a linear dimension, or something else), then they satisfy the relation

$$\frac{1}{\beta y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha x} \frac{dx}{dt}$$

Eliminating “ dt ”, we get the linear/separable/homogeneous ODE

$$\frac{dy}{dx} = (\beta/\alpha) \frac{y}{x},$$

Its solution is the *allometric law* ^{15 16}

$$y = c \cdot x^\gamma \quad \text{or, equivalently,} \quad \log y = \gamma \cdot \log x + \log c,$$

with “scaling exponent” $\gamma = \beta/\alpha$, and some constant $c = x_0/y_0$ related to the initial conditions $x(t_0) = x_0$ and $y(t_0) = y_0$.

A famous example is *Kleiber’s law* ¹⁷ (*mouse-to-elephant curve*)

$$\text{BMR} = c \cdot M^{3/4}$$

which relates the basal metabolic rate BMR to the mass M of an animal.

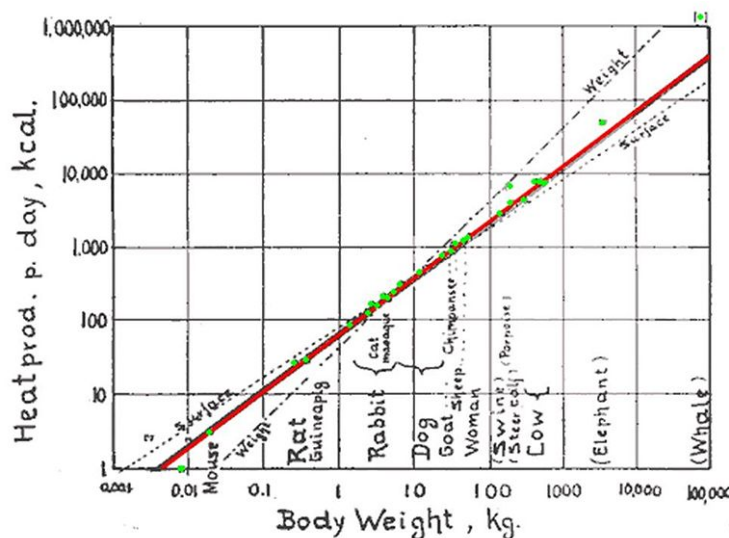


Fig. 1. Log. metabol. rate/log body weight

Original graph of body size versus metabolic rate hand-drawn by Max Kleiber
(source [Wikipedia](#))

The heart rate T and the mass M of an animal are related by the allometric law

$$T = c \cdot M^{1/4}$$

¹⁵W. D’Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 1917, 2nd ed. 1942 [Cambridge University Press, 1992].

¹⁶Julian S. Huxley, *Problems of Relative Growth* (2nd ed.), Dover, 1972.

¹⁷M. Kleiber, Body size and metabolism, *Hilgardia* **6** (1932), 315-351. M. Kleiber, Body size and metabolic rate, *Physiological Reviews* **27** (1947), 511-541.

Sistemas autônomos no plano e EDOs exatas. Parece natural, devido a simetria da solução (2.9), escrever uma equação diferencial separável como (2.8) na forma simétrica

$$\frac{dx}{v(x)} = \frac{dy}{w(y)}$$

seja qual for o significado das expressões dx e dy . Esta notação sugere que as soluções são curvas de fases do um sistema autônomo 2.7. Mais em geral, é tradição considerar expressões do género

$$\frac{dx}{f(x, y)} - \frac{dy}{g(x, y)} = 0 \quad (2.10)$$

como se fossem equações diferenciais. Uma interpretação possível é considerar a (2.10) como uma maneira de caracterizar as curvas de fases do sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.11)$$

numas vizinhanças dos pontos regulares do campo de vetores. É claro que multiplicar por um mesmo fator $q(x, y)$ as duas componentes do campo de vetores $\mathbf{v}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ muda a lei horária mas não muda as curvas de fases do sistema (pois apenas afeta a velocidade com que estas curvas são percorridas). Pode acontecer então que uma escolha particularmente feliz da uma função $q(x, y)$ transforme a expressão duvidosa (2.10) num “diferencial exato”

$$dH = \frac{q(x, y)}{f(x, y)} dx - \frac{q(x, y)}{g(x, y)} dy$$

de alguma função $H(x, y)$, no sentido em que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{q(x, y)}{f(x, y)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{q(x, y)}{g(x, y)}$$

As curvas de fases do sistema (2.11) são então, localmente, as curvas de nível da função $H(x, y)$, pois

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{q(x, y)}{f(x, y)} f(x, y) - \frac{q(x, y)}{g(x, y)} g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

ao longo das soluções de (2.11). A função $q(x, y)$, quando existe, é chamada *fator integrante*. A equação diferencial sugerida pela expressão (2.11), ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

cujas soluções são as curvas de nível de $H(x, y)$, é chamada então *exata*.

Disclaimer. Não conheço nenhuma equação diferencial interessante da física-matemática que apenas pode ser integrada usando um fator integrante (mas posso estar enganado). Por esta razão, não me parece útil propor exercícios sobre o assunto.

O único “fator integrante” fundamental que conheço é a “temperatura absoluta” T de um sistema termodinâmico, que faz do quociente dQ/T um diferencial exato, o da entropia

$$S = \int \frac{dQ}{T}$$

Mas esta é outra história.

2.4 EDOs lineares de primeira ordem

[Ap69] Vol. 1, 8.1-7

28 fev 2023

EDOs lineares de primeira ordem. Uma EDO *linear de primeira ordem* é uma lei

$$\dot{x} + p(t)x = q(t) \quad (2.12)$$

para o observável $x(t)$, onde os “coeficientes” $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas definidas num intervalo de tempos (por exemplo, em toda a reta real).

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções da EDO linear de primeira ordem (2.4), então a diferença $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução da *equação homogênea associada*

$$\dot{y} + p(t)y = 0 \quad (2.13)$$

O espaço das soluções da equação homogênea (2.13), que é separável, é um espaço vetorial de dimensão 1, uma reta $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}$ gerada, por exemplo, pela solução

$$y_1(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \quad (2.14)$$

que vale $y_1(t_0) = 1$ no instante inicial t_0 . Portanto, o espaço das soluções da equação linear (2.4) é uma reta afim $z + \mathcal{H}$, onde $z(t)$ é uma solução particular de (2.4).

A solução da EDO linear (2.4) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada usando o método da “variação das constantes/dos parâmetros”. O primeiro passo consiste em determinar uma solução não-trivial $y(t)$ da equação homogênea (2.13) (por exemplo, a solução (2.14), que tem valor 1 no instante inicial). O segundo passo consiste em substituir a “conjetura”

$$x(t) = \lambda(t)y(t)$$

(o fator λ é o parâmetro que varia!) na equação não-homogênea (2.4), deduzir a EDO simples

$$\dot{\lambda}y + \lambda\dot{y} + p\lambda y = q \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}y = q$$

(porque $\lambda\dot{y} + p\lambda y = 0$, sendo y uma solução da homogênea) para o parâmetro $\lambda(t)$, e integrar

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{q(s)}{y(s)} ds,$$

usando a condição inicial $x_0 = \lambda(t_0)y(t_0)$. Observe que se $y(t_0) = 1$, como sugerido, então $x_0 = \lambda(t_0)$. O resultado é a seguinte receita (mas é mais fácil lembrar o método!).

Teorema 2.3. A solução da (2.4) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u) du} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u) du} q(s) ds \right).$$

Inversão de operadores diferenciais de primeira ordem. O caso mais importante é quando a função $p(t)$ é uma constante, por exemplo $-\lambda$. A equação diferencial é portanto do género

$$\dot{x} - \lambda x = f(t)$$

Isto significa que o “vetor” x é uma solução do problema linear

$$(D - \lambda)x = f \quad (2.15)$$

Esta é uma versão, em dimensão infinita, de uma equação linear do género $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde A é uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ são vetores, que estudamos em Álgebra Linear. Agora os vetores $x(t)$ e $f(t)$ vivem, por exemplo, no espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente deriváveis definidas na reta real, e $D - \lambda$ é um operador (diferencial) definido neste espaço. O que procuramos, ao resolver (2.15), é um “operador inverso” $(D - \lambda)^{-1}$, de maneira tal que formalmente

$$x = (D - \lambda)^{-1}f$$

É natural conjecturar que o inverso de um operador diferencial seja um operador “integral”, definido por meio de uma integração. Como no caso das matrizes, sabemos que a solução de (2.15), se existe, não é única, pois é sempre possível somar vetores do núcleo de $D - \lambda$. O teorema 1.1 diz que o núcleo de $D - \lambda$ é a reta formada pelas funções do género $x_0 e^{\lambda t}$, com x_0 constante. A fórmula do teorema 2.3 diz então que as soluções de (2.15) são

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \quad (2.16)$$

soma de uma solução particular, definida pelo integral, e da solução geral da homogénea. Esta fórmula define o operador $(D - \lambda)^{-1}$. Naturalmente, o caso $\lambda = 0$ é o teorema fundamental do cálculo. A parte interessante da fórmula (2.16) é evidentemente o integral, que representa a “resposta” do sistema, inicialmente em repouso, a uma “entrada” $f(t)$. Esta resposta é linear em f , e é obtida integrando o produto de $f(s)$ vezes um núcleo $e^{\lambda s}$ deslocado no tempo. O fator $e^{\lambda(t-s)}$ “pesa” a contribuição da entrada $f(s)$ ao valor da resposta no tempo t .

ex: Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \quad \dot{x} + 2x = t \quad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \quad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

ex: Resolva os seguintes problemas de Cauchy nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan \theta = \cos \theta \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

Queda livre com atrito. Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência pode ser modelada como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade, assim que a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - mg$$

onde $\gamma > 0$ é um coeficiente de atrito. Portanto, a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$m\dot{v} = -\gamma v - mg.$$

ex: Resolva o problema com condição inicial $v(0) = 0$.

ex: Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para um valor assintótico $\bar{v}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.

ex: Utilize a solução encontrada para determinar a trajectória $q(t)$ com condição inicial $q(0) = q_0 > 0$.

Circuito RL. A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V(t)$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

As soluções da equação homogênea, ou seja, com $V(t) = 0$ (circuito desligado), são

$$I(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$$

se $I(0) = I_0$ denota a corrente inicial, e portanto decrescem exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau = L/R$.

Se o circuito é alimentado com tensão constante $V(t) = E$, então a solução estacionária é a $\bar{I} = E/R$ (lei de Ohm). A diferença $x(t) = I(t) - \bar{I}$ é solução de $\dot{x} = -(R/L)x$, e portanto a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = \bar{I} + e^{-\frac{R}{L}t} (I_0 - \bar{I}) ,$$

assimptótica à lei de Ohm.

Quando a tensão que alimenta o circuito é variável, então, de acordo com a (2.16), a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} V(\tau) d\tau \right) .$$

ex: Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E \sin(\omega t)$. Verifique que a solução com $I(0) = 0$ é

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde ϕ é uma fase que depende de ω , L e R .

Lei do arrefecimento de Newton. Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ pode ser modelada pela *lei do arrefecimento de Newton*

$$\dot{T} = -k(T - M(t))$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva (que depende do material do corpo). A solução com condição inicial $T(0) = T_0$ é, de acordo com a (2.16),

$$T(t) = e^{-kt} \left(T_0 + k \int_0^t e^{k\tau} M(\tau) d\tau \right) .$$

ex: Se a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$, então a diferença $x(t) := T(t) - M$ satisfaz a EDO

$$\dot{x} = -kx .$$

Determine $T(t)$ e diga o que acontece quando $t \rightarrow \infty$

ex: Determine a solução assimptótica (ou seja, quando t é grande) quando a temperatura do meio ambiente é a função periódica $M(t) = M_0 \sin(\omega t)$.

ex: Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100°C , é colocada numa sala cuja temperatura é de 20°C . Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60°C em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40°C .

2.5 Substituições

Substituições. Assim como pode ajudar a calcular primitivas, uma mudança de variáveis pode ajudar a transformar uma equação diferencial aparentemente complicada numa mais simples. Consideramos a EDO

$$\dot{x} = v(x, t)$$

para uma variável escalar $x(t)$. Se definimos uma nova variável

$$y = f(x, t)$$

então, pela regra da cadeia, a sua derivada em ordem ao tempo é

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Consequentemente, a variável $y(t)$ satisfaz a EDO

$$\dot{y} = w(y, t)$$

onde o campo de direções é

$$w(y, t) = v(x, t) \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

Esta substituição ajuda se o novo campo de direções corresponde a uma EDO integrável, por exemplo separável ou linear. Acertar a substituição que resolve uma equação diferencial pode ser muito difícil. Às vezes a substituição é sugerida pela própria equação diferencial, como já vimos no caso do decaimento com reposição, e como ilustrado no seguinte exemplo.

e.g. Por exemplo, consideramos o problema

$$\dot{x} = (x + t)^2$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$. A substituição óbvia é $y(t) = x + t$, que transforma a equação diferencial para x na equação diferencial separável

$$\dot{y} = y^2 + 1$$

para y . Então

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dt \quad \Rightarrow \quad \arctan(y) - \arctan(y_0) = t - t_0$$

Finalmente, obtemos a solução implícita

$$\arctan(x + t) = \arctan(x_0 + t_0) + t - t_0$$

ou seja,

$$x(t) = \tan(t + c_0) - t$$

para alguma constante $c_0 = \arctan(x_0 + t_0) - t_0$.

ex: Determine soluções das seguintes ODEs

$$\dot{x} = (t - x)^2 \quad \dot{x} = \sin(x + t) \quad \dot{x} = \sqrt{x + t}$$

Equações de Bernoulli. Uma EDO da forma

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^n, \quad (2.17)$$

onde p e q são funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $n \neq 0, 1$ (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita *equação (diferencial) de Bernoulli*. É claro que $x(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio. As outras soluções (positivas) podem ser determinadas usando a substituição

$$y = x^k$$

com $k = 1 - n$, que transforma a (2.17) na EDO linear

$$\dot{y} + k p(t)y = k q(t)$$

ex: Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$\dot{x} + x = x^2 (\cos t - \sin t) \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} + e^{t^2}x = x^2 \log t \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$\dot{x} - x/t = t\sqrt{x} \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

3 EDOs lineares homogêneas

ref: [Ap69] Vol. 1, 8.8-14 ; [MW85] Vol. 2, 12.6-7

3.1 Exponencial complexo e oscilações

Exponencial e funções trigonométricas. A função exponencial, definida pela série de potências (1.4), é a (única) solução da equação diferencial $\dot{x} = x$ com condição inicial $x(0) = 1$. As funções $e^{\alpha t}$, obtidas com uma reparametrização do tempo, descrevem um decaimento ou um crescimento exponencial, dependendo do sinal do parâmetro real α .

7 mar 2023

As séries de potências das funções trigonométricas,

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots \quad \text{e} \quad \sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots$$

parecem ser formadas pelas partes par e ímpar do exponencial, respectivamente, mas têm sinais alternados. Uma maneira, aparentemente artificial, de obter os sinais alternados consiste em considerar uma reparametrização do tempo do género $t \mapsto it$, onde i é um “número imaginário” que satisfaz $i^2 = -1$ (este truque é chamado “rotação de Wick” pelos físicos teóricos modernos). Se definimos $z(t) := e^{it}$ e calculamos a sua derivada de acordo com as regras algébricas usuais, observamos que esta função é solução da equação diferencial $\dot{z} = iz$ (que não tem significado físico, pois contém o número imaginário i). No entanto, ao derivar uma segunda vez, chegamos a

$$\ddot{z} = -z,$$

que é a equação diferencial do oscilador harmónico, cuja soluções são as funções trigonométricas! De fato, a substituição do tempo real t pelo tempo imaginário it na série de potências que define o exponencial, mostra que formalmente

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}it^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}it^5 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots\right) + i \left(t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots\right), \end{aligned}$$

Esta é a famosa *fórmula de Euler*,¹⁸

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t} \quad (3.1)$$

Exponencial complexo. A fórmula de Euler (3.1) permite definir o *exponencial* de um número complexo arbitrário $z = x + iy$ como

$$\boxed{e^z := e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)} \quad (3.2)$$

Assim, o módulo de e^z é igual ao número real e^x , que é estritamente positivo, e um argumento de e^z é igual a y , a parte imaginária de z . Em particular, $e^z \neq 0$. É imediato então verificar que o exponencial complexo satisfaz a regra do produto

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

Em particular, o exponencial de um número complexo não é nulo, e o inverso multiplicativo de e^z é

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

¹⁸Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748.

Oscilações. Uma curva $t \mapsto (x(t), y(t))$ no plano $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ pode ser pensada, usando a notação complexa, como a função complexa de uma variável real $t \mapsto z(t) = x(t) + i y(t)$. A sua velocidade, o campo vetorial $v(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ (pensado aplicado no ponto $z(t)$), é então $\dot{z}(t) := \dot{x}(t) + i \dot{y}(t)$, e a sua aceleração $\ddot{z}(t) = \ddot{x}(t) + i \ddot{y}(t)$.

Dado ω real e positivo, a função

$$z(t) = e^{i\omega t}$$

descreve um ponto que percorre a circunferência unitária do plano complexo no sentido anti-horário com “frequência angular” ω , ou seja, uma rotação cada período $T = 2\pi/\omega$, e portanto frequência $\nu = \omega/(2\pi)$ (medida em Hertz, rotações por segundo).

Mais em geral, se $\alpha = \rho e^{i\varphi}$ é um parâmetro complexo, a função

$$z(t) = \alpha e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

descreve um ponto que percorre a circunferência de raio $|\alpha| = \rho$ no sentido anti-horário, com posição inicial $z(0) = \rho e^{i\varphi}$. Um cálculo elementar mostra que a velocidade desta curva (3.3) é $\dot{z}(t) = i\omega \alpha e^{i\omega t}$, ou seja, $z(t)$ satisfaz a equação diferencial linear

$$\dot{z} = i\omega z$$

que contém o número imaginário i , e portanto não tem sentido físico (mas diz que a velocidade $\dot{z}$ é ortogonal a z , pois a multiplicação por i corresponde a uma rotação de um ângulo $\pi/2$). Mais interessante é derivar uma segunda vez, e observar que a curva $z(t)$ também satisfaz

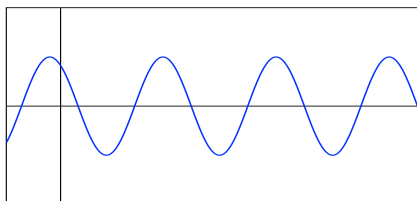
$$\ddot{z} = -\omega^2 z \quad (3.4)$$

com condições iniciais $z(0) = \alpha$ e $\dot{z}(0) = i\omega\alpha$. Consequentemente, a parte real e a parte imaginária de $z(t)$,

$$q(t) := \Re[z(t)] = \rho \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad p(t) := \Im[z(t)] = \rho \sin(\omega t + \varphi)$$

são solução reais da equação diferencial do (3.4), chamada “oscilador harmônico”. De fato, as duas curvas $e^{\pm i\omega t}$ são soluções de $\ddot{z} = -\omega^2 z$, e as soluções trigonométricas podem ser obtidas ao fazer combinações lineares complexas

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad \text{e} \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$



Oscilação $q(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi)$.

ex: Identifique as condições iniciais $q(0)$ e $\dot{q}(0)$ enquanto funções de $z(0) = \rho e^{i\varphi}$.

ex: Determine as constantes complexas α e β tais que a curva $z(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}$ seja solução de $\ddot{z} = -\omega^2 z$ com condições iniciais $z(0) = a$ e $\dot{z}(0) = b$ (por exemplo reais).

ex: Considere uma sobreposição

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

com coeficientes reais a e b . Defina $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Observe que $(a/\rho, b/\rho)$ é um ponto da circunferência unitária do plano, portanto do género $(\cos \phi, \sin \phi)$ ou $(\sin \varphi, \cos \varphi)$ para alguns ângulos ϕ e φ (definidos a menos de múltiplos de 2π). Deduza que

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \rho \cos(\omega t - \phi)$$

ou também

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \rho \sin(\omega t + \varphi)$$

Sobreposições. Consideramos uma sobreposição de duas oscilações com frequências angulares diferentes $\omega_1 > \omega_2 > 0$, assim que

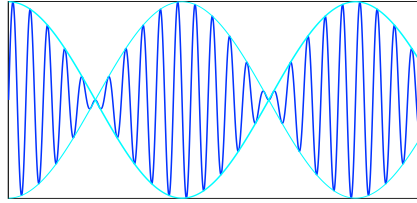
$$\omega_1 = \omega + \varepsilon \quad \text{e} \quad \omega_2 = \omega - \varepsilon$$

com $\omega > 0$ e $\varepsilon > 0$. A sobreposição das duas oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$ pode ser representada como

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} \\ &= e^{i\omega t} (e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t}) = 2e^{i\omega t} \cos(\varepsilon t) \end{aligned}$$

O seu valor absoluto $|z(t)|$ é máximo quando $\omega_1 t = \omega_2 t$ (módulo 2π), e mínimo quando $\omega_1 t - \omega_2 t = \pi$ (módulo 2π).

Em particular, se $\varepsilon \ll \omega$, então a sobreposição consiste numa modulação lenta (com período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) da frequência fundamental $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$.



Sobreposição $q(t) = \sin(0.95 \cdot t) + \sin(1.05 \cdot t)$.

Oscilações amortecidas. A curva definida no plano complexo pela função

$$z(t) = e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

com α e ω reais e ω positivo, descreve um ponto no plano complexo que percorre uma espiral centrada na origem com velocidade angular ω . Se α é negativo, então sua parte real e a sua parte imaginária,

$$q(t) = e^{\alpha t} \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad p(t) = e^{\alpha t} \sin(\omega t)$$

descrevem umas oscilações amortecidas.

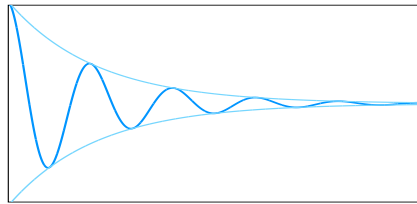


Gráfico de $e^{-t} \sin(6t)$.

Velocidade e aceleração da curva $z(t)$ são

$$\dot{z} = (\alpha + i\omega)e^{(\alpha+i\omega)t} \quad \text{e} \quad \ddot{z} = (\alpha + i\omega)^2 e^{(\alpha+i\omega)t}$$

respetivamente. É possível obter uma relação linear “real” entre aceleração, velocidade e posição observando que

$$\ddot{z} - 2\alpha\dot{z} = (\alpha^2 - \omega^2 + i2\alpha\omega - 2\alpha(\alpha + i\omega)) e^{(\alpha+i\omega)t} = -(\omega^2 + \alpha^2) e^{(\alpha+i\omega)t}$$

Consequentemente, esta curva $z(t)$ é uma solução da EDO se segunda ordem

$$\ddot{z} - 2\alpha\dot{z} + \Omega^2 z = 0$$

onde $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$, chamada “oscilador amortecido” (no caso físico) quando $\alpha < 0$.

Vice-versa, uma primitiva de $z(t)$ é

$$\int e^{(\alpha+i\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha+i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}$$

Ao separar parte real e parte imaginária obtemos

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha t} \cos(\omega t) dt + i \int e^{\alpha t} \sin(\omega t) dt &= \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} e^{\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) + i \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Desta forma, conseguimos calcular as primitivas

$$\int e^{\alpha t} \cos(\omega t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) \quad (3.5)$$

$$\int e^{\alpha t} \sin(\omega t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) \quad (3.6)$$

sem necessidade de usar duas integrações por partes.

Força de Coriolis. Consideramos um referencial inercial $x-y$ no plano, $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, e usamos a notação complexa $z = x + iy$ para descrever os seus pontos. Consideramos agora um segundo referencial $X-Y$ em movimento circular uniforme relativamente ao primeiro com velocidade angular ω , assim que se $Z = X + iY$ é um ponto no segundo referencial, $z = e^{i\omega t} Z$. Seja $t \mapsto z(t)$ é a trajetória de uma partícula de massa unitária no referencial inercial, sujeita a uma força $F = \ddot{z}$. Então a trajetória no referencial em rotação é $Z(t) = e^{-i\omega t} z(t)$. Derivando temos que $\dot{z} = e^{i\omega t} (i\omega Z + e^{i\omega t} \dot{Z})$ e $\ddot{z} = e^{i\omega t} (-\omega^2 Z + 2i\omega \dot{Z} + \ddot{Z})$, e portanto

$$\ddot{Z} = e^{i\omega t} \ddot{z} + \omega^2 Z - 2i\omega \dot{Z}$$

Isto significa que, além da força $e^{i\omega t} F$, a partícula no referencial não inercial também sente uma “força centrífuga” $\omega^2 Z$ e uma “força de Coriolis” $-2i\omega \dot{Z}$, ortogonal à velocidade.

Quaterniões. Numa tentativa de estender o corpo dos números complexos e assim representar os pontos do espaço de dimensão 3, Hamilton descobriu ¹⁹ que era necessário prescindir da comutatividade do produto e acrescentar mais uma dimensão. O resultado é um espaço vetorial real de dimensão 4, denotado por $\mathbb{H}$ em sua homenagem, munido de um produto associativo, mas não comutativo, que admite um inverso de cada vetor não nulo (os matemáticos dizem uma “álgebra associativa com divisão”). Uma base deste espaço é formada por objetos que denotamos $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Os *quaterniões* são então expressões formais

$$x = x_0 \mathbf{1} + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$$

com coeficientes $x_k \in \mathbb{R}$. A soma e o produto por um escalar são definidos da maneira natural,

$$(x_0 \mathbf{1} + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}) + (y_0 \mathbf{1} + y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k}) := (x_0 + y_0) \mathbf{1} + (x_1 + y_1) \mathbf{i} + (x_2 + y_2) \mathbf{j} + (x_3 + y_3) \mathbf{k}$$

e

$$\lambda (x_0 \mathbf{1} + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}) := (\lambda x_0) \mathbf{1} + (\lambda x_1) \mathbf{i} + (\lambda x_2) \mathbf{j} + (\lambda x_3) \mathbf{k}$$

O *conjugado* do quaternião $x = x_0 \mathbf{1} + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$ é o quaternião

$$\bar{x} := x_0 \mathbf{1} - (x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k})$$

A conjugação é uma involução. Os espaços próprios da conjugação dividem o espaço vetorial dos quaterniões na soma direta $\mathbb{H} = H_+ \oplus H_-$ do subespaço $H_+ \approx \mathbb{R}$ dos quaterniões “reais”, que

¹⁹W.R. Hamilton, *On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra*. Letter to John T. Graves (17 October 1843).

satisfazem $\bar{x} = x$, e do subespaço $H_- \approx \mathbb{R}^3$ dos quaterniões “vetorias”, que satisfazem $\bar{x} = -x$ (também chamados quaterniões “puros”, em analogia com os imaginários puros do plano complexo). É útil (e isto é o espírito das intenções da Hamilton e da notação) identificar os quaterniões $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ com os vetores homônimos da base canônica de $\mathbb{R}^3$, e o quaterniã $\mathbf{1}$ com o escalar 1. Desta forma, um quaterniã é uma soma formal

$$x = x_0 + \mathbf{x}$$

de um escalar $x_0 \in \mathbb{R}$, chamado “parte real”, e um vetor $\mathbf{x} = x_0\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, chamado “parte vetorial”. A conjugação é então o operador

$$\overline{x_0 + \mathbf{x}} = x_0 - \mathbf{x}$$

Soma e produto por um escalar são simplesmente

$$(x_0 + \mathbf{x}) + (y_0 + \mathbf{y}) = (x_0 + y_0) + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad \lambda(x_0 + \mathbf{x}) = (\lambda x_0) + \lambda \mathbf{x}$$

O produto entre dois quaterniões é definido declarando que $\mathbf{1}$ é a identidade, logo satisfaz $\mathbf{1}x = x\mathbf{1} = x$ para todo $x \in \mathbb{H}$, que os quaterniões escalares comutam com todos os outros, que os produtos entre os outros elementos da base são

$$\boxed{\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j} \quad \mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{k}\mathbf{k} = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1} \quad (3.7)$$

(algumas derivam das precedentes), e finalmente estendido usando a propriedade distributiva. O produto que assim resulta é associativo mas não comutativo. A fórmula final para o produto entre dois quaterniões é simplificada se observamos que as primeiras três destas relações (3.7) correspondem aos produtos vetoriais entre os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$. Na notação vetorial, o produto entre dois quaterniões é portanto definido por

$$(x_0 + \mathbf{x})(y_0 + \mathbf{y}) = (x_0y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + (x_0\mathbf{y} + y_0\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}) \quad (3.8)$$

(os físicos podem reconhecer na parte real do produto a métrica de Minkowski do espaço-tempo da relatividade restrita). Os quaterniões escalares formam um corpo isomorfo a $\mathbb{R}$. Também é fácil verificar que os quaterniões “complexos”, do género $t_0\mathbf{1} + t_1\mathbf{i}$ com $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, formam um corpo isomorfo a $\mathbb{C}$. Por outro lado, o produto entre dois quaterniões com parte escalar nula, logo essencialmente dois vetores de $\mathbb{R}^3$, é um quaterniã

$$(0 + \mathbf{x})(0 + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

cuja parte escalar é o produto escalar entre os vetores, e cuja parte vetorial é o produto vetorial entre os dois vetores (e esta é a origem dos nomes destes dois produtos).

A conjugação é claramente uma involução, mas acontece que não respeita exatamente os produtos, pois

$$\overline{\overline{xy}} = \overline{y} \overline{x} \quad (3.9)$$

como consequência da (3.8) e da anti-simetria do produto vetorial. No entanto, o produto $x\bar{x} = \bar{x}x$ de um quaterniã com o seu conjugado, em qualquer ordem, é um escalar, logo um número real e não negativo

$$x\bar{x} = x_0^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

A sua raiz quadrada é chamada *norma* de x , e denotada por $\|x\| = \sqrt{x\bar{x}}$. A norma é multiplicativa, ou seja, $\|xy\| = \|x\| \|y\|$. É claro que um quaterniã é não nulo sse a sua norma é diferente de zero, logo positiva. Isto permite calcular o inverso multiplicativo de todo quaterniã não nulo x pela mesma fórmula que define o inverso de um número complexo não nulo:

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{\|x\|^2}$$

Naturalmente, o “quociente” entre dois quaterniões x e y , com $x \neq 0$, é qualquer uma das duas expressões $x^{-1}y$ ou yx^{-1} , em geral distintas.

Hoje sabemos ²⁰ que as únicas álgebra associativas com divisão de dimensão finita sobre os reais são $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$.

Os quaterniões de norma $\|q\| = 1$ são chamados unitários. Pela multiplicatividade da norma, o produto de dois quaterniões unitários é também unitário. Um quaternião unitário $q = q_0 + \mathbf{q}$ pode ser representado como

$$q = c + s\mathbf{v}$$

com coeficientes $c = q_0$ e c reais tais que $c^2 + s^2 = 1$, e se definimos o vetor unitário $\mathbf{v} = \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$. Um quaternião vetorial $\mathbf{v}$ de norma $\|\mathbf{v}\| = 1$ satisfaz $\mathbf{v}^2 = -1$, assim como a unidade imaginária. Podemos então definir o exponencial de um múltiplo $\theta\mathbf{v}$ usando a série de potência usual e calcular que

$$\begin{aligned} e^{\theta\mathbf{v}} &= 1 + \theta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\theta^2\mathbf{v}^2 + \frac{1}{6}\theta^3\mathbf{v}^3 + \frac{1}{24}\theta^4\mathbf{v}^4 + \dots \\ &= 1 + \theta\mathbf{v} - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{6}\theta^3\mathbf{v} + \frac{1}{24}\theta^4 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \dots\right) + \mathbf{v}\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots\right) \end{aligned}$$

e portanto que

$$\boxed{e^{\theta\mathbf{v}} = \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta} \quad (3.10)$$

É claro que este é um quaternião unitário, ou seja, $\|e^{\theta\mathbf{v}}\| = 1$, e que, de acordo com a observação anterior, todo quaternião unitário pode ser obtido desta maneira. Esta fórmula generaliza a fórmula de Euler (3.1).

3.2 EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes

Equação de Newton num potencial quadrático. A equação de Newton

$$\ddot{q} = -\beta q \quad (3.11)$$

determina a trajetória de uma partícula (de massa unitária) no campo de forças gerado por um potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$. Uma solução de equilíbrio é a solução trivial $q(t) = 0$ para todo tempo t , e é a única se $\beta \neq 0$.

Se $\beta = 0$, é evidente que as soluções da equação de Newton

$$\boxed{\ddot{q} = 0}$$

que neste caso é a equação da partícula livre, são

$$q(t) = a + bt$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias, que descrevem movimentos retilíneos uniformes.

Se $\beta = \omega^2 > 0$, um cálculo elementar mostra que duas soluções da equação de Newton

$$\boxed{\ddot{q} = -\omega^2 q}$$

chamada *oscilador harmónico*, são $\varphi_+(t) = \cos(\omega t)$ e $\varphi_-(t) = \sin(\omega t)$. Por linearidade, uma solução é também uma sobreposição

$$q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias, que descrevem oscilações de frequência angular ω , logo período $T = 2\pi/\omega$, em torno da posição de equilíbrio.

²⁰F.G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Forme, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **84** (1878), 1-63.

Se $\beta = -k^2 < 0$, um cálculo elementar mostra que duas soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = k^2 q$$

chamada *oscilador invertido*, são $q_{\pm}(t) = e^{\pm kt}$, ou também, ao fazer uma mudança de base, $\varphi_+(t) = \cosh(kt) = (e^{kt} + e^{-kt})/2$ e $\varphi_-(t) = \sinh(kt) = (e^{kt} - e^{-kt})/2$. Por linearidade, uma solução é também uma sobreposição

$$q(t) = ae^{kt} + be^{-kt} = c \cosh(kt) + d \sinh(kt)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias. As soluções genéricas se afastam do equilíbrio, e de fato divergem, quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Partícula num potencial quadrático com atrito. O atrito é modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. A equação de Newton de uma partícula num potencial quadrático com atrito é portanto da forma

$$\ddot{q} = -\gamma \dot{q} - \beta q, \quad (3.12)$$

onde $\gamma = 2\alpha$ é um coeficiente de atrito (positivo ou nulo no mundo real, também negativo nos manuais de matemática). Um cálculo elementar mostra que a função $q(t) = e^{-\alpha t} y(t)$ é uma solução da equação de Newton (3.12) sse $y(t)$ é uma solução da equação de Newton sem atrito

$$\ddot{y} = -\delta y$$

com $\delta = \beta - \alpha^2$, que já sabemos resolver. Consequentemente, soluções de (3.12) são

$$q(t) = e^{-\alpha t}(a + bt)$$

se $\alpha^2 = \beta$ (um caso muito particular), ou

$$q(t) = e^{-\alpha t}(ae^{kt} + be^{-kt})$$

se $0 < \alpha^2 - \beta = k^2$ (atrito grande), ou

$$q(t) = e^{-\alpha t}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

se $0 < \beta - \alpha^2 = \omega^2$ (atrito pequeno).

Problema com valores iniciais. A intuição física, ou melhor, a nossa ideia de “determinismo” implícita na física newtoniana, diz que uma equação de Newton $m\ddot{q} = F$ determina univocamente o futuro e o passado se são dadas a posição $q(0) = q_0$ e a velocidade $\dot{q}(0) = v_0$ iniciais da partícula. No caso da partícula num potencial quadrático com atrito, ou seja, das equações lineares homogêneas (3.12), encontramos espaços de soluções dependendo de dois parâmetros, gerados por pares de soluções. Duas soluções, $q_+(t)$ e $q_-(t)$, são suficientes se conseguirmos representar toda solução como combinação linear $q(t) = a q_+(t) + b q_-(t)$. Mas isto significa que o sistema linear

$$\begin{aligned} a q_+(0) + b q_-(0) &= q_0 \\ a \dot{q}_+(0) + b \dot{q}_-(0) &= v_0 \end{aligned}$$

admite uma única solução para todo vetor (q_0, v_0) de condições iniciais, e portanto que o determinante $q_+(0) \dot{q}_-(0) - \dot{q}_+(0) q_-(0)$ é diferente de zero. É imediato verificar que este é o caso dos pares de soluções encontradas no parágrafo anterior. É claro também que o tempo inicial $t_0 = 0$ pode ser substituído por qualquer outro tempo, sendo a equação de Newton invariante por translações no tempo.

Independência linear e Wronskiano. Fixado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, consideramos o espaço linear $\mathcal{C}^1(I)$ das funções reais $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ com derivada $f'(t)$ contínua. O (*determinante*) *Wronskiano* entre duas funções $f(t)$ and $g(t)$ deste espaço é a função

$$W_{f,g}(t) := \text{Det} \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ \dot{f}(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix} = f(t)\dot{g}(t) - \dot{f}(t)g(t)$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente dependentes ou seja, se existem constantes $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tais que $\alpha f(t) + \beta g(t) = 0$ para todos os tempos $t \in I$, e, derivando, também $\alpha \dot{f}(t) + \beta \dot{g}(t) = 0$, então $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos, pois o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ \dot{f}(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admite uma solução não trivial. Consequentemente,

Teorema 3.1. Se $W_{f,g}(t_0) \neq 0$ em algum ponto $t_0 \in I$ então $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes.

Num intervalo onde $g(t) \neq 0$, o determinante Wronskiano é o “numerador” da derivada do quociente $f(t)/g(t)$, sendo o “denominador” $g(t)^2 \neq 0$. Consequentemente, é nulo sse o quociente é constante, logo se $f(t)$ é proporcional a $g(t)$.

No entanto, duas funções podem ser independentes e ter determinante Wronskiano nulo em algum ponto, ou até em todos os pontos!, como mostra o exemplo de Peano²¹ das funções $f(t) = t^2$ e $g(t) = t|t|$. O problema é que duas funções podem ser independentes num intervalo I mas linearmente dependentes se pensadas apenas em sub-intervalos $J \subset I$ (é o caso do exemplo). Isto pode acontecer quando pelo menos uma das funções não é analítica, assim que a informação local, os valores num subintervalo (arbitrariamente pequeno), não determina o comportamento global, os valores em intervalos grandes.

No caso das soluções de uma equação diferencial linear as de segunda ordem coisas são mais simples. Sejam ϕ_+ e ϕ_- são duas funções de classe $\mathcal{C}^2$ no intervalo I , soluções da mesma EDO linear

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$$

(com coeficientes não necessariamente constantes!). Um cálculo elementar mostra que o Wronskiano satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} W_{\phi_+, \phi_-}(t) = -p(t) W_{\phi_+, \phi_-}(t),$$

Ao integrar, obtemos a *identidade de Abel*

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} W_{\phi_+, \phi_-}(t_0).$$

onde $t_0 \in I$ é um tempo inicial arbitrário. Em particular, o determinante Wronskiano é ou identicamente nulo ou sempre diferente de zero.

ex: Calcule os determinantes Wronskianos

$$W_{e^{-\alpha t}, te^{-\alpha t}}, \quad W_{e^{-\alpha t} e^{kt}, e^{-\alpha t} e^{-kt}} \quad \text{e} \quad W_{e^{-\alpha t} \sin(\omega t), e^{-\alpha t} \cos(\omega t)},$$

quando $k \neq 0$ e $\omega \neq 0$, e verifique que as soluções encontradas no parágrafo anterior são pares de soluções independentes da equação linear homogênea com coeficientes constantes genérica $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$.

ex: Verifique que as funções $f(t) = t^2$ e $g(t) = t|t|$ não são linearmente independentes enquanto funções definidas na reta real (mas são idênticas na semi-reta positiva, e proporcionais, logo linearmente dependentes, na semi-reta negativa). No entanto, o Wronskiano é $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos t .

²¹G. Peano, Sur le déterminant Wronskien, *Mathesis* **9** (1889), 75-76.

Unicidade das soluções. Uma equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes genérica é uma equação

$$a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = 0$$

onde os coeficientes a , b e c são números reais (e, nos casos físicos, positivos!). Sendo $a \neq 0$ (caso contrário trata-se de uma equação de ordem um), é claro que a equação é equivalente a

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0 \quad (3.13)$$

com $2\alpha = b/a$ e $\beta = c/a$, que depende de apenas dois parâmetros. Os exemplos anteriores mostram que admite sempre um par de soluções independentes, e portanto uma solução para cada condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Esta solução é única, como segue do teorema de Picard.

No entanto, é interessante provar a unicidade usando uma ideia no mesmo tempo mais elementar e mais profunda. Já vimos que $x(t) = e^{-\alpha t} y(t)$ é solução de (3.13) sse $y(t)$ é solução de $\ddot{y} = \lambda y$, com $\lambda = \alpha^2 - \beta$. Portanto, é suficiente provar o teorema de unicidade para esta equação.

O operador *laplaciano* em dimensão um é o operador $\Delta := D^2$, onde $D = d/dt$ denota o operador *derivação*, que envia $f(t)$ em $(Df)(t) := f'(t)$. A equação $f'' = \lambda f$ pode portanto ser escrita

$$\Delta f = \lambda f, \quad (3.14)$$

e diz que $f(t)$ é um vetor próprio do laplaciano, com valor próprio λ . O teorema de unicidade é uma consequência imediata do seguinte resultado, caso particular de um teorema profundo sobre os operadores diferenciais “elípticos”.

Uma função $f(t)$ é dita *analítica* se a sua série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$, centrada em um ponto arbitrário t_0 do seu domínio e definida pelos coeficientes $c_n = f^{(n)}(t_0)/n!$, tem raio de convergência positivo, e converge para a própria função dentro do disco de convergência.

O ingrediente essencial da prova é a seguinte observação, caso particular de um fenômeno chamado “bootstrap”. A identidade (3.14) implica que $f(t)$ admite derivadas de todas as ordens, e que podemos calcular enquanto funções apenas das primeiras duas. De fato, a terceira derivada é $f''' = (f'')' = \lambda f'$, a quarta derivada é $f'''' = (f''')' = (\lambda f')' = \lambda f'' = \lambda^2 f$, ... e, por indução, as derivadas de ordens par ou ímpar são

$$f^{(2n)} = \lambda^n f \quad \text{e} \quad f^{(2n+1)} = \lambda^n f', \quad (3.15)$$

respetivamente.

Teorema 3.2. *As funções próprias do laplaciano na reta real são funções analíticas.*

Demonstração. Seja $f(t)$ uma função própria do operador laplaciano com valor próprio λ , ou seja, uma função duas vezes derivável, definida na reta real, que satisfaz a equação diferencial (3.14). As identidades (3.15) implicam que os coeficientes $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ da série de Taylor de f centrada na origem são limitados por

$$|c_n| \leq C \frac{|\lambda|^n}{n!}$$

se C denota o máximo entre $|f(0)|$ e $|f'(0)|$. Pela fórmula de Hadamard, o raio de convergência da série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ é ∞ , pois $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 0$. Consequentemente, a série de Taylor converge em toda a reta real. Falta então provar que converge para a própria função f .

Fixado um intervalo limitado $[-R, R]$, seja K o máximo de $|f(t)|$ e $|f'(t)|$ quando $|t| \leq R$ (que existe porque f e f' são contínuas). Então, pelas (3.15), as derivadas de f são limitadas por

$$|f^{(n)}(t)| \leq K |\lambda|^n$$

quando $|t| \leq R$. Seja $P_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k$ o polinômio de Taylor de grau $n-1$. Pela fórmula de Taylor com resto

$$f(t) - P_{n-1}(t) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} t^n$$

onde c é um ponto entre 0 e t . Consequentemente, quando $|t| \leq R$, o erro é limitado por

$$|f(t) - P_{n-1}(t)| \leq K \frac{|\lambda|^n R^n}{n!}$$

que tende para 0 quando $n \rightarrow \infty$. Isto prova que a série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ converge para $f(t)$ para todo t , e uniformemente em cada intervalo compacto. $\square$

Teorema 3.3. *O espaço das soluções de uma equação linear homogênea de ordem 2 com coeficientes constantes (3.13) é um espaço linear de dimensão 2.*

Demonstração. Como visto, é suficiente provar o resultado para a equação $\ddot{x} = \lambda x$. Usando a linearidade, é suficiente provar que a única solução com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ é a solução trivial $x(t) = 0$. As fórmulas (3.15) implicam então que todas as derivadas de $x(t)$ em $t = 0$ são nulas. Isto quer dizer que todos os coeficientes da série de Taylor de $x(t)$ centrada em 0 são nulos. Pela analiticidade, o teorema 3.2, a função $x(t)$ é identicamente nula. $\square$

3.3 Soluções exponenciais e polinômio caraterístico

EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes, polinômio caraterístico. O uso dos exponenciais complexos permite uma leitura unificada e conceptualmente mais elegante dos três casos tratados acima, que estende de forma natural às equações homogêneas de ordem superior.

Consideramos uma equação linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0 \quad (3.16)$$

onde α e β são coeficientes reais (mas também é possível considerar coeficientes complexos). A ideia, de Euler²², é que

as suas soluções são (sobreposições de) exponenciais complexos $x(t) = e^{zt}$

pelo menos no caso genérico. Isto acontece porque as derivadas de um exponencial são proporcionais ao próprio exponencial, e consequentemente uma equação homogênea com coeficientes constantes para um exponencial e^{zt} é uma equação algébrica para a sua “frequência” z . De fato, ao substituir a conjectura $x(t) = e^{zt}$ na (3.16) temos que

$$z^2 e^{zt} + 2\alpha z e^{zt} + \beta e^{zt} = (z^2 + 2\alpha z + \beta) e^{zt} = 0.$$

Observando que os exponenciais são diferentes de zero, temos que $x(t) = e^{zt}$ é uma solução (complexa) de (3.16) se z é uma raiz do *polinômio caraterístico*

$$P(z) := z^2 + 2\alpha z + \beta$$

A equação $P(z) = 0$, que determina as raízes, é também chamada *equação caraterística*. As suas raízes são

$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$

e são reais ou complexas conjugadas dependendo do sinal do discriminante $\delta = \alpha^2 - \beta$. Como estamos interessados em soluções reais, temos que analisar separadamente os dois casos, assim como o caso singular de uma raiz dupla.

²²L. Euler, De integratione aequationum differentialium altiorum gradum, *Miscellanea Berolinensia* 7 (1743).

Se $\delta > 0$, logo $\alpha^2 - \beta = k^2$ para algum $k > 0$, então as duas raízes são reais: $\lambda_{\pm} = \alpha \pm k$. Duas soluções independentes são os exponenciais reais $x_{\pm}(t) = e^{\lambda_{\pm}t} = e^{-(\alpha \pm k)t}$. A solução geral é portanto uma combinação linear

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t} (a e^{kt} + b e^{-kt}) \\ &= e^{-\alpha t} (c \cosh(kt) + d \sinh(kt)) \end{aligned}$$

se $c = a + b$ e $d = a - b$.

Se $\delta < 0$, logo $\alpha^2 - \beta = -\omega^2$ para algum $\omega > 0$, então as duas raízes não são reais e são complexas conjugadas: $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm i\omega$. Duas soluções independentes são os exponenciais complexos $x_{\pm}(t) = e^{\lambda_{\pm}t} = e^{-(\alpha \pm i\omega)t}$. Neste caso, duas soluções reais, logo a solução geral com significado físico, podem ser obtidas usando a fórmula de Euler e a paridade das funções trigonométricas, pois

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t} (a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-\alpha t} (a \cos(\omega t) + ia \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) - ib \sin(\omega t)) \\ &= e^{-\alpha t} (c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

se $c = a + b$ e $d = i(a - b)$. Estas soluções são reais se c e d são coeficientes reais.

Se $\delta = 0$, ou seja, $\alpha^2 = \beta$, então o polinómio característico tem uma raiz dupla $\lambda = -\alpha$, que é real. O método fornece apenas a solução $x(t) = e^{-\alpha t}$. Para encontrar uma segunda solução independente temos que compreender o limite de um plano gerado por $x_{\lambda}(t) = e^{\lambda t}$ e $x_{\lambda+\varepsilon} = e^{(\lambda+\varepsilon)t}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Se $\varepsilon \neq 0$, o plano contém a sobreposição $(e^{(\lambda+\varepsilon)t} - e^{\lambda t})/\varepsilon$. No limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, esta sobreposição converge para a derivada em ordem a λ da nossa primeira solução, pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{(\lambda+\varepsilon)t} - e^{\lambda t}}{\varepsilon} = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} = t e^{\lambda t}$$

A posteriori, podemos verificar que $t e^{\alpha t}$ também é solução da equação diferencial, que neste caso pode ser escrita $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = 0$. Assim, o espaço das soluções é um plano gerado pelas duas soluções independentes $e^{-\alpha t}$ e $t e^{-\alpha t}$, e a solução geral é uma sobreposição

$$x(t) = e^{-\alpha t} (a + bt) .$$

Resumindo, temos portanto a seguinte receita: o espaço das soluções de (3.16) é um espaço linear real $\mathcal{H}$ de dimensão 2 gerado por

$e^{(-\alpha+k)t}$	e	$e^{(-\alpha-k)t}$	se $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm k$, com $k > 0$ (raízes reais e distintas)
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	e	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	se $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm i\omega$, com $\omega > 0$ (raízes complexas conjugadas)
$e^{-\alpha t}$	e	$t e^{-\alpha t}$	se $\lambda_{\pm} = -\alpha$ (raiz dupla)

Se $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ formam uma base de $\mathcal{H}$, então a “solução geral” é

$$x(t) = c_+ \phi_+(t) + c_- \phi_-(t)$$

onde $c_{\pm} \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Sendo as $\phi_{\pm}$ independentes, estas constantes são univocamente determinadas pelas condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, ao resolver um sistema linear determinado. É claro que o tempo inicial $t = 0$ pode ser substituído por qualquer outro tempo t_0 .

Fatorização de operadores. Do ponto de vista abstrato, a equação homogênea (3.16) pode ser escrita como

$$(D^2 + 2\alpha D + \beta)x = 0$$

onde $D = d/dt$ denota o operador derivação, que envia $f(t) \mapsto (Df)(t) = f'(t)$. As suas soluções formam o núcleo do operador diferencial $L = D^2 + 2\alpha D + \beta$. A fatorização do polinómio característico $z^2 + 2\alpha z + \beta = (z - \lambda_+)(z - \lambda_-)$ corresponde então à fatorização do operador

$$L = (D - \lambda_+)(D - \lambda_-)$$

Os fatores comutam, portanto o núcleo do operador L contém os núcleos de $D - \lambda_{\pm}$. Pelo teorema 1.1, o núcleo do operador $D - \lambda$ é uma reta gerada pelo exponencial $e^{\lambda t}$. Se as raízes $\lambda_{\pm}$ são distintas, os núcleos de $D - \lambda_+$ e $D - \lambda_-$ geram um espaço de dimensão dois, o espaço das soluções da equação homogênea (quando as raízes são complexas conjugadas, é preciso considerar oportunas combinações lineares para obter um plano de soluções reais). No caso de uma única raiz, o operador fatoriza como $L = (D - \lambda)^2$. É um exercício verificar que o seu núcleo é formado por funções do género $f(t)e^{\lambda t}$, onde $f(t)$ é um polinómio de grau ≤ 1 .

e.g. Por exemplo, consideramos o problema de resolver a EDO linear homogênea

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$$

com condições iniciais $x(0) = 5$ e $\dot{x}(0) = -7$. A conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução da equação diferencial se

$$z^2 e^z + 4z e^{zt} + 5e^{zt} = 0$$

e portanto se a “frequência” z satisfaz a equação algébrica $z^2 + 4z + 5 = 0$. As duas raízes são $\lambda_{\pm} = -2 \pm i$. Como

$$e^{(-2 \pm i)t} = e^{-2t} (\cos t \pm i \sin t)$$

a solução geral é uma combinação linear

$$x(t) = e^{-2t} (a \cos t + b \sin t)$$

com certos coeficientes a e b . As condições iniciais dizem que

$$x(0) = e^0 (a \cos 0 + b \sin 0) = a = 5$$

e

$$\dot{x}(0) = -2e^0 (a \cos 0 + b \sin 0) + e^0 (-a \sin 0 + b \cos 0) = -2a + b = -7$$

Este é um sistema linear para os coeficientes a e b , cuja solução única é $a = 5$ e $b = 3$. Finalmente, a solução do problema é

$$x(t) = e^{-2t} (5 \cos t + 3 \sin t)$$

e.g. Por exemplo, consideramos a EDO linear homogênea

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$$

Pode ser escrita como $(D^2 + 4D + 3)x = 0$. O polinómio $z^2 + 4z + 3$ fatoriza como $(z + 1)(z + 3)$, e consequentemente

$$(D^2 + 4D + 3) = (D + 1)(D + 3)$$

O núcleo de $D + 1$ é a reta gerada por e^{-t} , e o núcleo de $D + 3$ é a reta gerada por e^{-3t} . Finalmente, as soluções formam o plano

$$x(t) = ae^{-t} + be^{-3t}$$

com a, b constantes arbitrárias.

ex: Determine a solução geral das seguintes EDOs homogêneas:

$$\ddot{x} - 2x = 0 \quad \ddot{x} + 9x = 0 \quad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \ddot{x} - \dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0.$$

ex: Resolva os seguintes problemas com condições iniciais (ou problemas de Cauchy).

$$\ddot{x} + 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2$$

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0 \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1$$

$$\ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1.$$

ex: Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:

$$\begin{aligned} e^{2t} \quad e^{-2t}, \quad e^{-t} \sin(2t) \quad e^{-t} \cos(2t), \quad \sinh(t) \quad \cosh(t), \\ e^{-3t} \quad te^{-3t}, \quad \sin(2t+1) \quad \cos(2t+2), \quad 3 \quad e^{5t}. \end{aligned}$$

ex: Verifique que se $x(t) = p(t)e^{\lambda t}$ então $((D - \lambda)x)(t) = p'(t)e^{\lambda t}$. Deduza que o núcleo de $(D - \lambda)^n$ é o espaço dos quase-polinômios $p(t)e^{\lambda t}$, onde $p(t)$ é um polinômio de grau $\deg p \leq n - 1$.

EDOs equidimensionais. Uma equação diferencial da forma

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (3.17)$$

é dita *equidimensional*, pois é invariante por homotetias $x \mapsto \lambda x$, com $\lambda > 0$. A reparametrização $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) := y(x(t))$. De fato,

$$\dot{z} = \frac{dy}{dx} \dot{x} = \frac{dy}{dx} x \quad \text{e} \quad \ddot{z} = \frac{d^2 y}{dx^2} \dot{x} x + \frac{dy}{dx} \ddot{x} = \frac{d^2 y}{dx^2} x^2 + \frac{dy}{dx} x = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \dot{z}$$

e portanto a (3.17) é equivalente a

$$a\ddot{z} + (a+b)\dot{z} + cz = 0$$

ex: Resolva a equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0,$$

na semireta $x > 0$.

3.4 Oscilador harmónico

Oscilador harmónico. As pequenas oscilações de um pêndulo $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta)$ em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descritas pela equação de Newton do *oscilador harmónico*

$$\boxed{\ddot{q} = -\omega^2 q} \quad (3.18)$$

onde $\omega > 0$ é a “frequência (angular) característica”. Esta é uma equação universal, pois descreve as pequenas oscilações de qualquer sistema Newtoniano unidimensional numa vizinhança de um

equilíbrio estável genérico.²³ No espaço de fases $\mathbb{R}^2$, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases} . \quad (3.19)$$

A solução com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) .$$

As trajetórias $q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ podem ser escritas como

$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega t + \phi) ,$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos coeficientes a e b , ou seja, dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ (usando as fórmulas $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$). Mais simples é usar exponenciais complexos, e observar que, por exemplo, $A \cos(\omega t + \phi)$ é a parte real de $Ae^{i(\omega t + \phi)}$.

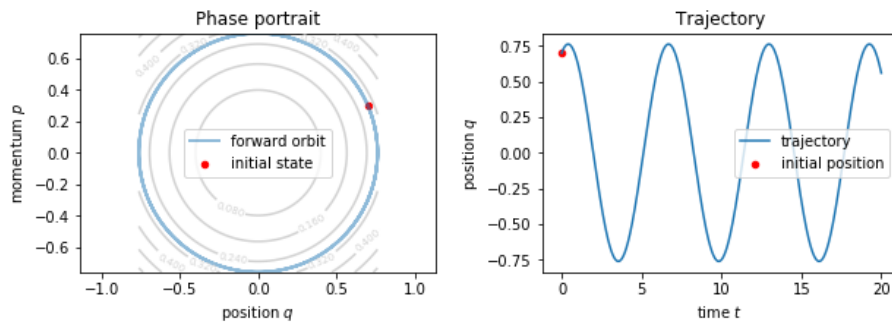
A energia

$$E(q, p) := \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento. Ou seja, se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(q(t), p(t)) &= \frac{\partial E}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial E}{\partial p} \dot{p} = p \dot{p} + \omega^2 q \dot{q} \\ &= p(\dot{p} + \omega^2 q) = 0 \end{aligned}$$

para todo o tempo t . Consequentemente, as órbitas do oscilador harmónico estão contidas (de fato, são iguais!) nas curvas de nível da energia E , que são elipses.



ex: Determine a energia enquanto função da amplitude e da frequência das oscilações.

²³ “The harmonic oscillator, which we are about to study, has close analogs in many other fields; although we start with a mechanical example of a weight on a spring, or a pendulum with a small swing, or certain other mechanical devices, we are really studying a certain *differential equation*. This equation appears again and again in physics and other sciences, and in fact is a part of so many phenomena that its close study is well worth our while. Some of the phenomena involving this equation are the oscillations of a mass on a spring; the oscillations of charge flowing back and forth in an electrical circuit; the vibrations of a tuning fork which is generating sound waves; the analogous vibrations of the electrons in an atom, which generate light waves; the equations for the operation of a servosystem, such as a thermostat trying to adjust a temperature; complicated interactions in chemical reactions; the growth of a colony of bacteria in interaction with the food supply and the poison the bacteria produce; foxes eating rabbits eating grass, and so on; . . .”

Oscilações amortecidas. Consideramos a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -\beta\dot{q} - \omega^2 q \quad (3.20)$$

onde ω é a *frequência própria* do oscilador (em ausência de atrito) e $\beta > 0$ é um coeficiente de atrito (com as dimensões do inverso de um tempo).

Por exemplo, a corrente $I(t)$ que circula num circuito RLC satisfaz a equação $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$. Assim, a frequência própria do circuito é $\omega = 1/\sqrt{LC}$ e o coeficiente de atrito é $\beta = R/L$.

Outro exemplo são as oscilações de um objeto de massa m sujeito a uma força de Hooke de constante elástica k e a uma força de atrito proporcional e contrária à velocidade por um fator γ . A equação de Newton que determina o deslocamento x da posição de equilíbrio é $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx$. Neste caso, a frequência própria é $\omega = \sqrt{k/m}$ e o coeficiente de atrito é $\beta = \gamma/m$.

No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação (3.20) assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q - \beta p \end{cases}.$$

A energia

$$E(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

não é uma constante do movimento, mas decresce, ou seja, é “dissipada”, a uma taxa proporcional à energia cinética, pois

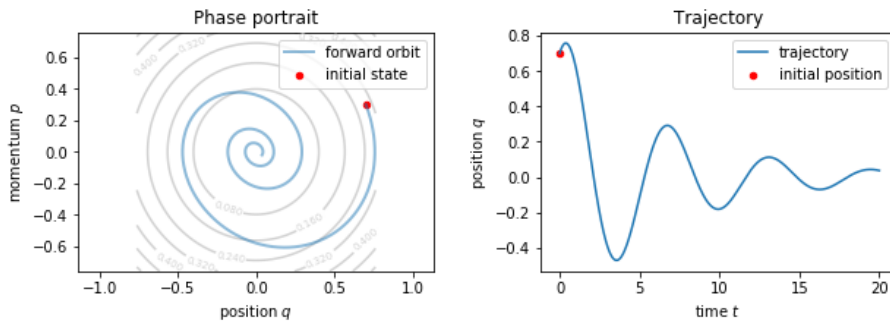
$$\frac{d}{dt}E = \frac{\partial E}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial E}{\partial p}\dot{p} = p(\dot{p} + \omega^2 q) = -\beta p^2 \leq 0.$$

É conveniente definir $\alpha = \beta/2$, chamado *coeficiente de amortecimento*. A equação característica da (3.20) é $(z + \alpha)^2 = -(\omega^2 - \alpha^2)$, e portanto a natureza das suas raízes dependem do sinal de $\omega^2 - \alpha^2$.

O sistema é dito *sub-crítico* se $\alpha^2 < \omega^2$, ou seja, se o atrito é pequeno (quando comparado com a frequência própria). Neste caso, as soluções são

$$q(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (3.21)$$

oscilações de frequência $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ cuja amplitude decai com tempo característico $\tau = 1/\alpha$. Sendo $\Omega < \omega$, o período $2\pi/\Omega$ das oscilações é superior ao período próprio $2\pi/\omega$. Se o atrito é muito pequeno, ou seja, $\alpha \ll \omega$, então em primeira aproximação a frequência é $\Omega \simeq \omega - \alpha^2/2\omega^2 + \dots$. Por outro lado, a frequência Ω tende para zero (e, consequentemente, o período das oscilações tende para o ∞) quando $\alpha \rightarrow \omega^-$.



Quando $\alpha \ll \omega$, e portanto $\Omega \simeq \omega$, é útil quantificar a perda de energia $\Delta E = E(t) - E(t + T)$ ao longo de um período $T \simeq 2\pi/\omega$. Um cálculo mostra que a energia total é aproximadamente $E(t) \simeq \frac{1}{2}A^2\omega^2 e^{-\beta t}$ (se desprezamos termos com média nula ao longo de um período e termos de ordem α^2 comparados com termos da ordem ω^2). Então a perda relativa de energia ao longo de um período é

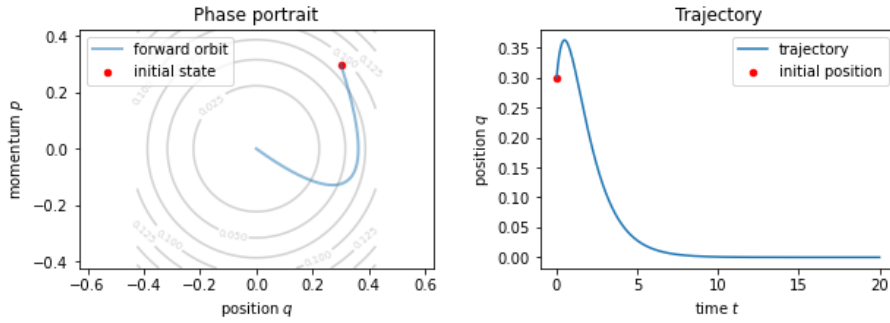
$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{2\pi}{Q}$$

onde o Q -factor é definido por $Q := \omega/\beta$.

O sistema é dito *super-crítico* se $\alpha^2 > \omega^2$, ou seja, se o atrito é grande. Neste caso, as soluções são

$$q(t) = A e^{-\alpha t} \sinh(k t + \varphi)$$

onde $k = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Observe que $k < \alpha$, e portanto $q(t) \rightarrow 0$ exponencialmente, e sem oscilar, quando $t \rightarrow \infty$.



O caso intermédio é o caso *crítico*, quando $\alpha^2 = \omega^2$ (uma condição muito difícil de observar!). A equação característica admite uma única raiz, $-\alpha$, e as soluções são

$$q(t) = (a + bt)e^{-\alpha t}.$$

Também neste caso, as trajetórias decaem sem oscilar.

Equação de Schrödinger estacionária. Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.262... \times 10^{-34}$ J.s.

ex: Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

4 EDOS lineares não homogêneas

ref: [Ap69] Vol. 1, 8.15-19 ; [MW85] Vol. 2, 12.6-7

4.1 EDOS lineares não homogêneas

14 mar 2023

EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes. Uma EDO de segunda ordem linear com coeficientes constantes é uma lei

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = f(t) \quad (4.1)$$

para a trajetória $x(t)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são coeficientes constantes, e $f(t)$ é uma função dada, uma força externa dependente do tempo, definida num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções de (4.1), então a diferença $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ é uma solução da EDO homogênea associada

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \beta y = 0 \quad (4.2)$$

obtida de (4.1) ao fazer $f(t) = 0$ (i.e. força nula). Portanto, a solução geral de (4.1) pode ser representada como uma soma

$$x(t) = z(t) + y(t),$$

onde $z(t)$ é uma (apenas uma!) “solução particular” de (4.1) e $y(t) = c_+ \phi_+(t) + c_- \phi_-(t)$ é a solução geral da EDO homogênea associada (4.2), combinação linear de duas soluções independentes $\phi_{\pm}(t)$ com coeficientes arbitrários $c_{\pm} \in \mathbb{R}$. Em particular,

Teorema 4.1. O espaço das soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes é um plano afim $z + \mathcal{H}$, modelado sobre o espaço linear $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}^2$ das soluções da equação homogênea associada.

Portanto, o problema de resolver uma equação diferencial linear com coeficientes constantes é reduzido ao problema de determinar apenas uma solução, por exemplo, a solução com condições iniciais triviais, dita “resposta do sistema” a força $f(t)$.

Adivinhar. O método mais simples e mais utilizado é “adivinhar” soluções, ou melhor, conjecturar soluções particulares, seguindo o instinto, a experiência, ou exemplos importantes e recorrentes (os ingleses dizem “educated guess”).

Partícula num campo de forças dependente do tempo. Consideramos a equação de Newton

$$\ddot{x} = f(t)$$

de uma partícula de massa unitária sujeita a uma força dependendo do tempo $f(t)$. Esta equação diz que $x(t)$ é uma primitiva de uma primitiva de $f(t)$, ou seja,

$$x(t) = \int_a^t \left(\int_b^s f(\tau) d\tau \right) ds$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Quando a força é particularmente simples, é possível adivinhar logo as soluções. De fato, é suficiente encontrar apenas uma solução, e depois somar uma genérica solução da equação homogênea $\ddot{x} = 0$.

A equação da partícula livre $\ddot{x} = 0$ tem soluções $x(t) = a + bt$, que descrevem um movimento inercial, ou seja, retilíneo uniforme. Como esperado, formam um espaço linear de dimensão dois, gerado pelas soluções 1 e t .

Se a força é constante, por exemplo $f(t) = g$ (a aceleração gravitacional próximo da superfície da terra, ou um campo elétrico constante), as soluções são as parábolas

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + a + bt,$$

obtidas somando ao movimento inercial a solução particular $gt^2/2$.

Outro caso interessante é uma força periódica como $f(t) = F \cos(\omega t)$, com amplitude F e frequência ω . É claro que uma solução particular é também periódica, do mesmo período (pois a segunda derivada de um cosseno ou de um seno é proporcional à própria função), e de fato é imediato verificar que uma solução é

$$x(t) = -\frac{F}{\omega^2} \cos(\omega t) + a + bt.$$

Também simples, embora pouco interessante na prática, é resolver o caso de uma força polinomial, ou exponencial, ou produto de polinômios e exponenciais ...

Carga num campo elétrico alternado. A equação de Newton

$$m\ddot{x} = qE \sin(\omega t)$$

descreve o movimento de uma partícula de massa m e carga q (que pode ser positiva ou negativa) num campo elétrico alternado $E \sin(\omega t)$ [KKR62]. A solução com posição e velocidades iniciais nulas $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ é

$$x(t) = \frac{qE}{m\omega} t - \frac{qE}{m\omega^2} \sin(\omega t)$$

ou seja, a trajetória da partícula é a soma de uma oscilação e de um movimento retilíneo uniforme! Em particular, a velocidade não muda nunca de sinal e oscila entre 0 e $2qE/m\omega$.

ex: Considere a equação de Newton

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x} + f(t)$$

onde $\gamma := 1/\tau \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, determine a trajetória quando a força é constante $f(t) = g$, linear $f(t) = ct$, ou periódica $f(t) = F \cos(\omega t)$.

Princípio de sobreposição. A procura de uma solução particular de (4.1) pode ser simplificada usando o *princípio de sobreposição*, consequência da linearidade do problema. Se $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ são soluções das EDOs lineares

$$\ddot{x}_k + 2\alpha \dot{x}_k + \beta x_k = f_k(t) \quad \text{com} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

(observe que α e β são sempre os mesmos!) então a “sobreposição”

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$$

é solução da EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t).$$

A ideia é utilizar a estratégia dos romanos (ou dos macedônios?), DIVIDE ET IMPERA. Ao dividir a força $f(t)$ em parcelas simples $f_k(t)$, podemos esperar resolver o problema aparentemente difícil juntando as soluções $x_k(t)$ dos problemas mais simples.

ex: Determine a solução geral de

$$\ddot{x} = \sin(t) \quad \ddot{x} + \dot{x} = t \quad \ddot{x} + x = e^{-t}$$

ex: Determine uma solução particular de

$$\ddot{x} = 1 + t + t^2 \quad \ddot{x} + \dot{x} = e^{-t} - e^{-2t}$$

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares.

$$\ddot{x} + x = t \quad \ddot{x} - \dot{x} = t^2 \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = t^2 - 1 \quad \ddot{x} - 4x = e^{-2t}$$

4.2 Quase-polinômios e método dos coeficientes indeterminados

Quase-polinômios e coeficientes indeterminados. Um *quase-polinômio* é um produto

$$\varphi(t) = p(t) e^{\lambda t}$$

de um polinômio $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_k t^k$ vezes um exponencial $e^{\lambda t}$ (real ou complexo, ou seja, um produto de um exponencial real $e^{\rho t}$ e funções trigonométricas, $\cos(\omega t)$ e/ou $\sin(\omega t)$, se $\lambda = \rho \pm i\omega$). O grau do quase-polinômio é o grau de $p(t)$, e o seu expoente é λ . Os polinômios são quase-polinômios com expoente nulo.

Ao aplicar o operador diferencial $D = d/dt$ a um quase-polinômio $\varphi(t) = p(t)e^{\lambda t}$ de grau g o resultado é

$$(D\varphi)(t) = (p'(t) + \lambda p(t))e^{\lambda t},$$

que é também um quase-polinômio com o mesmo expoente λ e grau $\leq g$. Mais em geral, um operador diferencial linear com coeficientes constantes $L = \sum_{k=0}^n a_k D^k$ envia um quase-polinômio $\varphi(t) = P(t)e^{\lambda t}$, com expoente λ e grau g , num quase-polinômio

$$(L\varphi)(t) = p(t) e^{\lambda t}$$

com o mesmo expoente λ e grau $\leq g$ (mas pode produzir senos e cossenos a partir de apenas um seno ou um cosseno).

Consideramos uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes, por exemplo de segunda ordem,

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \quad (4.3)$$

(mas as mesmas considerações permitem tratar o caso de ordem n arbitrária), que pode ser escrita $(Lx)(t) = f(t)$, se definimos o operador diferencial $L = aD^2 + bD + cI$. Se o segundo membro, que representa uma força externa, é um quase-polinômio

$$f(t) = e^{\rho t} (p(t) \cos(\omega t) + q(t) \sin(\omega t)) ,$$

com expoente $\lambda = \rho + i\omega$ e onde $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios de grau $\leq k$ (usando o princípio de sobreposição, é suficiente considerar os casos dos monômios t^k , naturalmente), então é claro que a equação (4.3) admite uma solução particular da forma

$$z(t) = e^{\rho t} (P(t) \cos(\omega t) + Q(t) \sin(\omega t)) ,$$

onde $Q(t)$ e $P(t)$ são polinômios de grau $\leq k + 2$.

De fato, é possível provar que, se λ é uma raiz do polinômio característico $az^2 + bz + c$ da equação homogênea com multiplicidade $n \leq 2$, é suficiente considerar polinômios da forma $Q(t) = t^n \tilde{Q}(t)$ e $P(t) = t^n \tilde{P}(t)$, onde $\tilde{Q}(t)$ e $\tilde{P}(t)$ são polinômios de grau $\leq k$. Em particular, no caso genérico (não ressonante) em que λ não é uma raiz do polinômio característico, basta considerar polinômios $Q(t)$ e $P(t)$ de grau $\leq k$.

Os “coeficientes indeterminados” dos polinômios $P(t)$ e $Q(t)$ são obtidos ao igualar os termos de mesmo grau na (4.3), e portanto ao resolver um sistema linear de $2(k+1)$ equações em $2(k+1)$ incógnitas (no caso geral em que $\omega \neq 0$, ou a metade se $\omega = 0$). Por esta razão, este método é chamado *método dos coeficientes indeterminados*.

Usando o princípio de sobreposição, é possível determinar soluções particulares quando o segundo membro $f(t)$ é uma combinação linear de quase-polinômios.

e.g. Por exemplo, uma solução particular da equação

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = F_0 e^{-t}$$

pode ser determinada da forma $x(t) = ae^{-t}$. De fato, ao substituir esta conjectura obtemos $(a + 3a + 2a)e^{-t} = F_0 e^{-t}$, e portanto $a = F_0/6$. Uma solução particular é portanto $x(t) = \frac{1}{6}F_0 e^{-t}$.

Por outro lado, se consideramos a equação diferencial

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = F_0 e^t$$

e experimentamos a conjectura $x(t) = be^t$, obtemos $(b - 3b + 2b)e^{-t} = e^{-t}$, o que é impossível. Isto acontece porque $\lambda = 1$ é uma raiz do polinómio caraterístico $z^2 - 3z + 2$, e portanto e^t é uma solução da equação homogénea associada (e, como tal, anula o primeiro membro da equação). Uma segunda tentativa pode ser $x(t) = cte^t$. Ao substituir esta conjectura, e com alguma paciência, obtemos $(c(2 + t) - 3c(1 + t) + 2ct)e^t = F_0 e^t$, ou seja, $-ce^t = F_0 e^t$, e portanto $c = -F_0$. Uma solução particular é portanto $x(t) = -F_0 e^t$.

O caso pior é quando o expoente da força corresponde a uma raiz dupla do polinómio caraterístico. Um exemplo é a equação diferencial

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = F_0 e^t$$

A única raiz do polinómio caraterístico é $\lambda = 1$, e a solução geral da equação homogénea é portanto $(a + bt)e^t$. Neste caso, as tentativas $x(t) = ae^t$ e $x(t) = bte^t$ falham (justamente porque resolvem a equação homogénea!). No entanto, se substituirmos a conjectura $x(t) = ct^2 e^t$ obtemos finalmente $2ce^t = F_0 e^t$, e portanto $c = F_0/2$. Uma solução particular é portanto $x(t) = \frac{1}{2}F_0 t^2 e^t$.

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= t^3 e^{-t} + e^t & \ddot{x} + x &= \sin(t) & \ddot{x} + 4x &= 2t \cos(t) \\ \ddot{x} + 9x &= \sin(\pi t) & \ddot{x} + 4x &= \cos(2t) & \ddot{x} - 4x &= te^{-2t} & \ddot{x} + 4x &= te^{-t} \cos(2t) \\ \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x &= 10 \sin t & \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x &= \cos(2t) & \ddot{x} - 2\dot{x} + 5x &= e^{-t} & \ddot{x} - \dot{x} &= e^t \end{aligned}$$

EDOs lineares de ordem superior. Pode existir um universo paralelo ao nosso, onde a equação de Newton (se calhar um senhor com 3 cabeças) assume a forma

$$m\ddot{\ddot{x}} = F,$$

sendo a força uma função $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, t)$ da posição x , da velocidade $\dot{x}$, da aceleração $\ddot{x}$ e da “arrancada” (em inglês, *jerk*) $\ddot{\ddot{x}}$ da partícula, e, possivelmente, do tempo t . O espaço de fases tem, neste universo, dimensão 4. Engenheiros, físicos e matemáticos deste universo teriam, justamente, interesse em resolver equações diferenciais lineares de ordem 4, do género

$$\ddot{\ddot{x}} + \alpha \ddot{\ddot{x}} + \beta \ddot{\ddot{x}} + \gamma \dot{x} + \delta x = f(t).$$

A boa notícia é que engenheiros, físicos e matemáticos do nosso planeta já conhecem as técnicas para resolver este tipo de equações, pois são as mesmas que usamos no planeta Terra: conjectura e^{zt} para resolver a equação homogénea (e agora o polinómio caraterístico terá grau 4), e método dos coeficientes indeterminados para determinar uma solução particular quando a força é um quase-polinómio.

Isto vale, naturalmente, para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes de ordem arbitrário. Apenas para satisfazer a nossa curiosidade matemática, consideramos uma EDO linear homogénea de grau n , do género

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

onde os a_k são coeficientes reais. Pode ser escrita simbolicamente como

$$P(D)x = 0$$

se P denota o polinómio mónico $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ e $D = d/dt$ o operador derivação. Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinómio fatoriza num produto

$$P(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$$

sendo os λ_k 's as n raízes, em geral complexas e não necessariamente distintas. Como os coeficientes de P são reais, as raízes não reais ocorrem em pares de números complexos conjugados. Juntando as raízes repetidas, temos finalmente que o polinómio fatoriza num produto de fatores

$$(z - k)^m$$

onde os k 's são as diferentes raízes reais e os m 's as suas multiplicidades algébricas, e fatores

$$(z - \lambda_+)^d (z - \lambda_-)^d = (z^2 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \omega^2))^d$$

onde os $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\omega$ são os diferentes pares de raízes não reais, logo complexas conjugadas, e os d 's as suas multiplicidades algébricas. A soma $\sum m + 2 \sum d$ é igual ao grau n . Consequentemente, também o operador diferencial $P(D)$ fatoriza num produto de operadores do género

$$(D - k)^m \quad (4.4)$$

e

$$(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \omega^2))^d \quad (4.5)$$

Estes fatores comutam, e portanto o núcleo do operador $P(D)$, ou seja, o espaço das soluções da equação homogénea, contém os núcleos de todos estes fatores. É um exercício verificar que o núcleo do operador (4.4) é o espaço dos quase-polinómios $p(t)e^{kt}$ de expoente k e grau $\deg p \leq m - 1$, cuja dimensão é m . Também é um exercício verificar que o núcleo de (4.5) é o espaço dos quase-polinómios $(p(t)\cos(\omega t) + q(t)\sin(\omega t))e^{\alpha t}$ de expoente α , frequência ω e grau $\deg p, \deg q \leq d - 1$, cuja dimensão é $2d$. Finalmente, é possível verificar (por exemplo, generalizando a definição de determinante wronskiano) que as soluções assim encontradas geram um espaço vetorial real de dimensão n , e portanto todo o espaço das soluções da equação homogénea.

Consideramos agora o problema de determinar uma solução da EDO linear não homogénea

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = f(t)$$

logo o problema não homogéneo

$$P(D)x = f$$

Se $f(t)$ é um quase-polinómio, é claro que o método dos coeficientes indeterminados pode funcionar. Outra possibilidade é considerar a fatorização

$$P(D) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)$$

e aplicar repetidamente a fórmula (2.16) para calcular o inverso $(D - \lambda_k)^{-1}$ de cada fator. Simbolicamente, uma solução particular é

$$x = (D - \lambda_1)^{-1} (D - \lambda_2)^{-1} \dots (D - \lambda_n)^{-1} f$$

Existem receitas mais práticas e úteis, como a transformada de Laplace ou teoria as funções de Green. Ainda melhor é transformar a equação diferencial de ordem n num sistema de ordem um, logo num fluxo num espaço de fases, e usar as técnicas explicadas na última seção 11.

Oscilador harmónico tralfamadoriano. Por exemplo, o oscilador harmónico no planeta Tralfamador²⁴ deste universo paralelo pode ser do género (o fator 4 apenas simplifica as fórmulas sucessivas)

$$\ddot{\ddot{x}} = -4\omega^4 x.$$

com $\omega > 0$. A conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução se z é uma raiz do polinómio caraterístico $z^4 + 4\omega^4$. As quatro raízes são $\pm(\omega \pm i\omega)$. A solução geral é portanto uma sobreposição

$$x(t) = A_+ e^{+\omega t} \cos(\omega t + \phi_+) + A_- e^{-\omega t} \cos(\omega t + \phi_-),$$

onde os parâmetros $A_{\pm}$ e $\phi_{\pm}$ dependem das condições iniciais. A origem é um “equilíbrio hiperbólico”: as soluções genéricas (com $A_+ \neq 0$) divergem exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$, e as soluções com $A_+ = 0$ decaem exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Não há como fazer relógios de pêndulo no planeta Tralfamador.

So it goes.

²⁴Kurt Vonnegut, *Slaughterhouse-Five, or The Children's Crusade*, Delacorte, 1969.

ex: Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares homogêneas:

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} - x = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} + x = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} + \ddot{x} = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} + 2\ddot{x} + x = 0$$

ex: Determine umas soluções particulares das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados:

$$\ddot{\ddot{x}} - 2\ddot{\ddot{x}} + 3\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t - 1 \quad \ddot{\ddot{x}} + x = \sin(t) \quad \ddot{\ddot{x}} + 4\ddot{x} = e^{-t}$$

4.3 Oscilações forçadas

Oscilações forçadas, batimentos e ressonância. Consideramos a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = F_0 \cos(\gamma t) \quad (4.6)$$

onde ω é a frequência própria do oscilador e γ é a frequência de uma força periódica.

O sistema homogêneo é um oscilador harmônico, e portanto as suas soluções são oscilações $A \cos(\omega t + \phi)$, onde A e ϕ são constantes arbitrárias. A intuição sugere que o efeito da força seja uma oscilação adicional de frequência γ .

Quando $\gamma^2 \neq \omega^2$, uma solução pode ser determinada usando a conjectura $x(t) = a \cos(\gamma t)$, e um cálculo elementar mostra que a solução geral é

$$q(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t)$$

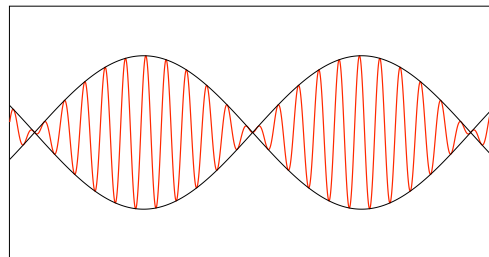
Em particular, a solução com condições iniciais triviais pode ser escrita

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} (\cos(\gamma t) - \cos(\omega t)) \\ &= \frac{F_0}{2\Omega\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

onde $\Omega = (\omega + \gamma)/2$ é a média das frequências, e $\varepsilon = (\omega - \gamma)/2$ a semi-diferença (usando as fórmulas de adição trigonométricas). Quando $|\varepsilon| \ll |\omega|$, e portanto $\Omega \simeq \omega$, podemos estimar

$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \sin(\omega t).$$

Portanto, a resposta do oscilador à força externa de frequência γ próxima (mas diferente) da frequência própria ω é uma “modulação” lenta (de período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) de uma oscilação com frequência própria ω . Este fenómeno é chamado *batimentos* (em inglês, *beats*), e pode ser ouvido ao tocar contemporaneamente duas cordas de um instrumento de cordas afinadas com duas frequências muito próximas mas diferentes.



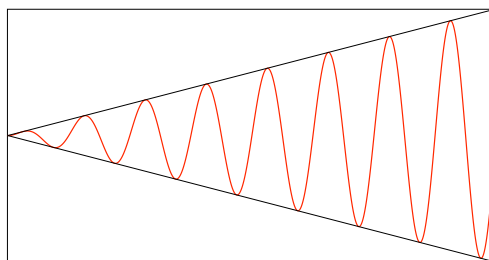
Para tempos t que satisfazem $\varepsilon t \ll 1$, podemos aproximar a modulação $\sin(\varepsilon t)$ com o seu polinómio de Taylor de ordem 3, e escrever a solução como

$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega} \sin(\omega t) \left(t - \frac{1}{6} \varepsilon^2 t^3 + \dots \right)$$

No limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos finalmente

$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t) \quad (4.7)$$

Ou seja, quando $\gamma \rightarrow \omega$, a frequência dos batimento decresce para zero, o que significa que o período dos batimentos tende para o infinito, e apenas vemos a “parte inicial” do seno $\sin(\varepsilon t)/\varepsilon$, que é essencialmente uma reta t . Este fenómeno, uma resposta cuja amplitude cresce linearmente no tempo, é chamado *ressonância*.



ex: Deduza a fórmula (4.7) da ressonância usando a conjectura $x(t) = bt \sin(\omega t)$ e o método dos coeficientes indeterminados.

Oscilações forçadas em notação complexa. A equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t).$$

admite uma solução particularmente simples e elegante em notação complexa. A variável complexa $z := p + i\omega q$, onde $p := \dot{q}$ é o momento linear, satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$\dot{z} - i\omega z = f(t).$$

Uma solução não trivial da EDO homogênea associada $\dot{y} - i\omega y = 0$ é $y(t) = e^{i\omega t}$. Por outro lado, o produto $z(t) = \lambda(t) e^{i\omega t}$ é uma solução de $\dot{z} - i\omega z = f(t)$ se λ é solução de $\dot{\lambda} = f(t) e^{-i\omega t}$. Consequentemente, uma solução com condição inicial $z(0) = z_0$ é

$$z(t) = e^{i\omega t} \left(z_0 + \int_0^t f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \right).$$

Em particular, a solução com condições iniciais triviais $q(0) = 0$ e $p(0) = 0$, ou seja, a “resposta do oscilador” inicialmente em equilíbrio a uma força que começa a agir no tempo $t = 0$ pode ser representada pelo integral

$$z(t) = \int_0^t f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau$$

O deslocamento $q(t)$ pode ser obtido ao calcular a parte imaginária deste integral, e resulta (sendo a força real)

$$q(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t-\tau)) d\tau$$

A função $\sin(\omega t)/\omega$, que neste integral multiplica a força, é chamada “resposta impulsiva”, ou também “função de Green”, do oscilador, e pode ser obtida de forma mais sistemática usando a teoria da transformada de Laplace.

A energia do oscilador,

$$E = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) = \frac{1}{2} |z|^2,$$

é conservada se a força é nula. Uma força $f(t)$, atuando do tempo $t = a$ até ao tempo $t = b$, fornece ao oscilador (inicialmente em repouso) uma energia

$$\Delta E = E(b) - E(a) = \frac{1}{2} \left| \int_a^b f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2.$$

No limite quando $a \rightarrow -\infty$ e $b \rightarrow \infty$, este valor é [LL78]

$$E(\infty) - E(-\infty) = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2,$$

proporcional ao quadrado do valor absoluto da “transformada de Fourier” de $f(t)$ calculada na frequência ω .

ex: Calcule a resposta de um oscilador a uma força constante f_0 que age apenas no intervalo $[0, T]$ (ou seja, nula fora deste intervalo). O que acontece no limite quando $T \rightarrow 0$ e $f_0 \rightarrow \infty$ mantendo constante o produto $h = f_0 T$?

ex: Calcule a resposta de um oscilador a uma força inicialmente nula, que cresce linearmente de 0 até f_0 no intervalo $[0, T]$, e é mantida constante e igual a $f(t) = f_0$ se $t \geq T$.

ex: Calcule a resposta de um oscilador a uma força igual a $f(t) = \sin(\gamma t)$ no intervalo $[0, 2\pi/\gamma)$ e nula fora deste intervalo.

ex: Calcule a resposta de um oscilador a uma força inicialmente nula e igual a $f(t) = \sin(\gamma t)$ se $t \geq 0$. Analise o limite da resposta quando $\gamma \rightarrow \omega$.

Oscilações forçadas amortecidas. Consideramos a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} + \beta \dot{q} + \omega^2 q = F_0 \cos(\gamma t) \quad (4.8)$$

onde ω é a frequência própria do oscilador, $\beta = 2\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito, e a força também oscila, com frequência γ . Um exemplo é um circuito *RLC* sujeito a uma força eletromotriz periódica.

A solução geral da homogênea é chamada solução *transiente*, porque decai exponencialmente e portanto é desprezável para grandes valores do tempo. Por exemplo, se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), então a solução transiente é $x_0(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi)$. Representa uma oscilação com frequência $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ que decai exponencialmente com tempo característico $\tau = 1/\alpha$ (logo é desprezável quando $t \gg \tau$).

Sendo a força um quase-polinómio, uma solução particular da (4.8) pode ser determinada usando o método dos coeficientes indeterminados, e é claro que é da forma $a \cos(\gamma t) + b \sin(\gamma t)$ (pois $\pm i\gamma$ não são raízes do polinómio característico da equação homogênea). Um cálculo mostra que os coeficientes a e b são soluções do sistema linear determinado

$$\begin{cases} (\omega^2 - \gamma^2) a + \beta \gamma b = F_0 \\ -\beta \gamma a + (\omega^2 - \gamma^2) b = 0 \end{cases}$$

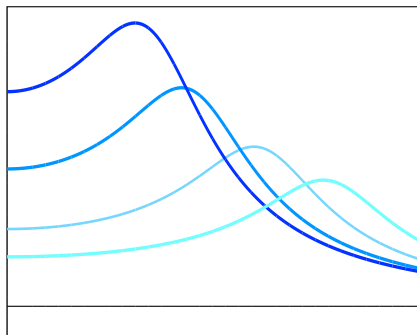
Consequentemente, uma solução particular é

$$x_\infty(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + (\beta \gamma)^2}} \cos(\gamma t - \phi)$$

onde a fase ϕ satisfaz $\tan \phi = (\beta \gamma)/(\omega^2 - \gamma^2)$. É chamada solução *estacionária*, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função

$$R(\gamma) := \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + (\beta \gamma)^2}}$$

o fator de proporcionalidade entre a amplitude da força e da resposta, é dita *curva de ressonância* do sistema, e o seu gráfico é do gênero



ao variar ω e β . A curva de ressonância atinge um máximo para o valor $\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}/2$ da frequência, chamada *frequência de ressonância*. Se o atrito é pequeno, ou seja, se $\alpha \ll \omega$, então a frequência de ressonância é $\gamma_r \simeq \omega - (\alpha/\omega)^2 + \dots$, muito próxima da frequência própria do oscilador.

ex: Discuta também o caso crítico $\alpha^2 = \omega^2$ e super-crítico $\alpha^2 > \omega^2$.

ex: [LL78] V.26

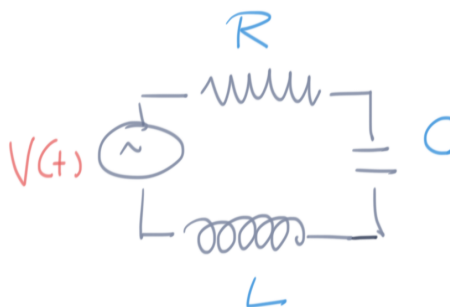
Circuito RLC. Os elementos de um circuito elétrico são definidos pelas leis empíricas $V_R = IR$, a lei de Ohm que define a *resistência* de um resistor, $V_C = Q/C$, que define a *capacitância* de um condensador, e $V_L = L\dot{I}$, que define a *indutância* de um indutor/bobina. Nas fórmulas, as V 's representam as diferenças de potencial aplicadas aos elementos, Q é a carga elétrica, e $I = \dot{Q}$ a corrente. De acordo com a lei de Kirchhoff, a força eletromotriz, ou voltagem, $V(t)$ aplicada a um circuito com os três elementos em série é igual a soma dos $V_L + V_R + V_C$, o que produz a equação diferencial

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

para a carga elétrica. Derivando, deduzimos a equação

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V}$$

para a corrente que circula no circuito.



ex: Verifique que a frequência própria de um circuito ideal com resistência nula é $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Estime a frequência própria quando a resistência é pequena.

ex: Verifique que o tempo característico de decaimento da corrente transiente (a solução geral da equação homogênea, ou seja, a corrente do circuito alimentado com voltagem nula) num circuito RLC é $\tau = 2L/R$.

ex: Determine a corrente estacionária num circuito RLC alimentado com uma voltagem constante $V(t) = V_0$ (compare com a equação das oscilações amortecidas).

ex: Determine a corrente estacionária num circuito RLC alimentado com uma voltagem alternada $V(t) = V_0 \cos(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas, mas observe que a intensidade F_0 da força também depende da frequência γ).

ex: Determine a frequência de ressonância do circuito RLC .

Impedância complexa. A análise dos circuitos elétricos é imensamente simplificada se idealizamos correntes e voltagens usando exponenciais complexos. Consideramos um circuito elétrico alimentado por uma força eletromotriz (voltagem) “harmônica” com intensidade V_0 e frequência ω , por exemplo $V_0 \cos(\omega t)$. A ideia é substituir esta expressão por um exponencial complexo $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$, assim que a voltagem física é a sua parte real. É claro (por exemplo, de acordo com o método dos coeficientes indeterminados) que a resposta estacionária (ou seja, assintótica) do circuito é uma corrente também harmônica e do mesmo período, mas possivelmente desfasada, ou seja, da forma $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$. O quociente

$$Z := \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0} e^{i\varphi}$$

que não depende do tempo mas pode depender da frequência ω , é chamado *impedância (complexa)* do circuito. Assim, a resposta estacionária do circuito, por quanto “complexo” mas linear!, é descrita por uma “lei de Ohm”

$$V(t) = Z \cdot I(t)$$

e é determinada apenas por um número complexo $Z = |Z|e^{i\varphi}$, ou seja, por um valor absoluto $|Z| = V_0/I_0$, chamado *reatância*, e uma *fase* φ .

Se o circuito é formado por apenas uma resistência R , então a lei de Ohm $V = RI$ diz que a sua impedância é real e igual a

$$Z_R = R$$

Se o circuito é formado por apenas uma bobina de indutância L , então a lei $V = L\dot{I}$ implica que $V_0 e^{i\omega t} = i\omega L I_0 e^{i\omega t}$, e portanto a sua impedância é

$$Z_L = i\omega L$$

um número imaginário puro com fase $\varphi_L = \pi/2$. Finalmente, se o circuito é formado por apenas um condensador de capacitância C , então a carga acumulada $Q = \int I dt$ satisfaz a lei $Q = CV$. Ao derivar em ordem ao tempo, temos $I = C\dot{V}$, e portanto $I_0 e^{i\omega t} = i\omega C V_0 e^{i\omega t}$. Assim, a impedância de um condensador é

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

um número imaginário puro com fase $\varphi_C = -\pi/2$. Pela lei de Kirchhoff, a impedância de um circuito em série RLC é uma soma

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Em particular, a reatância é mínima, logo a resposta é máxima, quando a parte imaginária da impedância é nula, ou seja, quando $\omega = 1/\sqrt{LC}$, a frequência de ressonância do circuito.

Mais em geral, se uns circuitos de impedância $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ estão em séries, então a tensão total é uma soma $V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots = Z_1 I + Z_2 I + Z_3 I + \dots$, pois a corrente I é a mesma. Assim, o circuito resultante tem impedância

$$Z_{\text{série}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$$

Por outro lado, se uns circuitos de impedância $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ estão em paralelo, então a corrente é uma soma $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$ e a tensão $V = Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = Z_3 I_3 = \dots$ é a mesma. Consequentemente, a impedância total do circuito $Z_{\text{paralelo}} = V/I$ é a média harmónica entre as impedâncias dos elementos, ou seja,

$$1/Z_{\text{paralelo}} = 1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + \dots$$

Também interessante é a potência $P = VI$ dissipada pelo circuito, ou, melhor, a sua média $\langle P \rangle$ calculada ao longo de um período $T = 2\pi/\omega$. Neste cálculo é necessário usar as quantidades físicas, ou seja, as partes reais dos exponenciais complexos, os cossenos. Então a potência instantânea é $P(t) = (V_0^2/|Z|) \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$, e a sua média ao longo de um período T é

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{|Z|} \cos \varphi$$

inversamente proporcional à reatância do circuito e proporcional ao cosseno da fase. Em particular, a potência dissipada é máxima quando $\varphi = 0$ (por exemplo, apenas uma resistência), e é nula quando $\varphi = \pm\pi/2$ (por exemplo, apenas uma bobina ou uma capacidade).

ex: Calcule a impedância complexa de um circuito RLC e a sua frequência de ressonância.

4.4 Variação das constantes e funções de Green

Disclaimer. É tradição, em praticamente todos os manuais sobre equações diferenciais, contar aos alunos também a seguinte receita que produz fórmulas integrais que resolvem EDOs lineares de segunda ordem não homogêneas. O programa oficial desta UC menciona explicitamente o método, e por esta razão decidi deixar escrita esta seção. No entanto, como podem observar nos exercícios seguintes, é difícil arranjar exemplos de equações diferenciais “interessantes/realísticas” cuja solução possa ser obtida por este método de forma razoável. Nas palavras de Gian-Carlo Rota,²⁵ ‘**the much-trumpeted method of variation of parameters is pathetically useless**’. Por outro lado, é verdade que o contexto natural onde este método pode ser considerado um caso elementar é a teoria das “funções de Green”, bem mais geral e útil na física-matemática quando aplicada a equações diferenciais parciais. No contexto das EDOs, as funções de Green são chamadas “respostas impulsivas”, e tratadas mais propriamente dentro da teoria da transformada de Laplace (que já não faz parte dos programas das UCs de matemática das licenciaturas em Física e em Engenharia Física).

Variação das constantes. Um método aparentemente elegante para resolver EDOs lineares é o seguinte. Consideramos uma EDO linear não homogênea

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = f(t) \quad (4.9)$$

com coeficientes constantes. Uma solução da homogênea $\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y = 0$ é uma combinação linear $y(t) = \lambda_+ \phi_+(t) + \lambda_- \phi_-(t)$, onde $\phi_{\pm}(t)$ são duas soluções independentes e $\lambda_{\pm}$ são constantes arbitrárias. A ideia é procurar uma solução particular de (4.9) ao fazer “variarmos as constantes”, ou seja, ao fazer a conjectura

$$z(t) = \lambda_+(t) \phi_+(t) + \lambda_-(t) \phi_-(t) \quad (4.10)$$

onde agora $\lambda_{\pm}(t)$ são “coeficientes/parâmetros/constantes” variáveis. Um cálculo (e muita paciência) mostra que

$$\ddot{z} + 2\alpha \dot{z} + \beta z = \frac{d}{dt} \left(\dot{\lambda}_+ \phi_+ + \dot{\lambda}_- \phi_- \right) + \alpha \left(\dot{\lambda}_+ \phi_+ + \dot{\lambda}_- \phi_- \right) + \left(\lambda_+ \ddot{\phi}_+ + \lambda_- \ddot{\phi}_- \right)$$

²⁵G.-C. Rota, *Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations*, MAA meeting at Simons College, april 24, 1997. <https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Rota.pdf>

Em particular, (4.10) é solução de (4.9) se (mas não só se!) as derivadas $\dot{\lambda}_{\pm}$ dos coeficientes satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_+ \phi_+ + \dot{\lambda}_- \phi_- = 0 \\ \lambda_+ \dot{\phi}_+ + \lambda_- \dot{\phi}_- = f \end{cases}$$

O determinante da matriz 2×2 que define o sistema é o Wronskiano

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = \phi_+(t) \dot{\phi}_-(t) - \dot{\phi}_+(t) \phi_-(t),$$

que é diferente de zero porque as $\phi_{\pm}$ são independentes. A única solução do sistema é

$$\dot{\lambda}_+ = -\frac{\phi_- f}{W_{\phi_+, \phi_-}} \quad \dot{\lambda}_- = \frac{\phi_+ f}{W_{\phi_+, \phi_-}},$$

e portanto os coeficientes podem ser umas primitivas

$$\lambda_+(t) = -\int \phi_-(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt, \quad \lambda_-(t) = \int \phi_+(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt,$$

definidas a menos de constantes aditivas arbitrárias (que correspondem, em (4.10), a somar soluções da equação linear homogênea). É interessante observar que a fórmula final para uma solução particular é um integral

$$z(t) = \int_0^t g(t, s) f(s) ds$$

da força $f(s)$ vezes uma “função de Green”

$$g(t, s) = \frac{\phi_+(s) \phi_-(t) - \phi_-(s) \phi_+(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(s)}. \quad (4.11)$$

ex: Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em intervalos de tempo convenientes, utilizando o método de variação dos parâmetros.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= 1/\sin(t) & \ddot{x} + 2\dot{x} + x &= e^{-t} & \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x &= e^{-2t} \log t. \\ \ddot{x} + x &= \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} & \ddot{x} + x &= \tan(t) & \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x &= \frac{e^{2t}}{\cos(2t)}. \end{aligned}$$

Heurística das funções de Green. Consideramos uma equação diferencial ordinária linear não homogênea do gênero

$$(Lx)(t) = f(t) \quad (4.12)$$

onde L é um operador diferencial, que age num espaço de funções suficientemente regulares, e $f(t)$ é uma força. Um exemplo é $L = D^2 + 2\alpha D + \beta$, que corresponde ao problema das oscilações forçadas e amortecidas quando $\beta = \omega^2 > 0$ é o quadrado da frequência própria e $\alpha > 0$ é um coeficiente de atrito. Uma resposta formal é

$$x(t) = (L^{-1} f)(t)$$

onde L^{-1} é alguma inversa de L . O núcleo de L não é nulo, pois é feito das soluções do problema homogêneo $Lx = 0$, assim que L não é invertível. No entanto, pode admitir uma inversa direita, tal que $L \circ L^{-1}$ seja a identidade. Também natural é esperar que uma inversa direita de um operador diferencial seja um operador integral, logo que seja do gênero

$$(L^{-1} f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, s) f(s) ds \quad (4.13)$$

A função $g(t, s)$ que aparece neste integral é chamada “núcleo” do operador L^{-1} , ou também “função de Green” do operador L . É claro que, se existir, não é única, assim que a sua escolha dependerá do tipo de problema, de condições iniciais ou de contorno, assim como de outras considerações físicas. Se o operador L tem coeficientes constantes, logo é invariante por translações

no tempo, então o núcleo deve depender apenas da diferença $t - s$, ou seja, deve ser da forma $g(t, s) = g(t - s)$. Neste caso o operador inverso é um integral do género

$$(L^{-1} f)(t) = (g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - s) f(s) ds$$

chamado *produto de convolução* do núcleo $g(t)$ com a força $f(t)$, e denotado por $(g * f)(t)$.

Também, $g(t)$ não deve necessariamente ter valores para todos os tempos t , mas apenas integrais. Ou seja, $g(t)$ não é uma função, mas define o que os matemáticos chamam uma “densidade”, um objeto que associa a cada função $f(t)$ suficientemente regular (por exemplo contínua) e a cada tempo t , um valor denotado simbolicamente por $\int g(t - s) f(s) ds$. Como o símbolo de integral sugere, esta correspondência deve ser linear em f . Também é conveniente considerar funções de prova $f(t)$ com suporte compacto (uma força aplicada apenas durante um tempo finito) ou pelo menos que decaem para zero quando $t \rightarrow \pm\infty$ mais rápido do inverso de qualquer potência. A condição $L \circ L^{-1} = I$ diz então que, se o operador comuta com o integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Lg)(t - s) f(s) ds = f(t)$$

ou seja, que Lg é igual à densidade $\delta(t)$ definida pela identidade formal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - s) f(s) ds = f(t) \quad (4.14)$$

e chamada *delta de Dirac*. Finalmente, a função de Green é uma solução da equação diferencial

$$Lg = \delta \quad (4.15)$$

seja qual for o seu significado.

Naturalmente, não existe nenhuma função $\delta(t)$, no sentido usual, que satisfaz a identidade paradoxal (4.14) para toda $f(t)$. Uma tal função deve necessariamente ser nula quando $t \neq 0$, logo ser localizada na origem, e no mesmo tempo deve ter um integral diferente de zero, coisa claramente impossível. Seja como for, a identidade (4.14) diz que uma função contínua $f(t)$ pode ser representada como uma sobreposição de deltas de Dirac $\delta(t - s)$ pesadas com os valores $f(s)$ da própria função. A (4.15) diz que a função de Green $g(t - s)$ é a resposta do sistema a uma força $\delta(t - s)$ localizada no ponto s . Consequentemente, a fórmula

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - s) f(s) ds \quad (4.16)$$

para a resposta do sistema, ou seja, uma solução da equação diferencial ordinária não homogênea (4.12), é uma manifestação do princípio de sobreposição: a resposta a uma sobreposição de forças é uma sobreposição das respostas às singulas forças.

Pode ser útil ter uma ideia menos abstrata/algébrica da delta de Dirac ...

Delta de Dirac discreta. Para um engenheiro, um sinal contínuo $f(t)$ pode ser substituído, sem grande perda de informação, por um sinal discreto $f[n]$, com $n \in \mathbb{Z}$ (por exemplo, observando o sinal original em tempos $t = n\tau$ múltiplos de um passo τ suficientemente pequeno). O *pulso unitário* é o sinal unitário localizado no tempo $n = 0$, ou seja,

$$\delta[n] := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Então é tautológico que todo sinal $f[n]$ pode ser representado como

$$f[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta[n - k] f[k]$$

ou seja, como sobreposição de pulsos unitários $\delta[n - k]$ pesados com os valores $f[k]$. Esta é claramente uma versão discreta da (4.14) que faz todo o sentido matemático (pois a soma é de fato finita, sendo diferente de zero apenas um termo). Moral: num mundo discreto, a delta de Dirac é um objeto muito simples e compreensível. Esta ideia é importante na teoria do tratamento dos sinais digitais ...

Densidades, identidades aproximadas e delta de Dirac. De volta ao contínuo, o contexto natural para introduzir a delta de Dirac é o das “densidades”. Uma função real integrável $p(x)$ descreve uma “distribuição” de massas ou de cargas na reta real. O que é observável não são os valores $p(x)$ da densidade em particulares pontos x , mas apenas a massa/carga total contida num intervalo não trivial $[a, b]$, definida pelo integral

$$\int_a^b p(x) dx$$

ou, mais em geral, os valores médios

$$\langle p, f \rangle := \int_a^b p(x) f(x) dx$$

de funções integráveis $f(x)$, por exemplo contínuas, pensadas como observáveis. É claro que a correspondência $f \mapsto \langle p, f \rangle$ é linear. Se $p(x) \geq 0$ e o integral impróprio $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx$ é finito e igual a 1, então a densidade descreve uma distribuição de probabilidade na reta. Os integrais

$$\text{Prob}(\xi \in [a, b]) = \int_a^b p(x) dx$$

podem ser então interpretados como probabilidades de uma “variável aleatória” ξ ser observada no intervalo $[a, b]$. O integral impróprio $P(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy$ é então chamado “função distribuição acumulada”. A sua derivada, se existir, é a densidade $P'(x) = p(x)$.

Uma *identidade aproximada* é uma família de densidades $\delta_\varepsilon(t)$, dependendo de um parâmetro positivo ε , que satisfaz as seguintes condições (que podem ser enfraquecidas, mas não é importante):

IA1 são não-negativas, ou seja, $\delta_\varepsilon(t) \geq 0$ para todo t ;

IA2 o suporte de $\delta_\varepsilon(t)$ é contido no intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, ou seja, $\delta_\varepsilon(t) = 0$ se $|t| > \varepsilon$;

IA3 as funções $\delta_\varepsilon(t)$ são integráveis, e têm toda integral unitário, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$$

Fisicamente, uma identidade aproximada com ε muito pequeno pode ser pensada como uma massa unitária concentrada num intervalo pequeno em torno da origem.

Uma “massa unitária concentrada na origem”, a famosa delta de Dirac $\delta(x)$, é então um limite da densidade $\delta_\varepsilon(x)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Isto significa que o valor médio/integral de uma função de prova contínua $f(x)$ é, por definição,

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx$$

Se ε é suficientemente pequeno, então os valores de $f(s)$ no suporte de $\delta_\varepsilon(s)$ não diferem muito de $f(0)$, pela continuidade da função. Consequentemente,

Teorema 4.2. *Seja $\delta_\varepsilon(x)$ uma identidade aproximada. Se $f(x)$ é uma função contínua, então*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(s) f(s) ds = f(0)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon'' > 0$. Pela continuidade de $f(x)$ na origem, existe um $\varepsilon' > 0$ tal que se $|x| \leq \varepsilon'$ então $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon''$. Então se $\varepsilon \leq \varepsilon'$, sendo $\delta_\varepsilon(x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left| f(0) - \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx \right| &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) |f(0) - f(x)| dx \\ &\leq \varepsilon'' \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = \varepsilon'' \end{aligned}$$

A arbitrariedade de $\varepsilon'' > 0$ implica o resultado. □

Um as mudanças de variáveis nos integrais que definem os valores médios permitem verificar as seguintes covariâncias por translações e homotetias. A primeira observação é que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s-a) f(s) ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(s-a) f(s) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(u) f(u+a) du = f(a)\end{aligned}$$

assim que a densidade $\delta_a(t) := \delta(t-a)$ representa uma massa unitária concentrada no ponto a . Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-s) f(s) ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(-s) f(s) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\infty}^{-\infty} \delta_{\varepsilon}(u) f(-u) d(-u) = f(0)\end{aligned}$$

assim que $\delta(t)$ deve ser considerada uma “função” par. Também interessante é observar que, se $\lambda > 0$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda s) f(s) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) f(t/\lambda) dt / \lambda = \lambda^{-1} f(0)$$

e portanto que $\delta(t)$ deve ser considerada uma “função” homogênea de grau -1 , pois satisfaz $\delta(\lambda s) = \lambda^{-1} \delta(s)$.

Distribuições. As funções de Green satisfazem a equação diferencial $Lg = \delta$, logo devem poder ser derivadas em algum sentido. Como é possível? Se $g(t)$ é uma densidade derivável, e $f(t)$ uma função de prova com suporte compacto e também derivável, então uma integração por partes diz que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) f(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f'(t) dt$$

pois $f(t)$ se anula em $\pm\infty$. Isto sugere “definir” a derivada da densidade g como sendo a densidade Dg tal que o seu valor sobre uma função de prova $f(t)$ é

$$\langle Dg, f \rangle := - \langle g, Df \rangle$$

Ao fim de poder definir derivadas de ordem arbitrário, logo operadores diferenciais de ordem arbitrariamente grande, temos que considerar funções de prova que sejam infinitamente deriváveis e com suporte compacto. O espaço de tais funções é denotado por $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ ou também por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. As *distribuições*, ou *funções generalizadas* são então funcionais lineares $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (e Laurent Schwartz escolheu este nome para lembrar que representam, pelo menos nas ideias originais de Green, “distribuições de cargas ou dipolos elétricos”). A notação $\langle T, f \rangle$ diz então que este número é o valor do funcional T sobre a função de prova f .

A verdade é que o dual algébrico de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ é demasiado grande. Os matemáticos então definem uma “topologia” em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ou seja, uma noção de convergência, e finalmente definem o espaço das *distribuições* como sendo o espaço $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dos funcionais lineares contínuos em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Nesta introdução informal, podemos prescindir de qualquer definição rigorosa de distribuição. A final, o que procuramos são fórmulas integrais do género (4.16) que resolvam algumas EDOs interessantes. Uma vez descobertas, de uma forma ou de outra, podem sempre ser verificada por meios elementares.

A ideia de Green começa a ser não trivial e importante quando aplicada a equações diferenciais parciais como a equação de Poisson (o caso tratado pelo próprio Green), das ondas, de Klein-Gordon, ... Podem também queres saber que são funções de Green os propagadores da teoria dos campos relativística ... No entanto, tem piada calcular as funções de Green dos operadores que correspondem às EDOs elementares tratadas nestas notas.

e.g. Função salto unitário e função de Green da derivada. O operador diferencial mais simples é o operador derivação D . Uma função de Green de D resolve então $Dg = \delta$. A função *salto unitário* é definida por

$$\Theta(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

e define a distribuição

$$\langle \Theta, f \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) dt$$

Uma integração por parte mostra que a sua derivada é

$$\langle D\Theta, f \rangle = -\langle \Theta, Df \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) f'(t) dt = -\int_0^{\infty} f'(t) dt = f(0)$$

E portanto, $D\Theta = \delta$. Consequentemente, uma solução da equação diferencial $\dot{x}(t) = f(t)$ é, como esperado,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-s) f(s) ds = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

ex: Verifique que uma função de Green do operador $D + \beta$ é

$$g(t) = e^{-\beta t} \Theta(t)$$

Consequentemente, uma solução particular da equação diferencial $\dot{x} = -\beta x + f(t)$ (que descreve, por exemplo se $\beta > 0$, um decaimento radioativo com taxa de reposição variável) é

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} f(s) ds$$

e.g. Função de Green do laplaciano na reta. O laplaciano em dimensão um é o operador diferencial D^2 . A função $g(t) = t\theta(t)$ define uma distribuição que satisfaz

$$\begin{aligned} \langle D^2 g, f \rangle &= \langle g, D^2 f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t \Theta(t) f''(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} t f''(t) dt = -\int_0^{\infty} f'(t) dt = f(0) \end{aligned}$$

ou seja, $D^2 g = \delta$. A equação diferencial $\ddot{x}(t) = f(t)$ descreve a trajetória de uma partícula num referencial inercial sujeita a uma força variável $f(t)$. Uma sua solução é portanto

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-s) \theta(t-s) f(s) ds = \int_{-\infty}^t (t-s) f(s) ds} \quad (4.17)$$

e.g. Resposta de um oscilador harmónico. Consideramos um oscilador forçado $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$. Uma função de Green do operador $L = D^2 + \omega^2$ é

$$g(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \Theta(t)$$

onde $\Theta(t)$ é a função salto unitário. De fato, se $f(t)$ é uma função de prova,

$$\begin{aligned} \langle (D^2 + \omega^2)g, f \rangle &= \langle g, (D^2 + \omega^2)f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \Theta(t) (f''(t) + \omega^2 f(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) (f''(t) + \omega^2 f(t)) dt = -\int_0^{\infty} \cos(\omega t) f'(t) dt + \int_0^{\infty} \omega \sin(\omega t) f(t) dt \\ &= [-\cos(\omega t) f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \omega \sin(\omega t) f(t) dt + \int_0^{\infty} \omega \sin(\omega t) f(t) dt \\ &= f(0) \end{aligned}$$

Consequentemente, a resposta de um oscilador harmónico de frequência ω a uma força $f(t)$ pode ser representada pela fórmula integral

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t-s)) f(s) ds \quad (4.18)$$

uma “convolução” da função $\sin(\omega t)$ com a força $f(t)$. Esta fórmula pode ser verificada a posteriori com um cálculo elementar (cuidado, o tempo t aparece nos limite de integração mas também na função dentro do integral!).

ex: Considere um oscilador amortecido e forçado $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$ com atrito pequeno, ou seja, $\alpha^2 < \omega^2$. Verifique que uma função de Green do operador $L = D^2 + 2\alpha D + \omega^2$ é

$$g(t) = \frac{1}{\Omega} e^{-\alpha t} \sin(\Omega t) \Theta(t)$$

onde $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$. Consequentemente, a resposta do sistema é

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\Omega} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\Omega(t-s)) f(s) ds \quad (4.19)$$

ex: Calcule o limite da solução (4.18) quando $\omega \rightarrow 0$, e deduza a (4.17)

ex: Verifique e que uma solução particular da equação $\ddot{x} - k^2 x = f(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(s) \sinh(k(t-s)) ds.$$

(pode fazer uma rotação de Wick na fórmula (4.18), ou calcular uma função de Green do operador $D^2 - k^2$).

ex: Verifique que todas estas fórmulas (4.17), (4.18), (4.19), ... podem ser obtidas também usando o método da variação das constantes, logo a (4.11).

5 Espaços euclidianos

ref: [Ap69] Vol. 2, 1.11-17 ; [La87] Ch. V

5.1 Espaços euclidianos

21 mar 2023

Espaços euclidianos. Um *espaço euclidiano* é um espaço vetorial $\mathbf{E}$, real ou complexo, munido de um *produto interno/escalar* (também dito *hermítico* se o espaço é complexo), uma aplicação que associa a cada par de vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$ um escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (dependendo se o espaço é real ou complexo), satisfazendo os axiomas

$$\mathbf{E1} \text{ (simetria hermítica) } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E2} \text{ (linearidade) } \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{E} \text{ e } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

$$\mathbf{E3} \text{ (positividade) } \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \text{ se } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Se o espaço é real o axioma E1 diz simplesmente que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$. O axioma E2 diz que o produto interno é linear na segunda variável, e o axioma E1 então implica que é “anti-linear” na primeira variável, ou seja, que

$$\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \bar{\mu} \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$$

(mas há textos, em particular de matemática, onde acontece o contrário). Esta propriedade é também chamada “sesquilinearidade”. Pela E1, o produto escalar de um vetor com si próprio é um número real, e a E3 diz que este número é não negativo, ou seja, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, e que é nulo apenas quando $\mathbf{x}$ é o vetor nulo. O axioma E3 também implica que o único vetor $\mathbf{x}$ tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$ é o vetor nulo $\mathbf{0}$.

Quando necessário, por exemplo quando nas considerações entram dois ou mais espaços euclidianos diferentes, o produto interno do espaço euclidiano $\mathbf{E}$ será denotado também por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}}$.

Os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Os arquétipos de espaços euclidianos de dimensão finita, reais ou complexos, são os seguintes.

O espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$, munido do produto interno “usual”

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Se representamos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como vetores coluna, então o produto interno assume a forma de produto linhas por colunas

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

O espaço euclidiano complexo (ou, simplesmente, hermítico) $\mathbb{C}^n$, munido do produto interno (hermítico) “usual”

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \cdots + \bar{x}_n y_n$$

Em termos de vetores coluna, o produto interno hermítico é

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{y}$$

Nesta definição, seguimos a tradição de físicos e engenheiros de usar produtos hermíticos lineares na segunda variável e anti-lineares na primeira (os matemáticos fazem o contrário).

Em particular, os espaços euclidianos mais simples são os próprios corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Matriz de Gram. Seja $\mathbf{E}$ um espaço euclidiano de dimensão finita n , e seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ uma sua base. Pela linearidade, o produto interno entre dois vetores arbitrários $\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$ e $\mathbf{y} = \sum_k y_k \mathbf{e}_k$ é determinado pelos produtos internos

$$g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$$

entre os vetores da base, que formam uma matriz $G = (g_{ij})$, chamada *matriz de Gram*, ou *matriz da métrica*. De fato, a E2 implica que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{ij} \bar{x}_i g_{ij} y_j = \bar{\mathbf{x}}^T G \mathbf{y}.$$

Pelo axioma E1 esta matriz satisfaz $G^T = G$ no caso real, e $\bar{G}^T = G$ no caso complexo. O axioma E3 implica que a matriz G é “definida positiva”, no sentido em que $\bar{\mathbf{x}}^T G \mathbf{x} > 0$ para todo vetor não nulo $\mathbf{x}$. Em particular, as entradas diagonais são positivas, ou seja, $g_{ii} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle > 0$.

Norma euclidiana. A *norma (euclidiana)* do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ é a raiz quadrada não negativa

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

ou seja, o quadrado da norma de $\mathbf{x}$ é $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ (é mais fácil “calcular” o quadrado da norma, que é apenas uma soma de produtos, do que a própria norma, que envolve uma raiz quadrada). É claro que $\|\mathbf{x}\| \geq 0$. Pelas E2 e E3, o único vetor com norma 0 é o vetor nulo $\mathbf{0}$. Pelas propriedades E1 e E2, $\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Isto significa que a norma é “positivamente homogênea”, ou seja, satisfaz

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$$

É importante observar que o produto escalar pode ser reconstruído a partir da norma euclidiana que define. De fato, num espaço euclidiano complexo temos a *identidade de polarização*

$$4 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + i \|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2 - i \|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2. \quad (5.1)$$

cuja prova é um cálculo elementar. Se o espaço euclidiano é real, logo os valores dos produtos escalares são reais (e a multiplicação por i não faz sentido), a identidade de polarização é mais simples, apenas

$$4 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \quad (5.2)$$

Um vetor é dito *unitário* se a sua norma é igual a um. Todo vetor não nulo $\mathbf{x}$ é proporcional a um vetor unitário, por exemplo $\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Este processo é chamado “normalização”. O vetor unitário $\mathbf{u}$ proporcional a um vetor não nulo $\mathbf{x}$ não é único. Se o espaço é real, sempre podemos multiplicar $\mathbf{u}$ por ± 1 . Se o espaço é complexo, temos ainda a liberdade de multiplicar $\mathbf{u}$ por uma fase arbitrária $e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

Um cálculo elementar mostra que a norma euclidiana, num espaço euclidiano real ou complexo, satisfaz a *identidade do paralelogramo*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$$

Ortogonalidade e projeções. Os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{E}$ são ditos *ortogonais/perpendiculares* quando $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, e uma notação é $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Esta relação é claramente simétrica. Pela E3, o único vetor $\mathbf{x}$ ortogonal a todos os vetores de um espaço euclidiano, ou seja, tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$, é o vetor nulo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Um cálculo elementar mostra que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2$ é igual ao dobro da parte real de $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Vale então o *teorema de Pitágoras*: se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais então

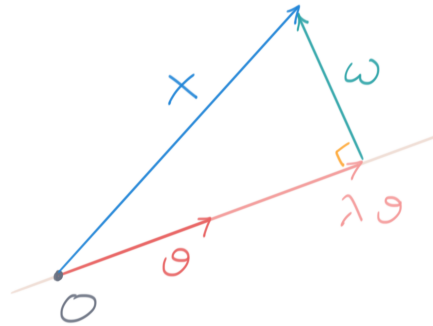
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Seja $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ um vetor não nulo. Todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ pode ser representado de maneira única como soma

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

de um vetor $\lambda \mathbf{v}$ proporcional a $\mathbf{v}$ e um vetor $\mathbf{w}$ ortogonal a $\mathbf{v}$. De fato, a condição de ortogonalidade $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} - \lambda \mathbf{v} \rangle = 0$ obriga a escolher

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$



O vetor $\lambda \mathbf{v}$ é dito *projecção (ortogonal)* do vetor $\mathbf{x}$ sobre (a reta definida pelo) vetor $\mathbf{v}$, e o coeficiente λ é dito *componente* de $\mathbf{x}$ ao longo de $\mathbf{v}$. Em particular, a componente de $\mathbf{x}$ ao longo de um vetor unitário $\mathbf{u}$ é o produto escalar $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$.

Se $\mathbf{x}$ não é proporcional ao vetor não nulo $\mathbf{y}$ (e, em particular, não é nulo), então a norma da diferença $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}$ entre o vetor $\mathbf{x}$ e a sua projecção $\lambda \mathbf{y}$ sobre $\mathbf{y}$ é estritamente positiva. Um cálculo mostra que

$$0 < \|\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

Consequentemente,

Teorema 5.1 (desigualdade de Schwarz). *O módulo do produto escalar entre dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$ é limitado por*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

e a igualdade verifica-se sse os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente dependentes.

Se o espaço euclidiano é real, é então possível definir o *ângulo* θ entre dois vetores não nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pela identidade

$$\cos \theta := \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|},$$

sendo o último um número real entre -1 e 1 .

Métrica euclidiana. Consequência importante da desigualdade de Schwarz é que a norma satisfaz a *desigualdade do triângulo* (ou seja, é subaditiva),

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

A *distância/métrica (euclidiana)* entre os vetores/pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{E}$ é definida por

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

É imediato verificar que dist é uma distância, ou seja, que é simétrica, não negativa e nula apenas quando os vetores são iguais, e que satisfaz a desigualdade do triângulo

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \text{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

ex: Verifique a identidade de polarização.

ex: Mostre que num espaço euclidiano real a identidade de polarização é

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 4 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

e deduz que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ sse $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

ex: Mostre que num espaço euclidiano real vale a *lei dos cossenos*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

ex: Mostre que a norma, e portanto a distância, satisfazem a *desigualdade do triângulo* (calcule $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ e use a desigualdade de Schwarz ...).

ex: [Ap69] 15.12.

Produto escalar de Frobenius. O traço permite definir um produto escalar, logo uma norma, interessante nos espaços das matrizes, não necessariamente quadradas. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes $m \times n$, reais ou complexas. Então

$$\langle A, B \rangle_F := \text{Tr}(A^* B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{a_{ij}} b_{ij}$$

onde $A^* = \overline{A}^\top$ denota a matriz adjunta de A . Esta expressão é “hermítica”, ou seja, satisfaz E1. Em particular, é simétrica se A e B são matrizes reais. É claramente linear na segunda variável, logo satisfaz E2. Finalmente, é também positiva, pois

$$\langle A, A \rangle_F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$$

é uma soma de quadrados, logo não negativa e nula sse A é a matriz nula. Consequentemente,

$$\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A \rangle_F}$$

é uma norma no espaço linear das matrizes $m \times n$, chamada *norma de Frobenius*. Quando $m = 1$, este é o produto hermitico usual entre vetores de $\text{Mat}_{1,n}(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^n$.

ℓ^2 spaces. The simplest infinite dimensional Euclidean space is the space ℓ^2 of those infinite sequences $\mathbf{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ of complex numbers $x_k \in \mathbb{C}$ with finite norm

$$\|\mathbf{x}\|^2 := \sum_k |x_k|^2 < \infty$$

equipped with the inner product

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} y_k$$

Convergence of the inner product comes from Schwarz inequality (5.1) applied to finite sums and convergence of the infinite sums defining the norms of the two vectors. The infinite system $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, ... is made of pairwise orthogonal unitary vectors. Any vector $\mathbf{x} \in \ell^2$ may be interpreted as a formal sum $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_n$.

In some precise sense, any reasonable (complete and separable) infinite dimensional complex Euclidean space is isomorphic to ℓ^2 .

Also useful are spaces of two-sided sequences $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, equipped with the obvious inner product

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x_k} y_k$$

L^2 spaces. Typical Euclidean spaces of interest in analysis of PDEs (and in physics) are spaces $\mathbf{E}$ made of continuous (or at least integrable) functions $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, defined in some domain X which may be an interval like $[-\pi, \pi]$, the whole real line $\mathbb{R}$, some open region $X \subset \mathbb{R}^n$ (or more sophisticated objects called “manifolds”, and so on), equipped with the L^2 *inner product* defined as

$$\langle f, g \rangle := \int_X \overline{f(t)} g(t) dt.$$

For this to make sense we must require finiteness of the norm

$$\|f\|^2 = \int_X |f(t)|^2 dt < \infty.$$

In some sense, this space is too small, and one should “complete” it in order to include the limits of its fundamental sequences. Lebesgue theory of integration permits this step. It is also too large, since it includes non-zero functions with zero norm (for example, any function which differs from zero only in a countable set). So, one should restore positivity of the inner product identifying functions which differ by something that has zero norm. This means passing to a quotient space. The result is a complete Euclidean space called $L^2(X)$.

In some other sense, this space is still too large, since interesting linear operators, such as differential operators, may only be defined in strict subspaces made of those functions which admit a sufficient number of derivatives. For example, when $X = \mathbb{R}$ one may consider the subspace of test functions $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty(X) \subset L^2(X)$ of infinitely differentiable functions with compact support. It turns out that this subspace is “dense” in $L^2(X)$ (this means that for any $f \in L^2(X)$ and any precision $\varepsilon > 0$ we may find a smooth function with compact support $g \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ such that $\|f - g\| < \varepsilon$).

Also useful is the *Schwartz space* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, made of those $\mathcal{C}^\infty$ functions $f(t)$ such that decrease, together with all their derivatives, faster than the inverse of any power (and therefore contains the space $\mathcal{D}(\mathbb{R})$). This means that for all non-negative integers m and n there exist constants $C_{n,m}$ such that

$$\left\| t^m f^{(n)}(t) \right\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^m f^{(n)}(t) \right| \leq C_{n,m}$$

It is clear that both the derivative operator D , defined as $(Df)(t) = f'(t)$, and the multiplication operator X , defined as $(Xf)(t) = tf(t)$, preserve the Schwartz space, and therefore can be iterated an arbitrary number of times.

When $f(t)$ is a time-dependent “signal”, as for example an electric current or the amplitude of a sound wave, then its squared modulus $|f(t)|^2$ is proportional to a “power”, hence its time integral $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ has the meaning of an “energy”. Square integrable signals are therefore finite-energy signals.

If a continuous-time signal $f(t)$ is “sampled” at integer multiples of some sampling time $\tau > 0$, we get a discrete-time signal $x_n := f(n\tau)$, with $n \in \mathbb{N}$ or $\mathbb{Z}$, which is a sequence. The L^2 inner product is then approximated/replaced by the ℓ^2 inner product, since,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} g(t) dt \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f(n\tau)} g(n\tau)$$

as expected from Riemann integration of well behaved functions.

Covariância, independência e ortogonalidade. Consideramos um espaço de probabilidades, ou seja, um conjunto não vazio Ω , uma σ -álgebra $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ de eventos, e uma medida de probabilidade, uma função $\text{Prob} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ que é σ -aditiva e tal que $\text{Prob}(\Omega) = 1$. Por simplicidade, podemos pensar que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ é um conjunto finito ou numerável, que $\mathcal{A} = 2^\Omega$ é a família de todos os subconjuntos $A \subset \Omega$, e que

$$\text{Prob}(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n$$

sendo os p_n ’s número $0 \leq p_n \leq 1$ tais que $\sum_n p_n = 1$.

Uma *variável aleatória* é uma função mensurável $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. No caso em que Ω é numerável, uma variável aleatória é automaticamente “discreta”, ou seja, uma função que assume uma quantidade numerável de valores $x_1, x_2, x_3, \dots$. Para cada valor x_k de X podemos calcular a sua probabilidade, $\text{Prob}(X = x_k) := \text{Prob}(X^{-1}\{x_k\})$, que é a soma dos p_n 's tais que $X(\omega_n) = x_k$. A *média*, ou *valor esperado*, de X é então definida por

$$\mathbb{E}X := \sum_k x_k \cdot \text{Prob}(X = x_k) = \sum_n X(\omega_n) \cdot p_n$$

É claro que a correspondência $X \mapsto \mathbb{E}X$ é um funcional linear no espaço linear real $\mathbf{V}$ das variáveis aleatórias.

Se X e Y são duas variáveis aleatórias, a *covariância* entre X e Y é definida por

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &:= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) \end{aligned}$$

É evidente que a covariância é simétrica e linear em cada variável, portanto satisfaz E1 e E2. É claro também que $\mathbb{V}X := \text{Cov}(X, X)$, que é chamada *variância* de X , é não-negativa, mas é nula quando uma variável é constante “com probabilidade um”, ou seja, fora dum evento com probabilidade nula. Consequentemente, $\text{Cov}(X, Y)$ satisfaz também E3, logo define um produto escalar, se pensada no quociente $\mathbf{V}/\text{const}$ do espaço das variáveis aleatória módulo as variáveis constantes com probabilidade um (ou seja, duas variáveis são identificadas se diferem por uma constante num conjunto com probabilidade total), que pode ser identificado com o espaço $\mathbf{V}_0$ das variáveis aleatórias com média nula.

A noção importante na teoria das probabilidades é a “independência”. Duas variáveis X e Y são *independentes* se

$$\text{Prob}(X = x_i \text{ e } Y = y_j) = \text{Prob}(X = x_i) \cdot \text{Prob}(Y = y_j)$$

para todos os valores possíveis x_i e y_j . Um cálculo elementar mostra que se X e Y são independentes então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_k z_k \cdot \text{Prob}(XY = z_k) = \sum_{i,j} x_i y_j \cdot \text{Prob}(X = x_i \text{ e } Y = y_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \cdot \text{Prob}(X = x_i) \cdot \text{Prob}(Y = y_j) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) \end{aligned}$$

e consequentemente $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Portanto, a independência implica a ortogonalidade! Por outro lado, é possível que duas variáveis sejam ortogonais sem ser independentes. O que acontece é que a covariância é apenas uma medida da “dependência linear” entre duas variáveis.

Dual de um espaço euclidiano. Seja $\mathbf{E}$ um espaço euclidiano. O axioma E2 implica que cada vetor $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$ define uma forma linear $\boldsymbol{\xi} := \langle \mathbf{y}, \cdot \rangle \in \mathbf{E}^*$, de acordo com

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

A correspondência $\mathbf{y} \mapsto \langle \mathbf{y}, \cdot \rangle$ define uma transformação $\pi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^*$ anti-linear, ou seja, aditiva e que satisfaz $\pi(\lambda \mathbf{y}) = \bar{\lambda} \pi(\mathbf{y})$ (que é portanto linear se o espaço é real). É também evidente que o núcleo de π é trivial (pois o único vetor ortogonal a todos os vetores de $\mathbf{E}$ é o vetor nulo), logo que π é injetiva.

Se o espaço euclidiano tem dimensão finita, esta inclusão $\pi(\mathbf{E}) \subset \mathbf{E}^*$ é claramente uma bijeção, de acordo com o seguinte caso elementar do *teorema de representação de Riesz*.

Teorema 5.2. *Seja $\boldsymbol{\xi}$ uma forma linear definida no espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{E}$. Então existe um único vetor $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$ tal que $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Consequentemente, $\pi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^*$ é uma bijeção anti-linear entre $\mathbf{E}$ e o seu dual $\mathbf{E}^*$.*

Demonstração. Fixada uma base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, podemos representar cada vetor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. A forma linear ξ é então definida pelas suas coordenadas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, tais que

$$\xi(\mathbf{x}) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

Se $\mathbf{y} := \overline{\xi_1} \mathbf{e}_1 + \overline{\xi_2} \mathbf{e}_2 + \dots + \overline{\xi_n} \mathbf{e}_n$ então é imediato verificar que $\xi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$. A unicidade é evidente, pois se $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}', \mathbf{x} \rangle$ para todo $\mathbf{x}$, então a diferença $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}'$ satisfaz $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{x}$, mas o único vetor que tem produto escalar nulo com todos os vetores é o vetor nulo. $\square$

Delta de Dirac. Em dimensão infinita, o teorema de Riesz precisa de mais hipóteses sobre o espaço. Por exemplo, seja $\mathbf{E}$ o espaço euclidiano das funções contínuas $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, munido do produto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \overline{f(t)} g(t) dt$. A *delta de Dirac* na origem é o funcional linear definido por

$$\delta(f) := f(0)$$

que associa a cada função contínua o seu valor na origem. É claro que não existe nenhuma função contínua $g(t)$ tal que

$$\int_{-1}^1 \overline{g(t)} f(t) dt = f(0)$$

para toda função contínua $f(t)$.

5.2 Sistemas ortonormados

Sistemas ortonormados. Num espaço euclidiano, há uma relação simples entre ortogonalidade e independência. Uma família $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots$ (finita ou infinita) de vetores não nulos dois a dois ortogonais, ou seja, tais que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, é dita *família/sistema ortogonal*.

Teorema 5.3. *Uma família ortogonal de vetores não nulos de um espaço euclidiano $\mathbf{E}$ é independente.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vetores não nulos e (dois a dois) ortogonais, i.e. tais que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\|\mathbf{v}_k\| \neq 0$ para todo k . Se $\lambda \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = 0$, então, ao calcular os produtos internos com os vetores $\mathbf{v}_k$, obtemos $\lambda_k \|\mathbf{v}_k\|^2 = 0$ para todos os k . Sendo os $\|\mathbf{v}_k\| > 0$, todos os λ_k são nulos. $\square$

Em particular, todo o conjunto ortogonal de n vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ não nulos num espaço euclidiano $\mathbf{E}$ de dimensão n é uma base.

Uma *sistema ortonormado* é uma família ortogonal de vetores unitários. Se os vetores de um sistema ortonormado formam uma base, então esta é chamada *base ortonormada*. É claro que se os $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ formam uma família ortogonal, então os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ definidos por $\mathbf{u}_k := \mathbf{v}_k / \|\mathbf{v}_k\|$ formam uma família ortonormada.

e.g. Por exemplo, a base canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbb{R}^n$ é uma base ortonormada. Todo seu subconjunto não vazio é um sistema ortonormado.

Algoritmo de Gram-Schmidt Conjuntos independentes, não necessariamente finitos, podem ser feitos ortogonais, logo ortonormados, de acordo com o seguinte algoritmo. Seja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$, um conjunto independente (não necessariamente finito) de vetores do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. O primeiro passo consiste em definir o vetor unitário

$$\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

que gera a reta $E_1 = \text{Span}(\mathbf{v}_1)$. Se retiramos de $\mathbf{v}_2$ a sua projeção ortogonal sobre esta reta, obtemos um vetor

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{u}_1$$

que é não nulo (pela hipótese de independência) e ortogonal a E_1 . Podemos então definir

$$\mathbf{u}_2 := \frac{\mathbf{v}'_2}{\|\mathbf{v}'_2\|}$$

e verificar que os $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ formam uma base ortonormada do plano $E_2 = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. É agora claro como continuar indutivamente. Assumimos que no k -ésimo passo conseguimos construir uma base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ de $E_k = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$. O vetor unitário $\mathbf{u}_{k+1}$ é obtido retirando de $\mathbf{v}_{k+1}$ a soma das suas projeções ortogonais sobre os $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, ou seja, calculando

$$\mathbf{v}'_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_{k+1} \rangle \mathbf{u}_i \quad (5.3)$$

e depois normalizando, ou seja, fazendo

$$\mathbf{u}_{k+1} := \frac{\mathbf{v}'_{k+1}}{\|\mathbf{v}'_{k+1}\|} \quad (5.4)$$

É imediato verificar que $\mathbf{v}'_{k+1}$, logo $\mathbf{u}_{k+1}$, não é nulo (caso contrário $\mathbf{v}_{k+1}$ seria uma combinação linear dos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$) e é ortogonal ao subespaço $E_k = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$. Consequentemente, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$ é uma base ortonormada de $E_{k+1} = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k+1})$. O resultado pode ser resumido como

Teorema 5.4 (ortogonalização de Gram-Schmidt). *Seja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$, um conjunto independente de vetores do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Então existe um conjunto ortonormado $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ tal que, para todos $m = 1, 2, \dots$, o espaço $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ gerados pelo primeiros m vetores $\mathbf{v}_k$'s coincide com o espaço $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ gerado pelos primeiros m vetores $\mathbf{u}_k$'s.*

Naturalmente, também é possível não dividir os $\mathbf{v}'_k$'s pela própria norma, e portanto ficar com um sistema ortogonal mas não necessariamente ortonormado. Em particular, como todo espaço linear de dimensão finita admite uma base,

Teorema 5.5. *Todo espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormada.*

e.g. Por exemplo, colocamos o problema de determinar uma base ortonormada do plano

$$S = \{x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

É claro que uma base de S é formada pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)$. O primeiro vetor tem norma $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{2}$, logo é proporcional ao vetor unitário $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2})\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. A diferença entre o segundo vetor e a sua projeção sobre $\mathbf{u}_1$ é

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{u}_1 = (1/2, 1/2, -1)$$

A sua norma é $\|\mathbf{v}'_2\| = \sqrt{3/2}$, e portanto $\mathbf{v}'_2$ é proporcional ao vetor unitário $\mathbf{u}_2 = \sqrt{2/3}\mathbf{v}'_2$. Finalmente, uma base ortonormada de S é formada pelos vetores

$$\mathbf{u}_1 = \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \left(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\right)$$

Isometrias lineares e espaços isométricos. Sejam $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ dois espaços euclidianos, reais ou complexos (mas os dois definidos sobre o mesmo corpo), com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{F}}$, respetivamente. Uma transformação linear $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ é uma *isometria (linear)* se preserva os produtos internos, ou seja, se

$$\langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle_{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{E}}$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$. É evidente que uma isometria preserva a ortogonalidade, ou seja, se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ então também $T\mathbf{x} \perp T\mathbf{y}$. Também preserva as normas, ou seja, $\|T\mathbf{x}\|_{\mathbf{F}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{E}}$ para todos $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, e consequentemente as distâncias. Em particular, envia sistemas ortonormados em sistemas ortonormados. Toda isometria é injetiva (pois preserva as normas), logo invertível na sua imagem, e a sua inversa $T^{-1} : \text{Im}(T) \rightarrow \mathbf{E}$ é também uma isometria.

Se existir uma isometria bijetiva $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ (observe que a inversa $T^{-1} : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E}$ é também uma isometria), os espaços euclidianos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ são ditos *isomorfos*.

Sejam $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ duas bases ortonormadas dos espaços euclidianos de dimensão finita $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$, respetivamente, e seja $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$. É imediato verificar que T é uma isometria bijetiva. O teorema 5.5 então implica

Teorema 5.6. *Todo espaço euclidiano de dimensão finita é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, dependendo se real ou complexo, munidos do produto interno usual.*

ex: Uma “inclusão” $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ é uma isometria de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, que não é sobrejetiva.

ex: Uma projeção ortogonal $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ não é uma isometria de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.

ex: Uma permutação $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$ é uma isometria de $\mathbb{R}^3$?

Fatorização QR. Consideramos m vetores independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (logo com $m \leq n$). O algoritmo de Gram-Schmidt produz um sistema ortonormado de m vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= r_{11}\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= r_{12}\mathbf{u}_1 + r_{22}\mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_m &= r_{1m}\mathbf{u}_1 + r_{2m}\mathbf{u}_2 + \dots + r_{mm}\mathbf{u}_m \end{aligned}$$

onde, de acordo com as (5.3) e (5.4), os coeficientes r_{ij} , com $i \leq j$, são os produtos escalares

$$r_{ij} = \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i \rangle \quad (5.5)$$

Ou seja, cada $\mathbf{v}_j$ é uma combinação linear dos $\mathbf{u}_i$ com $i \leq j$. Os coeficientes diagonais são $r_{ii} = \|\mathbf{v}'_i\| = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \rangle$, logo não nulos porque o espaço gerado pelos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}$ não contém $\mathbf{v}_i$. Se A denota a matriz $n \times m$ cujas colunas são os vetores independentes $\mathbf{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk})$, e Q denota a matriz $n \times m$ cujas colunas são os vetores ortonormados $\mathbf{u}_k = (u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk})$, então

$$A = QR$$

ou, explicitamente,

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

onde $R = (r_{ij})$ é uma matriz quadrada $m \times m$ triangular superior com entradas diagonais não nulas, definida pelos produtos escalares (5.5). Consequentemente, toda matriz $n \times m$, formada por

colunas independentes (ou seja, de característica $m \leq n$) é um produto de uma matriz $n \times m$ formada por colunas ortonormadas e uma matriz quadrada $m \times m$ triangular superior e não singular.

Particularmente interessante é o caso $m = n$, e portanto os vetores $\mathbf{v}_k$'s, as colunas de A , formam uma base de $\mathbb{R}^n$. Uma matriz quadrada Q cujas colunas formam uma base ortonormada do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ satisfaz as identidades

$$QQ^\top = Q^\top Q = I$$

(pois se os $\mathbf{u}_k$'s denotam as colunas de Q , então as entradas de $Q^\top Q$ são os produtos escalares $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$, e portanto $Q^\top Q = I$, mas isto implica que $Q^\top = Q^{-1}$, e portanto também $QQ^\top = I$), e é chamada *matriz ortogonal*. Estas matrizes, que representam as isometrias do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, serão estudadas mais em detalhe na próxima seção. Por outro lado, uma matriz quadrada triangular superior com entradas diagonais diferentes de zero é invertível. Temos portanto o seguinte

Teorema 5.7. *Toda matriz quadrada não singular A é um produto $A = QR$ de uma matriz ortogonal Q vezes uma matriz triangular superior invertível R .*

O algoritmo de Gram-Schmidt, que produz a fatorização $A = QR$, permite então calcular facilmente o módulo do determinante e a inversa de uma matriz (invertível) A , pois é claro que $\text{Det} Q = \pm 1$ (porque $\text{Det}(Q^\top Q) = (\text{Det} Q)^2 = 1$) e $Q^{-1} = Q^\top$, e que o determinante e a inversa da matriz triangular superior R são simples de calcular.

e.g. Por exemplo, consideramos a matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

As colunas representam os vetores independentes $\mathbf{v}_1 = (0, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. O primeiro vetor é unitário, logo podemos escolher $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. A diferença entre o segundo vetor e a sua projeção ortogonal sobre a reta gerada por $\mathbf{u}_1$ é $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{u}_1 = (1, 0)$, que é unitário, e portanto podemos escolher $\mathbf{u}_2 = (1, 0)$. As relações

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

se traduzem na fatorização

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = QR$$

ex: Calcule a fatorização QR das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinómios de Legendre. Seja $\mathbf{E}$ o espaço euclidiano das funções contínuas $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt.$$

Os polinómios homogêneos $v_0(t) = 1$, $v_1(t) = t$, $v_2(t) = t^2$, $\dots$, $v_n(t) = t^n$, $\dots$ formam uma família independente de $\mathbf{E}$. O algoritmo de ortogonormalização de Gram-Schmidt produz uma família ortonormada de polinómios $\mathbf{u}_0(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \dots$ de grau $\deg \mathbf{u}_k \leq k$. Acontece que são mais interessantes os *polinómios de Legendre*

$$\ell_0(t) = 1, \quad \ell_1(t) = t, \quad \ell_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad \ell_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \quad \dots$$

que não são unitários mas normalizados pela condição $\ell_k(1) = 1$.

5.3 Projeções ortogonais

Complemento ortogonal. Seja $\mathbf{E}$ um espaço euclidiano, real ou complexo. Os subconjuntos $X, Y \subset \mathbf{E}$ são *ortogonais* se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, ou seja, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, para todos $\mathbf{x} \in X$ e $\mathbf{y} \in Y$.

O *complemento ortogonal* do subconjunto não vazio $X \subset \mathbf{E}$ (não necessariamente um subespaço) é o conjunto

$$X^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbf{E} \text{ t.q. } \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{x} \in X\}$$

dos vetores ortogonais a todos os vetores de X . É claro que $X^\perp$ é um subespaço linear de $\mathbf{E}$, independentemente de X ser um subespaço ou não. De fato, se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{x} \in X$, então, pela linearidade do produto escalar, também $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{v} \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{x} \in X$ e todo escalar λ .

É também claro que $X^\perp = (\text{Span}(X))^\perp$, pois se um vetor $\mathbf{v}$ é ortogonal a todos os vetores $\mathbf{x}_k \in X$, então é também ortogonal a todas combinações lineares $t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \dots + t_k \mathbf{x}_k$ dos vetores de X , pela linearidade do produto escalar. Em particular, para calcular o complemento ortogonal de um subespaço é suficiente calcular o complemento ortogonal de um seu sistema de geradores.

É evidente que $\{0\}^\perp = \mathbf{E}$ e $\mathbf{E}^\perp = \{0\}$. A positividade do produto escalar claramente implica que $X \cap X^\perp \subset \{0\}$.

Projeção ortogonal. Seja $S \subset \mathbf{E}$ um subespaço de dimensão finita do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Então cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ pode ser representado de maneira única como soma

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$$

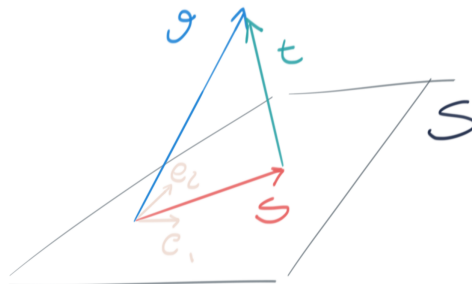
de um vetor $\mathbf{s} \in S$ e um vetor $\mathbf{t} \in S^\perp$, ou seja, o espaço total é uma soma direta

$$\mathbf{E} = S \oplus S^\perp$$

Em particular, se também $\mathbf{E}$ tem dimensão finita, então $\dim \mathbf{E} = \dim S + \dim S^\perp$. De facto, se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada de S (que existe pelo teorema 5.5, ou seja, pelo teorema de Gram-Schmidt 5.4), basta escolher

$$\mathbf{s} = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_k \quad (5.6)$$

e verificar que $\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{s}$ é ortogonal a todos os vetores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, e portanto a todos os vetores de S . O vetor $\mathbf{s}$ é dito *projeção (ortogonal)* de $\mathbf{v}$ sobre S , e o operador $P_S : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, definido por $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{s}$, é dito *projeção ortogonal* sobre o subespaço S .



A imagem da projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S é, como esperado, o vetor $\mathbf{s}$ de S que minimiza a distância entre $\mathbf{v}$ e S . Ou seja,

$$\|\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v})\| = \min_{\mathbf{s} \in S} \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|$$

de acordo com o seguinte

Teorema 5.8 (teorema de aproximação). *Seja $S \subset \mathbf{E}$ um subespaço de dimensão finita do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. A projecção ortogonal $\mathbf{s} = P_S \mathbf{v}$ realiza a distância entre $\mathbf{v}$ e S , ou seja, para todo $\mathbf{s}' \in S$,*

$$\|\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{s}'\|.$$

Demonstração. O vetor $\mathbf{s}' - \mathbf{s}$, que pertence ao subespaço S , é ortogonal ao vetor $\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{s}$, e portanto, pelo teorema de Pitágoras, $\|\mathbf{v} - \mathbf{s}'\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{s}' - \mathbf{s}\|^2 \geq \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2$. $\square$

Em dimensão infinita, este resultado é falso em geral. Projeções ortogonais, e portanto decomposições como somas diretas $\mathbf{E} = S \oplus S^\perp$ são possíveis apenas quando o subespaço S é fechado.

ex: Mostre que se $X \subset Y \subset \mathbf{E}$, então $Y^\perp \subset X^\perp$.

ex: Mostre que $X \subset (X^\perp)^\perp$, e que a inclusão pode ser estrita (quando X não é um subespaço linear de $\mathbf{E}$).

ex: Verifique que se $\mathbf{s} = P_S(\mathbf{v})$ é a projecção de $\mathbf{v}$ sobre S , e $\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{s}$, então $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{t}\|^2$. Deduza que $\|\mathbf{s}\| \leq \|\mathbf{v}\|$, ou seja, que a projecção ortogonal não estica as normas dos vetores.

ex: Verifique que $P_S(\mathbf{E}) = S$, e que $P_S P_S = P_S$.

Matrizes das projecções. Consideramos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, munido da base canónica. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço gerado pelo sistema ortonormado $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$, com $m \leq n$, e seja

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nm} \end{pmatrix}$$

a matriz $n \times m$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{u}_k = (u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk})$. Então a matriz que define a projecção ortogonal $P_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre S , definida pela (5.6), relativamente à base canónica é a matriz $n \times n$

$$UU^\top \tag{5.7}$$

De fato, seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ um vetor genérico, representado como um vetor coluna. Como as linhas de $U^\top$ são os vetores $\mathbf{u}_k$'s, então as coordenadas do vetor coluna $U^\top \mathbf{x}$ são os produtos escalares $\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle$. O produto $U(U^\top \mathbf{x})$ é então uma sobreposição dos vetores coluna $\mathbf{u}_k$ pesados pelos coeficientes $\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle$, de acordo com a (5.6).

No espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$, a fórmula (5.7) passa a ser $U\overline{U}^\top$.

e.g. Por exemplo, colocamos o problema de determinar a matriz 3×3 que define a projecção ortogonal sobre o plano $S = \{x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Uma base ortonormada de S é formada pelos vetores

$$\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$$

Assim, a resposta é

$$UU^\top = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Naturalmente, a mesma conclusão pode ser obtida usando a própria definição (5.6). A imagem do vetor genérico $\mathbf{v} = (x, y, z)$ é

$$\begin{aligned} P_S(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_2 \\ &= \frac{x-y}{\sqrt{2}} (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) + \frac{x+y-2z}{\sqrt{6}} (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}) \\ &= (2x/3 - y/3 - z/3, -x/3 + 2y/3 - z/3, -x/3 - y/3 + 2z/3) \end{aligned}$$

que é igual a $UU^\top \mathbf{x}$.

ex: Calcule a matriz da projeção ortogonal sobre o plano $x + 2y + 3z = 0$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

ex: Calcule a matriz da projeção ortogonal sobre o plano do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$.

5.4 Coeficientes de Fourier

Coeficientes de Fourier. Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$ um conjunto/sistema ortonormado do espaço euclidiano $\mathbf{E}$ (ou seja, $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, e $\|\mathbf{e}_i\| = 1$). Os *coeficientes de Fourier* do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ (relativamente ao sistema ortonormado $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$) são os escalares

$$x_k := \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle \quad (5.8)$$

Fixado um inteiro positivo N , seja $E_N = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N) \subset \mathbf{E}$ o subespaço de dimensão finita de $\mathbf{E}$, gerado pelos primeiros N vetores $\mathbf{e}_k$'s. A projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{x}$ sobre E_N é o vetor

$$\mathbf{x}_N = \sum_{k=1}^N x_k \mathbf{e}_k$$

Um cálculo elementar mostra que a desigualdade $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N\|^2 \geq 0$ implica

$$\sum_{k=1}^N |x_k|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

Em particular, a série de termos não-negativos $\sum_k |x_k|^2$ é convergente. No limite quando $N \rightarrow \infty$, segue a

Teorema 5.9 (desigualdade de Bessel). *Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$ um sistema ortonormado do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ e $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$ são os seus coeficientes de Fourier, então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \quad (5.9)$$

Se $\mathbf{E}$ tem dimensão finita, e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada, então cada vetor $\mathbf{x}$ pode ser representado de maneira única como $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k$. Então a desigualdade de Bessel é de fato uma igualdade, o teorema de Pitágoras

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

e o produto escalar entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é dado pela *identidade de Parseval*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \quad (5.10)$$

(que implica o teorema de Pitágoras, se tomamos $\mathbf{x} = \mathbf{y}$). Isto significa que a correspondência entre o vetor $\mathbf{x}$ e o vetor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dos seus coeficientes de Fourier (relativamente à base ortonormada escolhida) define um isomorfismo entre o espaço euclidiano $\mathbf{E}$ e o espaço $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$ (dependendo se $\mathbf{E}$ é complexo ou real), munido do produto escalar canônico.

ex: [Ap69] 15.12.

Séries de Fourier. O produto interno L^2 no espaço $\mathbf{H}$ das funções contínuas $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Não é difícil verificar que $1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$ é uma família ortogonal. Mais fácil é verificar que a família $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ das “harmônicas”

$$\mathbf{e}_n(t) := e^{int},$$

com $n \in \mathbb{Z}$, é um conjunto ortonormado.

Uma combinação linear $\sum_{-N}^N c_n e^{int}$ é chamada “polinómio trigonométrico” de grau N , e o espaço E_N dos polinómios trigonométricos de grau N é um subespaço de dimensão finita de $\mathbf{E}$, gerado pelas harmônicas $\mathbf{e}_n$ com $|n| \leq N$.

Seja $f(t)$ uma função integrável (por exemplo, seccionalmente contínua) no intervalo $[-\pi, \pi]$. A sua projecção ortogonal sobre E_N é o polinómio trigonométrico

$$S_N f(t) := \sum_{-N}^N \widehat{f}(n) e^{int},$$

onde os *coeficientes de Fourier* de f são definidos por

$$\widehat{f}(n) := \langle \mathbf{e}_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

A *série de Fourier* de $f(t)$ é a série formal

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

(a segunda é obtida da primeira usando a fórmula de Euler, e os coeficientes a_n e b_n são combinações lineares dos $\widehat{f}(\pm n)$). Se a função $f(t)$ é suficientemente regular (por exemplo, diferenciável com continuidade), a série de Fourier “converge” para a própria função num sentido apropriado.

Hilbert spaces and Dirac’s notation. Physicists are interested in certain (typically infinite dimensional) complex Euclidean spaces $\mathbf{H}$ called *Hilbert spaces*. They are characterized by a “completeness condition” and by the fact of having an “infinite countable basis” $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots$. Each vector may be written as an infinite sum $\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$, with Fourier coefficients $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$, and (the square of) its norm is the sum of the series $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_k |x_k|^2$. So, the correspondence $\mathbf{x} \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots)$ defines an isomorphism with the space ℓ^2 . It happens that the inner product induces an (anti-linear) isomorphism between $\mathbf{H}$ and its dual $\mathbf{H}^*$, as is the case in finite dimension.

Paul Dirac, one of the fathers of quantum mechanics, invented the following notation²⁶: a generic vector is denoted by $|\psi\rangle$ and called *ket*, while a generic co-vector is denoted by $\langle\phi|$ and called *bra*, so that their pairing

$$\langle\phi|\psi\rangle$$

is a *bra-ket*, and represents the inner product between the vectors $|\phi\rangle$ and $|\psi\rangle$. The anti-linear isomorphism between $\mathbf{H}$ and its dual is the map $|\psi\rangle \mapsto \langle\psi|$. The orthogonal projection over the line spanned by a unitary vector $|\psi\rangle$ is then written

$$P_\psi = |\psi\rangle \langle\psi|$$

so that its value on the vector $|\phi\rangle$ reads $P_\psi |\phi\rangle = |\psi\rangle \langle\psi|\phi\rangle$. More generally, if $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots$ is an orthonormal system spanning the subspace $S \subset \mathbf{H}$, then the orthogonal projection onto S is written

$$P_S = \sum_k |\psi_k\rangle \langle\psi_k|$$

which translates (5.6) and (5.7).

²⁶P.A.M. Dirac, A new notation for quantum mechanics, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **35** (3) (1939), 416-418.

P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1930.

Polarized photons and qubits. The smallest non-trivial quantum system has a two-dimensional state space $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. A vector in $\mathcal{H}$ is also called *qubit*, being the building block of quantum computation.²⁷ A physical example is polarization of light. A photon may be left or right polarized, hence may be in one of the orthogonal and unitary states $|\odot\rangle$ or $|\oslash\rangle$. We may change basis, and consider horizontally or vertically polarized photons,

$$|\leftrightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\odot\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\oslash\rangle \quad \text{and} \quad |\updownarrow\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} |\odot\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\oslash\rangle ,$$

or else left-diagonal or right-diagonal polarized photons,

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\leftrightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\updownarrow\rangle \quad \text{and} \quad |\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\leftrightarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\updownarrow\rangle .$$

ex: Write the bases vectors $|\nearrow\rangle$ and $|\searrow\rangle$ in terms of the $|\odot\rangle$ and $|\oslash\rangle$.

²⁷B. Schumacher, Quantum coding, *Physical Review A* **51** (1995), 2738-2747.

6 Operadores hermíticos e unitários

ref: [Ap69] Vol 2, 5.1-10, 5.19 ; [La87] Ch. VII

6.1 Adjunto de um operador

28 mar 2023

Representação matricial de operadores em espaços euclidianos de dimensão finita. Seja $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, real ou complexo, de dimensão finita. Fixada uma base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, podemos representar, cada vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ de maneira única como combinação linear $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$, sendo as “coordenadas” de $\mathbf{x}$ os coeficientes de Fourier $x_i = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x} \rangle$, logo como o vetor coluna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

O produto escalar entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ do espaço euclidiano complexo $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ é portanto um produto linha por coluna

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i \overline{x_i} y_i = \overline{\mathbf{x}}^\top \mathbf{y}$$

do transposto conjugado do vetor coluna $\mathbf{x}$ (que é portanto um vetor linha) vezes o vetor coluna $\mathbf{y}$. Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano real, então o produto interno é simplesmente $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$.

Seja $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador linear. A imagem de cada $\mathbf{e}_j$, com $1 \leq j \leq n$, é uma combinação linear $T\mathbf{e}_j = \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i$ dos elementos da base. Os coeficientes a_{ij} são as projeções ortogonais dos $T\mathbf{e}_j$ sobre os $\mathbf{e}_i$, ou seja, os coeficientes de Fourier

$$a_{ij} := \langle \mathbf{e}_i, T\mathbf{e}_j \rangle \quad (6.1)$$

Então a matriz que representa o operador T na base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é a matriz quadrada

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

formada por estes coeficientes. De fato, a imagem do vetor $\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{e}_j$ pelo operador T é o vetor

$$T\mathbf{x} = T\left(\sum_j x_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_j x_j T\mathbf{e}_j = \sum_j x_j \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) \mathbf{e}_i$$

Em notação matricial, $T\mathbf{x}$ é representado pelo vetor coluna

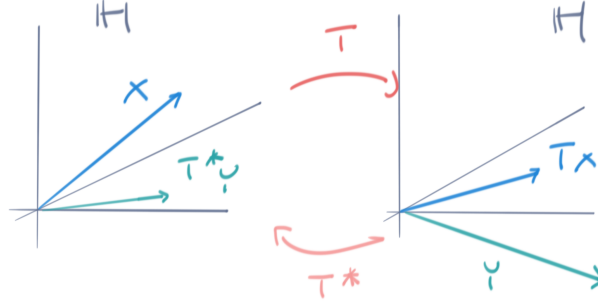
$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

As colunas da matriz A são as imagens dos vetores da base canónica pela transformação T , ou seja, a i -ésima coluna de A é o vetor coluna $T\mathbf{e}_i$.

Operador adjunto. Seja $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, real ou complexo, de dimensão finita. O *adjunto* do operador linear $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ é o único operador $T^* \in \text{End}(\mathbf{H})$ tal que

$$\langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = \langle T^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (6.2)$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$. A notação dos físicos para o operador adjunto de T é $T^\dagger$.



A prova mais simples da existência do adjunto usa coordenadas. Se o espaço é complexo, fixada uma base ortonormada, podemos considerar que $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ munido do produto hermitico $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{y}$, se representamos os vetores como vetores coluna. Seja $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ a matriz que representa o operador T na base escolhida, assim que $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Então a matriz que define o operador adjunto T^* é a matriz conjugada transposta

$$A^* := \overline{A}^\top$$

também chamada “adjunta”. De fato, como a transposição e a conjugação são involuções, e a transposição é contravariante, então

$$\bar{\mathbf{x}}^\top A = \overline{(\overline{A}^\top \mathbf{x})}^\top$$

e portanto

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \bar{\mathbf{x}}^\top A\mathbf{y} = \overline{(\overline{A}^\top \mathbf{x})}^\top \mathbf{y} = \langle A^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Se o espaço linear é real, e o operador T é definido pela matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ numa base ortonormada, então o operador adjunto T^* é definido pela matriz transposta $A^\top$.

Por outro lado, a existência do adjunto, um operador que satisfaz (6.2), em espaços euclidianos de dimensão infinita é problemática.

É imediato verificar que a operação $T \mapsto T^*$ é involutiva, ou seja,

$$(T^*)^* = T$$

que é anti-linear (linear se o espaço euclidiano é real), ou seja,

$$(T + S)^* = T^* + S^* \quad \text{e} \quad (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$$

se λ é um escalar, e que é “contra-variante”, ou seja,

$$(TS)^* = S^* T^*$$

A própria definição (6.2) implica a seguintes relações de ortogonalidade entre núcleos e imagens dos operadores T e T^* .

Teorema 6.1. *Sejam $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador definido no espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$, e T^* o seu adjunto. Então*

$$\text{Ker} T^* = (\text{Im} T)^\perp \quad \text{e} \quad \text{Im} T^* = (\text{Ker} T)^\perp$$

Demonstração. Se $\mathbf{x} \in \text{Ker} T^*$ então a (6.2) implica que $0 = \langle T^* \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T \mathbf{y} \rangle$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$. Isto significa que $\mathbf{x}$ é ortogonal a todo vetor $T \mathbf{y}$ de $\text{Im} T$, e portanto $\text{Ker} T^* \subset (\text{Im} T)^\perp$. Vice-versa, se $\mathbf{x} \in (\text{Im} T)^\perp$ então a (6.2) implica que $0 = \langle \mathbf{x}, T \mathbf{y} \rangle = \langle T^* \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$. Isto significa que $T^* \mathbf{x} = 0$, e portanto que $(\text{Im} T)^\perp \subset \text{Ker} T^*$. Estas duas inclusões provam a primeira identidade. A segunda é uma consequência. $\square$

e.g. Por exemplo, seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador definido por $T(x, y) = (3x + 2y, x - y)$. A matriz que representa T na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Então o operador adjunto T^* é definido pela matriz transposta

$$A^\top = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e portanto é $T^*(x, y) = (3x + y, 2x - y)$.

Por outro lado, seja $L : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ o operador definido por $L(x, y) = (x - iy, x + 2iy)$. A matriz que representa L na base canônica é

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$$

Então o operador adjunto T^* é definido pela matriz transposta conjugada

$$B^* = \overline{B}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -2i \end{pmatrix}$$

e portanto é $T^*(x, y) = (x + y, ix - 2iy)$.

ex: Mostre que $\text{Ker}(T^*T) = \text{Ker} T$ e que $\text{Im}(TT^*) = \text{Im} T$.

ex: Se T é invertível, então $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

ex: Um subespaço $V \subset \mathbf{H}$ é invariante para o operador T sse o subespaço ortogonal $V^\perp$ é invariante para o operador adjunto T^* .

ex: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x + y, y)$. Calcule T^* .

ex: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x, -y)$. Calcule T^* .

ex: Considere o operador linear $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por $T(x, y) = (ix - y, x + iy)$. Calcule T^* , T^*T e TT^* .

ex: Calcule a adjunta das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ -1+5i & 3-2i \end{pmatrix}$$

Adjoints. A more conceptual and general definition of an adjoint, free of coordinates, is as follows. Consider two euclidean spaces of finite dimension $\mathbf{E}$ and $\mathbf{F}$ (both real or complex), equipped with the inner products $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{F}}$, respectively. Let $\pi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^*$ and $\pi' : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^*$ be the anti-linear isomorphisms defined by $\pi(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle_{\mathbf{E}}$ and $\pi'(\mathbf{y}) := \langle \mathbf{y}, \cdot \rangle_{\mathbf{F}}$, respectively, according to Riesz representation theorem 5.2. Given a linear map $L : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$, we may consider its dual map $L^\top : \mathbf{F}^* \rightarrow \mathbf{E}^*$, defined by $L^\top \xi := \xi \circ L$ if $\xi \in \mathbf{F}^*$ (the dual map is also often denoted by the same symbol as the adjoint map). The *adjoint* of L is the map $L^* : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E}$ is defined as the composition

$$L^* := \pi^{-1} \circ L^\top \circ \pi'$$

It is clear that L^* is linear, being the composition of a linear and two anti-linear maps. It is also a simple exercise to verify that it satisfies the defining identity

$$\langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle_{\mathbf{F}} = \langle T^*\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{E}}$$

for $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ and $\mathbf{y} \in \mathbf{F}$, which amounts to (6.2) when $\mathbf{E} = \mathbf{F}$.

Deslocamentos. Um espaço euclidiano de dimensão infinita importante é o espaço ℓ^2 das sequências complexas (sinais discretos) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ de “energia” finita $\|\mathbf{x}\|^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, munido do produto interno

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} y_k$$

Os deslocamento esquerdo e direito são os operadores limitados

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots) \quad \text{e} \quad R(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots), \quad (6.3)$$

respetivamente. É imediato verificar que $R = L^*$.

6.2 Operadores auto-adjuntos

Operadores auto-adjuntos. Seja $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, real ou complexo. Um operador $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é dito *auto-adjunto* ou *hermítico* (em inglês, *self-adjoint* ou *hermitian*) se

$$\langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = \langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (6.4)$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$, ou seja, se existe o operador adjunto T^* e se $T^* = T$ (mas observe que para definir um operador auto-adjunto não é necessário definir o adjunto de um operador!).

Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, e se $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador T numa base ortonormada, então T é auto-adjunto sse a matriz é *hermítica*, ou seja, satisfaz

$$\overline{A}^\top = A$$

em coordenadas, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano real $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ é também dito *simétrico*, pois é representado, numa base ortonormada, por uma matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ que é *simétrica*, ou seja, tal que

$$A^\top = A$$

em coordenadas, $a_{ij} = a_{ji}$.

Um operador (auto-adjunto ou não) $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ define uma “forma quadrática”

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$$

ou seja, uma função tal que $\mathcal{Q}(\lambda\mathbf{x}) = |\lambda|^2 \mathcal{Q}(\mathbf{x})$ para todo escalar λ . Se T é um operador simétrico de um espaço euclidiano real, então a função $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ é chamada *energia* do operador T ou da matriz A que o representa numa base ortonormada (pensando nas pequenas oscilações de um sistema mecânico em torno de um mínimo local da energia potencial com matriz Hessiana A). Se T é um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano complexo, e se o vetor $\mathbf{x}$ é unitário, então o escalar $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$ é também chamado *valor médio* de T sobre $\mathbf{x}$ (na notação de Dirac da mecânica quântica, o valor médio do “observável” T sobre o estado unitário $|\psi\rangle$ é o escalar $\langle \psi | T | \psi \rangle$, a média esperada das observações de T num número grande de experiências repetidas).

Valores próprios de operadores auto-adjuntos. Se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio com valor próprio λ do operador T , ou seja, $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, então $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \lambda\|\mathbf{v}\|^2$, e portanto o valor próprio é dado pela expressão

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}. \quad (6.5)$$

Se T é auto-adjunto, também $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda}\|\mathbf{v}\|^2$, e portanto $\lambda = \bar{\lambda}$. Ou seja,

Teorema 6.2. *Os valores próprios de um operador auto-adjunto são reais.*

De fato, os operadores auto-adjuntos de um espaço euclidiano complexo podem ser caracterizados pela propriedade de ter valores médios, e a fortiori valores próprios, reais.

Teorema 6.3. *O único operador $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano complexo que tem valores médios nulos $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ é o operador trivial $T = 0$.*

Demonstração. É um exercício verificar que um operador genérico satisfaz a *identidade de polarização*

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle - \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle = 2(\langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle) \quad (6.6)$$

Consequentemente, se os valores médios do operador T são nulos, então

$$0 = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle$$

Se substituirmos o vetor $\mathbf{y}$ com o vetor $i\mathbf{y}$ (o que é possível apenas quando o espaço é complexo), o mesmo cálculo diz que

$$0 = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, T\mathbf{x} \rangle$$

Consequentemente, $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = 0$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$, e portanto $T\mathbf{y} = 0$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$, assim que T é operador nulo. $\square$

Teorema 6.4. *Um operador $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita é auto-adjunto sse o valor médio $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$ é real para todos os $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$.*

Demonstração. Se T é auto-adjunto, então $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle}$. Vice-versa, se $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle$ é real para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, então

$$\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle} = \langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*\mathbf{v} \rangle$$

ou seja, $\langle \mathbf{v}, (T - T^*)\mathbf{v} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. O teorema 6.3 então implica que $T = T^*$. $\square$

Em geral, vetores próprios que correspondem a valores próprios distintos são linearmente independentes. No caso de operadores auto-adjuntos é possível dizer mais.

Teorema 6.5. *Vetores próprios com valores próprios distintos de um operador auto-adjunto são ortogonais.*

Demonstração. Se $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e $T\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$, com λ e μ reais e $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ diferentes de zero, então $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle$ implica que $(\lambda - \mu)\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. Portanto, se $\lambda \neq \mu$ então $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. $\square$

e.g. Operadores simétricos do plano. O operador simétrico genérico de $\mathbb{R}^2$ é definido, na base canónica, pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são

$$\lambda_{\pm} = \frac{a+c}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Um caso particular é quando o traço é nulo, ou seja, $c = -a$, e portanto os valores próprios são opostos, $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$. Neste caso, se $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ (caso contrário A é a matriz nula), então

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

para algum ângulo θ . O operador é portanto uma reflexão ao longo da reta $(\cos \theta)y = (\sin \theta)x$ seguida por uma homotetia de razão ρ .

ex: A identidade é um operador auto-adjunto.

ex: Um operador auto-adjunto L num espaço euclidiano de dimensão um $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ é uma homotetia $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

ex: Se T é auto-adjunto, então também αT , com α real, é autoadjunto. Se T e S são auto-adjuntos, então também $\alpha T + \beta S$, com α e β reais, é auto-adjunto.

ex: Se T é auto-adjunto, então também as potências T^n , com $n = 1, 2, \dots$, são operadores auto-adjuntos. Consequentemente, se $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ é um polinómio com coeficientes reais, então o operador $p(T) := a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0$ é auto-adjunto.

ex: Se T é auto-adjunto e invertível, então o inverso T^{-1} é também auto-adjunto.

ex: Se $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é auto-adjunto e $V \subset \mathbf{H}$ é um subespaço invariante (por exemplo, o espaço próprio $V_{\lambda} = \ker(\lambda - T)$ dos vetores $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ tais que $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$), então também o complemento ortogonal $V^{\perp}$ é invariante.

ex: Sejam T e S dois operadores hermíticos de um espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Em geral, a composição TS não é hermítico (dê exemplos). A composição TS é um operador hermítico sse T e S comutam, ou seja, se $TS = ST$.

ex: Dado um operador linear arbitrário $T \in \text{End}(\mathbf{E})$ num espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{E}$, o operador $P = T^*T$ é auto-adjunto. Se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de P com valor próprio λ , que é real, então $\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle = \lambda \|\mathbf{v}\|^2$, mas também $\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*T\mathbf{v} \rangle = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \|T\mathbf{v}\|^2$. Consequentemente, $\lambda \geq 0$.

ex: Verifique a identidade (6.6).

ex: A inversão $T(x, y, z) = (-x, y, z)$ relativamente ao plano y - z é simétrica? E a inversão relativamente a um plano genérico de $\mathbb{R}^3$ passando pela origem?

ex: Seja $S \subset \mathbf{H}$ um subespaço de dimensão finita do espaço euclidiano $\mathbf{H}$, e seja $P \in \text{End}(\mathbf{H})$ a projeção ortogonal sobre S , definida por

$$P\mathbf{v} := \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_2 + \dots + \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_n$$

se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada de S . Os valores próprios de P são 1 e 0, e os espaços próprios são S e $S^{\perp}$, respetivamente. Mostre que P é auto-adjunto, e portanto satisfaz $P^2 = P = P^*$.

Operadores auto-adjuntos em dimensão infinita. Quando o espaço euclidiano $\mathbf{H}$ tem dimensão infinita, operadores lineares interessantes podem ser definidos apenas em subespaços próprios $\mathbf{D}(L) \subset \mathbf{H}$ (chamado “domínio” do operador), ou seja, são transformações lineares $L : \mathbf{D}(L) \rightarrow \mathbf{H}$. Quando $\mathbf{H}$ é um espaço de Hilbert, um operador é dito *simétrico* ou *hermítico* se $\langle L\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}(L)$ (e tipicamente é pedido que o domínio seja denso em $\mathbf{H}$).

O termo *auto-adjunto* é reservado a operadores que estão definidos em todo o espaço de Hilbert, e que satisfazem $\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$. Acontece que tais operadores são também “limitados”, ou seja, satisfazem $\|T\mathbf{v}\| \leq K \|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ e algum número minimal $K := \|T\| < \infty$ chamado “norma” do operador T . De fato, a palavra *operator* é usualmente referida apenas a tais operadores limitados, e o termo *operador ilimitado* é usado nos outros casos.

Vice-versa, todo operador limitado $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ admite um operador adjunto T^* , definido, como no caso de dimensão finita, pela identidade $\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T^*\mathbf{y} \rangle$ (a sua existência, que não é evidente, segue do teorema de representação de Riesz). Assim, ser auto-adjunto é equivalente a $T = T^*$, como em dimensão finita.

No entanto, operadores diferenciais, assim como praticamente todos os operadores de interesse físico (posição, momento linear, energia, ...), não são limitados! A teoria dos operadores ilimitados hermíticos é muito mais delicada ...

6.3 Operadores normais

Operadores hemi-hermíticos. Um operador $S : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, definido num espaço euclidiano complexo $\mathbf{H}$, é dito *hemi-hermítico* ou *anti-hermítico* (em inglês, *skew-hermitian*) se

$$\langle \mathbf{x}, S\mathbf{y} \rangle = -\langle S\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (6.7)$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$. É claro que $S = iT$ é hemi-hermítico sse $T = -iS$ é hermítico. Em particular, pelo teorema 6.4, os valores próprios de um operador hemi-hermítico num espaço euclidiano complexo são imaginários puros, ou seja, estão no eixo imaginário $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Em dimensão finita, quando é possível definir o adjunto de todo operador, S é hemi-hermítico sse $S^* = -S$.

Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ é um espaço euclidiano complexo de dimensão finita, e se $B = (b_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador S numa base ortonormada, então S é hemi-hermítico se $B^* = -B$, ou seja, $b_{ij} = -\overline{b_{ji}}$. Observe que os elementos diagonais satisfazem $b_{ii} = -\overline{b_{ii}}$, e portanto são imaginários puros.

Um operador definido em um espaço euclidiano real que satisfaz (6.7) é dito *anti-simétrico*, pois a sua matriz B numa base ortonormada é *anti-simétrica*, ou seja, satisfaz $B^\top = -B$. Neste caso, os elementos diagonais são necessariamente nulos.

e.g. Por exemplo, o operador $L : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, definido por $L(x, y) = (2ix + iy, ix + 3iy)$, ou seja, pela matriz

$$\begin{pmatrix} 2i & i \\ i & 3i \end{pmatrix}$$

é anti-hermítico. Observe que $L = iM$, se $M : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é o operador hermítico $M(x, y) = (2x + y, x + 3y)$.

Operadores normais. Assim como cada número complexo é uma soma $z = x + iy$ de um número real e de um número imaginário puro, cada operador $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita pode ser decomposto, de maneira única, como soma

$$T = X + iY$$

de um operador hermítico X e um operador hemi-hermítico iY , ou seja, i vezes um operador hermítico Y . Basta escolher

$$X = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{e} \quad Y = \frac{1}{2i}(T - T^*) .$$

Observe que então o adjunto de $T = X + iY$ é

$$T^* = X - iY$$

Esta fórmula, que lembra a fórmula que define o conjugado de um número complexo, diz que os operadores auto-adjuntos X e Y são moralmente a parte real e a parte imaginária do operador T .

O operador T é *normal* se comuta com o próprio adjunto, ou seja, se

$$TT^* = T^*T$$

É imediato verificar que $[T, T^*] = 2i[Y, X]$. Consequentemente, o operador $T = X + iY$ é normal sse X e Y comutam, ou seja, $XY = YX$.

ex: Se S é um operador anti-simétrico de um espaço vetorial real $\mathbf{E}$, então $\langle \mathbf{x}, S\mathbf{x} \rangle = 0$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. Em particular, S não pode ter valores próprios diferentes de zero.

ex: Se S é um operador hemi-hermítico, então as potências pares S^{2k} são hermíticas e as potências ímpares S^{2k+1} são hemi-hermíticas.

ex: [Ap69] Vol. 2 5.5.

Multiplicação e derivadas. Seja $\mathbf{E}$ o espaço das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, munido do produto escalar $\langle f, g \rangle := \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$.

Toda função contínua $m(t)$ induz um *operador multiplicação* $M \in \text{End}(\mathbf{E})$, definido por

$$(Mf)(t) := m(t) f(t)$$

(esta fórmula lembra a ação de uma matriz diagonal, que envia o vetor de coordenadas x_k no vetor de coordenadas $m_k x_k$). É claro que $\langle f, Mg \rangle = \langle Mf, g \rangle$ para todo $f, g \in \mathbf{E}$, ou seja, M é auto-adjunto, se a função $m(t)$ tem valores reais. Num certo sentido preciso, estes são os modelos dos operadores auto-adjuntos.

Operadores diferenciais apenas podem operar em domínios mais restritos, por exemplo nos subespaços $\mathbf{E}^k \subset \mathbf{E}$ das funções que admitem $k = 1, 2, \dots$, ou ∞ derivadas contínuas. Nestes domínios, é possível definir o *operador derivada*

$$(Df)(t) := f'(t),$$

as suas potências D^k , e portanto polinómios $L = \sum_{k=0}^N a_k D^k$, chamados operadores diferenciais com coeficientes constantes. Uma integração por partes implica a identidade

$$\langle f, Dg \rangle = f(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g(a)} - \langle Df, g \rangle$$

Ao escolher “condições de fronteira” apropriadas, por exemplo ao restringir o operador D ao subespaço $\mathbf{E}_0^\infty \subset \mathbf{E}^\infty$ das funções tais que $f(a) = f(b)$, o operador D é anti-simétrico, e portanto o operador *momento* $P := -iD$ é simétrico. Também importante é o *laplaciano* $\Delta := D^2$, que é simétrico se definido em $\mathbf{E}_0^\infty$.

ex: Seja $P : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ o *operador primitivação*, definido por

$$(Pf)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Mostre que é anti-simétrico se definido no núcleo $\ker(I)$ da forma linear $I(f) := \int_a^b f(t) dt$.

ex: Dada uma função contínua $q(t)$ e uma função derivável $p(t)$, considere, no subespaço $\mathbf{E}_p^2 \subset \mathbf{E}^2$ das funções duas vezes deriváveis que satisfazem a condição de fronteira $p(a)f(a) = p(b)f(b) = 0$, o *operador de Sturm-Liouville* $L : \mathbf{E}_p^2 \rightarrow \mathbf{E}$, definido por

$$Lf := (pf')' + qf.$$

Por exemplo, se $q = 0$ e $p = 1$, então $L = \Delta$, o laplaciano. Mostre que L é simétrico.

6.4 Operadores unitários/ortogonais

Isometrias lineares. Seja $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, real ou complexo. Um operador $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é uma *isometria (linear)* se preserva os produtos escalares, ou seja, se

$$\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (6.8)$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$. Esta condição implica (e, pelas identidades de polarização (5.1) ou (5.2) é equivalente) que o operador preserva as normas, ou seja,

$$\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \quad (6.9)$$

para todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$. Em particular, uma isometria é injetiva, logo invertível na sua imagem. É também claro que uma isometria envia um sistema ortonormado num sistema ortonormado, pois preserva normas e ortogonalidade.

Se U^* denota o operador adjunto (que existe também em dimensão infinita, pois as isometrias são limitadas), então U é uma isometria sse $\langle U^*U\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, e portanto, pela arbitrariedade de $\mathbf{y}$, sse

$$U^*U = I \quad (6.10)$$

Valores e vetores próprios de isometrias. Se λ é um valor próprio da isometria U , ou seja, $U\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para algum vetor não nulo $\mathbf{v}$, então

$$|\lambda|^2 \|\mathbf{v}\|^2 = \langle U\mathbf{v}, U\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2$$

Consequentemente,

Teorema 6.6. *Os valores próprios de uma isometria U estão na circunferência unitária $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, ou seja, têm valor absoluto $|\lambda| = 1$. Em particular, uma isometria de um espaço euclidiano real só pode ter valores próprios ± 1 .*

Particularmente importante é o valor próprio 1, quando existir. Os vetores do espaço próprio $\mathbf{H}_1 = \text{Ker}(1 - U)$ são os “pontos fixos” da transformação U , pois satisfazem

$$U\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

As isometrias partilham os pontos fixos com a própria adjunta.

Teorema 6.7. *Se U é uma isometria, então $U\mathbf{x} = \mathbf{x}$ sse $U^*\mathbf{x} = \mathbf{x}$.*

Demonstração. Uma implicação é evidente, pois se $U\mathbf{x} = \mathbf{x}$ então $\mathbf{x} = U^*U\mathbf{x} = U^*\mathbf{x}$ pela (6.10). Por outro lado, se $U^*\mathbf{x} = \mathbf{x}$, então

$$\begin{aligned} \|U\mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 &= \langle U\mathbf{x} - \mathbf{x}, U\mathbf{x} - \mathbf{x} \rangle = \|U\mathbf{x}\|^2 - \langle U\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, U\mathbf{x} \rangle + \|\mathbf{x}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, U^*\mathbf{x} \rangle - \langle U^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \|\mathbf{x}\|^2 = 0 \end{aligned}$$

pela (6.9), e portanto também $U\mathbf{x} = \mathbf{x}$. □

Também é interessante observar que $\mathbf{H}_1^\perp = \text{Im}(1 - U)$, consequência da identidade

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} - U\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} - U^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

e do teorema 6.7. Em particular, pelo menos em dimensão finita, o espaço total é uma soma direta ortogonal

$$\mathbf{H} = \text{Ker}(1 - U) \oplus \text{Im}(1 - U)$$

do espaço próprio com valor próprio 1 e da imagem de $1 - U$.

Operadores unitários/ortogonais. Um operador $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é dito *unitário* se é uma isometria sobrejetiva, logo bijetiva. Isto significa que

$$\boxed{U^*U = UU^* = I} \quad (6.11)$$

ou seja que $U^{-1} = U^*$. Um operador unitário de um espaço euclidiano real é também dito *ortogonal*.

Se $\mathbf{H}$ é um espaço euclidiano de dimensão finita, então toda a isometria é unitária, pois envia uma base (finita) ortonormada numa base ortonormada, e portanto é bijetiva. Vice-versa, se $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ são duas bases ortonormadas do espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$, então o operador $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, definido por $U(\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_k$, é unitário.

Se o espaço $\mathbf{H}$ é complexo, logo isomorfo a $\mathbb{C}^n$, então a matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ que define um operador unitário numa base ortonormada é uma *matriz unitária*, ou seja, uma matriz que satisfaz

$$A^*A = I = AA^* \quad (6.12)$$

ou também $A^{-1} = A^*$. Se $\mathbf{u}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$ denota o vetor cujas coordenadas formam a k -ésima coluna da matriz A , então o elemento ij da matriz produto A^*A é igual ao produto escalar $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$. Portanto, a primeira das equações (6.12) diz que as colunas de A , as imagens dos vetores da base canônica de $\mathbb{C}^n$, formam uma base ortonormada. Da mesma forma, a segunda das equações (6.12) diz que as linhas de A formam uma base ortonormada.

Se o espaço $\mathbf{H}$ é real, logo isomorfo a $\mathbb{R}^n$, então a matriz A que define um operador ortogonal numa base ortonormada é uma *matriz ortogonal*, ou seja, uma matriz que satisfaz

$$A^\top A = I = AA^\top \quad (6.13)$$

ou também $A^{-1} = A^\top$.

O determinante de uma matriz A que define um operador unitário numa base ortonormada satisfaz

$$1 = \text{Det}(A^*) \text{Det}(A) = |\text{Det} A|^2$$

e portanto assume valores na circunferência unitária do plano complexo. Em particular, o determinante de uma matriz que define um operador ortogonal é igual a ± 1 , os pontos reais da circunferência unitária.

e.g. Operadores ortogonais no plano. Exemplos de operadores ortogonais de $\mathbb{R}^2$ são reflexões e rotações. Toda matriz ortogonal $O \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ com determinante $\text{Det} O = 1$ é da forma

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

para algum ângulo θ , ou seja, é uma rotação (anti-horária) de um ângulo θ . Por outro lado, se a matriz ortogonal A tem $\text{Det} A = -1$, então a matriz AJ tem $\text{Det}(AJ) = 1$, onde

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz que define a reflexão no eixo dos x . Consequentemente, toda matriz ortogonal é da forma R_θ ou

$$R_\theta J = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

para algum ângulo θ , dependendo se o seu determinante é ± 1 .

e.g. Matrizes de Pauli. A identidade I é uma raiz quadrada da identidade I , mas não é a única. As *matrizes de Pauli* são as matrizes auto-adjuntas e unitárias com traço nulo

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

São utilizadas para descrever a interação de uma partícula quântica de spin $1/2$ com o campo eletromagnético, no regime não relativístico.

É imediato verificar que $\text{Det} \sigma_i = -1$ e $\text{Tr} \sigma_i = 0$. Também

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = I$$

É usual também chamar $\sigma_0 = I$ a matriz identidade de ordem 2. Assim, as matrizes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ formam uma base do espaço linear real das matrizes complexas hermiticas 2×2 .

ex: Determine os valores próprios e os vetores próprios das matrizes de Pauli (6.14).

ex: Mostre que um operador $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano é uma isometria sse envia vetores unitários em vetores unitários (ou seja, envia a esfera unitária na esfera unitária), ou seja, se $\|\mathbf{u}\| = 1$ implica $\|U\mathbf{u}\| = 1$.

ex: Sejam $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ duas bases ortonormadas do espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$, e seja $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ o operador tal que $U(\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$. Mostre que U é unitário.

ex: Verifique que se A é a matriz que define uma transformação unitária $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, então as suas colunas são vetores de uma base ortonormada de $\mathbb{C}^n$.

ex: As translações $T_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ são “isometrias” do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, no sentido em que preservam as distâncias (pois $\|T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$), mas não são transformações lineares, se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

ex: Se $V \subset \mathbf{H}$ é um subespaço invariante para o operador unitário $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, então também o subespaço ortogonal $V^\perp$ é invariante.

ex: Se T e S são operadores unitários/ortogonais de um espaço euclidiano complexo/real, então também T^{-1} e TS são unitários/ortogonais.

ex: Seja T um operador unitário de um espaço euclidiano complexo. Para quais valores do escalar λ o operador λT é também unitário? Mesma pergunta no caso de um operador ortogonal definido num espaço euclidiano real.

ex: Se T e S são operadores unitários, então também $T + S$ é unitário?

ex: Os operadores unitários de $\mathbb{C}$ são os (operadores multiplicação por) números complexos de módulo um, i.e. $e^{i\theta}$ com θ real. Os operadores ortogonais de $\mathbb{R}$ são os (operadores multiplicação por) números ± 1 .

ex: Em dimensão infinita existem isometrias não sobrejetivas, e portanto não unitárias. Por exemplo, o deslocamento direito $R : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, definido em (6.3), é uma isometria. O operador adjunto é o deslocamento esquerdo L , que claramente satisfaz $LR = I$. Neste caso R não é sobrejetivo, e L não é injetivo.

ex: [Ap69] Vol. 2 5.11.

Transformações de Cayley. A transformação de Cayley

$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

é um automorfismo da esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Em particular, envia o semi-plano superior $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \Im(z) > 0\}$ no disco unitário $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < 1\}$, e a “circunferência” $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \bar{\mathbb{C}}$ na circunferência unitária $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$. Esta ideia admite muitas generalizações.

Por exemplo, se S é uma matriz hemi-hermítica (ou anti-simétrica, se real), e portanto os seus valores próprios são imaginários puros, então $I \pm S$ são invertíveis e comutam. Em uma base ortonormada em que S é diagonal, $I \pm S$ são diagonais com valores próprios correspondentes (i.e. associados aos mesmos vetores próprios) da forma $1 \pm it$ com t real, ou seja, complexos conjugados. Mas os quocientes $(1 - it)/(1 + it)$ são unitários. Consequentemente, a transformada de Cayley²⁸

$$U := (I - S)(I + S)^{-1}$$

é uma matriz unitária (respetivamente, ortogonal).

ex: Mostre que se U é uma matriz unitária e se $I + U$ é invertível (i.e. se U não tem valor próprio -1) então $S = (I - U)(I + U)^{-1}$ é hemi-hermítica.

ex: Mostre que se A é uma matriz auto-adjunta então $U = (A - iI)^{-1}(A + iI)$ é unitária.

Operador de Koopman e von Neumann. O fluxo de um sistema hamiltoniano preserva a medida de Liouville no espaço de fases. Em termos abstratos, um sistema conservativo consiste numa transformação $T : X \rightarrow X$ (ou grupo de transformações dependendo de um parâmetro) definida num espaço de fases X (tipicamente $X \approx \mathbb{R}^n$), e uma “medida invariante” μ , tal que $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ para todo conjunto mensurável $A \subset X$. Para simplificar, podemos assumir que μ é uma medida de probabilidades, assim que $\mu(X) = 1$. A ideia de Koopman²⁹ e von Neumann³⁰ é definir um espaço euclidiano $\mathbf{H}$ das funções mensuráveis $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ de quadrado integrável $\int_X |\varphi(x)|^2 d\mu(x) < \infty$, munido do produto escalar $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_X \overline{\varphi(x)} \psi(x) d\mu(x)$. A transformação T então permite definir um operador de evolução $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ por meio de

$$(U\varphi)(x) := \varphi(T(x)) \tag{6.15}$$

A invariância da medida implica que U é uma isometria. De fato, se φ é a função característica do evento $A \subset X$, então $\varphi(T(x)) = 1$ sse $T(x) \in A$, logo sse $x \in T^{-1}(A)$, e portanto

$$\|U\varphi\|^2 = \int_X |\varphi(T(x))|^2 d\mu(x) = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) = \|\varphi\|^2$$

O caso geral vem da própria definição de integral de Lebesgue. Se a transformação T é invertível, então U é um operador unitário. Assim, a dinâmica, tipicamente “não-linear”, das equações de Hamilton num espaço de fases de dimensão finita é codificada num operador “linear” de um espaço euclidiano de dimensão infinita. A estrutura do operador U , os seus valores próprios, ..., contém informações sobre algumas das propriedades qualitativas da dinâmica da transformação T .

²⁸A. Cayley, Sur quelques propriétés des déterminants gauches, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **32** (1846), 119-123.

²⁹B.O. Koopman, Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Space, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **17** (1931), 315-318.

³⁰J. von Neumann, Zur Operatorenmethode In Der Klassischen Mechanik, *Annals of Mathematics* **33** (1932), 587-642.

7 Teorema espectral

ref: [Ap69] Vol 2, 5.6, 5.11, 5.20 ; [La87] Ch. VIII

7.1 Operadores diagonalizáveis

18 abr 2023

Operadores diagonalizáveis. O operador $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, definido num espaço vetorial de dimensão finita $\mathbf{V}$, real ou complexo, é *diagonalizável* se existir uma base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ de $\mathbf{V}$ formada por vetores próprios de L . Isto significa que a matriz que representa o operador nesta base é a matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

onde os $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios, tais que $L\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k$. Se A é a matriz que representa o operador L na base canónica de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (ou em qualquer outra base), então $A = G\Lambda G^{-1}$, onde G é a matriz mudança de coordenadas, cujas colunas são os vetores próprios representados na base canónica.

Os valores próprios de um operador $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ são as raízes do polinómio característico $c_A(z) = \text{Det}(zI - A)$, que é um polinómio mónico de grau n . Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinómio característico fatora-se como produto $c_A(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$ de n raízes complexas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. É razoável pensar que um operador “genérico” seja diagonalizável, pois estas raízes são distintas, e porque vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes. Por outro lado, nas aplicações estamos interessados em certos tipos de operadores, a menos de perturbações que não são genéricas. É importante portanto ter critérios para decidir quais operadores são diagonalizáveis.

Semi-simplicidade. A caracterização algébrica do algoritmo indutivo que permite diagonalizar operadores é a seguinte. Um operador $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ é dito *semi-simples* se todo subespaço invariante $E \subset \mathbf{V}$ admite um complementar invariante, ou seja, um subespaço invariante $F \subset \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{V} = E \oplus F$.

Teorema 7.1. *Um operador $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ de um espaço vetorial complexo de dimensão finita é diagonalizável sse é semi-simples.*

Demonstração. Fixada uma base, podemos assumir que $\mathbf{V} \approx \mathbb{C}^n$. Pelo teorema 14.2 em [Co22] (consequência do teorema fundamental da álgebra) o operador admite um vetor próprio $\mathbf{v}$, logo um subespaço invariante de dimensão um $E = \mathbb{C}\mathbf{v}$. Se o operador é semi-simples, então o espaço é uma soma direta $\mathbb{C}^n = E \oplus F$, onde $F \approx \mathbb{C}^{n-1}$ é um subespaço invariante de dimensão $n - 1$. A implicação $\Rightarrow$ segue portanto por indução, sendo trivial em dimensão um. A implicação contrária $\Leftarrow$ é óbvia, pois subespaços invariantes de operadores diagonalizáveis são gerados por vetores próprios. $\square$

Diagonalização em espaços euclidianos. O teorema espectral, nas suas diferentes versões, aborda um problema mais específico no contexto dos espaços euclidianos. Decidir quais operadores $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano $\mathbf{H}$ admitem uma base ortonormada de vetores próprios, e portanto, se o espaço tem dimensão finita, são representados nesta base ortonormada por uma matriz diagonal (7.1).

A resposta, em dimensão finita, é a classe dos operadores normais, os operadores que comutam com o próprio adjunto (isto é claramente o caso das matrizes diagonais). Esta classe contém as subclasses importantes dos operadores auto-adjuntos e dos operadores unitários, que têm valores próprios reais ou unitários, respetivamente. O caso dos operadores simétricos definidos num espaço

real, que essencialmente implica os outros, é devido a Cauchy³¹, e foi motivado pelo problema de descrever as pequenas oscilações de sistemas mecânicos em torno de uma posição de equilíbrio (tratado na próxima seção 8).

Além de um argumento indutivo, que usa as propriedades geométricas dos operadores normais ou auto-adjuntos, o ingrediente principal da prova clássica do teorema espectral é a existência de pelo menos um valor próprio. Aqui é onde é preciso utilizar alguma análise, na forma do teorema fundamental da álgebra, ou na forma aparentemente mais simples do teorema de Weierstrass (uma função contínua definida num compacto atinge o seu máximo) juntamente com mais algum cálculo em várias variáveis.

O caso de dimensão infinita é muito mais delicado, e é importante na análise das equações diferenciais parciais e portanto na física dos campos. Este caso é tratado em manuais mais avançados de análise funcional (por exemplo, Reed e Simon, ...).

7.2 Teorema espectral para operadores auto-adjuntos

Teorema espectral para operadores auto-adjuntos. A semi-simplicidade dos operadores auto-adjuntos é consequência da seguinte observação, cuja prova é elementar.

Teorema 7.2. *Seja $L : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano $\mathbf{H}$. Um subespaço $V \subset \mathbf{H}$ é invariante sse o subespaço ortogonal $V^\perp$ é invariante.*

Demonstração. Se V é invariante, $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in V^\perp$, então $\langle \mathbf{v}, L\mathbf{w} \rangle = \langle L\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ porque também $L\mathbf{v} \in V$, e portanto $L\mathbf{w} \in V^\perp$. Vice-versa, se $V^\perp$ é invariante, $\mathbf{w} \in V^\perp$ e $\mathbf{v} \in V$, então $\langle L\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, L\mathbf{w} \rangle = 0$ porque também $L\mathbf{w} \in V^\perp$, e portanto $L\mathbf{v} \in V^\perp$. $\square$

O teorema espectral para operadores auto-adjuntos, ou simétricos no caso real, é o seguinte.

Teorema 7.3 (teorema espectral). *Seja L é um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$. Existe uma base ortonormada de $\mathbf{H}$ formada por vetores próprios de L , com valores próprios reais.*

Demonstração. A prova é por indução sobre a dimensão. O resultado é trivial num espaço de dimensão um, ou seja, quando $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}$, onde um operador auto-adjunto é uma homotetia real. Seja $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$. Pelo teorema 14.2 em [Co22] (consequência do teorema fundamental da álgebra), o operador L admite um vetor próprio $\mathbf{v}$, que podemos assumir unitário, com valor próprio λ , que é real pelo teorema 6.4. Pelo teorema 7.2, o espaço ortogonal $\mathbf{v}^\perp \approx \mathbb{C}^{n-1}$ é um subespaço invariante, e a restrição de L a este subespaço é ainda um operador auto-adjunto. Pela hipótese indutiva, existe uma base ortonormada de vetores próprios da restrição de L a $\mathbf{v}^\perp$, com valores próprios reais. Então o vetor $\mathbf{v}$ completa esta base a uma base ortonormada de $\mathbf{H}$, formada por vetores próprios de A com valores próprios reais. $\square$

Estrutura dos operadores auto-adjuntos. Seja L um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$. Fixada uma base ortonormada, podemos pensar que o espaço é $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$, e o operador é representado pela matriz auto-adjunta $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ ou $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ (simétrica no caso real). O teorema espectral 7.3 diz que existe uma base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ formada por vetores próprios, com valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (não necessariamente distintos), assim que

$$L\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \quad (7.2)$$

³¹A.L. Cauchy, Sur l'équation à l'aide de laquelle on determine les inégalités séculaires des mouvements des planètes, *Exercices de Mathématiques* 4 (1829), 140-160.

A matriz que representa o operador L nesta base é a matriz diagonal (7.1). Se U denota a matriz unitária cujas colunas são os vetores $\mathbf{u}_k$'s, então

$$A = U \Lambda U^*.$$

Se o espaço é real, a matriz U é ortogonal, e esta fórmula é simplesmente $A = U \Lambda U^\top$.

Se representamos um vetor genérico como soma $\mathbf{x} = \sum_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_k$ e usamos a (7.2), observamos que o operador L é uma sobreposição

$$L\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_k,$$

de projeções ortogonais sobre as retas geradas pelos vetores próprios pesadas com os valores próprios.

Também é possível juntar os valores próprios repetidos, e considerar o “espectro” do operador, o conjunto formado pelos valores próprios, distintos e reais $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ (com $m \leq n$). O espaço é uma soma direta ortogonal $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{H}_m$ de espaços próprios $\mathbf{H}_k = \ker(\mu_k - A)$. As dimensões $d_k = \dim \mathbf{H}_k$ satisfazem $\sum_{k=1}^m d_k = n$. O operador é uma soma direta de homotetias

$$L = \mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \dots \oplus \mu_m$$

Se $P_k : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ denota a projeção ortogonal sobre o espaço próprio $\mathbf{H}_k$, então o operador é uma sobreposição

$$L = \sum_{k=1}^m \mu_k P_k$$

das projeções ortogonais P_k 's pesadas com os valores próprios μ_k 's. Isto significa que, numa base ortonormada formada pelas bases ortonormadas dos $\mathbf{H}_k$'s, o operador é representado pela matriz diagonal em blocos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mu_1 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_m I \end{pmatrix}$$

onde o k -ésimo bloco é μ_k vezes a matriz identidade de dimensão d_k . O polinómio característico da matriz que representa o operador é $(z - \mu_1)^{d_1} (z - \mu_2)^{d_2} \dots (z - \mu_m)^{d_m}$. Em particular, a multiplicidade geométrica d_k de cada valor próprio μ_k é igual a sua multiplicidade algébrica.

O “teorema fundamental da álgebra” (o resultado de análise que diz que um polinómio não constante tem pelo menos uma raiz no plano complexo) foi utilizado, na prova do teorema espectral, para deduzir a existência de pelo menos um valor próprio. Pode ser substituído pelo teorema de Weierstrass, que afirma que uma função contínua num compacto admite um máximo, e um pouco de cálculo vetorial elementar. Esta ideia, e portanto uma prova alternativa do teorema espectral, é utilizada na caracterização dos valores próprios mínimo e máximo de Rayleigh e Ritz (na próxima seção 8).

e.g. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

define, na base canónica, um operador simétrico $L(x, y) = (y, x)$ do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Os valores próprios são $\lambda_{\pm} = \pm 1$, raízes do polinómio característico $c_A(z) = z^2 - 1$. Vetores próprios normalizados, satisfazendo $A\mathbf{u}_{\pm} = \pm \mathbf{u}_{\pm}$ e $\|\mathbf{u}_{\pm}\| = 1$, são $\mathbf{u}_+ = (1, 1)/\sqrt{2}$ e $\mathbf{u}_- = (-1, 1)/\sqrt{2}$, respetivamente. A mudança de coordenadas que diagonaliza A é portanto a matriz ortogonal (cujas colunas são as coordenadas de $\mathbf{u}_+$ e $\mathbf{u}_-$)

$$R_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

que representa uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/4$. A sua transposta, que é também a sua inversa, é a uma rotação horária de um ângulo $\pi/4$, ou seja, $R_{\pi/4}^\top = R_{-\pi/4}$. Então a matriz A é igual ao produto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R_{\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{-\pi/4}.$$

Mas a matriz diagonal $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é a matriz de uma reflexão no eixo horizontal do plano. A diagonalização mostra portanto que o operador L é obtido ao fazer, nesta ordem, uma rotação horária de um ângulo $\pi/4$, uma reflexão no eixo horizontal, e uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/4$. O operador L , representado na base canónica pela matriz A , é uma reflexão na reta $y = x$.

e.g. Projeções ortogonais. As projeções ortogonais são operadores auto-adjuntos. Seja $S \subset \mathbb{C}^n$ um subespaço de dimensão $m \leq n$, e $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ uma sua base ortonormada. É possível completar a base de S , e construir uma base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ de $\mathbb{C}^n$. Nesta base, a matriz da projeção ortogonal $P_S : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ sobre S é uma matriz diagonal em blocos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_m & \\ & 0_{n-m} \end{pmatrix}$$

formada pela matriz identidade I_m nas primeiras m coordenadas, e pela matriz nula 0_{n-m} nas últimas $n - m$ coordenadas. Se U denota a matriz unitária cujas colunas são as coordenadas dos vetores $\mathbf{u}_k$'s relativamente a base canónica, então P_S é representada, na base canónica, pela matriz $A = U\Lambda U^*$. Finalmente, podem verificar que esta matriz é a mesma definida em (5.7).

ex: Seja $\mathbf{v}$ um vetor próprio do operador auto-adjunto L . Mostre que $(\mathbb{C}\mathbf{v})^\perp$ é um subespaço invariante de L .

ex: Observe que um operador $L = iT$ é anti-hermítico sse T é hermítico. Enuncie o correspondente teorema espectral para operadores anti-hermíticos.

ex: Diagonalize, quando possível, as seguintes matrizes reais

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ex: Determine valores e vetores próprios e diagonalize as matrizes reais simétricas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Determine valores e vetores próprios e diagonalize as matrizes complexas hermíticas

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

ex: [Ap69] Vol. 2 5.11.

Hilbert's spectral theory and Quantum Mechanics The name “spectral theory”, and therefore “spectral theorem” (which you won't find in many manuals on linear algebra), was invented by David Hilbert at the beginning of the XX century. The “spectrum” of an operator is a subset of the complex plane which, in the case of a normal operator in finite dimension, coincides with the set of its eigenvalues. His intention was to generalize to infinite dimension the classical theory about principal axis of ellipsoids, originally motivated by the study of small oscillations of a mechanical system around a stable equilibrium (see the next chapter 8). It is a fortuitous coincidence that soon after physicists discovered Quantum Mechanics, and observed that the mathematical language in which it seems to be written is precisely the theory of self-adjoint operators on “Hilbert spaces” (Dirac, von Neumann, Weyl, ...). Even more surprising is one of Bohr's major achievement: “spectral lines” of the hydrogen atom are explained by means of the computation of the “spectrum” of a certain operator representing the energy of the electron!

Observáveis e valores médios em mecânica quântica. A estrutura “formal” da mecânica quântica não relativística, descrita por Paul Dirac em [Di47], é a seguinte. O espaço dos estados é um espaço euclidiano complexo $\mathbf{H}$. Os “observáveis” são operadores auto-adjuntos $A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$. Os valores próprios $a_1, a_2, a_3, \dots$, que são números reais, são os possíveis resultados das observações. Os vetores próprios correspondentes $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle, \dots$, que satisfazem

$$A|\alpha_k\rangle = a_k|\alpha_k\rangle$$

formam uma base ortonormada de $\mathbf{H}$. Pelo teorema espectral, o operador é uma soma pesada

$$A = \sum_k \lambda_k |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k|$$

de projeções. Um “estado” do sistema é um vetor unitário $|\psi\rangle$, que pode ser representado como sobreposição

$$|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |\alpha_k\rangle$$

dos $|\alpha_k\rangle$'s com coeficientes de Fourier que satisfazem $\sum_k |\psi_k|^2 = 1$. O valor médio esperado, ao repetir a observação do observável A no estado $|\psi\rangle$ um número grande de vezes, é o valor médio

$$\langle \psi | A \psi \rangle = \sum_k a_k |\psi_k|^2$$

Tudo isto faz sentido se $\mathbf{H}$ tem dimensão finita, logo é isomorfo a um espaço $\mathbb{C}^n$. Se a dimensão é infinita, então $\mathbf{H}$ é um espaço de Hilbert, ou seja, um espaço euclidiano completo que admite um subconjunto denso e numerável, e portanto uma base numerável, logo isomorfo ao espaço ℓ^2 . Neste caso, a própria definição de operador auto-adjunto é problemática, e o conteúdo do teorema espectral é menos elementar.

Self-adjoint operators with no eigenvalues and Dirac delta functions. Let $\mathbf{E}$ be the complex Euclidean space of square-integrable functions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, equipped with the inner product $\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$. The multiplication operator $(Xf)(x) := x f(x)$ is self-adjoint and bounded on $\mathbf{E}$, but has no eigenvalues. Indeed, the eigenvalue equation reads $x f(x) = \lambda f(x)$, and says that $f(x) = 0$ for all $x \neq \lambda$, and therefore that $f(x)$ is the zero vector of $\mathbf{E}$.

Indeed, eigenvectors of the multiplication operators are *Dirac delta functions* $\delta(x - \lambda)$, with $0 \leq \lambda \leq \pi$, defined by the paradoxical equation

$$\int_0^\pi \delta(x - \lambda) f(x) dx := f(\lambda)$$

(saying that $\delta(x - \lambda)$ is equal to zero for all $x \neq \lambda$ and so large at the single point $x = \lambda$ that its integral over the whole interval is equal to one!), and live outside the space $\mathbf{E}$. The theory of distributions, inspired by the intuition of Paul Dirac and developed by Laurent Schwartz (and worth a Fields medal in 1950) will give a precise mathematical meaning to this physicists' idea.

Momentum and Laplacian on the line. Let $\mathbf{H}$ be the complex Euclidean space of square-integrable functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, equipped with the inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx$.

The “momentum operator” $P = -iD$ is symmetric when defined, for example, on the subspace $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}$ of infinitely differentiable functions with compact support (since D is skew-symmetric). Nevertheless, it does not have any eigenvalue. Indeed, functions satisfying $Pf = \lambda f$ are the plane waves $e^{i\lambda x}$, but no such exponential is square-integrable (indeed, they can’t even satisfy boundary conditions like $f(0) = f(\pi) = 0$ if we were in a bounded interval). Thus, the candidates to be eigenvectors of the momentum operator are outside the space where the operator is naturally defined.

The “kinetic energy” $P^2 = -\Delta$, the positive-definite Laplacian, is symmetric too, and of course should share its eigenvectors with P , the plane waves $e^{i\lambda x}$, with non-negative eigenvalues $\lambda^2 \geq 0$.

The theory of “Fourier transform” (to be studied next year) will reveal in which sense the Laplacian is unitarily equivalent to a multiplication operator (the prototype of a self-adjoint operator). Functions in $\mathbf{H}$ will be integrals

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

of “eigenfunctions” of the Laplacian, and the Laplacian $-\Delta$ (or also the derivative operator D as well as any constant coefficients differential operator) will act on their “coefficients/coordinates” $\widehat{f}(\lambda)$ as a multiplication operator $\widehat{f}(\lambda) \mapsto \lambda^2 \widehat{f}(\lambda)$.

7.3 Teorema espectral para operadores normais

Teorema espectral para operadores normais. Seja $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ um espaço euclidiano complexo de dimensão finita. Um operador $N : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é *normal* se comuta com o próprio adjunto, ou seja, se

$$N^* N = N N^*$$

Operadores unitários são normais, pois satisfazem $UU^* = U^*U = I$. Operadores hermiticos e hemi-hermiticos também são normais, pois o adjunto é proporcional ao próprio operador, $A^* = \pm A$. Um operador $T = X + iY$ é normal sse a sua parte hermitica $X = (T + T^*)/2$ e a sua parte hemi-hermitica $iY = (T - T^*)/2$ comutam, pois $[T, T^*] = -2i[X, Y]$.

É claro que N é normal sse N^* é normal. Os operadores normais também podem ser caracterizados pela seguinte propriedade geométrica.

Teorema 7.4. Um operador $N : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano complexo $\mathbf{H}$ é normal sse para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$

$$\|N\mathbf{v}\| = \|N^*\mathbf{v}\|$$

Demonstração. O comutador $A = [N^*, N] = N^*N - NN^*$ é um operador auto-adjunto, e a condição $\|N\mathbf{v}\| = \|N^*\mathbf{v}\|$ é equivalente a $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. O teorema é portanto consequência do teorema 6.3. $\square$

Ao aplicar este resultado ao operador $N - \lambda$ e ao seu adjunto $N^* - \bar{\lambda}$, concluímos que

Teorema 7.5. Seja $N : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador normal de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita $\mathbf{H}$. Um vetor $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de N com valor próprio λ sse é também um vetor próprio de N^* com valor próprio $\bar{\lambda}$.

Um operador que admite uma base ortonormada de vetores próprios, com valores próprios arbitrários, é normal. De fato, a adjunta de uma matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal $\Lambda^* = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$, e duas matrizes diagonais comutam. A afirmação recíproca é a forma mais geral de teorema espectral (em dimensão finita).

Teorema 7.6 (teorema espectral). Seja $N : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador normal de um espaço euclidiano complexo de dimensão finita $\mathbf{H}$. Existe uma base ortonormada de vetores próprios de N .

Consequentemente, um operador normal é uma soma direta $N = \mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \dots \oplus \mu_m$ de homotetias relativamente a uma decomposição ortogonal $\mathbf{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_m$, onde os $H_k = \ker(\mu_k - N)$ são os espaços próprios associados aos valores próprios distintos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ (que em geral são números complexos).

Este teorema é uma consequência do teorema espectral 7.3 (que vale para a parte hermitica X e a parte anti-hermitica iY de $N = X + iY$, que comutam) e do teorema 7.8. Uma prova alternativa e independente é a seguinte.

Demonstração. Fixada uma base ortonormada, podemos assumir que $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$. Pelo teorema fundamental da álgebra, o operador N admite um valor próprio λ . Pelo teorema 7.5, o espaço próprio $\mathbf{H}_\lambda = \text{Ker}(\lambda - N)$ é também um espaço próprio do operador adjunto N^* , com valor próprio $\bar{\lambda}$. O subespaço ortogonal $\mathbf{H}_\lambda^\perp$ é N -invariante, pois se $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_\lambda$, então $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$ implica $\langle N\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, N^*\mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$ também, e tem dimensão estritamente inferior a n . O teorema segue por indução, sendo trivial em dimensão um. $\square$

e.g. Existem operadores diagonalizáveis (numa base não ortonormada!) que não são normais. Por exemplo, o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável, pois os seus valores próprios são 1 e 2. Por outro lado, não é normal, pois

$$AA^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

é diferente de

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ex: Determine valores e vetores próprios e diagonalize as matrizes complexas normais

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Diagonalização de operadores unitários. Um operador unitário $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano complexo é normal, pois $U^*U = UU^* = I$, e os seus valores próprios são números complexos ζ_k de valor absoluto $|\zeta_k| = 1$. Se $\mathbf{H}$ tem dimensão finita, então pelo teorema espectral 7.6 o operador é definido, numa base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ formada pelos vetores próprios, por uma matriz diagonal

$$Z = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_n \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

cujas entradas são os valores próprios $\zeta_k = e^{i\theta_k}$, com θ_k reais.

Forma normal de operadores ortogonais. Operadores unitários num espaço euclidiano real de dimensão finita são representados por matrizes ortogonais, matrizes $O \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ satisfazendo $O^\top = O^{-1}$. Um operador ortogonal é unitário, logo normal, mas não é necessariamente diagonalizável, pois os seus valores próprios podem não ser reais. O teorema espectral para operadores normais implica o seguinte resultado sobre a estrutura de uma matriz ortogonal.

Teorema 7.7. *Seja $U : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ um operador ortogonal de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{E} \approx \mathbb{R}^n$, representado numa base ortonormada por uma matriz ortogonal. Então o espaço é uma soma direta $\mathbf{E} = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$ de subespaços invariantes ortogonais de dimensão 1 ou 2, em cada um dos quais U é o operador $\pm 1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ do plano de um ângulo $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.*

Existe portanto uma base ortonormada na qual U é representado pela matriz ortogonal

$$O = \begin{pmatrix} O_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & O_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & O_k \end{pmatrix}$$

onde cada bloco não nulo O_i , de dimensão um ou dois, é uma das matrizes

$$(1) \quad (-1) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Demonstração. A prova é por indução. Em dimensão um o teorema é trivial, e em dimensão dois é um exercício do capítulo anterior.

Fixada uma base ortonormada, podemos assumir que $\mathbf{E} = \mathbb{R}^n$, munido do produto interno euclidiano, e que o operador é definido por uma matriz ortogonal O . A matriz real O define também um operador unitário no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$ (a complexificação de $\mathbb{R}^n$), munido do produto interno usual, pois $\overline{O}^\top = O^\top = O^{-1}$. O teorema espectral para operadores normais diz que $\mathbb{C}^n$ admite uma base ortonormada de vetores próprios de O , e os seus valores próprios λ são unitários, ou seja, satisfazem $|\lambda| = 1$.

Seja $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$, com $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, um vetor próprio com valor próprio $\lambda = e^{i\theta}$, assim que

$$U(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = e^{i\theta}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}).$$

Se o valor próprio é real, ou seja $\zeta = e^{i\theta} = \pm 1$, então ou $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$ (pois um dos dois não é nulo) é um vetor próprio real $\mathbf{v}$ com valor próprio λ . A restrição de O a reta E_1 gerada por $\mathbf{v}$ é então uma multiplicação por ± 1 , e o espaço ortogonal a esta reta é um subespaço invariante de dimensão $n - 1$.

Se o valor próprio $\lambda = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ não é real (ou seja, θ não é um múltiplo inteiro de π), então é imediato ver que também $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{x} - i\mathbf{y}$ é um valor próprio de U , com valor próprio $\bar{\lambda} = e^{-i\theta}$. Sendo $\lambda \neq \bar{\lambda}$, os vetores $\mathbf{z}$ e $\bar{\mathbf{z}}$ são linearmente independentes sobre os complexos, e isto implica que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente independentes sobre os reais. De fato, se $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = 0$ com a e b reais, então

$$0 = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = a \frac{\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}}{2} + b \frac{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}}{2i} = \frac{a + ib}{2} \mathbf{z} + \frac{a - ib}{2} \bar{\mathbf{z}}$$

implica que $a \pm ib = 0$, logo que $a = b = 0$. Mas a parte real e a parte imaginária da equação $U\mathbf{z} = e^{i\theta}\mathbf{z}$ dizem que

$$\begin{aligned} U\mathbf{x} &= (\cos \theta) \mathbf{x} - (\sin \theta) \mathbf{y} \\ U\mathbf{y} &= (\sin \theta) \mathbf{x} + (\cos \theta) \mathbf{y} \end{aligned}$$

A restrição de U ao plano $E_1 \approx \mathbb{R}^2$ gerado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é portanto uma rotação de um ângulo θ , e o espaço ortogonal a este plano é um subespaço invariante de dimensão $n - 2$.

Nos dois casos, a indução pode funcionar. □

e.g. Operadores ortogonais em dimensão 3. Por exemplo, um operador ortogonal em $\mathbb{R}^3$ é representado, numa base oportuna, pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

(uma rotação em torno do eixo dos z 's e eventualmente uma reflexão no plano x - y). Em particular, um operador ortogonal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ (ou de um espaço de dimensão ímpar) admite sempre uma reta invariante, ou seja, um “eixo de rotação”.

Teorema ergódico de von Neumann. Se ζ é um número complexo de valor absoluto $|\zeta| = 1$ mas diferente do próprio 1, então as médias aritméticas das suas potências convergem para zero quando $N \rightarrow \infty$, pois

$$\frac{1}{N} (1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots + \zeta^{N-1}) = \frac{1}{N} \frac{1 - \zeta^N}{1 - \zeta} \rightarrow 0$$

Por outro lado, se $\zeta = 1$ estas médias são constantes e iguais a um. Consideramos agora um operador unitário $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ definido num espaço euclidiano complexo de dimensão finita. É representado, numa base ortonormada formada por vetores próprios, por uma matriz diagonal Z do género (7.3), com valores próprios ζ_k 's unitários. As médias aritméticas

$$\frac{1}{N} (I + Z + Z^2 + Z^3 + \cdots + Z^{N-1})$$

das suas potências convergem para uma matriz diagonal com entradas nulas nas posições onde $\zeta_k \neq 1$, e iguais a um nas posições onde $\zeta_k = 1$. Este limite é, por definição, a matriz da projecção ortogonal $P : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ sobre o espaço próprio $\mathbf{H}_1 = \text{Ker}(1 - U)$ (que pode ser o operador nulo se 1 não é um valor próprio). Consequentemente, os operadores

$$S_N := \frac{1}{N} (I + U + U^2 + U^3 + \cdots + U^{N-1})$$

chamados “somas de Cesàro” ou “médias de Birkhoff” de U , convergem para

$$S_N \rightarrow P$$

quando $N \rightarrow \infty$, no sentido em que $S_N \mathbf{v} \rightarrow P \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Esta é uma versão elementar do *teorema ergódico de von Neumann*³² que, aplicado ao operador de Koopman (6.15), é um dos resultados fundacionais da moderna teoria dos sistemas dinâmicos.

Uma prova mais conceptual, que, com mais alguma ginástica topológica, estende em dimensão infinita, foi descoberta por Riesz.³³ Consiste em observar que o espaço total é uma soma direta ortogonal $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \text{Im}(1 - U)$. No espaço próprio $\mathbf{H}_1$, o operador U e portanto as suas médias S_N agem como a identidade, logo a convergência é trivial. Por outro lado, nos vetores de $\text{Im}(1 - U)$ (chamados “co-boundaries”) a soma de Cesàro é telescópica, e

$$\begin{aligned} S_N(\mathbf{y} - U\mathbf{y}) &= \frac{1}{N} (\mathbf{y} - U\mathbf{y} + U\mathbf{y} - U^2\mathbf{y} + U^2\mathbf{y} - U^3\mathbf{y} + \cdots + U^{N-1}\mathbf{y} - U^N\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{N} (\mathbf{y} - U^N\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Finalmente, um vetor genérico é uma soma $\mathbf{v} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} - U\mathbf{y})$ com $\mathbf{x} = P\mathbf{v} \in \mathbf{H}_1$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$. Então

$$\|S_N \mathbf{v} - P\mathbf{v}\| = \|S_N(\mathbf{y} - U\mathbf{y})\| \leq \frac{2}{N} \|\mathbf{y}\| \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow \infty$, pois $\|\mathbf{y} - U^N\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y}\| + \|U^N\mathbf{y}\| = 2\|\mathbf{y}\|$ e U é unitário.

³²J. von Neumann, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **18** (1932), 70-82.

³³P.R. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory*, Chelsea, 1956.

Discrete Fourier transform. The *discrete circle* is the finite abelian group $Z_N := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (you may want to look at chapter 9 for the terminology and interpretation). We may regard Z_N as the finite set $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ equipped with the sum defined as follows: the sum of n and m is the unique integer $0 \leq k \leq N-1$ such that there exists a non-negative integer p such that $n + m = k + pN$ (thus, k is the “remainder” of the division of $n + m$ by N). This is the familiar “modular arithmetic” used in old analogical clocks (with $N = 12$). We may also associate to the points n of Z_N the equally spaced points $z_n = e^{i2\pi n/N}$ in the unit circle, where $n = 0, 1, \dots, N-1$. The sum $n \mapsto n + m$ is then the product $z_n \mapsto z_n z_m$ between the associated unit complex numbers, that corresponds to a rotation of an angle $2\pi m/N$.

A vector $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ may be thought as a function $\varphi : Z_N \rightarrow \mathbb{C}$, sending $n \mapsto \varphi(n) = q_n$. This space of functions is a finite dimensional Hilbert space if equipped with the inner product $\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_n \varphi(n) \overline{\psi(n)}$, called $L^2(Z_N)$. Of course, this is the usual $\mathbb{C}^N$ equipped with the canonical hermitian product $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q}' \rangle = \sum_n \overline{q_n} q'_n$, since any function on a finite space is square integrable.

The translations on the group Z_N (that should be called “rotations” of the discrete circle) are generated by the map $\tau : Z_N \rightarrow Z_N$ sending $n \mapsto n + 1$, where sums are intended “modulo N ”, so that $(N-1) + 1 = N$ is identified with 0. The translation induces the *cyclic permutation operator* $P : L^2(Z_N) \rightarrow L^2(Z_N)$ on functions, defined as $(P\varphi)(n) := \varphi(\tau(n))$. In the language of vectors of $\mathbb{C}^N$, this means that $(P\mathbf{q})_n = q_{n+1}$ (where we set $q_N = q_0$), or explicitly

$$P : (q_0, q_1, q_2, \dots, q_{N-1}) \mapsto (q_1, q_2, \dots, q_{N-1}, q_0) \quad (7.4)$$

The operator P satisfies $P^N = I$, hence $P^{-1} = P^{N-1}$, and also $P^* = P^{-1}$. Therefore it is normal and unitary. If $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ is an eigenvector of P with eigenvalue λ , so that $P\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, then $x_{n+1} = \lambda x_n$. Also, since $\lambda^N = 1$, the eigenvalue λ is a N -th root of unity. Let $\zeta = e^{i2\pi/N}$, a primitive N -th root of unity. There follows that the eigenvalues and relative eigenvectors of P are

$$\lambda_n = \zeta^n \quad \boldsymbol{\xi}_n = (1, \zeta^n, \zeta^{2n}, \dots, \zeta^{(N-1)n}) \quad (7.5)$$

respectively, with $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Indeed, the $\boldsymbol{\xi}_n$ ’s belong to the “Pontryagin dual” $\widehat{Z_N}$, the group of (continuous) homomorphisms from Z_N into the unit circle $\mathbf{S} \subset \mathbb{C}$, and are called “characters”, or also “harmonics”. The vectors $\boldsymbol{\xi}_n$ ’s have squared norm $\|\boldsymbol{\xi}_n\|^2 = N$, and are pairwise orthogonal. Indeed, if $n \neq m$, then

$$\langle \boldsymbol{\xi}_n, \boldsymbol{\xi}_m \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \zeta^{-km} \zeta^{kn} = \sum_{k=0}^{N-1} (\zeta^{n-m})^k = 0$$

since ζ^{n-m} with $n \neq m$ is a non-trivial N -th root of unity. Therefore, the normalised vectors $\mathbf{p}_n := \boldsymbol{\xi}_n / \sqrt{N}$, with $k = 0, 1, \dots, N-1$, form an orthonormal basis of $L^2(Z_N)$. Hence, $P\mathbf{p}_n = \zeta^n \mathbf{p}_n$ and $\langle \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_j \rangle = \delta_{nm}$. Any vector $\mathbf{q}$ may therefore be represented as a superposition of $\mathbf{p}_m$ ’s according to

$$\mathbf{q} = \sum_{m=0}^{N-1} Q_m \mathbf{p}_m$$

which means, in coordinates,

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} Q_m \zeta^{nm} \quad (7.6)$$

provided the “Fourier coefficients”, the components of the vector $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{N-1})$, are defined according to (5.8), namely $Q_m = \langle \mathbf{p}_m, \mathbf{q} \rangle$, or explicitly

$$Q_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} q_n \zeta^{-nm} \quad (7.7)$$

The map (7.7), sending $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q}$, is called *discrete Fourier transform* (DFT). It is a unitary transformation from $L^2(Z_N)$ to $L^2(\widehat{Z}_N)$. It is defined by the $N \times N$ matrix $F_N = (f_{nm})$ with entries $f_{nm} = \frac{1}{\sqrt{N}} \zeta^{-nm}$. Explicitly, by the matrix

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta^{-1} & \zeta^{-2} & \dots & \zeta^{-(N-1)} \\ 1 & \zeta^{-2} & \zeta^{-2 \cdot 2} & \dots & \zeta^{-2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{-(N-1)} & \zeta^{-(N-1) \cdot 2} & \dots & \zeta^{-(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

The inverse map (7.6), called *inverse DFT*, is defined by the matrix

$$F_N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \zeta^{N-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^{2 \cdot 2} & \dots & \zeta^{2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{N-1} & \zeta^{(N-1) \cdot 2} & \dots & \zeta^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

obtained from F substituting ζ with ζ^{-1} . For example, for $N = 2$ and $N = 4$ we get

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad F_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

respectively.

Computation of the DFT is an important practical problem in science and technology, since the beginning of modern physics. Its importance in contemporary technology (for example, in the analysis and processing of discrete/digital signals), led to the search for algorithms which could work faster than the obvious $\mathcal{O}(N^2)$ products and sums involved in the definitions (7.6) and (7.7) (assuming that the coefficients ζ^{nm} are already computed and available) as in the code below.

```

8
9 # libraries
10 import numpy as np
11
12 def DFT(x):          # Discrete Fourier Transform function
13     N = len(x)
14     n = np.arange(N) # row vector (0,1,2,...,N-1)
15     m = n.reshape(N, 1) # column vector (0,1,2,...,N-1)
16     F = (1/np.sqrt(N)) * np.exp(-2j * np.pi * m * n / N) # matrix F
17     X = np.dot(F, x)
18     return X

```

Possibly anticipated by some ideas by Gauss himself, finally the *fast Fourier transform* (FFT) algorithm of Cooley and Tuckey³⁴ (explained in section 9) has improved the computational cost to $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ when N is a power of two, as $N = 2^M$. Quantum computers (performing the so called “quantum Fourier transform”) may significantly reduce the cost to something like $\mathcal{O}(M^2)$ gates ...

ex: The matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

³⁴J.W. Cooley and J.W. Tukey, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Mathematics of Computation* **19** (1965), 297-301.

that represents the operator P , defined in (7.4), is known as *cyclic permutation matrix*. Matrices representing polynomials $f(P) = a_0 + a_1P + a_2P^2 + \dots + a_{N-1}P^{N-1}$ with complex coefficients a_k 's in the operator P are called *circulant matrices*. Their eigenvalues are easily computed as polynomials $f(\lambda_n)$, with $\lambda_n = \zeta^n$ as in (7.5). Write explicitly the powers P^k , hence the matrices representing $f(P)$, and compute their determinant.

ex: The *discrete Laplacian* in the discrete circle Z_N is the self-adjoint operator $\Delta : L^2(Z_N) \rightarrow L^2(Z_N)$ defined as

$$(\Delta \mathbf{q})_n = (q_{n+1} - q_n) - (q_n - q_{n-1}) = q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}$$

(thinking at vectors $\mathbf{q}$ as functions $n \mapsto q_n$ on the discrete circle, and identifying q_N with q_0). Write it as a polynomial in the permutation operator P , and compute its eigenvalues and eigenvectors.

ex: Compute eigenvalues and eigenvectors of the *discrete (forward) derivative* $D = P - I$.

Evaluation and interpolation of polynomials. A polynomial of degree $N - 1$ is uniquely determined by its N complex coefficients as well as by its values at N distinct points in the complex plane. Going forward and backward between these two representation are operations called *evaluation* and *interpolation*, respectively. If the chosen points are the N -th roots of unity, these operations coincide essentially with the discrete Fourier transform and its inverse. Indeed, let

$$f(z) = q_0 + q_1z + q_2z^2 + \dots + q_{N-1}z^{N-1}$$

be a polynomial of degree $\leq N - 1$ with complex coefficients q_n 's. Evaluation at the N -th roots of unit $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{N-1}$, where $\zeta = e^{2\pi i/N}$, is given by the linear map

$$(q_0, q_1, \dots, q_{N-1}) \mapsto (f(1), f(\zeta), f(\zeta^2), \dots, f(\zeta^{N-1}))$$

defined, up to a factor $\sqrt{N}$, by the inverse discrete Fourier transform matrix (7.9), since

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f(\zeta) \\ f(\zeta^2) \\ \vdots \\ f(\zeta^{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \zeta^{N-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^{2 \cdot 2} & \dots & \zeta^{2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{N-1} & \zeta^{(N-1) \cdot 2} & \dots & \zeta^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{pmatrix}$$

The inverse map, interpolation, is therefore given by $1/N$ times the discrete Fourier transform matrix (7.8), i.e.

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta^{-1} & \zeta^{-2} & \dots & \zeta^{-(N-1)} \\ 1 & \zeta^{-2} & \zeta^{-2 \cdot 2} & \dots & \zeta^{-2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{-(N-1)} & \zeta^{-(N-1) \cdot 2} & \dots & \zeta^{-(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(\zeta) \\ f(\zeta^2) \\ \vdots \\ f(\zeta^{N-1}) \end{pmatrix}$$

7.4 Diagonalização simultânea e desigualdade de Heisenberg

Diagonalização simultânea e comutadores. Sejam L e M dois operadores definidos num espaço linear $\mathbf{V}$. Se L e M comutam, e se $V_\lambda = \text{Ker}(\lambda - L)$ é um espaço próprio de L , associado ao valor próprio λ , então V_λ é também M -invariante, ou seja, $M(V_\lambda) \subset V_\lambda$. De fato, se $\mathbf{v} \in V_\lambda$, então

$$L(M\mathbf{v}) = M(L\mathbf{v}) = \lambda M\mathbf{v},$$

e isto significa que $M\mathbf{v} \in V_\lambda$. Em particular,

Teorema 7.8. *Sejam L e M dois operadores normais (por exemplo, auto-adjuntos), definidos num espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$. Existe uma base ortonormada de vetores próprios para os dois operadores sse L e M comutam.*

Demonstração. Se L e M comutam, a restrição de M a cada espaço próprio $H_\lambda = \text{Ker}(\lambda - L)$ de L é um operador auto-adjunto, que, pelo teorema espectral 7.6, admite uma base de vetores próprios, que são também vetores próprios de L . Mas o espaço $\mathbf{H}$ é uma soma direta ortogonal de subespaços próprios de L . A outra implicação é trivial, pois duas matrizes diagonais comutam. $\square$

Consequentemente, se as matrizes hermiticas A e B comutam, existe uma matriz unitária U tal que U^*AU e U^*BU são diagonais.

e.g. Por exemplo, os operadores $L_A(x, y) = (y, x)$ e $L_B(x, y) = (3x - y, -x + 3y)$, definidos pelas matrizes simétricas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

respetivamente, comutam. Um cálculo mostra que

$$A = R_{\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{\pi/4}^\top \quad \text{e} \quad B = R_{\pi/4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} R_{\pi/4}^\top$$

se $R_{\pi/4}$ é a matriz ortogonal que define uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/4$.

e.g. Por outro lado, as reflexões do plano $L_C(x, y) = (x, -y)$ e $L_D(x, y) = (y, x)$, representadas pelas matrizes simétricas

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

respetivamente, não comutam. São diagonalizáveis, e representadas pela mesma matriz diagonal mas em duas bases ortonormadas diferentes, pois

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = R_{\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{\pi/4}^\top$$

Desigualdade de Heisenberg. Quando dois operadores auto-adjuntos não comutam, não existe uma base ortonormada que os diagonaliza. A obstrução, o comutador, assume em mecânica quântica um significado importante.

Sejam $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, e Q um operador auto-adjunto definido em $\mathbf{H}$. Fixado um vetor unitário $\mathbf{v}$, podemos calcular o “valor médio de Q no estado $\mathbf{v}$ ”

$$\langle Q \rangle_{\mathbf{v}} := \langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle ,$$

que é um número real. Se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de Q , com valor próprio real λ , então o valor médio é $\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle = \lambda$. Em geral, uma medida da distância entre $Q\mathbf{v}$ e um hipotético vetor próprio associado ao valor médio $\langle Q \rangle_{\mathbf{v}}$ (que pode não existir!) é a “incerteza”

$$\Delta_{\mathbf{v}}Q := \|(Q - \langle Q \rangle_{\mathbf{v}})\mathbf{v}\| .$$

Naturalmente, $\Delta_{\mathbf{v}}Q$ é nula sse $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de Q . Na linguagem da mecânica quântica, os vetores unitários (ou melhor, as retas $\mathbb{C}\mathbf{v} \subset \mathbf{H}$) definem os “estados” do sistema, o valor médio $\langle \mathbf{v}, Q\mathbf{v} \rangle$ é o “valor esperado” (ou seja, a média de um número grande de observações), e o $\Delta_{\mathbf{v}}Q$ é o “desvio padrão” do observável Q no estado $\mathbf{v}$.

Consideramos agora dois operadores auto-adjuntos, Q e P . Se não comutam, não são diagonalizáveis simultaneamente (ou seja, na mesma base). O comutador $[Q, P]$ é um operador anti-hermitico, logo $i[Q, P]$ é hermitico, e os seus valores médios são números reais.

Teorema 7.9 (desigualdade de Heisenberg). *Sejam Q e P dois operadores auto-adjuntos definidos num espaço euclidiano complexo (de dimensão finita) $\mathbf{H}$. Para todo vetor unitário $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$,*

$$\Delta_{\mathbf{v}}Q \cdot \Delta_{\mathbf{v}}P \geq \frac{1}{2} |\langle i[Q, P] \rangle_{\mathbf{v}}|$$

e a igualdade verifica-se sse existem escalares reais a e b , não simultaneamente nulos, tais que $a(Q - \langle Q \rangle_{\mathbf{v}})\mathbf{v} = ib(P - \langle P \rangle_{\mathbf{v}})\mathbf{v}$.

Demonstração. Para simplificar as notações, chamamos $Q' = Q - \langle Q \rangle_{\mathbf{v}}$ e $P' = P - \langle P \rangle_{\mathbf{v}}$ (o que fisicamente significa fazer translações nas unidades utilizadas para medir os dois observáveis). É claro que $[Q', P'] = [Q, P]$. Pela desigualdade de Schwarz 5.1,

$$|\langle Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v} \rangle| \leq \|Q'\mathbf{v}\| \cdot \|P'\mathbf{v}\|$$

e a igualdade se verifica sse os vetores $Q'\mathbf{v}$ e $P'\mathbf{v}$ são linearmente dependentes. O segundo membro desta desigualdade é o produto $\Delta_{\mathbf{v}}Q \cdot \Delta_{\mathbf{v}}P$ das incertezas. O primeiro membro é o módulo de $\langle Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v} \rangle$, que é superior ou igual ao módulo da parte imaginária

$$\begin{aligned} \Im(\langle Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v} \rangle) &= \frac{1}{2i} (\langle Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v} \rangle - \langle P'\mathbf{v}, Q'\mathbf{v} \rangle) \\ &= \frac{1}{2i} \langle \mathbf{v}, [Q, P]\mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

ou seja, ao módulo de $\langle \mathbf{v}, i[Q, P]\mathbf{v} \rangle$ (que é um número real, porque o comutador entre dois operadores auto-adjuntos é hemi-hermítico). Isto prova a desigualdade.

A igualdade verifica-se se a desigualdade de Schwarz é uma igualdade, ou seja, se $Q'\mathbf{v}$ e $P'\mathbf{v}$ são linearmente dependentes, e se a parte real de $\langle Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v} \rangle$ é nula, ou seja, se

$$\langle Q'\mathbf{v}, P'\mathbf{v} \rangle + \langle P'\mathbf{v}, Q'\mathbf{v} \rangle = 0$$

É imediato verificar que estas condições correspondem a existência de umas constantes reais $a, b \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulas, tais que $aQ'\mathbf{v} - ibP'\mathbf{v}$. $\square$

O caso em que uma das constantes a ou b é nula corresponde ao caso em que $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de um dos operadores. A desigualdade de Heisenberg é, neste caso, trivial.

ex: Verifique que, fixado um vetor unitário $\mathbf{v}$, então $(\Delta_{\mathbf{v}}Q)^2 = \langle Q^2 \rangle_{\mathbf{v}} - \langle Q \rangle_{\mathbf{v}}^2$.

ex: Verifique que o comutador entre dois operadores hermíticos é um operador hemi-hermítico.

Heisenberg uncertainty principle. The multiplication operator $X : f(x) \mapsto x f(x)$ is called “position operator” in quantum mechanics. The maximal subspace of $\mathbf{H}$ where both X and the momentum operator $P = -i\hbar D$ can be iterated as operators is the *Schwartz space* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ of infinitely differentiable functions which decay, together with all their derivatives, faster than the inverse of any polynomial. A straightforward computation show that the position operator and the momentum operator do not commute, and indeed their commutator is proportional to the identity operator

$$[X, P] = i\hbar$$

This basic fact, together with some Fourier analysis, is responsible for the famous *Heisenberg uncertainty principle*,³⁵ which says that position and momentum of a quantum particle cannot be simultaneously measured with arbitrary precision. More precisely, as follows formally from

³⁵W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik* **43** (1927), 172-198.

Heisenberg inequality 7.9, the product of the standard deviations of the measurements of the position and the momentum cannot be made smaller than

$$\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$$

Moreover, the sharp bound is achieved iff the state $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ solves the differential equation $ax\varphi(x) - b\varphi'(x) = 0$, modulo translations and modulations. Solutions are proportional to gaussians $\varphi(x) \sim e^{-\gamma x^2}$, which belong to the Schwartz space provided $\gamma > 0$.

7.5 Operadores positivos

Operadores positivos ou não-negativos. Um operador auto-adjunto $P : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, definido num espaço euclidiano $\mathbf{H}$, real ou complexo, é dito *positivo* ou *não-negativo*, notação $P \succ 0$ ou $P \succeq 0$, respetivamente, se os seus valores médios são positivos ou não-negativos, ou seja, se

$$\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle > 0 \quad \text{ou} \quad \langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle \geq 0$$

para todos os vetores não nulos $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ (atenção, esta definição/condição não faz sentido para operadores T que não são auto-adjuntos, pois os escalares $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle$ não são, em geral, números reais!).

Os valores próprios do operador autoadjunto são iguais aos valores médios sobre os vetores próprios unitários correspondentes, portanto estas duas condições implicam que os valores próprios de P são $\lambda_k > 0$ ou $\lambda_k \geq 0$, respetivamente.

Vice-versa, se o espaço euclidiano $\mathbf{H}$ tem dimensão finita, então o teorema espectral 7.3 diz que existe uma base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ formada por vetores próprios de P , com valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, assim que $P\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$. O valor médio de P sobre um vetor genérico $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + \dots + v_n \mathbf{u}_n$ é então

$$\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle = \lambda_1 |v_1|^2 + \lambda_2 |v_2|^2 + \dots + \lambda_n |v_n|^2 \quad (7.10)$$

Consequentemente,

Teorema 7.10. *Um operador auto-adjunto $P : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ definido num espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$ é não-negativo, ou positivo, sse os seus valores próprios são todos positivos, ou não-negativos, respetivamente.*

É evidente que um operador positivo é invertível, pois não admite o valor próprio nulo.

Raízes quadradas de operadores positivos. Se $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ é um operador arbitrário definido num espaço euclidiano de dimensão finita, então $P = T^*T$ é um operador auto-adjunto (a verificação é imediata) cujos valores médios são

$$\langle \mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*T\mathbf{v} \rangle = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \|T\mathbf{v}\|^2$$

Portanto T^*T é não-negativo, e é positivo se T é invertível.

De fato, todo operador não-negativo P num espaço euclidiano de dimensão finita é desta forma. Fixada uma base ortonormada podemos assumir que $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, e que o operador P é definido pela matriz auto-adjunta/simétrica A . Pelo teorema espectral 7.3, existe uma base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ formada por vetores próprios de P , tais que $P\mathbf{u}_k = p_k \mathbf{u}_k$ com $p_k \geq 0$, assim que P é representado nesta base pela matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Consequentemente, $A = U\Lambda U^{-1}$ se U é a matriz unitária/ortogonal cujas colunas são os vetores próprios $\mathbf{u}_k$'s. Então podemos definir um operador $R := \sqrt{P}$ tal que $R\mathbf{u}_k = \sqrt{p_k}\mathbf{u}_k$ para todo k , ou seja representado na mesma base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ pela matriz diagonal

$$\sqrt{\Lambda} := \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{p_n} \end{pmatrix}$$

É claro que R é auto-adjunto, não-negativo, comuta com P , e é uma “raiz quadrada” de P , no sentido em que satisfaz $R^2 = P$ (e também $R^*R = P$, sendo auto-adjunto). De fato, R é definido, na base canónica, pela matriz $B = U\sqrt{\Lambda}U^{-1}$, e o seu quadrado é

$$B^2 = U\sqrt{\Lambda}U^{-1}U\sqrt{\Lambda}U^{-1} = U\sqrt{\Lambda}^2U^{-1} = A$$

Também é claro que R é positivo se P é positivo. A notação $\sqrt{P}$ é justificada pelo seguinte teorema de unicidade.

Teorema 7.11. *Um operador não negativo $P : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$ admite uma única raiz quadrada não-negativa R (que é positiva se P é positivo), tal que $P = R^2$.*

Demonstração. Seja R uma raiz quadrada não-negativa de P , que existe pela discussão anterior. Pelo teorema espectral, existe uma base ortonormada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{H}$ formada por vetores próprios de R , tais que $R\mathbf{e}_k = r_k\mathbf{e}_k$ com valores próprios $r_k \geq 0$. Se $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$ é um vetor próprio de P , com valor próprio $p \geq 0$, então

$$p(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n) = P\mathbf{v} = R^2\mathbf{v} = v_1r_1^2\mathbf{e}_1 + v_2r_2^2\mathbf{e}_2 + \dots + v_nr_n^2\mathbf{e}_n$$

Pela ortogonalidade, logo a independência, dos $\mathbf{e}_k$'s, isto implica que $v_k(p - r_k^2) = 0$ para todo k . Consequentemente, os únicos coeficientes $v_k \neq 0$ de $\mathbf{v}$ são os coeficientes tais que $r_k^2 = p$. Isto implica que $R\mathbf{v} = \sqrt{p}\mathbf{v}$. Ao variar $\mathbf{v}$ numa base formada por vetores próprios de P , isto fixa univocamente o operador R . $\square$

e.g. Por exemplo, as matrizes de Pauli σ_k , definidas em (6.14), são raízes quadradas da matriz identidade I em dimensão 2. No entanto, a própria identidade $\sigma_0 = I$ é a única raiz positiva, pois as outras têm valores próprios ± 1 .

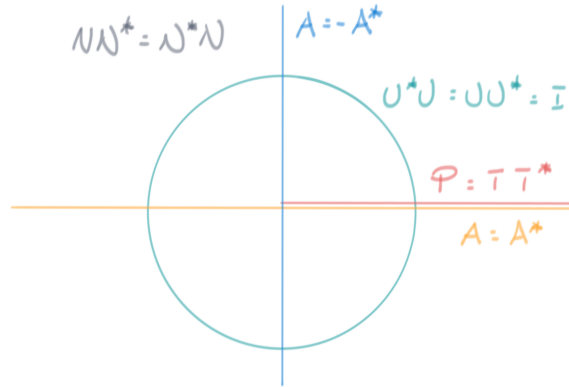
e.g. Por exemplo, consideramos o operador auto-adjunto $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = R_{\pi/4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} R_{\pi/4}^\top$$

onde $R_{\pi/4}$ é a matriz ortogonal que define uma rotação anti-horária de um ângulo $\pi/4$. O operador é positivo, tendo valores próprios 2 e 4. A sua raiz quadrada positiva $R = \sqrt{P}$ é definida então pela matriz

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} R_{\pi/4}^\top = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} + 1 & 1/\sqrt{2} - 1 \\ 1/\sqrt{2} - 1 & 1/\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$$

Quadro geral. Finalmente, a analogia entre operadores normais e números complexos é a seguinte. Os operadores normais são os operadores diagonalizáveis numa base ortonormada, e correspondem ao plano complexo, os possíveis valores próprios. Os operadores unitários correspondem à circunferência unitária. Os operadores hermiticos e anti-hermiticos correspondem à reta real e à reta imaginária, respetivamente. Os operadores positivos correspondem à semi-reta real positiva. Naturalmente, os operadores “genéricos” não são normais!



ex: Mostre que um operador A é positivo sse é da forma $A = T^*T$ com T invertível.

ex: Mostre que se A é positivo então A^2 e A^{-1} são também positivos.

ex: Mostre que se um operador A admite uma raiz quadrada não-negativa/positiva (ou seja, um operador não-negativo/positivo R tal que $R^2 = A$) então é não-negativo/positivo.

ex: Mostre que se um operador A admite uma raiz quadrada auto-adjunta (ou seja, um operador auto-adjunto R tal que $R^2 = A$) então é não-negativo.

ex: Seja $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador arbitrário. Então $T^*T \succeq 0$ e consequentemente admite uma raiz quadrada $|T| := \sqrt{T^*T}$, que é auto-adjunta. Mostre que para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$

$$\|T\mathbf{v}\|^2 = \||T|\mathbf{v}\|^2$$

ex: Diga se os operadores definidos pelas seguintes matrizes são positivos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ex: Também existem raízes quadradas de operadores negativos. Por exemplo,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma raiz quadrada de $-I$, ou seja, $J^2 = -I$. Dê mais exemplos.

ex: Calcule uma raiz quadrada das seguintes matrizes hermiticas e não-negativas

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad \dots$$

ex: Seja $P : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ um operador positivo de um espaço euclidiano real. Mostre que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_P := \langle \mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle$$

é um produto interno em $\mathbf{E}$. Em particular, se o espaço $\mathbf{E}$ tem dimensão finita, existe uma base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{E}$ (ortonormada para o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$) em que o operador A é representado pela matriz identidade I . Consequentemente, se $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, então

$$\langle \mathbf{x}, P\mathbf{x} \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Laplacian in a bounded interval. Let $\mathbf{E}$ be the space of continuous functions $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, equipped with the inner product $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) \overline{g(x)} dx$. Recall that the *Laplacian* is the differential operator $\Delta = D^2$, namely

$$(\Delta f)(x) := f''(x).$$

Let $\mathbf{E}_0^\infty \subset \mathbf{E}$ be the subspace of infinitely differentiable functions satisfying the boundary conditions $f(0) = f(\pi) = 0$ (for example, the space of transversal displacements of a vibrating string). As an operator $\Delta : \mathbf{E}_0^\infty \rightarrow \mathbf{E}$, the Laplacian is symmetric, i.e.

$$\langle f, \Delta g \rangle = \langle \Delta f, g \rangle$$

for all $f, g \in \mathbf{E}_0^\infty$, as you may check integrating by parts twice. It is a simple exercise in ordinary differential equations to show that the eigenvalues of the Laplacian are

$$\lambda_n = -n^2 \quad \text{with} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

and the corresponding eigenfunctions are, for example,

$$\mathbf{v}_n(x) = \sin(nx).$$

Observe that the Laplacian is not bounded! One may actually show that such eigenfunctions form a “basis” of the Hilbert space obtained from $\mathbf{E}$ by completion. This is the content of Plancherel theorem in the theory of Fourier series.

ex: Show that the “positive definite” Laplacian $-\Delta = (-iD)^2$ is positive, namely satisfies

$$\langle f, -\Delta f \rangle > 0$$

for all non-trivial $f \in \mathbf{E}_0^\infty$. Indeed, integrating by parts and using the boundary conditions, $f(0) = f(\pi) = 0$, show that

$$\langle f, -\Delta f \rangle = \langle Df, Df \rangle = \|Df\|^2.$$

Corda vibrante e harmônicas. As pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ , tensão k e densidade linear ρ são modeladas pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7.11)$$

com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$, onde $u(x, t)$ denota o deslocamento transversal da corda na posição $x \in [0, \ell]$ e no tempo t , e $c = \sqrt{k/\rho}$.

O produto $u(x, t) = X(x)T(t)$ é uma solução “separável” de (7.11) se $XT''' = c^2 X''T$, e portanto se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$X'' = \lambda X \quad \text{e} \quad T'' = \lambda c^2 T$$

As únicas soluções não triviais da equação diferencial $X'' = \lambda X$ no intervalo $[0, \ell]$ com condições de fronteira nulas $X(0) = X(\ell) = 0$ são proporcionais a $X_n(x) = \sin(\pi n x / \ell)$ (as funções próprias do laplaciano no espaço das funções que se anulam nos pontos 0 e ℓ) e têm valores próprios

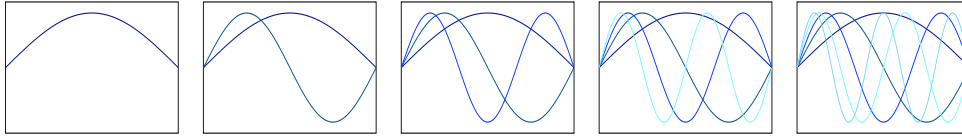
$\lambda_n := -\pi^2 n^2 / \ell^2$ com $n = 1, 2, 3, \dots$. Em correspondência de cada n , as soluções de $T'' = \lambda_n c^2 T$ são $T_n(t) = a_n \cos(\pi n c t / \ell) + b_n \sin(\pi n c t / \ell)$. As soluções separáveis do problema da corda vibrante são portanto as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(a_n \cos(2\pi \nu_n t) + b_n \sin(2\pi \nu_n t) \right) \sin(2\pi x / \ell_n) \\ &= A_n \sin(2\pi \nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x / \ell_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

onde os coeficientes a_n e b_n , ou a amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, e a fase $\tau_n = \arctan(a_n / b_n)$ são constantes arbitrárias, e as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n = \frac{c}{2\ell} n \quad \text{e} \quad \ell_n = \frac{2\ell}{n}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.12)$$

respetivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = c / \ell_1$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = n\nu_1 = c / \ell_n$, com $n = 2, 3, 4, \dots$, são ditas n -ésimas *harmônicas* (ou *overtones*) da corda.



Primeiras 5 harmônicas de uma corda vibrante.

Por exemplo, se a fundamental é o A_4 de 440 Hz (é o caso da segunda corda de um violino), então a segunda harmônica é o A_5 de 880 Hz, a terceira está próxima do E_6 de 1318.5 Hz, a quarta é o A_6 de 1760 Hz, a quinta está próxima do $C\sharp_7$ de 2217.5 Hz, a sexta está próxima do E_7 de 2637 Hz, a sétima está próxima do G_7 de 3136 Hz, ... Em particular, as primeiras harmônicas contêm a “fundamental” A, a “quinta justa” E e a “terça maior” $C\sharp$, as três notas (“tríade maior”) do “acorde maior”!



Primeiras 12 harmônicas de uma corda cuja fundamental é C.

ex: A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq 7.1$ Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... Onde deve colocar o dedo um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

Equação de Schrödinger estacionária, partícula numa caixa. A energia de uma partícula quântica livre de massa unitária é obtida, de acordo com o “princípio de correspondência”, ao substituir o momento linear pelo operador momento $P = -iD$ na expressão da energia cinética clássica (em unidades em que a constante de Planck reduzida é $\hbar = 1$). O resultado é o operador hamiltoniano $H = -\frac{1}{2}\Delta$. Este operador é simétrico se pensado no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. A função de onda $\psi(x, t)$ da partícula satisfaz então a *equação de Schrödinger*

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi \quad (7.13)$$

O produto $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-itE}$ é uma solução separável da (7.13) se φ é uma solução *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{1}{2} \Delta \varphi = E \varphi$$

ou seja, um vetor próprio de H com valor próprio E . Como já observado, as funções próprias definidas na reta são as harmônicas $e^{\pm i p x}$, se o “vetor de onda” p satisfaz a relação de dispersão $p = \sqrt{2E}$, e não têm quadrado integrável.

As coisas mudam se a partícula vive num intervalo limitado, por exemplo, o intervalo $[0, \pi]$. Os físicos dizem que o confinamento é realizado com um potencial nulo no intervalo e “infinito” fora do intervalo. Tecnicamente, isto significa considerar o operador $H : \mathbf{E}_0^\infty \rightarrow \mathbf{E}$ definido no subespaço $\mathbf{E}_0^\infty$ das funções infinitamente deriváveis $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem as condições de fronteira $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Então as funções próprias são proporcionais a $\varphi_n(x) = \sin(nx)$, e os valores próprios correspondentes, os “níveis de energia”, são quantizados de acordo com

$$E_n = \frac{1}{2} n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Oscilador harmónico quântico e funções de Hermite. A equação de Schrödinger para a função de onda $\psi(x, t)$ de uma partícula de massa unitária num potencial $V(x) = x^2/2$ (oscilador harmónico), em unidades tais que a constante de Planck reduzida é $\hbar = 1$, é

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 \psi.$$

As soluções separáveis são $\psi_n(x, t) = e^{-iE_n t} \varphi_n(x)$, se as $\varphi_n(x)$ são funções próprias do *operador de Hermite* $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definido por

$$2H := -D^2 + X^2,$$

com valores próprios E_n (umas energias), assim que $Hf_n = E_n f_n$. Os operadores de *destruição* (*annihilation/lowering operator*) e de *criação* (*creation/raising operator*) são os operadores

$$Z := X + iP = X + D \quad \text{e} \quad Z^* = X - iP = X - D,$$

respetivamente, definidos, por exemplo, no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. É imediato verificar que $[D, X] = I$ (o operador identidade), e que

$$2H = Z^*Z + I$$

O operador de criação é o “adjunto” do operador de destruição, no sentido em que se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então

$$\langle Zf, g \rangle_2 = \langle f, Z^*g \rangle_2$$

Isto implica que $\langle Z^*Zf, f \rangle_2 = \|Zf\|_2^2 \geq 0$ para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ou seja, que $2H \geq I$. O produto $N := Z^*Z$ é chamado operador *número*. É um operador auto-adjunto e não-negativo, e satisfaz a relação de comutação

$$[N, Z^*] = 2Z^*$$

Se f é um vetor próprio de N com valor próprio λ , então Z^*f é um vetor próprio de N com valor próprio $\lambda + 2$. De fato, se $Nf = \lambda f$, então

$$N(Z^*f) = (Z^*N + [N, Z^*])f = (Z^*N + Z^*)f = Z^*(N + 2I)f = (\lambda + 2)Z^*f$$

A gaussiana $g(x) = e^{-x^2/2}$ gera o núcleo do operador de destruição, ou seja, é a única função integrável e não trivial que satisfaz a equação diferencial $Zg = 0$. Portanto $\phi_0 := g/\|g\|_2$ é um vetor próprio unitário do operador N com valor próprio 0. Então as *funções de Hermite*, obtidas aplicando iterativamente o operador de criação e normalizando, logo definidas por

$$\phi_n := \frac{1}{\|(Z^*)^n \phi_0\|_2} (Z^*)^n \phi_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

formam uma família ortonormada de vetores próprios do operador número N , tais que $N\phi_n = 2n\phi_n$. Mas $2H = N + I$, portanto os ϕ_n também diagonalizam o operador de Hermite, ou seja, $H\phi_n = E_n\phi_n$, e os valores próprios são

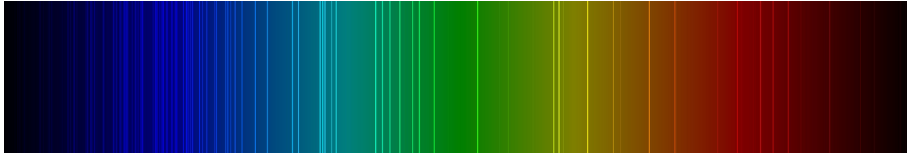
$$E_n = n + \frac{1}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estes são os níveis de energia do oscilador harmónico quântico em dimensão um.

O espetro do átomo de hidrogênio. At the end of the XIX century, it was observed that the hydrogen atoms absorb and emit light of only certain wavelengths λ , described by Rydberg empirical formula

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)$$

where $R \simeq 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, while $m > n$ are positive integers. This phenomenon is not compatible with classical mechanics, and was first explained by Niels Bohr in 1913. ³⁶



As we understand it today, the energy of the electron in the hydrogen atom is described by the Hamiltonian operator

$$H = -\frac{\hbar}{2m_e} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$$

acting on square integrable complex valued functions $\psi(\mathbf{r})$ defined in $\mathbb{R}^3$, where Δ denotes the Laplacian, and $r = \|\mathbf{r}\|$ denotes the distance to the nucleus ($m_e \simeq 9.109 \times 10^{-31} \text{ Kg}$ is the mass of the electron, $e \simeq 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ its charge, $\epsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12}$ is the “permittivity” of vacuum, and $\hbar = h/2\pi \simeq 1.054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ is the reduced Planck constant). Its eigenvalues E ’s and eigenfunctions ψ ’s are the solutions of the stationary Schrödinger equation

$$H\psi = E\psi$$

It turns out (and you’ll learn to do it when studying how to solve a partial differential equation separating variables) that the eigenvalues of H , the energy levels of the atom, are

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0} \frac{1}{n^2} \quad \text{with } n = 1, 2, 3, \dots$$

where $a_0 = (4\pi\epsilon_0\hbar^2)/(m_e e^2) \simeq 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ is the Bohr radius. Their differences thus explain Rydberg formula: photons are absorbed or emitted with energies $E_m - E_n$, since the wavelength of photons is related to their energy by Planck-Einstein’s formula $E = hc/\lambda$.

7.6 Funções de operadores.

Funções de operadores. A construção de uma raiz quadrada positiva de um operador positivo usa uma ideia que pode ser generalizada. Seja $f(x)$ uma função real de uma variável real. Se A é um operador autoadjunto de um espaço euclidiano $\mathbf{H}$ de dimensão finita, então existe uma base ortonormada de vetores próprios, na qual o operador é definido por uma matriz diagonal Λ com valores próprios reais λ_k ’s. Então, se os valores próprios estão no domínio natural da função $f(x)$, é possível definir um operador $f(A)$ dizendo que é representado, nesta base, pela matriz diagonal $f(\Lambda)$ com valores próprios $f(\lambda_k)$ ’s.

Por exemplo, se A é não-negativo, é possível definir a sua raiz não-negativa $\sqrt{A}$. Também importante, em física, é a função logaritmo $\log x$, ou melhor a função $x \log x$, relacionada com a entropia.

³⁶N. Bohr, The Spectra of Helium and Hydrogen, *Nature* **92** (1913), 231-232.

Densidade das matrizes diagonalizáveis. Naturalmente, existem matrizes que não são diagonalizáveis. Uma matriz *diagonal superior* é uma matriz quadrada $S = (s_{ij})$ tal que $s_{ij} = 0$ se $i > j$, ou seja, da forma

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & * & \dots & * \\ 0 & s_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Observem que os termos diagonais $\lambda_k = s_{kk}$'s são os valores próprios de S , pois o seu polinómio caraterístico é $c_S(z) = \prod_k (z - s_{kk})$.

Teorema 7.12 (Schur). *Toda matriz quadrada complexa $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é unitariamente semelhante a uma matriz diagonal superior, ou seja, existem uma matriz unitária U e uma matriz diagonal superior S tais que*

$$A = USU^*.$$

Demonstração. A prova é por indução. O teorema é trivial em dimensão um. Assumimos o teorema verdadeiro em dimensão n . Seja $A \in \text{Mat}_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$. Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinómio caraterístico de A admite uma raiz λ , e portanto A admite um vetor próprio $\mathbf{v}$ unitário correspondente. A reta $\mathbb{C}\mathbf{v}$ é um subespaço invariante, e $\mathbb{C}^{n+1}$ é uma soma direta ortogonal de $\mathbb{C}\mathbf{v}$ e o subespaço ortogonal $\mathbf{v}^\perp$, de dimensão n . Seja $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ uma base ortonormada de $\mathbf{v}^\perp$. A matriz que representa A na base ortonormada $\mathbf{v}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma matriz em blocos

$$\begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Pela hipótese indutiva, existem uma base ortonormada $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ de $\mathbf{v}^\perp$ tal que a matriz que representa B nesta base é diagonal superior. Então é claro que também a matriz que representa A na base ortonormada $\mathbf{v}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ é triangular superior. $\square$

Existem operadores/matrizes diagonalizáveis que não são normais, pois uma mudança de coordenadas diagonalizadora pode não ser unitária. Por exemplo, toda matriz $n \times n$ que admite n valores próprios distintos é diagonalizável. Os valores próprios de uma matriz triangular superior são os elementos da diagonal. Perturbações pequenas $s_{kk} + \varepsilon_k$ das entradas diagonais de uma matriz triangular superior $S = U^*AU$ podem portanto produzir matrizes diagonalizáveis $A' = US'U^*$ arbitrariamente próximas de uma matriz dada A . A decomposição de Schur 7.12. implica então

Teorema 7.13. *O conjunto das matrizes complexas diagonalizáveis é denso em $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, ou seja, para toda matriz A e todo $\varepsilon > 0$ é possível encontrar uma matriz diagonalizável A' tal que $\|A - A'\| < \varepsilon$.*

Teorema de Cayley-Hamilton. Se $p \in \mathbb{C}[z]$ é um polinómio na variável z , por exemplo $p(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0$, e A é uma matriz $n \times n$, real ou complexa, então é possível definir a matriz $p(A)$ como

$$p(A) := a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

Por exemplo, é possível considerar o polinómio caraterístico $c_A(z) = \text{Det}(zI - A)$ da própria matriz A , e tentar calcular $c_A(A)$.

Se $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ é uma matriz diagonal, um cálculo elementar (as potências de Λ são também diagonais, e as entradas são as potências dos valores próprios de Λ) mostra que $c_\Lambda(\Lambda) = 0$. Uma matriz diagonalizável $D = U^{-1}\Lambda U$ tem potências da forma $D^k = U^{-1}\Lambda^k U$, e Consequentemente também satisfaz $c_D(D) = U^{-1}c_\Lambda(\Lambda)U = 0$, pois $c_D = c_\Lambda$.

De acordo com o teorema 7.13, para cada matriz A , real ou complexa, é possível encontrar seqüências $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de matrizes complexas diagonalizáveis tais que $D_m \rightarrow A$. Por continuidade,

Teorema 7.14 (Cayley-Hamilton). *Toda matriz quadrada A é uma raiz do próprio polinómio caraterístico, ou seja, satisfaz*

$$c_A(A) = 0$$

Se A é uma matriz $n \times n$ invertível, então é possível multiplicar ambo os membros da identidade $c_A(A) = 0$ por A^{-1} , e obter uma fórmula para a matriz inversa A^{-1} em função das potências $A^0, A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

ex: Por exemplo, mostre que a inversa de uma matriz invertível 2×2 é

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}A} ((\text{Tr}A)I - A) .$$

Matrizes densidade e entropia de von Neumann. Seja $\mathbf{H}$ o espaço de Hilbert de um sistema quântico, que assumimos de dimensão finita. Um *estado puro* é um vetor unitário $|\psi\rangle \in \mathbf{H}$, ao qual corresponde o projetor $P_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$, que é um operador não-negativo com traço unitário $\text{Tr}P = 1$, e tal que $P^2 = P$. Um “ensemble estatístico” dos estados puros $|\psi_k\rangle$ (não necessariamente ortogonais nem independentes) com probabilidades p_k (números entre 0 e 1 com soma $\sum_k p_k = 1$) é descrito pela *matriz densidade*

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$

É claro que ρ é também um operador auto-adjunto não-negativo com traço unitário (pois o traço é linear). O valor médio do observável A no *estado misto* ρ é

$$\langle A \rangle_\rho = \sum_k p_k \langle \psi_k | A | \psi_k \rangle = \text{Tr}(A\rho)$$

A *entropia de von Neumann* (que é a entropia termodinâmica) do ensemble quântico descrito pela matriz densidade ρ é

$$S(\rho) := -\text{Tr}(\rho \log \rho)$$

Pelo teorema espectral, ρ é diagonalizável, ou seja, existe uma base ortonormada $|\varphi_k\rangle$ tal que $\rho = \sum_k \lambda_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$, onde os valores próprios λ_k são também números não negativos (porque $\rho \succeq 0$) com soma $\sum_k \lambda_k = 1$ (porque $\text{Tr}\rho = 1$). Então, por definição,

$$\rho \log \rho := \sum_k (\lambda_k \log \lambda_k) |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

(sendo que $0 \log 0 := 0$), assim que

$$S(\rho) = -\sum_k \lambda_k \log \lambda_k$$

Determinant and zeta function. Let A be a positive self-adjoint operator, defined in some euclidean space of finite or infinite dimension, with eigenvalues $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. The logarithm of its determinant is the sum of the logarithms of its eigenvalues, since

$$\log \text{Det}A = \log(\lambda_1 \lambda_2 \dots) = \log \lambda_1 + \log \lambda_2 + \dots = \text{Tr} \log A$$

(which of course may be divergent, in infinite dimension!). Define the *zeta function* of the operator as the Dirichlet series

$$\zeta_A(z) = \text{Tr}(A^{-z}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^z} .$$

Here z is a complex variable, and it is understood that the zeta function is defined in a half-plane $\Re(z) > \sigma$ where the above sum is absolutely convergent. This is not an issue if the operator

is finite-dimensional, since then $\zeta_A(z)$ is a finite sum, hence an entire function. In this case, a computation shows that

$$\left. \frac{d}{dz} \zeta_A(z) \right|_{z=0} = - \sum_n \log \lambda_n ,$$

which extends to the remarkable identity

$$\log \text{Det} A = -\zeta'_A(0) .$$

Physicists use this identity to “extract” a finite value out of an infinite product that would be otherwise divergent, and call this “zeta function regularization”^{37 38}.

³⁷S.W. Hawking, Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime, *Comm. Math. Phys.* **55**. (1977), 133-148.

³⁸N.M. Robles, *Zeta function Regularization*, M.Sc. thesis, Imperial College London, 2009.

8 Formas quadráticas e pequenas oscilações

ref: [Ap69] Vol 2, 5.12-18 ; [La87] Ch. VIII

8.1 Formas quadráticas reais

27 abr 2023

Formas quadráticas reais. Uma *forma quadrática* em n variáveis reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ é um polinómio homogêneo de grau 2

$$\mathcal{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

com a_{ij} 's coeficientes reais. Se as x_k 's são as coordenadas do vetor $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ relativamente à base canónica, então uma forma quadrática pode ser pensada como um campo escalar $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definido no espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. A homogeneidade implica que $\mathcal{Q}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 \mathcal{Q}(\mathbf{x})$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Os coeficientes a_{ij} formam uma matriz quadrada $n \times n$. Vice-versa, uma matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ define uma forma quadrática

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x}$ denota o vetor coluna $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$.

Existem muitas matrizes A que definem a mesma forma quadrática $\mathcal{Q}$, sendo apenas fixados os elementos diagonais a_{ii} , que são os coeficientes de x_i^2 , e as somas $a_{ij} + a_{ji}$, que são os coeficientes dos produtos mistos $x_i x_j = x_j x_i$ com $i \neq j$. Em particular, substituindo A por $(A + A^\top)/2$, toda forma quadrática é definida por uma única matriz simétrica. É claro que combinações lineares de formas quadráticas com coeficientes reais são formas quadráticas. O espaço linear das formas quadráticas em n variáveis reais pode portanto ser identificado com o espaço linear $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ das matrizes reais simétricas $n \times n$.

e.g. A forma quadrática $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, cujo valor é o quadrado $\|\mathbf{x}\|^2$ da norma euclidiana do vetor $\mathbf{x}$, é definida pela matriz identidade I .

e.g. A forma quadrática $2x_1 x_2$ é definida pela matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Determine a matriz simétrica que define a forma quadrática

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

ex: Determine a matriz simétrica que define as seguintes formas quadráticas

$$\mathcal{Q}(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 \quad \mathcal{Q}(x, y) = 2x^2 + 6xy + 7y^2 \quad \mathcal{Q}(x, y, z) = 2x^2 - yz$$

ex: Verifique que uma forma quadrática satisfaz

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathcal{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 2(\mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \mathcal{Q}(\mathbf{y}))$$

(se $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$, esta é a identidade do paralelogramo).

Mudança de coordenadas e congruências. Seja $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$, definida pela matriz simétrica $A = (a_{ij})$ nas coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ relativas à base canônica. A mudança de coordenadas $x_i = \sum_j u_{ij}y_j$, definida pela matriz invertível $U = (u_{ij})$ (cujas colunas são as coordenadas dos vetores da nova base), transforma a forma quadrática nas variáveis x_i 's na forma quadrática

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j &= \sum_{i,j} a_{ij} \left(\sum_k u_{ik}y_k \right) \left(\sum_\ell u_{j\ell}y_\ell \right) \\ &= \sum_{k,\ell} \left(\sum_{i,j} u_{ik} a_{ij} u_{j\ell} \right) y_k y_\ell = \sum_{k,\ell} b_{k\ell} y_k y_\ell \end{aligned}$$

nas variáveis y_j 's, onde os coeficientes são $b_{k\ell} := \sum_{i,j} u_{ik} a_{ij} u_{j\ell}$. Em termos de matrizes e vetores coluna as coisas são mais simples. A mudança de coordenadas é realizada por $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$, ou seja, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = U^{-1}\mathbf{x}$. Então a forma quadrática $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ é

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = (U\mathbf{y})^\top A (U\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top (U^\top A U) \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top B \mathbf{y}$$

com $B = U^\top A U$. Ou seja, a matriz simétrica que representa a forma quadrática $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ nas coordenadas $y_1, y_2, \dots, y_n$ é a matriz

$$\boxed{B = U^\top A U}$$

Duas matrizes quadradas A e B assim relacionadas são ditas (*linearmente*) *congruentes*, e representam a mesma forma quadrática em sistemas de coordenadas diferentes. É imediato verificar que “ser congruentes” é uma relação de equivalência no espaço das matrizes quadradas. Outro ponto de vista é pensar que duas formas quadráticas definidas por matrizes simétricas congruentes são (*linearmente*) *equivalentes*.

ex: Mostre que se A é simétrica então também $U^\top A U$ é simétrica.

ex: Determine a matriz que define a forma quadrática $x^2 - 4xy - 2y^2$ nas coordenadas $x' = 2x + y$ e $y' = x + y$.

ex: Determine a forma quadrática $13x^2 + 16xy + 5y^2$ nas coordenadas $x' = 2x + y$ e $y' = 3x + 2y$.

Diagonalização de Jacobi. O fato fundamental sobre formas quadráticas reais é a possibilidade de reduzir toda forma quadrática a uma “forma normal”, e a existência de um número finito de possíveis formas normais.

Teorema 8.1. *Uma forma quadrática em n variáveis reais é linearmente equivalente a uma forma*

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \quad (8.1)$$

com $0 \leq p + q \leq n$.

Isto significa que toda matriz simétrica $n \times n$ é congruente a uma matriz diagonal do género

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

(que define a forma normal (8.1)), onde I_p e I_q são matrizes quadradas identidade em dimensão p e q , respetivamente, e $p + q \leq n$ (e os 0's denotam matrizes nulas das dimensões apropriadas).

Este teorema é elementar, pois apenas usa a possibilidade de dividir por 2 e de calcular raízes quadradas de números positivos (e, de fato, generaliza a corpos de característica diferente de 2). A prova consiste em “completar recursivamente os quadrados” até eliminar todos os produtos mistos

do género $a_{ij}x_ix_j$ com $i \neq j$, e depois normalizar as coordenadas para reduzir todos os coeficientes a_{ii} não nulos dos termos quadráticos $a_{ii}x_i^2$ a unidades, positivas ou negativas (dependendo do sinal de a_{ii}).

O teorema espectral (um resultado mais profundo, que usa a estrutura topológica da reta real) permite enunciar e provar um resultado mais preciso utilizando a estrutura euclidiana do espaço $\mathbb{R}^n$. Alguns exemplos são suficientes.

e.g. Por exemplo, a forma quadrática

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + 4x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (2x_2)^2 \end{aligned}$$

é equivalente à forma quadrática $y_1^2 + y_2^2$ nas coordenadas $y_1 = x_1 - x_2$ e $y_2 = 2x_2$.

e.g. A forma quadrática

$$\begin{aligned} 4x_1x_2 &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

é equivalente à forma quadrática $y_1^2 - y_2^2$ nas coordenadas $y_1 = x_1 + x_2$ e $y_2 = x_1 - x_2$.

ex: Determine a forma normal da forma quadrática

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

Formas bilineares simétricas & formas quadráticas. Uma matriz simétrica A define uma *forma bilinear simétrica*, ou seja, uma função $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que é linear em cada variável e tal que $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, por meio de

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{y}.$$

Em coordenadas, $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$. Ou seja, se $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ denotam os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, então $a_{ij} = \mathcal{B}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Uma forma bilinear simétrica é também chamada *produto escalar*, pois satisfaz os axiomas E1 e E2 de um produto interno, embora não seja necessariamente definida positiva (produtos escalares não positivos aparecem, por exemplo, no espaço-tempo da relatividade especial). A função

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x},$$

é então uma forma quadrática. A forma bilinear $\mathcal{B}$ pode ser reconstruída usando uma das duas fórmulas

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} (\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}) - \mathcal{Q}(\mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{4} (\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y})), \end{aligned} \tag{8.3}$$

cujas verificações é elementar. O espaço das formas quadráticas em n variáveis reais pode portanto ser identificado também com o espaço dos produtos escalares em $\mathbb{R}^n$.

e.g. O produto escalar definido pela forma quadrática $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ é o produto interno canónico $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ de $\mathbb{R}^n$.

e.g. A forma quadrática $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ define um produto escalar no espaço-tempo de coordenadas $(t, x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ que não é definido positivo.

Forma normal de formas bilineares. Uma prova conceptual do teorema 8.1, ou seja, uma versão geométrica da estratégia que consiste em completar os quadrados, usa a forma bilinear $\mathcal{B}$ associada a uma forma quadrática $\mathcal{Q}$, pensada como produto escalar (não necessariamente positivo) em $\mathbb{R}^n$.

Dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditos *$\mathcal{B}$ -ortogonais* se $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Um vetor $\mathbf{x}$ é dito *$\mathcal{B}$ -nulo* se é ortogonal a todos os vetores de $\mathbb{R}^n$, i.e. se $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ para todo $\mathbf{y}$. É claro que o conjunto dos vetores $\mathcal{B}$ -nulos forma um subespaço V_0 de $\mathbb{R}^n$, chamado *núcleo* de $\mathcal{Q}$, onde a forma bilinear $\mathcal{B}$, e portanto a forma quadrática $\mathcal{Q}$, são identicamente nulas.

O teorema 8.1 é equivalente ao seguinte teorema.

Teorema 8.2. *Uma forma bilinear simétrica em n variáveis reais é linearmente equivalente a uma forma*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1}y_{p+1} - x_{p+2}y_{p+2} - \cdots - x_{p+q}y_{p+q} \quad (8.4)$$

com $0 \leq p + q \leq n$.

Isto significa que, num sistema de coordenadas conveniente, a forma é definida por uma matriz diagonal $I_{p,q}$ em (8.2).

Demonstração. Se $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x}$, então, pelas (8.3), a forma $\mathcal{B}$ é identicamente nula, e portanto é a forma bilinear associada a matriz $I_{0,0}$ em qualquer base. Caso contrário, existe um vetor $\mathbf{v}_1$ tal que $\mathcal{Q}(\mathbf{v}_1) \neq 0$. Seja V_1 o subespaço dos vetores $\mathcal{B}$ -ortogonais a $\mathbf{v}_1$. Sendo definido pela equação homogênea não trivial $\mathcal{B}(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}) = 0$, tem dimensão $n - 1$. Consideramos agora a restrição da forma quadrática a V_1 . Se é identicamente nula, paramos. Caso contrário, existe um vetor $\mathbf{v}_2 \in V_1$ tal que $\mathcal{Q}(\mathbf{v}_2) \neq 0$. Os vetores de V_1 que são $\mathcal{B}$ -ortogonais a $\mathbf{v}_2$ formam então um subespaço de dimensão $n - 2$. É claro que esta construção pode continuar, e produz uma sequência de vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, com $m \leq n$, sobre os quais a forma quadrática não é nula e que são $\mathcal{B}$ -ortogonais dois a dois. É então possível renormalizar os $\mathbf{v}_k$'s (ou seja, dividir por $|\mathcal{Q}(\mathbf{v}_k)|$) e construir vetores $\mathbf{w}_k$'s tais que $\mathcal{Q}(\mathbf{w}_i) = \pm 1$ e $\mathcal{B}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = 0$ se $i \neq j$. Se $m = n$, temos uma base de $\mathbb{R}^n$. Se $m < n$, então a forma quadrática é identicamente nula no subespaço V_m , que tem dimensão $n - m$. É possível então completar uma base $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ escolhendo uma base arbitrária $\mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ de V_m . $\square$

8.2 Formas quadráticas em espaços euclidianos

Diagonalização de formas quadráticas em espaços euclidianos. Seja $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ uma forma quadrática no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, definida pela matriz simétrica $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ relativamente à base canônica $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (ou outra base ortonormada), onde $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$ e X denota o vetor coluna $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$. A matriz simétrica A define um operador simétrico $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e a forma quadrática é dada por

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, T_A \mathbf{x} \rangle$$

Pelo teorema espectral 7.3, existe uma base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de T_A , com valores próprios (reais) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Portanto existe uma matriz ortogonal $U = (u_{ij})$, cujas colunas são os vetores próprios (ou seja, $\mathbf{u}_j = \sum_i u_{ij} \mathbf{e}_i$), tal que

$$U^\top A U = \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Nesta base, a forma quadrática é “diagonal”. De fato, se $\mathbf{x} = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + y_n \mathbf{u}_n$ e portanto o vetor coluna das novas coordenadas é $\mathbf{y} = U^\top \mathbf{x}$, então

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = (U \mathbf{y})^\top A (U \mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top \Lambda \mathbf{y}$$

Este é o conteúdo da seguinte versão do teorema espectral para formas quadráticas, usualmente atribuída a Lagrange ³⁹.

Teorema 8.3 (Lagrange). *Seja Q uma forma quadrática no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, definida na base canônica pela matriz simétrica A . Existe uma base ortonormada, e portanto umas coordenadas ortonormadas correspondentes y_k 's, tais que a forma quadrática é uma combinação linear de quadrados*

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

com coeficientes reais $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, que são os valores próprios de A .

Uma forma normal mais simples é possível se admitimos a possibilidade de usar bases ortogonais mas não necessariamente ortonormadas. Sejam $d_k = \sqrt{|\lambda_k|}$, se $\lambda_k \neq 0$, ou $d_k = 1$ se $\lambda_k = 0$. A mudança de coordenadas $y_k \mapsto z_k = d_k y_k$, definida por $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} = D^{-1} \mathbf{z}$ com $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ matriz diagonal com entradas positivas (que não é ortogonal se pelo menos um dos valores próprios tem módulo $|\lambda_k| \neq 1$), transforma a matriz A numa matriz diagonal

$$A' = D^\top A D = (UD)^\top A (UD)$$

com valores próprios nulos ou iguais a $\lambda_k/|\lambda_k| = \pm 1$. Nestas coordenadas, a forma quadrática assume portanto a forma $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \mathbf{z}^\top \Lambda' \mathbf{z}$, que é uma soma de quadrados com coeficientes unitários, positivos ou negativos, ou nulos. Assim, a menos de reordenar os elementos da base, a matriz A é congruente a uma matriz diagonal

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com p valores próprios iguais a 1 (a cardinalidade dos valores próprios positivos de T_A), q valores próprios iguais a -1 (a cardinalidade dos valores próprios negativos de A), e $n - (p + q)$ valores próprios nulos (a dimensão do núcleo de T_A). Em particular, o teorema 8.1 é uma consequência de

Teorema 8.4 (Gauss-Jacobi-Sylvester). *Seja Q uma forma quadrática no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Existe uma base ortogonal (não necessariamente ortonormada), e portanto umas coordenadas ortogonais z_k 's, tais que a forma quadrática é*

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - \cdots - z_{p+q}^2. \quad (8.5)$$

onde $p \geq 0$ e $q \geq 0$ são inteiros tais que $p + q \leq n$.

Lei de inércia de Sylvester. As dimensões p e q na forma normal (8.5), sujeitas à condição $0 \leq p + q \leq n$, têm o seguinte significado. Seja Q a forma quadrática definida por $I_{p,q}$. Então o espaço é uma soma direita $\mathbb{R}^n = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ de um subespaço $V_+ \approx \mathbb{R}^p$ de dimensão p (gerado pelos primeiros p vetores da base canônica) onde a forma quadrática é positiva, i.e. $Q(\mathbf{v}) > 0$, um subespaço $V_- \approx \mathbb{R}^q$ de dimensão q onde a forma quadrática é negativa, i.e. $Q(\mathbf{v}) < 0$, e um subespaço complementar $V_0 \approx \mathbb{R}^{n-(p+q)}$ onde a forma quadrática é nula, i.e. $Q(\mathbf{v}) = 0$.

É claro que as dimensões p e q , e consequentemente $n_0 = n - (p + q)$, são invariantes da forma quadrática, ou seja, apenas dependem da classe de congruência da matriz simétrica A que define a forma quadrática, e não do sistema de coordenadas usado, ortogonal ou não. Este é o conteúdo da lei de inércia de Sylvester ⁴⁰, Jacobi ⁴¹, e do próprio Gauss.

³⁹J. Lagrange, Recherches sur la méthode de maximis et minimis. *Miscellanea Taurinensia* 1 (1759), 18-32.

⁴⁰J. Sylvester, A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitution to the form of a sum of positive and negative squares. *Philosophical Magazine* IV (1852), 138-142.

⁴¹C.G. Jacobi, Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 53 (1857), 275-280.

Teorema 8.5 (lei de inércia de Sylvester). *Toda matriz real simétrica $n \times n$ é congruente a uma única matriz $I_{p,q}$ com $0 \leq p + q \leq n$.*

Demonstração. Seja Q a forma quadrática definida pela matriz simétrica $I_{p,q}$. Então existe um subespaço $V_{\leq 0} = V_- \oplus V_0 \approx \mathbb{R}^{n-p}$, de dimensão $n-p$, onde a forma quadrática é não-positiva, i.e. $Q(\mathbf{v}) \leq 0$ se $\mathbf{v} \in V_{\leq 0}$. Assumimos que num outro sistema de coordenadas a forma quadrática é definida pela matriz simétrica $I_{p',q'}$, com $p' > p$, e seja $V'_+ \approx \mathbb{R}^{p'}$ o subespaço gerado pelas primeiras p' coordenadas, onde a forma é positiva. Por razões dimensionais ($p' + (n-p) > n$) existe um vetor não nulo $\mathbf{v} \in V_{\leq 0} \cap V'_+$. Neste vetor, $Q(\mathbf{v}) > 0$, o que é uma contradição. $\square$

A cardinalidade dos pares de inteiros não negativos p e q tais que $0 \leq p + q \leq n$ é portanto igual ao número de classes de equivalências lineares das formas quadráticas em n variáveis. Este número é $(n+1)(n+2)/2$.

ex: Diagonalize as seguintes formas quadráticas no plano euclidiano

$$\begin{array}{cccccc} x^2 + 2y^2 & xy & x^2 - 2xy + y^2 & x^2 + xy + y^2 & 5x^2 - 6xy + 5y^2 \\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy & 2x^2 + 5y^2 - 4xy & 5x^2 + 6xy + 5y^2 & x^2 + y^2 - 2xy \\ 5x^2 - 4xy + 2y^2 & 2x^2 - 4xy - y^2 & 2x^2 + xy + 2y^2 & 11x^2 + 4xy + 14y^2 \end{array}$$

ex: Diagonalize as seguintes formas quadrática no espaço euclidiano

$$2x^2 - yz \quad x^2 - 2xy + 4yz + 6xz - 3z^2$$

ex: [Ap69] Vol. 2 5.15.

8.3 Princípios min-max

Quociente de Rayleigh-Ritz Seja T um operador simétrico de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{H}$. Fixada uma base ortormada, podemos assumir que $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ e que o operador é definido, na base ortonormada canónica, por uma matriz simétrica A . Sendo números reais, os valores próprios do operador T , ou seja, da matriz A , podem ser ordenados, por exemplo em ordem crescente

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$$

(valores próprios iguais sendo repetidos de acordo com a multiplicidade geométrica). É também conveniente denotar $\lambda_{\min}(A) := \lambda_1(A)$ e $\lambda_{\max} := \lambda_n(A)$ o menor e o maior valor próprio, respetivamente.

Consideramos a forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ definida pela matriz A . O gradiente da forma quadrática é

$$\nabla Q(\mathbf{x}) = 2T\mathbf{x}$$

A esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é a superfície de nível 1 da função $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ (a forma quadrática definida pela matriz identidade), cujo gradiente é

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}.$$

Os dois gradientes são proporcionais nos pontos da esfera unitária onde $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algum λ . Mas isto significa que o fator de proporcionalidade λ é um valor próprio de T , que $\mathbf{x}$ é um vetor próprio de T , e que nestes pontos $Q(\mathbf{x}) = \lambda$. De acordo com a teoria dos multiplicadores de Lagrange,

Teorema 8.6. *Os vetores e os valores próprios do operador simétrico $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são os pontos e os valores críticos, respetivamente, da restrição da forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$ à esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1}$.*

Uma prova alternativa, que não usa os multiplicadores de Lagrange, é a seguinte.

Demonstração. Seja $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^{n-1}$ um ponto da esfera unitária. Os “equadores” que passam por $\mathbf{x}$ são os caminhos $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{x} + \sin(t)\mathbf{v} \in \mathbf{S}^{n-1}$, onde $\mathbf{v}$ é um vetor unitário do hiperplano $\mathbf{x}^\perp$ (observe que $\mathbf{x} + \mathbf{x}^\perp$ é o plano tangente à esfera unitária no ponto $\mathbf{x}$). Um cálculo elementar, que usa a simetria de T , mostra que a derivada da função $f(t) := Q(\mathbf{r}(t))$ é $f'(t) = 2\langle \dot{\mathbf{r}}(t), T\mathbf{r}(t) \rangle$, onde $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin(t)\mathbf{x} + \cos(t)\mathbf{v}$. Em particular, no instante $t = 0$, esta derivada é $f'(0) = 2\langle \mathbf{v}, T\mathbf{x} \rangle$. Se $\mathbf{x}$ é um extremo local da restrição de Q na esfera unitária, então $f'(0)$ é igual a zero para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{x}^\perp$, e isto implica que $T\mathbf{x}$ é proporcional a $\mathbf{x}$. Isto significa que $\mathbf{x}$ é um vetor próprio de T . Mas o valor da forma quadrática num vetor próprio unitário é igual ao valor próprio associado. $\square$

Sendo a esfera unitária compacta, o teorema de Weierstrass garante a existência de um máximo e um mínimo da restrição da forma quadrática, e portanto a existência de dois valores próprios, $\lambda_{\max}$ e $\lambda_{\min}$. Este raciocínio oferece uma prova alternativa do teorema espectral (sempre baseada no teorema de Weierstrass, como a prova que usa o teorema fundamental da álgebra) e também a seguinte caracterização variacional dos valores próprios mínimo e máximo.

Teorema 8.7 (Rayleigh-Ritz). *Seja T um operador simétrico de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{H}$, com valores próprios $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$. Para todos $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$*

$$\lambda_{\min} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle \leq \lambda_{\max} \|\mathbf{x}\|^2.$$

Os valores próprios mínimo e máximo de T são

$$\lambda_{\min} = \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle \quad e \quad \lambda_{\max} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle.$$

Também pode ser útil usar vetores não unitários. O *quociente de Rayleigh-Ritz* ⁴² ⁴³ (do operador T) é a função

$$\mathcal{R}_T(\mathbf{x}) := \frac{\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

definida nos vetores não nulos de $\mathbf{H}$. O quociente de Rayleigh-Ritz calculado num vetor próprio é o valor próprio correspondente, pois, se $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ então $\mathcal{R}_T(\mathbf{v}) = \lambda$. O teorema 8.7 então diz que

$$\lambda_{\min} \leq \mathcal{R}_T(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\max} \quad (8.6)$$

e que o menor e o maior dos valores próprios podem ser calculados minimizando ou maximizando o quociente de Rayleigh-Ritz sobre todos os vetores não nulos.

ex: Determine máximo e mínimo das seguintes funções na circunferência unitária do plano $\mathbb{R}^2$.

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2 \quad f(x, y) = x^2 + 2xy \quad f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2$$

⁴²J.W. Strutt (later Lord Rayleigh), In Finding the Correction for the Open End of an Organ-Pipe, *Phil. Trans.* **161** (1870) 77.

⁴³W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. reine angew. Math.* **135** (1908).

Princípio min-max de Courant-Fischer. Os outros valores próprios também podem ser caracterizados/calculados usando um princípio variacional.

Teorema 8.8 (Courant-Fischer). *Sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ os valores próprios de um operador simétrico T de um espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$. Então o k -ésimo valor próprio λ_k é igual ao mínimo, sobre todos os subespaços $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k , do maior quociente de Rayleigh $\mathcal{R}_T(\mathbf{x})$ calculado nos vetores não nulos de V , ou seja,*

$$\lambda_k = \min_{V \subset \mathbf{H}, \dim V = k} \max_{0 \neq \mathbf{x} \in V} \mathcal{R}_T(\mathbf{x}) \quad (8.7)$$

e também é igual ao máximo, sobre todos os subespaços $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $n - k + 1$, do menor quociente de Rayleigh $\mathcal{R}_T(\mathbf{x})$ calculado nos vetores não nulos de V , ou seja,

$$\lambda_k = \max_{V \subset \mathbf{H}, \dim V = n - k + 1} \min_{0 \neq \mathbf{x} \in V} \mathcal{R}_T(\mathbf{x}). \quad (8.8)$$

Demonstração. De acordo com o teorema espectral 7.3 existe uma base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ de $\mathbf{H}$ formada por vetores próprios de T , ou seja, $T\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$. Por razões dimensionais, todo subespaço $V \subset \mathbf{H}$ de dimensão k contém pelo menos um vetor não trivial do subespaço gerado pelos $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n$'s, ou seja, um vetor do género $\mathbf{x} = x_k \mathbf{u}_k + x_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + x_n \mathbf{u}_n$ com pelo menos um coeficiente $x_i \neq 0$. É claro que o valor do quociente de Rayleigh-Ritz neste vetor é $\mathcal{R}_T(\mathbf{x}) \geq \lambda_k$. Por outro lado, este valor minimal é certamente atingido no ponto $\mathbf{u}_k$, que pertence ao particular subespaço de dimensão k gerado pelos primeiros k vetores próprios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$. Isto prova o princípio variacional (8.7). O princípio dual, (8.8), é obtido ao substituir T com $-T$, e ao observar que $\lambda_k(-T) = \lambda_{n-k+1}(T)$. $\square$

Métodos de Monte Carlo. Estes princípios variacionais são o fundamento teórico dos “algoritmos de Monte Carlo” para calcular/estimar os valores próprios de um operador simétrico. É possível gerar um número grande de pontos aleatórios na esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1}$, e assim estimar o máximo de $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$ na esfera, logo o maior valor próprio λ_n e o vetor próprio associado $\mathbf{x}_n$. O subespaço ortogonal $\mathbf{x}_n^\perp$ é invariante, e a sua interseção com a esfera unitária é uma esfera $\mathbf{x}_n^\perp \cap \mathbf{S}^{n-1} \approx \mathbf{S}^{n-2}$ de dimensão $n - 2$. O máximo de $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$ nesta esfera é então o valor próprio λ_{n-1} , que é atingido num vetor próprio $\mathbf{x}_{n-1}$. E assim a seguir.

Desigualdades de Weyl. O quociente de Rayleigh é uma função linear do operador. Em particular, se A e B são dois operadores auto-adjuntos de um espaço euclidiano, e $\mathbf{v}$ um vetor não nulo, então $\mathcal{R}_{A+B}(\mathbf{v}) = \mathcal{R}_A(\mathbf{v}) + \mathcal{R}_B(\mathbf{v})$. As desigualdades de Rayleigh-Ritz (8.6) implicam então que

$$\mathcal{R}_A(\mathbf{v}) + \lambda_{\min}(B) \leq \mathcal{R}_{A+B}(\mathbf{v}) \leq \mathcal{R}_A(\mathbf{v}) + \lambda_{\max}(B).$$

Consequências imediatas do princípio variacional de Courant-Fischer 8.8, são as *desigualdades de Weyl* (parte de uma família maior de desigualdades) seguintes.

Teorema 8.9 (Weyl). *Se A e B são dois operadores auto-adjuntos de um espaço euclidiano de dimensão finita, então*

$$\lambda_k(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_k(A + B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_{\max}(B).$$

Em particular, se observamos que o raio espectral do operador auto-adjunto B é o seu valor próprio de módulo máximo, ou seja, $\rho(B) = \max\{|\lambda_{\min}(B)|, |\lambda_{\max}(B)|\}$, temos também

$$|\lambda_k(A + B) - \lambda_k(A)| \leq \rho(B).$$

O operador $A + B$ pode ser pensado como sendo uma perturbação do operador A , pequena se $\rho(B)$ é pequeno. Então esta desigualdade diz que os valores próprios são estáveis por perturbações pequenas.

8.4 Formas quadráticas positivas e elipsoides

Formas quadráticas positivas e elipsoides. Uma forma quadrática $Q(\mathbf{x})$ em $\mathbb{R}^n$ é *positiva* se $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo vetor $\mathbf{x} \neq 0$.

Seja $T \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ o operador simétrico que define a forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle$, e seja A a matriz simétrica que define T na base canônica de $\mathbb{R}^n$, assim que a forma é $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$. De acordo com o teorema 8.3, existe uma base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ de vetores próprios de T , com valores próprios reais $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, respetivamente. Nas coordenadas $y_1, y_2, \dots, y_n$ relativas a esta base, definidas pela equação $\mathbf{y} = U^\top \mathbf{x}$, onde U é a matriz ortogonal cujas colunas são os $\mathbf{u}_k$'s, a forma quadrática é uma combinação linear de quadrados

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \Lambda \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

onde $\Lambda = U^\top A U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Mas uma combinação linear de quadrados é positiva sse todos os coeficientes são positivo. Portanto, a forma quadrática definida pela matriz simétrica A é positiva sse todos os valores próprios de A são positivos, ou seja, $\lambda_k > 0$ para todos os $k = 1, 2, \dots, n$, ou seja, sse o operador simétrico T é positivo.

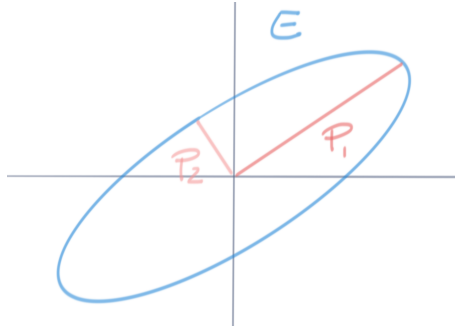
Se Q é positiva, então a desigualdade

$$Q(\mathbf{x}) \leq 1$$

ou seja, $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \leq 1$, define um conjunto limitado $E \subset \mathbb{R}^n$, dito *elipsoide*, cuja fronteira é a superfície quadrática (também chamada elipsoide) de equação cartesiana $Q(\mathbf{x}) = 1$, ou seja, $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = 1$. Numa base ortonormada que diagonaliza A , a equação que define o elipsoide tem a forma

$$\frac{y_1^2}{p_1^2} + \frac{y_2^2}{p_2^2} + \dots + \frac{y_n^2}{p_n^2} \leq 1$$

onde $p_k := 1/\sqrt{\lambda_k}$. Os números positivos $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ são chamados *semi-eixos (principais)* do elipsoide, e os vetores próprios unitários $\mathbf{u}_k$ de A são chamados *direções principais* do elipsoide. A interseção do elipsoide E com cada reta $\mathbb{R}\mathbf{u}_k$ é o segmento $|y_k| \leq p_k$.



É uma consequência imediata do princípio min-max de Courant-Fischer 8.8 que os semi-eixos principais podem ser caracterizados pelos seguintes princípios variacionais.

Teorema 8.10. *Seja $Q(\mathbf{x})$ uma forma quadrática positiva em $\mathbb{R}^n$, e sejam $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ os semi-eixos principais do elipsoide $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; Q(\mathbf{x}) \leq 1\}$. Então o semi-eixo p_k é o máximo, sobre todos os subespaços $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k , da menor norma $\|\mathbf{x}\|$ de um vetor $\mathbf{x} \in E \cap V$, ou seja,*

$$p_k = \max_{V \subset \mathbb{R}^n, \dim V = k} \min_{\mathbf{x} \in V \cap E} \|\mathbf{x}\|$$

e.g. Por exemplo, a forma quadrática $Q(x, y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$ é definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

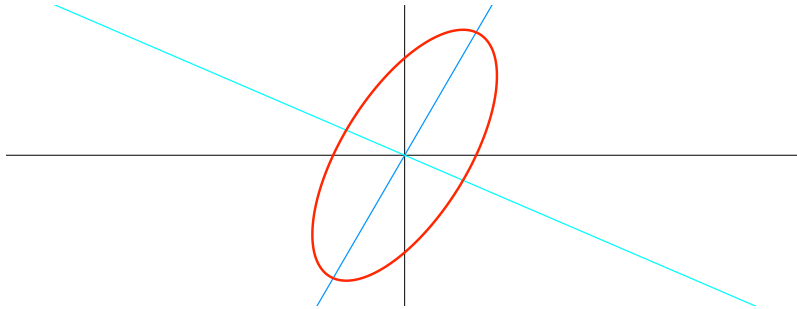
As raízes do polinómio caraterístico $z^2 - 7z + 6$ são os valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$. Em particular, a forma quadrática é positiva. Vetores próprios normalizados, soluções dos sistemas homogêneos $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$, são $\mathbf{u}_1 = (1, 2)/\sqrt{5}$ e $\mathbf{u}_2 = (-2, 1)/\sqrt{5}$. Sejam (x', y') as coordenadas relativas a base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. A mudança de coordenadas $(x, y) \mapsto (x', y')$ é definida por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, onde U é a matriz ortogonal

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

cujas colunas são as coordenadas dos vetores $\mathbf{u}_k$ na base canónica. Então a forma quadrática Q nas coordenadas x' e y' é definida pela matriz diagonal $U^\top AU$ com valores próprios 1 e 6, e é

$$x'^2 + 6y'^2$$

O elipsoide $Q(x, y) \leq 1$ tem portanto semi-eixos $p_1 = 1$ e $p_2 = 1/\sqrt{6}$, e tem este aspeto:



ex: Mostre que uma forma quadrática em n variáveis é positiva sse existe uma base ortogonal (mas não necessariamente ortonormada) na qual a forma quadrática assume a forma

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2.$$

Em outras palavras, a forma quadrática $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ é positiva sse existe uma matriz invertível C tal que $C^\top AC = I$.

ex: Deduza que a forma bilinear $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{y}$, associada a uma forma quadrática positiva $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ é um produto escalar.

ex: Calcule os semi-eixos dos elipsoides definidos por

$$3x^2 + 2y^2 \leq 1 \qquad 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 1 \qquad 2x^2 - 4xy + 5y^2 \leq 1$$

Sistemas lineares e minimização de funções quadráticas. Se a é um número positivo e b um número arbitrário, então a única solução da equação linear $ax = b$ (ou seja, b/a) é também o único mínimo do polinómio quadrático $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx$. Esta observação elementar estende em dimensão superior.

Seja $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ uma forma quadrática positiva, definida pelo operador (simétrico) positivo T , ou seja, pela matriz simétrica positiva A . Dado um vetor $\mathbf{b}$, a função quadrática

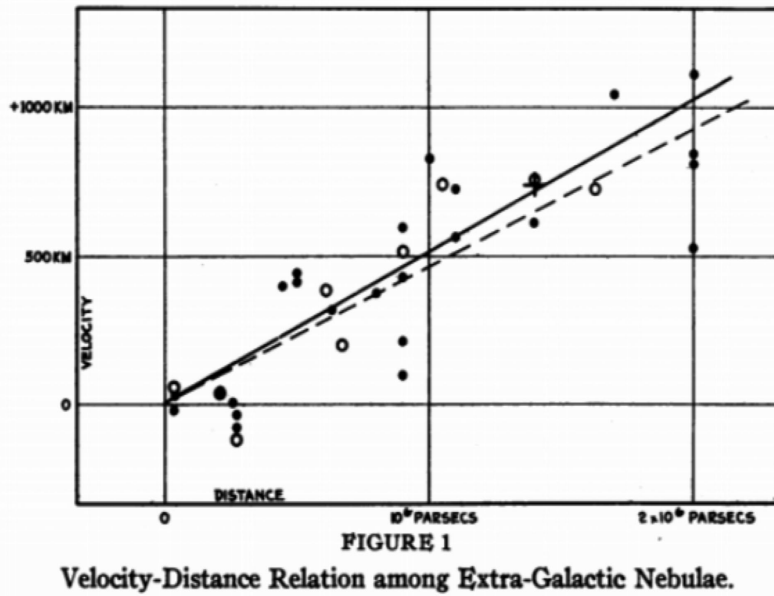
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$$

atinge um (único) mínimo quando $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ou seja, sendo T invertível, no ponto $\mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{b}$. De fato, o gradiente de f é $\nabla f(\mathbf{x}) = T\mathbf{x} - \mathbf{b}$, e é também claro que $|f(\mathbf{x})|$ é grande quando $\|\mathbf{x}\|$ é grande, assim que o único ponto crítico deve ser um mínimo. Portanto, as soluções de um sistema linear, pelo menos quando a matriz dos coeficientes é uma matriz simétrica positiva, são soluções de um problema de minimização (assim como as equações de Euler-Lagrange!).

Teorema 8.11. Se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador positivo e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ um vetor arbitrário, então a solução da equação linear $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é o único mínimo da função quadrática $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$, e vice-versa.

Esta observação “geométrica/analítica” motiva métodos probabilísticos ou iterativos para aproximar as soluções de equações lineares, particularmente úteis em dimensão grande, quando os métodos “algébricos” (como a eliminação de Gauss) são pouco práticos.

Reta de regressão. Muitas leis da físicas são relações lineares $y = \lambda x$ entre dois observáveis x e y . Para determinar o valor do coeficiente λ , os físicos observam os valores $y_1, y_2, \dots, y_n$ de y em correspondência de certos valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ de x (naturalmente com certas incertezas, que nesta discussão podemos ignorar). O problema é que dificilmente estes pontos (x_k, y_k) do plano estão colocados exatamente numa reta. A situação típica é ilustrada nesta figura original de Hubble ⁴⁴ que ilustra a relação velocidade-distância entre as nebulosas extra-galácticas.



Se não existe uma reta que passa por todos os pontos, podemos então perguntar qual a reta que “melhor aproxima” a distribuição destes pontos. A resposta de Gauss é: a reta que minimiza a soma

$$(y_1 - \lambda x_1)^2 + (y_2 - \lambda x_2)^2 + \dots + (y_n - \lambda x_n)^2$$

dos quadrados dos “erros” $\varepsilon = y_n - \lambda x_n$. Esta é uma função quadrática, e possui apenas um mínimo, pois $\rightarrow \infty$ quando $\lambda \rightarrow \pm\infty$.

ex: Calcule o valor de λ que minimiza a soma dos erros quadráticos.

Método dos mínimos quadrados. Sejam $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. O problema linear

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

para um vetor incógnito $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser inconsistente, se $m > n$ ou se $\mathbf{b}$ não está na imagem de A . Uma *solução de mínimos quadrados* é um vetor $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ que minimiza a soma $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_m^2$ dos quadrados dos “erros” $\varepsilon_i := (\sum_j a_{ij} x_j) - b_i$. Esta soma é igual ao quadrado da distância euclidiana entre $A\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$, ou seja,

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^\top (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{x}^\top A^\top A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top A^\top \mathbf{b} + \mathbf{b}^\top \mathbf{b}$$

⁴⁴H. Hubble, A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae, *PNAS* **15** (1929), 168-173.

Portanto, sendo o termo constante $\mathbf{b}^\top \mathbf{b}$ irrelevante, a solução de quadrados mínimos minimiza a função quadrática

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A' \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b}'$$

onde $A' = A^\top A$ e $\mathbf{b}' = A^\top \mathbf{b}$. Se as colunas de A são linearmente independentes, então é claro que a matriz quadrada $A^\top A \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R})$ é invertível e positiva. Consequentemente, pelo teorema 8.11, a única solução de quadrados mínimos é

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b}} \quad (8.9)$$

Observe que se $n = m$ e A é invertível, esta solução é $A^{-1} \mathbf{b}$, como esperado.

Esta fórmula tem uma consequência útil. Seja $S \subset \mathbb{R}^m$ um subespaço de dimensão $n \leq m$ gerado pelos vetores independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ de $\mathbb{R}^m$. Seja $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_k$'s. Então o subespaço S é a imagem de L_A , ou seja, o conjunto dos vetores $A\mathbf{x}$ com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. A projeção ortogonal de um vetor genérico $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ sobre S é, por definição, o vetor $P_S(\mathbf{y})$ de S que minimiza a sua distância de $\mathbf{y}$. Mas este vetor é precisamente a imagem $A\bar{\mathbf{x}}$ da solução de mínimos quadrados do problema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. A fórmula (8.9) implica portanto que a projeção é

$$P_S(\mathbf{y}) = A\bar{\mathbf{x}} = A(A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{y}$$

Consequentemente, a matriz que define a projeção ortogonal sobre o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas da matriz A é

$$\boxed{A(A^\top A)^{-1} A^\top} \quad (8.10)$$

Observe que quando os $\mathbf{v}_k$'s são um sistema ortonormado reencontramos a fórmula (5.7), pois então A é ortogonal, e portanto $AA^\top = I$.

ex: Mostre que se $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tem característica n então $A^\top A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ também tem característica n , e portanto é invertível e positiva.

Integrais gaussianos. Uma forma quadrática positiva $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ em n variáveis define uma *gaussiana*

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \mathcal{Q}(\mathbf{x})\right),$$

que é uma função absolutamente integrável no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. O primeiro passo no cálculo do seu integral impróprio é a fórmula mágica de Laplace, (1778) (de acordo com Littlewood⁴⁵, “not accessible to intuition at all”),

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}} \quad (8.11)$$

em dimensão um. Pode ser verificada observando que o quadrado do integral da gaussiana $e^{-x^2/2}$ na reta real é, pelo teorema de Fubini, igual ao integral da gaussiana $e^{-(x^2+y^2)/2}$ no plano, e o cálculo de este último integral é elementar em coordenadas polares. Os integrais impróprios das outras gaussianas em uma variável são facilmente calculados mudando variáveis: se $\lambda > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}. \quad (8.12)$$

É ainda possível acrescentar um termo linear, completar o quadrado, e calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2 + bx} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{\frac{1}{2} b^2/\lambda} \quad (8.13)$$

Colocamos então o problema de calcular o integral impróprio da gaussiana generalizada

$$e^{-\frac{1}{2} \mathcal{Q}(\mathbf{x}) + (\mathbf{b}, \mathbf{x})} = e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x}}$$

⁴⁵J.E. Littlewood, Newton and the Attraction of a Sphere, *The Mathematical Gazette* **32** (1948), 179-181.

nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, onde A é uma matriz simétrica positiva $n \times n$ que define a forma quadrática $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$, e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor arbitrário (integrais deste género, generalizados a campos contínuos, são os instrumentos básicos da teoria dos campos, onde o termo linear representa uma “fonte”). Pelo teorema 8.3, ou seja, pelo teorema espectral 7.3, existe uma matriz ortogonal U , e portanto uma mudança de coordenadas ortogonal $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = U^\top \mathbf{x}$, que diagonaliza a forma quadrática. Se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ são os valores próprios de A , então $U^\top A U$ é a matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. O determinante jacobiano é $\text{Det}(\partial y_i / \partial x_j) = \text{Det} U^\top = \pm 1$, pois a matriz é ortogonal. Então o integral fatoriza num produto de integrais gaussianos na reta

$$\begin{aligned} \iint \dots \int e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x}} dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \iint \dots \int e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \Lambda \mathbf{y} + \mathbf{c}^\top \mathbf{y}} dy_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\int e^{-\frac{1}{2} \lambda_k y_k^2 + c_k y_k} dy_k \right) \end{aligned}$$

onde os c_k 's são as coordenadas do vetor $\mathbf{c} = U^\top \mathbf{b}$. Estes integrais podem ser calculados completando os quadrados e usando a (8.12), o que resulta em

$$\int e^{-\frac{1}{2} \lambda_k y_k^2 + c_k y_k} dy_k = e^{\frac{1}{2} c_k^2 / \lambda_k} \int e^{-\frac{1}{2} \lambda_k (y_k + c_k / \lambda_k)^2} dy_k = e^{\frac{1}{2} c_k^2 / \lambda_k} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_k}}$$

Ao calcular o produto, observamos que $\prod_k \lambda_k = \text{Det} A$ e que $\sum_k c_k^2 / \lambda_k = \mathbf{c}^\top \Lambda^{-1} \mathbf{c} = \mathbf{b}^\top A^{-1} \mathbf{b}$. Portanto, o resultado final é a fórmula

$$\boxed{\iint \dots \int e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x}} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\text{Det} A}} e^{\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top A^{-1} \mathbf{b}}} \quad (8.14)$$

ex: O Hamiltoniano do oscilador harmónico quântico em dimensão um é o operador $H = -D^2 - X^2$, onde $D = d/dx$ denota o operador derivação e X denota o operador multiplicação, definido por $(Xf)(x) := x f(x)$. Verifique que a gaussiana $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ é uma função própria de H , ou seja, satisfaz $H\varphi = \lambda\varphi$, com valor próprio $\lambda = 1$.

ex: Prove as fórmulas (8.11), (8.12) e (8.13).

8.5 Decomposição polar e valores singulares

2 mai 2023

Decomposição polar e valores singulares. Todo número complexo pode ser decomposto como produto $z = \rho e^{i\theta}$ de um número real não-negativo $\rho = \sqrt{z\bar{z}}$ e uma “fase” $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, de forma única se $z \neq 0$. Esta decomposição estende aos operadores.

Seja $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ um operador linear definido num espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$, real ou complexo. O operador $P = T^* T$ é (auto-adjunto e) não-negativo. Pelo teorema espectral admite n valores próprios não-negativos $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ (não necessariamente distintos), e uma base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ de vetores próprios, que satisfazem $(T^* T) \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$. Podemos então definir o operador auto-adjunto não-negativo $R : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de acordo com

$$R \mathbf{e}_k := \sqrt{\lambda_k} \mathbf{e}_k$$

Os valores próprios de R são portanto as raízes quadradas $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$ dos valores próprios de $T^* T$, e são chamados *valores singulares* do operador T . É claro que $R^2 = T^* T$, e de fato, de acordo com o teorema 7.11, R é a única raiz quadrada não-negativa de $T^* T$, assim que faz sentido usar a notação $R = |T|$, ou também $R = \sqrt{T^* T}$.

Sendo

$$\|T\mathbf{v}\|^2 = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, T^* T \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, R^2 \mathbf{v} \rangle = \langle R\mathbf{v}, R\mathbf{v} \rangle = \|R\mathbf{v}\|^2$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, temos que $\ker(T) = \ker(R)$. Em particular, se T é invertível, também R é invertível, e portanto positivo. Neste caso, é imediato verificar que o operador $U := T R^{-1}$ é unitário, pois

$$\|U\mathbf{v}\|^2 = \langle T R^{-1}\mathbf{v}, T R^{-1}\mathbf{v} \rangle = \langle R^{-1}\mathbf{v}, T^* T R^{-1}\mathbf{v} \rangle = \langle R^{-1}\mathbf{v}, R\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Consequentemente, o operador T fatoriza como um produto $T = UR$ de um operador unitário e de um operador positivo. Da mesma forma é possível verificar que também o operador $V = R^{-1}T$ é unitário, e portanto T fatoriza como $T = RV$. Se T não é invertível, o argumento é menos elementar.

Teorema 8.12 (decomposição polar). *Todo operador $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano de dimensão finita complexo/real, pode ser decomposto num produto*

$$T = UR \quad \text{ou} \quad T = RV$$

de um operador unitário/ortogonal U , ou V , e um operador não-negativo $R = \sqrt{T^*T}$, que é positivo se T é invertível.

Demonstração. No caso geral, podemos definir um operador $U' : \text{Im}(R) \rightarrow \text{Im}(T)$ de acordo com $U'(R\mathbf{v}) := T\mathbf{v}$. Então para todo $\mathbf{u} = R\mathbf{v} \in \text{Im}(R)$, com $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$,

$$\|U'\mathbf{u}\|^2 = \|T\mathbf{v}\|^2 = \|R\mathbf{v}\|^2 = \|R\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2.$$

Logo, U' é uma isometria de $\text{Im}(R)$ sobre $\text{Im}(T)$ (pois estes dois espaços têm a mesma dimensão). O operador U' pode ser estendido a um operador unitário $U = U' \oplus U''$ de $\mathbf{H} = \text{Im}(R) \oplus \text{Im}(R)^\perp$ sobre $\mathbf{H} = \text{Im}(T) \oplus \text{Im}(T)^\perp$, escolhendo uma isometria arbitrária U'' de $\text{Im}(R)^\perp$ sobre $\text{Im}(T)^\perp$ (que existe pelo teorema 5.6, pois estes espaços têm a mesma dimensão). $\square$

Pelo teorema espectral 7.3, existe uma base ortonormada de vetores próprios de R , com valores próprios os valores singulares

$$0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$$

Então a matriz que representa o operador R na base canônica é igual a

$$K^{-1}\Sigma K$$

onde $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ é a matriz diagonal com valores próprios iguais aos valores singulares de T , e K é uma matriz unitária cujas colunas são os vetores próprios unitários de R . Se K'' denota a matriz unitária que define o operador U na base canônica, e definimos a matriz unitária $K' = K''K^{-1}$, então o teorema 8.12 implica (e é equivalente) a

Teorema 8.13 (decomposição em valores singulares). *A matriz A que representa um operador $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de um espaço euclidiano de dimensão finita complexo/real, pode ser decomposta como produto*

$$A = K' \Sigma K$$

onde K e K' são matrizes unitárias/ortogonais e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ é uma matriz diagonal não-negativa com valores próprios iguais aos valores singulares de T .

Portanto, um operador arbitrário T é uma composição de uma isometria K , umas homotetias reais e não negativas de razões σ_k , e uma outra isometria K' . O significado é que existem duas bases ortonormadas, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ (as colunas e as linhas de K e K' , respetivamente), relativamente as quais o operador é diagonal, ou seja $T\mathbf{e}_k = \sigma_k \mathbf{f}_k$, com elementos diagonais $\sigma_k \geq 0$.

No caso real e invertível, toda matriz $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertível pode ser decomposta como o produto

$$A = O P$$

de uma matriz simétrica e positiva $P = \sqrt{A^*A}$ e uma matriz ortogonal $O = AP^{-1}$, ou como produto

$$A = K'\Sigma K$$

de uma matriz diagonal positiva $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ e duas matrizes ortogonais K e K' .

Estas decomposições admitem uma interpretação, e uma demonstração, geométricas mais transparentes. Um operador linear invertível T , definido na base canônica pela matriz A , envia a esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ num elipsoide $E = T(\mathbf{S}^{n-1})$ com semi-eixos iguais aos valores singulares $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$. De fato, se $\mathbf{x}$ é um vetor unitário e $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$, então

$$1 = \|\mathbf{x}\|^2 = \|T^{-1}\mathbf{y}\|^2 = \langle T^{-1}\mathbf{y}, T^{-1}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, |T|^{-2}\mathbf{y} \rangle$$

é a equação cartesiana de um elipsoide centrado na origem definido pela forma quadrática associada ao operador positivo $|T|^{-2}$. Na base ortonormada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ que diagonaliza $|T|$, formada pelos vetores próprios unitários que satisfazem $|T|\mathbf{u}_k = \sigma_k\mathbf{u}_k$, a equação do elipsoide é

$$\frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{z_n^2}{\sigma_n^2} = 1.$$

Vice-versa, consideramos o elipsoide $E = T(\mathbf{S}^{n-1})$, imagem da esfera unitária pelo operador linear invertível T . Sejam $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ as direções principais de E (vetores ortogonais dois a dois e unitários), associadas aos semi-eixos $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$, respetivamente. Existe uma única matriz ortogonal K' que envia a base canônica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbb{R}^n$ nas direções principais de E , ou seja, tal que $K'\mathbf{e}_k = \mathbf{f}_k$. Existe uma única matriz diagonal positiva $\Sigma^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1})$, que envia o elipsoide $(K')^{-1}(E)$ na esfera unitária $\mathbf{S}^{n-1}$. Então a composição $K := \Sigma^{-1}(K')^{-1}A$ envia a esfera unitária na esfera unitária, e portanto é uma matriz ortogonal. Finalmente, $A = K'\Sigma K$.

Assim, um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ou seja, uma matriz $n \times n$ (formada por n^2 números arbitrários) consiste na escolha de duas bases ortonormadas (cada base ortonormada consiste na escolha de $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$ parâmetros, portanto duas bases equivalem a $n^2 - n$ parâmetros) e n números não-negativos (os semi-eixos do elipsoide imagem da esfera unitária pela transformação).

e.g. O operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido, na base canônica do plano, pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

não é simétrico. Possui apenas o valor próprio $\sqrt{2}$ (escolhi este número para ter fórmulas razoavelmente simples à seguir) e um espaço próprio 1-dimensional, gerado pelo vetor $(1, 0)$. O operador $T^\top T$ é simétrico e positivo (pois T é invertível), e é definido pela matriz

$$T^\top T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Os seus valores próprios são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$, e a matriz ortogonal diagonalizadora é

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} \\ -\sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

assim que

$$T^\top T = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} V^\top$$

Consequentemente, os valores singulares de T são $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = 2$, e a raiz quadrada positiva de $T^\top T$ é a matriz simétrica e positiva

$$R = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} V^\top = \begin{pmatrix} 5/6 & -\sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Se definimos a matriz ortogonal

$$U = T R^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} V^T = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

então a representação polar de T resulta ser

$$T = U R = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/6 & -\sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Consequentemente, a representação em valores singulares é

$$T = K' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

sendo $K' = UV$ e $K = V^T$.

ex: Verifique que T^*T e TT^* possuem os mesmos valores próprios.

Decomposição em valores singulares de matrizes retangulares. Em problemas de estatística, no processamento de sinais ... também é importante fatorizar de uma forma conveniente marizes que não são quadradas.

https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition

8.6 Pequenas oscilações e frequências próprias

Forma normal de um par de formas quadráticas. Sejam $\mathcal{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T K \mathbf{x}$ e $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ duas formas quadráticas em $\mathbb{R}^n$, representadas (por exemplo, na base canónica) pelas matrizes simétricas K e P , respetivamente. Se $\mathcal{K}$ é positiva, então a matriz simétrica K define um produto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_K := \mathbf{x}^T K \mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, e portanto existe uma base ortogonal (ortonormada para este produto interno) na qual $\mathcal{K}$ é representada pela matriz identidade. Ou seja, existe uma matriz invertível $C = UD$, igual ao produto de uma matriz diagonal positiva D e uma matriz ortogonal U , tal que $C^T K C = I$, e portanto, se $\mathbf{x} = C \mathbf{y}$, então $\mathbf{x}^T K \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$. Nesta base, a segunda forma quadrática é representada pela matriz simétrica $P' = C^T P C$, pois $\mathbf{x}^T P \mathbf{x} = \mathbf{y}^T P' \mathbf{y}$. Pelo teorema espectral, existe uma matriz ortogonal O que diagonaliza P' , ou seja, tal que $\Lambda = O^T P' O$ é diagonal. Observe que a primeira forma quadrática continua sendo definida pela matriz identidade, pois $O^T I O = I$. Portanto, nas coordenadas $\mathbf{z} = (CO)^{-1} \mathbf{x}$, as formas quadráticas $\mathcal{K}$ e $\mathcal{P}$ são $\mathbf{z}^T \mathbf{z}$ e $\mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{z}$, respetivamente.

Teorema 8.14 (forma normal de um par de formas quadráticas). *Sejam $\mathcal{K}$ e $\mathcal{Q}$ duas formas quadráticas em $\mathbb{R}^n$. Se $\mathcal{K}$ é positiva, então existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ em que as formas são definidas pela matriz identidade e por uma matriz diagonal, respetivamente, ou seja, existem coordenadas ortogonais $z_1, \dots, z_n$ nas quais as formas quadráticas $\mathcal{K}$ e $\mathcal{Q}$ assumem a forma*

$$\mathcal{K} = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \quad e \quad \mathcal{Q} = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$$

respetivamente, onde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Os λ_k 's (que não são os valores próprios da matriz simétrica que define $\mathcal{Q}$!) são chamados “valores próprios” da forma $\mathcal{Q}$ relativamente à forma positiva $\mathcal{K}$.

Cuidado! Este resultado não diz que as matrizes K e P são simultaneamente diagonalizáveis (caso que implica $KP = PK$), mas apenas que as formas quadráticas que definem são diagonais numa base comum! O que acontece é que são diagonais simultaneamente as matrizes $(CO)^T K (CO)$, que de fato é a matriz identidade, e $(CO)^T P (CO)$ (e estas fórmulas usam transpostas de CO e não inversas!).

Naturalmente, as formas quadráticas $\mathcal{K}$ e $\mathcal{Q}$ também são diagonais numa mesma base quando a forma quadrática $\mathcal{K}$ é negativa (ou seja, quando $-\mathcal{K}$ é positiva). Por outro lado, esta condição é necessária, como mostra o contra-exemplo seguinte.

ex: Mostre que as formas quadráticas $\mathcal{K}(x, y) = x^2 - y^2$ e $\mathcal{Q}(x, y) = 2xy$ em $\mathbb{R}^2$ (nenhuma das quais é positiva ou negativa) não são diagonalizáveis numa base comum.

Pequenas oscilações e frequências próprias. Numa vizinhança de um ponto de equilíbrio (um ponto onde a força, ou seja, o gradiente do potencial, é nula), que podemos assumir ser a origem do sistema de coordenadas generalizadas $\mathbb{R}^n$, a energia potencial de um sistema mecânico pode ser aproximada por uma forma quadrática

$$\mathcal{U} \simeq \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top A \mathbf{q},$$

onde $A = (a_{ij}) := (\partial^2 \mathcal{U} / \partial q_i \partial q_j(0))$ é a matriz Hessiana do potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ na origem (que é positiva se a origem é um mínimo local). Por outro lado, a energia cinética é uma forma quadrática positiva

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top K \dot{\mathbf{q}}$$

nas velocidades generalizadas, definida por uma matriz simétrica e positiva $K = (k_{ij})$. A Lagrangiana do sistema é $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$, e as equações de Euler-Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n} \quad (8.15)$$

são, nesta aproximação,

$$\frac{d}{dt} K \dot{\mathbf{q}} = -A \mathbf{q}$$

Pelo teorema 8.14, existe uma transformação linear (não necessariamente ortogonal!) de coordenadas $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{z} = C^{-1} \mathbf{q}$, tal que $C^\top K C = I$ e $C^\top A C = \Lambda$ é uma matriz diagonal, com valores próprios $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Nas coordenadas z_k 's, a lagrangiana é $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_k \dot{z}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k z_k^2$. Se a origem for um mínimo local não degenerado do potencial, os valores próprios são todos positivos, ou seja, $\lambda_k > 0$. Consequentemente, nas coordenadas z_k 's as equações de movimento (8.15) assumem a forma

$$\ddot{\mathbf{z}} = -\Lambda \mathbf{z},$$

ou seja, ficam decompostas nas n equações independentes

$$\ddot{z}_k = -\omega_k^2 z_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

que descrevem n osciladores harmônicos com *frequências próprias* $\omega_k := \sqrt{\lambda_k}$.

Na prática, estas oscilações características podem ser obtida assumindo que as soluções das equações de Euler-Lagrange são da forma

$$\mathbf{q}(t) = e^{i\omega_k t} \boldsymbol{\xi}_k$$

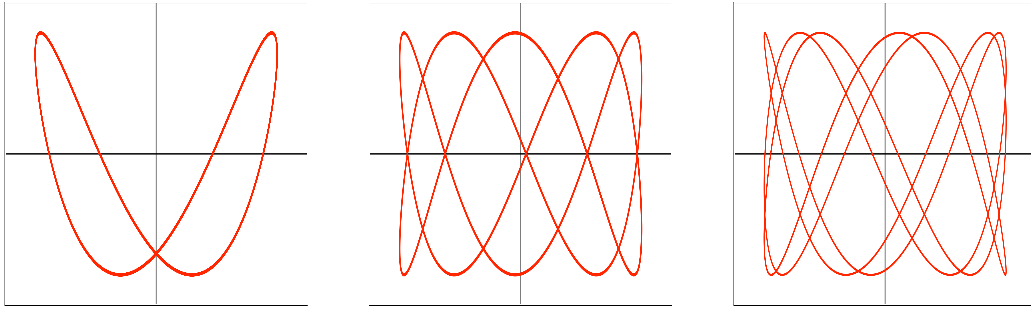
A *equação característica* $\text{Det}(A - \lambda K) = 0$ determina os valores próprios $\lambda_k = \omega_k^2$, e os vetores próprios $\boldsymbol{\xi}_k$'s, ortogonais dois a dois, são as soluções da *equação secular*

$$(A - \omega_k^2 K) \boldsymbol{\xi}_k = 0 \quad (8.16)$$

As soluções genéricas são combinações lineares de n oscilações

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \Re \left(\sum_k c_k e^{i\omega_k t} \boldsymbol{\xi}_k \right) \\ &= \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \boldsymbol{\xi}_k \end{aligned}$$

com certas amplitudes A_k e fases iniciais ϕ_k . Os movimentos são periódicos (e desenham figuras de Lissajous no espaço das configurações) ou quase-periódicos, dependendo se as frequências próprias $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ são racionalmente dependentes ou não.



Algumas figuras de Lissajous.

ref: [Ar87] V.23. ou [LL78] V.23

Osciladores acoplados. O exemplo clássico é o sistema formado por dois osciladores iguais, com lagrangianas $\mathcal{L}_k = \frac{1}{2}\dot{x}_k^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x_k^2$, sendo $k = 1$ ou 2 , acoplados com uma energia de interação $\frac{1}{2}\varepsilon (x_1 - x_2)^2$ dependente de um parâmetro positivo ε , a “força” da interação. É o caso de dois pêndulos iguais unidos por uma mola (em repouso quando os dois pêndulos estão nas respectivas posições de equilíbrio). A lagrangiana do sistema é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} \varepsilon (x_1 - x_2)^2.$$

Neste caso, a energia cinética é a forma quadrática definida pela matriz identidade $K = I$, e a energia potencial é a forma quadrática positiva definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} \omega^2 + \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \omega^2 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

A equação característica $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ tem raízes ω^2 e $\omega^2 + 2\varepsilon$. As frequências normais são portanto ω , a frequência comum dos osciladores, e $\Omega = \sqrt{\omega^2 + 2\varepsilon}$. Vetores próprios normalizados são $\mathbf{q} = (1, 1)/\sqrt{2}$ e $\mathbf{Q} = (1, -1)/\sqrt{2}$, respectivamente. Consequentemente, nas coordenadas normais $q = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ e $Q = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$, as equações de Euler-Lagrange são dois osciladores desacoplados

$$\ddot{q} = -\omega^2 q \quad \text{e} \quad \ddot{Q} = -\Omega^2 Q.$$

As soluções com $Q = 0$ são oscilações sincronizadas dos dois osciladores. Quando a força de interação é fraca, ou seja, $\varepsilon \ll \omega^2$ e portanto $\Omega \simeq \omega + \varepsilon/\omega^2$ é muito próximo de ω , as soluções genéricas apresentam o fenômeno dos batimentos. Como explicado em [Ar87], a energia é transferida periodicamente de um oscilador ao outro, com um período $T \simeq 2\pi\omega/\varepsilon$.

ex: Determine as frequências normais do sistema de osciladores iguais acoplados descrito pela lagrangiana ([LL78] V.23)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon x_1 x_2.$$

ex: Determine as frequências normais do sistema de osciladores acoplados descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \nu \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \beta^2 x_2^2 + \frac{1}{2} \varepsilon (x_1 - x_2)^2.$$

Oscilações das moléculas. [LL78] V.24

Chains of coupled oscillators. Consider a one-dimensional circular chain of N particles with masses m_n 's, placed at equilibrium positions na , where a is a characteristic length and $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ (thus the circle has length $\ell = Na$). Denote by q_n the displacement of the n -th particle from its equilibrium position, so that its real position is $n\ell + q_n$. Each mass is coupled with its two nearest neighbours, with springs with variable stiffness. The Lagrangian is therefore

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} m_n \dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \kappa_{n,n+1} (q_{n+1} - q_n)^2$$

where, of course, $q_N = q_0$ and $\kappa_{N-1,N} = \kappa_{N-1,0}$. By definition, the Lagrangian is written as

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, K \dot{\mathbf{q}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, A \mathbf{q} \rangle$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the standard Euclidean structure of $\mathbb{R}^N$, and K and A are the symmetric operators defining a positive (the kinetic energy) and a non-negative (the potential energy) quadratic form, respectively. The Euler-Lagrange equations read

$$K \ddot{\mathbf{q}} = -A \mathbf{q}$$

Observe that the translations (actually rotations, since we are in a circle) $q_n \mapsto q_n + t$ are a symmetry of the Lagrangian. They correspond to the conserved linear momentum. Indeed, an obvious solution is the uniform rotation $q_n = a + vt$ for all n . This is the zero eigenvalue of the operator A , with constant eigenvector $(1, 1, \dots, 1)$.

From general physical considerations, we look for other solutions of the form

$$\mathbf{q}(t) = e^{i\omega_k t} \boldsymbol{\xi}_k$$

where the ω_k 's are proper frequencies and the $\boldsymbol{\xi}_k$'s are the corresponding eigenvectors solving the secular equation

$$(A - \omega_k^2 K) \boldsymbol{\xi}_k = 0$$

The chain is *homogeneous* when it is composed of equal masses $m_n = m$ and springs with the same stiffness $\kappa_{n,n+1} = \kappa$. The Lagrangian then simplifies as

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} m \sum_{n=0}^{N-1} \dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} \kappa \sum_{n=0}^{N-1} (q_{n+1} - q_n)^2$$

and the Euler-Lagrange equations read

$$m \ddot{q}_n = \kappa (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})$$

The right-hand side is a discrete Laplacian, and indeed this must be thought as a discrete version of the wave equation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$ in the circle, with speed of propagation $c = \sqrt{\kappa/m}$. In this case $K = mI$, while $A = \kappa(2I - P - P^{-1})$, where P is the shift operator, already defined in (7.4) as $(P\mathbf{q})_n = q_{n+1}$. Eigenvalues and eigenvectors of P , hence of A , are (see (7.5))

$$\lambda_k = \zeta^k \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\xi}_k = (1, \zeta^k, \zeta^{2k}, \dots, \zeta^{(N-1)k})$$

respectively, with $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. The secular equation is then

$$(\kappa T - \omega_k^2 m I) \boldsymbol{\xi}_k = 0$$

where $T = 2I - P - P^{-1}$. This gives

$$\begin{aligned} \omega_k^2 &= \frac{\kappa}{m} (2 - \zeta^k - \zeta^{-k}) \\ &= 4 \frac{\kappa}{m} \sin^2(\pi k/N) \end{aligned}$$

and therefore proper frequencies

$$\omega_k = 2\sqrt{\kappa/m} \sin(\pi k/N) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Observe that eigenvalues are not simple if N is even.

ex: One could also consider a homogeneous linear chain, with its first and last particle attached to a spring with fixed second extremity. The Lagrangian then reads

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}m \sum_{n=1}^N \dot{x}_n^2 - \frac{1}{2}\kappa (x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + \cdots + (x_N - x_{N-1})^2 + x_N^2)$$

Here we have no translational symmetry, and indeed the potential energy is a (strictly) positive quadratic form. In order to find its proper frequencies, one may look for odd solutions of a periodic chain of $2N + 2$ particles, which satisfy $q_0 = q_{N+1} = 0$. Deduce that they are

$$\omega_n = 2\sqrt{\kappa/m} \sin\left(\frac{\pi n}{2N+2}\right)$$

for $n = 1, 2, \dots, N$, and are simple for dimensional reasons. Use the form of the ξ_k 's computed above to show that the general solution is a superposition of normal modes as

$$q_k = \sum_{n=1}^N A_n \sin\left(\frac{\pi kn}{N+1}\right) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

where q_k denotes the displacement of the k -th particle from its rest position, and the A_n 's and φ_n 's are arbitrary amplitudes and phases.

In order to understand the continuous limit, we must replace κ with κ/ℓ^2 , where ℓ is a distance between the oscillators (so that the operator A has the dimensions of κ times a laplacian), and then take the limit $N \rightarrow \infty$ and $\ell \rightarrow 0$ while maintaining constant the length $\ell N = \pi$. We get normal frequencies $\omega_n \simeq cn$, for $n = 1, 2, \dots$, which coincide with the normal frequencies (7.12) of a vibrating string with length π and speed of propagation $c = \sqrt{\kappa/m}$.

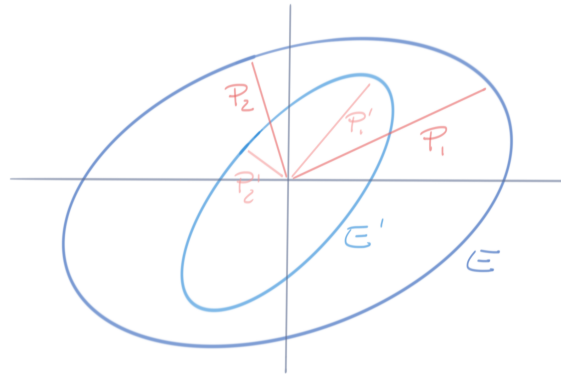
Semi-eixos principais e rigidez. O espaço das formas quadráticas positivas definidas num espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ pode ser munido de uma ordem parcial natural: $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$ se $\mathcal{Q}'(\mathbf{x}) \geq \mathcal{Q}(\mathbf{x})$ para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Se $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$, é claro que o elipsoide E' definido por $\mathcal{Q}'(\mathbf{x}) \leq 1$ está contido no elipsoide E definido por $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) \leq 1$. Vice-versa, se $E' \subset E$ então $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$. Portanto, a ordem parcial $\succeq$ no espaço das formas quadrática corresponde a ordem parcial natural, definida pela “inclusão” $\subset$, no espaço dos elipsoides.

Sejam $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ duas formas quadráticas tais que $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$, e sejam $p'_1 \geq p'_2 \geq \cdots \geq p'_n$ e $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$ os semieixos principais dos elipsoides E' e E , respetivamente. O princípio min-max de Courant-Fischer 8.8, na forma do teorema 8.10, implica então as desigualdades

$$p'_1 \leq p_1 \quad p'_2 \leq p_2 \quad \cdots \quad p'_n \leq p_n$$

entre os respetivos semieixos.



Se a energia cinética de um sistema mecânico é a forma quadrática definida pela estrutura euclidiana de $\mathbb{R}^n$ (ou seja, se a estrutura euclidiana é definida pela forma quadrática da energia cinética), então a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{1}{2}\mathcal{Q}(\mathbf{q})$$

descreve um sistema com energia potencial definida pela forma quadrática positiva $\mathcal{Q}$. Nas coordenadas ortonormadas z_k 's que diagonalizam o operador simétrico A que define a forma quadrática, as equações de Euler-Lagrange 8.15 assumem a forma

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{z}} = -\Lambda \mathbf{z}$$

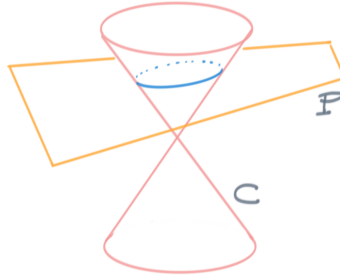
onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal dos valores próprios da matriz simétrica A . O movimento é portanto decomposto em n osciladores harmônicos $\ddot{z}_k = -\omega_k^2 z_k$ de frequências próprias $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} = 1/p_k$.

Se $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$, o sistema definido pela energia potencial $\mathcal{Q}'$ é dito mais *rígido* do sistema definido pela energia potencial $\mathcal{Q}$. As frequências próprias então satisfazem as desigualdades $\omega'_k \geq \omega_k$. Ou seja, os períodos das oscilações do sistema decrescem com a rigidez.

8.7 Cónicas e quádricas

Finalmente, a diagonalização das formas quadrática permite uma classificação das cónicas no plano e das superfícies quádrica no espaço.

Conic sections. The first, tautological, definition is the following: a *conic section* is the intersection between a (right circular) cone $C \subset \mathbb{R}^3$ and a plane $P \subset \mathbb{R}^3$ (not passing through the vertex, for otherwise we have the degenerate cases of a point, a line or two lines).



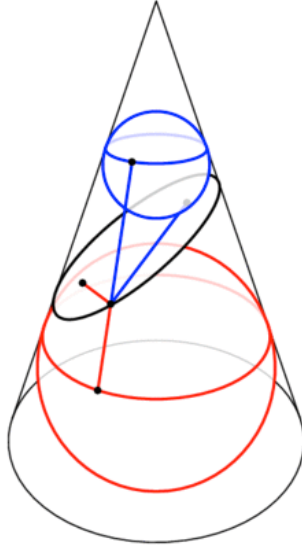
The Cartesian equation of a cone, in a convenient orthogonal coordinates system, is $x^2 + y^2 = z^2$, while a generic plane is defined by a linear equation like $ax + by + cz + d = 0$. Eliminating one of the variables, for example z if its coefficient $c \neq 0$, we see that the Cartesian equation of a generic conic is

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$$

Thus, a conic is the zero level set of a degree 2 polynomial in two variables.

There are other definitions, much more useful in physical applications, which were already known to Apollonius of Perga and Pappus of Alexandria. The modern route to the understanding of them passes through the construction of the *Dandelin spheres* ⁴⁶. These are spheres tangent to both the cone C (along a circle) and the plane P (at one point), inside the cone itself. There are two of them, say $S_{\pm}$, in the case of an ellipse (one on each side of the plane) or an hyperbola (one in each branch of the hyperbola), and only one for a parabola (say, the one with “+”). The points where the Dandelin spheres touch the plane P , say $F_{\pm} := S_{\pm} \cap P$, are called *foci* of the conic section. It is clear that when the plane P is orthogonal to the axis of the cone, the two foci coincide and the conic section is a circle. Each Dandelin sphere touches the cone at a circle $C_{\pm}$, belonging to a certain plane $P_{\pm}$ (perpendicular to the axis of the cone, hence horizontal in the picture), and the intersection of each of those planes with the plane P determines a line $D_{\pm} := P_{\pm} \cap P$, called *directrix* of the conic section.

⁴⁶G. Dandelin, Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique, *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles* **2** (1822), 171-200.

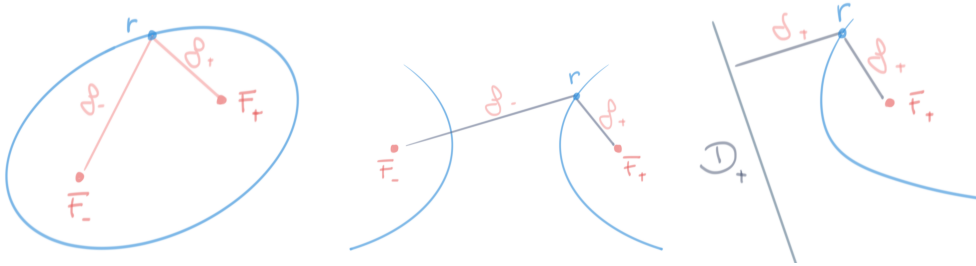


Dandelin spheres of an ellipse.

Second definition: *focal properties*. Consider a moving point $\mathbf{r}$ in the Euclidean plane $P \approx \mathbb{R}^2$. Let $f_{\pm} := \text{dist}(\mathbf{r}, F_{\pm})$ denote the distances between $\mathbf{r}$ and the foci $F_{\pm}$, and let $\delta_{\pm} := \text{dist}(\mathbf{r}, D_{\pm})$ denote the distances between $\mathbf{r}$ and the directrices $D_{\pm}$. Then, the moving point $\mathbf{r}$ describes

- an *ellipse* iff $f_{+} + f_{-} = \text{constant}$;
- an *hyperbola* iff $|f_{+} - f_{-}| = \text{constant}$;
- a *parabola* iff $f_{+} = \delta_{+}$.

The constant above is the distance, along a generatrix of the cone, between the two circles $C \cap S_{\pm}$. Proofs rely on the elementary observation that all segments between a sphere and an external point, tangent to the sphere, have the same length (see the picture above in the case of an ellipse).



Third definition: *eccentricity*. The three conditions above may be merged into one single condition relating the distances between the moving point and one focus or one directrix, respectively. A moving point $\mathbf{r}$ in the plane describes a conic section if the ratio $e := f_{+}/\delta_{+}$ is constant, i.e.

$$f_{+} = e \delta_{+}. \quad (8.17)$$

The constant ratio e is called *eccentricity* of the conic section. One has an ellipse if $e < 1$, an hyperbola if $e > 1$, and a parabola if $e = 1$.

Polar equation. Consider the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$, with coordinates x - y . Modulo a translation, we may assume that one of the foci is at the origin, say $F_{+} = (0, 0)$. Modulo a rotation, we may also assume that the directrix is a vertical line $D_{+} = \{x = d\}$, for some $d = \text{dist}(F_{+}, D_{+}) > 0$. Then, if the moving point has polar representation $\mathbf{r} = \rho e^{i\theta} = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$, the defining equation (8.17) reads

$$\rho = e |\rho \cos(\theta) - d|.$$

Solving for ρ , we get

$$\rho = \frac{ed}{e \cos(\theta) \pm 1}$$

If $e \leq 1$, the only solution is the one with the $+$ sign, and the curve is an ellipse ($e < 1$) or a parabola ($e = 1$). If $e > 1$, the curve is a hyperbola, with the two solutions corresponding to its two branches. It is this form of the conics which appears when solving Kepler's problem.

Cartesian equations. Good looking Cartesian equations are those which are symmetric w.r. to the origin, i.e. such that $\mathbf{r}$ and $-\mathbf{r}$ both belong to the curve. The canonical form of an ellipse or a hyperbola is then

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

The foci are $F_{\pm} = (\pm ae, 0)$, while the directrices are the vertical lines $D_{\pm} = \{x = \pm a/e\}$.

If $e < 1$, hence the curve is an ellipse, we may write

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (8.18)$$

where $a > 0$ and $b = a\sqrt{1-e^2} \leq a$ are the semi-axis, and $F_{\pm} = (\pm c, 0)$, with $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, are the foci. The case $e = 0$, hence $a = b$ and $c = 0$, is a circle centered at the origin.

If $e < 1$, hence the curve is a hyperbola, we may write

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (8.19)$$

with $a > 0$ and $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. The foci are $F_{\pm} = (\pm c, 0)$ with $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

The canonical form of a parabola, with focus at $F = (h, 0)$ and directrix $D = \{x = -d\}$ is

$$\boxed{y^2 = 4dx} \quad (8.20)$$

ex: Use the Dandelin spheres to prove that the tautological definition of the conic sections implies their focal properties.

ex: Check that the canonical Cartesian equations (8.18), (8.19) and (8.20) of the conic sections satisfy the focal properties as well as (8.17).

ex: Compute the area of the region bounded by the ellipse of (8.18).

2 mai 2022

Equações de segundo grau no plano e cónicas. Uma equação de segundo grau

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad (8.21)$$

no plano de coordenadas x e y , onde $a, b, \dots, \gamma$ são coeficientes reais, define uma *cónica*. Uma mudança de coordenadas oportuna, de fato uma rotação e uma translação (logo uma isometria do plano), pode reduzir a equação (8.21) a uma “forma canónica”, ou seja, uma das (8.18), (8.19) ou (8.20) se a cónica não é degenerada.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

a matriz simétrica que define a forma quadrática $\mathcal{Q}(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, a parte quadrática do polinómio (8.21). Pelo teorema espectral 7.3, esta pode ser diagonalizada por uma mudança ortogonal de coordenadas, que podemos assumir ser uma rotação (a menos de reordenar as coordenadas). Ou seja, existe um ângulo θ tal que nas variáveis x' e y' , definidas por

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

a equação (8.21) é transformada em

$$\lambda (x')^2 + \mu (y')^2 + \alpha' x' + \beta' y' + \gamma = 0, \quad (8.22)$$

onde λ e μ são os valores próprios de A , e $\alpha' = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta$ e $\beta' = \beta \cos \theta - \alpha \sin \theta$. Observe que o produto dos valores próprios é igual a $\lambda\mu = ac - b^2 = \text{Det}A$.

Se os dois valores próprios, λ e μ , são diferentes de zero, ou seja, se $\text{Det}A \neq 0$, então é possível completar os quadrados, ou seja, fazer uma translação

$$x'' = x' + \xi \quad y'' = y' + \eta,$$

com $\xi = \frac{\alpha'}{2\lambda}$ e $\eta = \frac{\beta'}{2\mu}$, e transformar finalmente a (8.22) em

$$\lambda (x'')^2 + \mu (y'')^2 = \delta,$$

onde $\delta = \frac{(\alpha')^2}{4\lambda} + \frac{(\beta')^2}{4\mu} - \gamma$. Esta é a equação de uma *elipse* se $\lambda\mu > 0$ e δ tem o sinal correto, de uma *hipérbole* se $\lambda\mu < 0$ e $\delta \neq 0$, ou de alguma cónica degenerada como um ponto (como $x^2 + y^2 = 0$), duas retas (como $x^2 - y^2 = 0$) ou o conjunto vazio (como $x^2 + y^2 = -1$).

Se um dos valores próprios é igual a zero, por exemplo $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$, então podemos completar um quadrado e fazer uma translação, até obter

$$\mu (y'')^2 = \alpha' x''.$$

Esta é a equação de uma *parábola*, ou de uma reta se também $\alpha' = 0$.

Finalmente, se os dois valores próprios são nulos, ou seja, $\lambda = \mu = 0$, então temos apenas uma equação de grau um do género $\alpha'x' + \beta'y' + \gamma' = 0$, ou seja, uma reta afim.

Se sabemos a priori que a cónica definida pela (8.21) não é degenerada, então o género é determinado pelo sinal do determinante $d := \text{Det}A = ac - b^2 = \lambda\mu$ da matriz que define a forma quadrática: é uma elipse se $d > 0$, uma hipérbole se $d < 0$, e uma parábola se $d = 0$.

e.g. Colocamos o problema de identificar a cónica definida pela equação cartesiana

$$2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0.$$

A forma quadrática $2x^2 - 4xy - y^2$ é definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} U^\top,$$

com valores próprios 3 e -2 , onde a matriz ortogonal diagonalizadora é

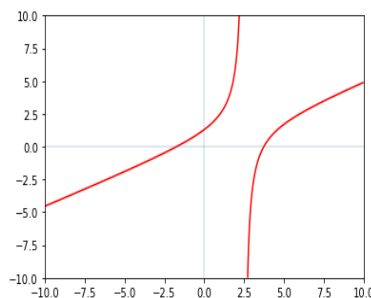
$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nas variáveis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^\top \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix}.$$

a equação define a hipérbole

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{6} = 1$$



ex: Identifique e esboce as cónicas definidas pelas equações

$$\begin{array}{lll} x^2 + xy + 2x = 0 & 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 2 = 0 & 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 1 = 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 10\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0 & x^2 + y^2 - 2xy - 3x - y - 1 = 0 & \\ 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6 = 0 & 2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0 & \\ 2x^2 - 6xy + 2y^2 - 8x + 12y - 10 = 0 & 2x^2 + xy + 2y^2 - 4 = 0 & \end{array}$$

ex: [Ap69], vol. 2, 5.15.

Quadrics. *Quadrics* are surfaces defined, in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$, by a degree 2 Cartesian equation like

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

A similar procedure, diagonalization of the quadratic form $Q(x, y, z)$ (the degree 2 part of the polynomial above) and then a translation (completing squares), shows that any non-degenerate quadric (not reduced to the empty set, a point, lines or planes, conics times lines, ...) is equivalent, modulo an isometry, to one of the following models:

an *ellipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

an *hyperbolic hyperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

and *elliptic hyperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

an *elliptic paraboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

an *hyperbolic paraboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

(above, of course, all the parameters a, b, c are positive numbers).

ex: You may play with [surfer](#) to visualize quadrics, or create new amazing surfaces.

Motion in a central force and Kepler problem. Consider the Newton equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (8.23)$$

describing the motion of a particle/planet of mass $m > 0$ in a central force field $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$. Above, we use the traditional notation $r := \|\mathbf{r}\|$ for the length of the vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. If $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ denotes the velocity vector, then a computation shows that the angular momentum $\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ is a constant of the motion. If at some (initial) time the vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{v}$ are not parallel, then $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ and the motion occurs in the plane orthogonal to $\mathbf{L}$. We may therefore choose a reference Cartesian system $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ in which $\mathbf{L} = L\mathbf{k}$ for some $L > 0$, and write the position vector as $\mathbf{r}(t) = \rho \cos(\theta)\mathbf{i} + \rho \sin(\theta)\mathbf{j}$ for some time-dependent angle θ and lenght $\rho = \|\mathbf{r}\|$. In polar coordinates Newton equation (8.23) reads

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 &= F(\rho)/m \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (8.24)$$

The second equation (8.24) says that the “areal velocity” (“velocidade areal”) $\ell := \rho^2 \dot{\theta}$ is a constant of the motion, and this is *Kepler’s second law* (which therefore holds for all central forces). We specialize now to Newton’s gravitational force

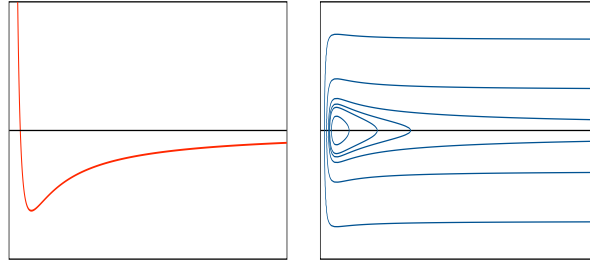
$$F(\rho) = -\frac{GmM}{\rho^2}$$

where M is the mass of the Sun and G is the gravitational constant. It may be observed that the first equation (8.24) then reads

$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} V_\ell(\rho),$$

where we defined the “effective potential energy” as

$$V_\ell(\rho) := \frac{1}{2}m\ell^2/\rho^2 - GmM/\rho.$$



Kepler’s effective potential and some energy level sets.

The conserved energy is therefore

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2/\rho^2 - GmM/\rho.$$

Now we set $\rho = 1/x$ and look for a differential equation for x as a function of θ . Computation shows that $dx/d\theta = -\dot{\rho}/\ell$, and, using conservation of ℓ , that $d^2x/d\theta^2 = -\rho^2\ddot{\rho}/\ell^2$. There follows that the first Newton equation (8.24) reads

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{GM}{\ell^2}.$$

This is an harmonic oscillator with unit frequency forced by a constant force, and its general solution is

$$x(\theta) = \frac{GM}{\ell^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

for some constants e and θ_0 . Back to the original radial variable we get the solution

$$\rho(\theta) = \frac{\ell^2/GM}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)},$$

Hence, orbits are conic sections with eccentricity e and focus at the origin. We get an ellipse for $0 \leq e < 1$, corresponding to negative energy, hence to planets, and this is *Kepler’s first law*. We get a parabola for $e = 1$, corresponding to zero energy, or an hyperbola for $e > 1$, corresponding to positive energy.

Hodograph, Hamilton’s theorem and Feynman’s lost lecture. Our “brute force” derivation of Kepler orbits may be substituted by more elegant and geometric considerations. You may want to take a look at the original papers by Hamilton ⁴⁷, Milnor ⁴⁸ and the famous lost lecture, now recovered!, of Feynman ⁴⁹.

⁴⁷W.R. Hamilton, The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction, *Proc. Roy. Irish Acad.* **3** (1846), 344-353.

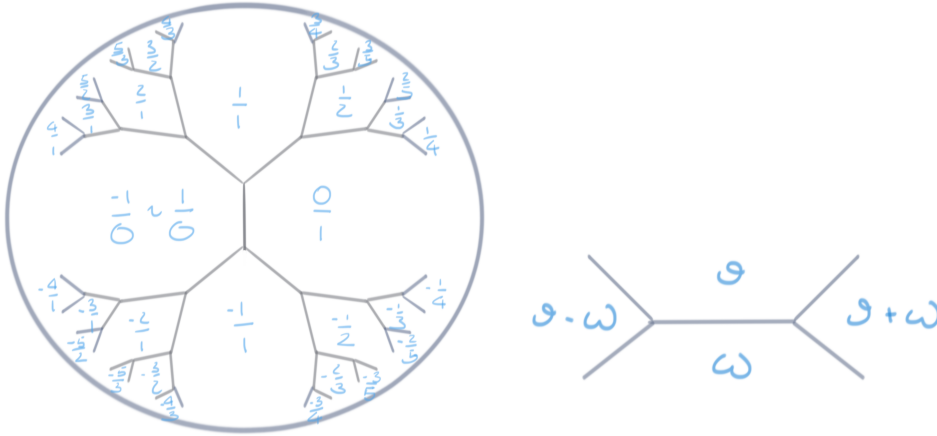
⁴⁸J. Milnor, On the geometry of the Kepler problem, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 353-365.

⁴⁹D.L. Goodstein & J.R. Goodstein, *Feynman’s Lost Lecture, the Motion of Planets Around the Sun*, Norton & Company, 1996.

Integer binary quadratic forms: topograph and rivers. Since ancient times, mathematicians have been interested and fascinated by values of integer binary forms at integer points. This is the case of Pythagorean (integer) triples $x^2 + y^2 = z^2$, which were known to Babylonians, or integer solutions of (what Euler named) Pell equation $x^2 - 2y^2 = 1$, which Greeks used to find rational approximations of $\sqrt{2}$, and its generalisation $x^2 - ny^2 = z$, considered by Indian mathematicians. The modern theory of integer quadratic forms starts with Gauss' *Disquisitiones Arithmeticae* in 1801, and it is the origin of many fundamental concepts and ideas of modern algebra (rings, ideals, ...), due to Kummer, Kroecker, Dedekind, Dirichlet, ... Here we sketch a modern and visual approach discovered recently by Conway⁵⁰.

Consider a binary quadratic form $Q(x, y) = ax^2 + hxy + by^2$ with integer coefficients $a, b, h \in \mathbb{Z}$. We are interested in its values when both x and y are integers, i.e. at integer lattice points $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. From homogeneity, we know that $Q(np, nq) = n^2 Q(p, q)$, hence it will be sufficient to compute the value only at *primitive* lattice points, those points (p, q) with relatively prime (integer) coordinates. Also, we may change sign to both p and q without altering the value of the quadratic form, thus, we may consider pairs $\pm(p, q)$, which we'd better write p/q and identify with points in the projective rational circle $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Such points may be arranged in a planar “map”, called *topograph* by Conway, in regions separated by a 3-valent tree T (which has been rediscovered many times during history, and takes the name of Farey tree⁵¹, or Serre tree⁵²) which magically reflects the arithmetics which generate them: the Euclidean algorithm [HW59]. Conway made the fundamental observation that this arithmetic, in turns, will recursively generate all the primitive values of the quadratic form in a simple a “visual” way as a consequence of the parallelogram law.

The tree T is naturally embedded in the hyperbolic plane $\mathbb{H}$, for example, in the Poincaré unit disk model. A view of the global picture of primitive lattice points is shown in the picture, together with a portion of it



The rule which generates it, starting with the initial seed $\mathbf{e}_0 = \pm(1, 0)$ and $\mathbf{e}_1 = \pm(0, 1)$, is vector addition. Observe that vector addition $(p, q) + (r, s)$ corresponds, in the projective rational line, to computing the “mediant” $(p+r)/(q+s)$ of the fractions p/q and r/s . Regions $\mathbb{H} \setminus T$ correspond to reduced fractions $p/q \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$. Geodesic rays in the tree have end-points which are naturally identified with points $\alpha \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, limit of the reduced fractions on both sides of the ray.

The parallelogram law

$$Q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + Q(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 2(Q(\mathbf{v}) + Q(\mathbf{w}))$$

may be seen as an iterative formula prescribing the value of the quadratic form at $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ given its values at $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ and at $\mathbf{v} - \mathbf{w}$. The first three values, say at the primitive vectors $(0, 1)$, $(1, 0)$ and $(1, -1)$, are the parameters a, b and $a + b - h$ of the quadratic form.

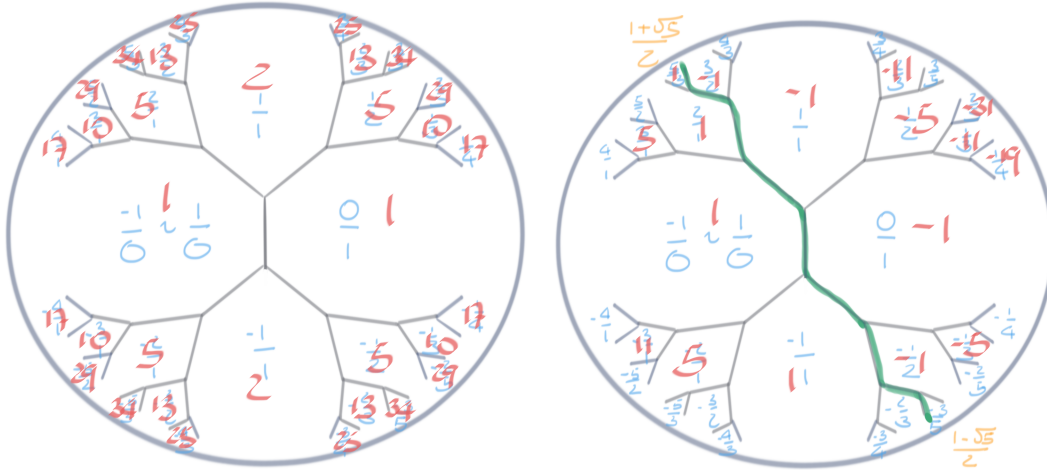
For example, the values of the Pythagorean quadratic form $Q(x, y) = x^2 + y^2$, which is positive definite, are shown in the picture on the left. The positive and negative values of an indefinite

⁵⁰J.H. Conway, *The sensual (quadratic) form*, Carus Mathematical Monographs **26**, Mathematical Association of America, 1997.

⁵¹A. Hurwitz, Über die Reduktion der binären quadratischen Formen, *Math. Annalen* **45** (1894), 85-117.

⁵²J.-P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2 , *Astérisque* **46** (1977).

quadratic form as $Q(x, y) = x^2 - xy - y^2$, in the picture on the right, divide the map into two regions, bounded by a *river* ... Moreover, the values around the river may be shown to be bounded, and therefore recur (as in our case). The river has two endpoints which may be naturally identified with two points α and $\bar{\alpha}$ in $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, the roots of the quadratic equation $Q(z, 1) = 0$, ...



A nice account of all that, and much more, is in the book⁵³ that Hatcher is preparing.

⁵³A. Hatcher, *Topology of Numbers* (<https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/TN/TNpage.html>)

9 Grupos e grupos de matrizes

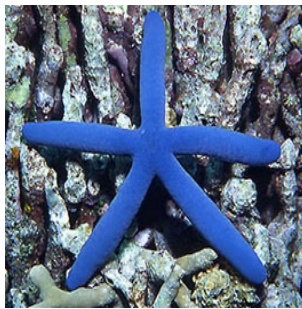
ref: [Ap69] Vol 2, 5.11, 5.20

9 mai 2023

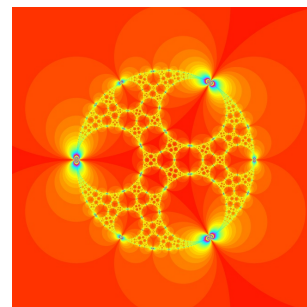
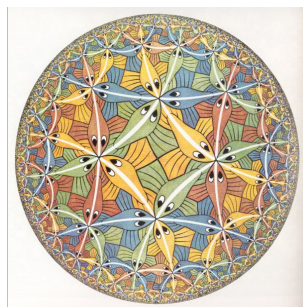
Simetrias e grupos de transformações. As “simetrias” são, grosso modo, movimentos do espaço ambiente (seja o que for) que deixam invariada uma figura ou um padrão no qual estamos interessados. A estrutura matemática que captura esta ideia é a noção de “grupo”, descoberta/inventada por Lagrange, Ruffini, Abel, Galois ... no início do século XIX para compreender a fatorização dos polinômios, reconhecida por Liouville, Jordan, ... e finalmente enraizada na geometria moderna graças às intuições de Klein, Hilbert, Poincaré, ...⁵⁴

A ideia básica e concreta de um grupo é simples. Uma família de “transformações”, de algum espaço ou conjunto, que podem ser “compostas” (ou seja, podem agir uma após outra) para produzir mais transformações, e que podem ser “desfeitas”. A transformação que desfaz uma transformação dada é chamada (transformação) “inversa”. Em particular, uma transformação e a sua inversa podem ser compostas para formar a (transformação) “identidade”, a transformação que deixa tudo como está.

ex: Descreva as simetrias das seguintes figuras.



ex: Tente descrever as simetrias destas outras figuras (sem ficar triste se não conseguir!).



Simetrias em física. As simetrias, e os grupos que as representam também têm um papel fundamental na nossa descrição e compreensão da Natureza.⁵⁵

Na mecânica clássica, são responsáveis pelas leis de conservação, de acordo com o famoso teorema de Noether⁵⁶. Por exemplo, a invariância da lagrangiana por translações do tempo implica a conservação da energia, a invariância por translações do espaço implica a conservação do momento linear, a invariância por rotações implica a conservação do momento angular, ...

Grupos de isometrias do espaço euclidiano de dimensão 3 também descrevem as simetrias dos cristais (e são por isto chamados “grupos cristalográficos”), dos flocos de neve, ou de outras estruturas biológicas ou químicas.

⁵⁴Marcus Du Sautoy, *Symmetry: A Journey into the Patterns of Nature*, Harper, 2007.

⁵⁵A. Zee, *Fearful Symmetry. The Search for Beauty in Modern Physics*, Princeton University Press, 2017

⁵⁶E. Noether, Invariante Variationsprobleme, *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse.* (1918), 235-257.

Mais abstratos, mas igualmente básicos, são o grupo simplético, que desceve a estrutura do espaço de fases da mecânica hamiltoniana, e o grupo de Lorentz, que desceve a estrutura do espaço-tempo da relatividade especial.

Os grupos unitários, isometrias de espaços euclidianos complexos, descevem as simetrias da mecânica quântica. Ainda mais fundamental é o papel das simetrias de “gauge” na teoria quântica de campos, desde a eletrodinâmica quântica às teorias não-abelianas de Yang e Mills. Por exemplo, no Modelo Padrão aparece o grupo $\mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{U}(1)$, os fatores sendo responsáveis pelas três interações fundamentais, forte, fraca e eletromagnética. O grupo $\mathbf{SU}(2)$ é também central na “loop quantum gravity” ...

9.1 Grupos

Permutações e grupos de transformações. Seja X um conjunto não vazio. As *permutações* de X são as transformações $f : X \rightarrow X$ invertíveis, ou seja, injetivas e sobrejetivas. Fixado X , uma permutação será denotada simplesmente por f , e a imagem de um ponto $x \in X$ pela permutação f por $f(x)$.

O conjunto $\text{Per}(X)$ é munido de uma operação binária natural, a *lei de composição*, que associa às duas permutações f e g , nesta ordem, a permutação $fg := f \circ g$, definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

se $x \in X$. A composição é claramente associativa, ou seja, satisfaz $f(gh) = (fg)h$ para todas as permutações f, g, h . A *permutação/transformação identidade* é definida por $e(x) = x$ para todo $x \in X$. É claro que $fe = ef = f$ para toda permutação f . Toda permutação f , sendo invertível, admite uma permutação inversa f^{-1} , tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo $x \in X$. Isto significa que $ff^{-1} = f^{-1}f = e$. É também fácil verificar que a inversa da composição fg é $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

Um *grupo de transformações* é um subconjunto não vazio $G \subset \text{Per}(X)$ que contém a transformação identidade e , contém a inversa f^{-1} de toda $f \in G$, e contém a composição fg de todas $f, g \in G$.

Exemplos triviais são o próprio $\text{Per}(X)$, chamado *grupo das permutações* de X , e o grupo $G = \{e\}$, formado por apenas a transformação identidade. Grupos de transformações interessantes são construídos considerando as permutações de um espaço X que respeitam alguma estrutura do espaço, ou que satisfazem certas propriedades. Por exemplo, se X é um espaço linear, podemos considerar as permutações que preservam a sua estrutura de espaço linear, que formam o “grupo linear geral” dos automorfismos de X . Se X é um espaço métrico, podemos considerar as permutações que preservam as distâncias entre os pontos de X , que formam o “grupo das isometrias” de X ...

Grupo simétrico. Por exemplo, se $X_n \approx \{1, 2, \dots, n\}$ é um conjunto finito formado por n elementos, então $S_n := \text{Per}(X_n)$ é um grupo de transformações chamado *grupo simétrico*. É claro que o grupo simétrico S_n é formado por $n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$ permutações (n possibilidades para escolher a imagem de 1, $n-1$ possibilidades para escolher a imagem de 2, ...).

Grupos (abstratos). Os axiomas que definem um grupo abstrato são modelados sobre as propriedades dos grupos de transformações.

Um *grupo* é um conjunto G munido de uma operação binária/lei de composição interna $G \times G \rightarrow G$, que associa a cada par ordenado $(a, b) \in G \times G$ um elemento $ab \in G$, que verifica os seguintes axiomas:

G1 (*propriedade associativa*) $(ab)c = a(bc)$, para todos $a, b, c \in G$.

G2 (*existência do elemento neutro*) existe um elemento $e \in G$, chamado “elemento neutro”, tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.

G3 (*existência do inverso*) para todo $g \in G$ existe um elemento $g^{-1} \in G$, chamado “inverso de g ”, tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Os grupos de transformações são exemplos de grupos. Se a lei de composição satisfaz também o axioma

G4 (*comutatividade*) $ab = ba$, para todos $a, b \in G$,

então o grupo é dito *comutativo*, ou *abeliano* (em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel). Quando o mesmo conjunto G admite diferentes estruturas de grupo, é conveniente denotar o produto com algum símbolo, como por exemplo na notação “multiplicativa” $a \cdot b$. Neste caso, o elemento neutro é também denotado por 1. Em um grupo abeliano, costuma ser também usada a notação “aditiva” $a + b$ para a composição de a e b . Então $-g$ denota o inverso de g , e 0 denota o elemento neutro.

A propriedade associativa diz essencialmente que as parêntesis são desnecessárias. Assim que, por exemplo, o elemento $(a(bc))d$, obtido pela série de operações $c \mapsto bc \mapsto a(bc) \mapsto (a(bc))d$, pode ser sem ambiguidade denotado por $abcd$.

Em um grupo (abeliano ou não), as equações (nas incógnitas x ou y , dados $a, b \in G$)

$$ax = b \quad \text{e} \quad ya = b$$

admitem sempre soluções únicas, dadas por $x = a^{-1}b$ e $y = ba^{-1}$, respectivamente (que são iguais se o grupo é abeliano). Em particular, o elemento neutro é único, assim como o inverso de cada elemento.

Dado um elemento g de um grupo, é possível definir as suas potências g^n , com $n \in \mathbb{Z}$. Basta definir $g^0 = e$ e $g^{n+1} := g \cdot g^n$ se $n \geq 0$, e as potências negativas por $g^{-n} := (g^{-1})^n$. É imediato verificar que vale a lei dos expoentes $g^n g^m = g^{n+m}$. Em notação aditiva, a n -ésima potência do elemento g é naturalmente denotada $ng = g + g + \cdots + g$ (ou seja, n vezes g).

Na prática, os elementos de um grupo podem ser “parametrizados” por um conjunto de “parâmetros” $\alpha \in \mathcal{A}$, que podem ser números, ângulos, $\dots$, assim que um grupo concreto aparece como um conjunto $G = \{g_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$, e regras para calcular os produtos $g_\alpha g_\beta = g_\gamma$.

Em particular, pode acontecer que um grupo seja *finito*, ou seja, formado por um número finito de elementos, $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_{n-1}\}$. Neste caso, o número $|G| := n$ dos seus elementos é chamado *ordem* do grupo (finito) G . A lei de composição de um grupo finito pode ser apresentada na forma de uma “tabuada de multiplicar”, uma matriz quadrada $n \times n$ onde no elemento da i -ésima linha e da j -ésima coluna aparece o produto $g_i g_j$.

	g_1	g_2	$\dots$	g_j	$\dots$
g_1	$g_1 g_1$	$g_1 g_2$	$\dots$	$\vdots$	
g_2	$g_2 g_1$	$g_2 g_2$	$\dots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
g_i	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$g_i g_j$	
$\vdots$					$\ddots$

ex: Mostre que o elemento neutro de um grupo é único.

ex: Mostre que o inverso g^{-1} de todo elemento g de um grupo é único.

ex: Mostre que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

e.g. Grupos aditivos de números. Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, munidos da lei “adição” $a, b \mapsto a + b$, são grupos abelianos.

e.g. Espaços vetoriais. Todo espaço vetorial $\mathbf{V}$, real ou complexo, é um grupo abeliano, se munido da lei “adição” $\mathbf{v}, \mathbf{w} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}$. O elemento neutro é o vetor nulo $\mathbf{0}$, e o inverso do vetor $\mathbf{v}$ é o vetor oposto $-\mathbf{v}$.

e.g. Grupos multiplicativos de números. Os conjuntos $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, munidos da lei “multiplicação” $a, b \mapsto a \cdot b$, são grupos abelianos.

ex: Determine a tabuada de multiplicar do mais simples dos grupos não triviais, um grupo $G = \{e, g\}$ formado por apenas dois elementos, a identidade e e um outro elemento $g \neq e$.

ex: Mostre que na tabuada de multiplicar de um grupo finito cada coluna ou cada linha contém cada elemento do grupo exatamente uma vez.

e.g. Rotações do plano. As rotações do plano $\mathbb{R}^2$ formam um grupo comutativo. De fato, a composição de duas rotações anti-horárias R_θ e R_ϕ é uma rotação $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$.

ex: As rotações do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ também formam um grupo. Mostre com um exemplo, abstrato ou físico, que o grupo das rotações em dimensão 3 não é comutativo.

ex: Calcule a tabuada de multiplicar dos grupos simétricos S_2 e S_3 .

ex: Verifique que o grupo S_3 não é comutativo. Deduza que o mesmo acontece com S_n se $n \geq 3$.

Grupo diedral. O grupo das simetrias de (ou seja, das isometrias do plano euclidiano que preservam) um polígono regular de $n \geq 3$ lados é chamado *grupo diedral*, e denotado por D_n . Contém as n rotações r_k de ângulos $2\pi k/n$ (centradas no centro de massa do polígono), com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ou seja, a rotação r de um ângulo $2\pi/n$ e as suas potências $r^2, r^3, \dots, r^n = e$, e as n reflexões $s_1, s_2, \dots, s_n$ nos eixos de simetria do polígono (as n medianas, quando n é ímpar, ou as $n/2$ diagonais e as $n/2$ retas que unem os pontos médios dos lados opostos, quando n é par). É fácil verificar (comece pelo caso mais simples $n = 3$) que composições destas rotações e reflexões são ainda rotações ou reflexões deste tipo. Por exemplo, é claro que a composição de duas rotações é uma rotação. A composição de duas reflexões é uma rotação, possivelmente trivial (pois as reflexões são “involuções”). Se $s = s_1$ é uma das reflexões de D_n , e r é a rotação de um ângulo $2\pi/n$, então as outras reflexões são obtidas como produtos sr^k ou $r^k s$. Consequentemente, D_n é um grupo finito de ordem $2n$.

ex: Descreva explicitamente os grupos diedrais D_3 e D_4 , as simetrias de um triângulo equilátero e de um quadrado.

ex: Verifique que os grupos diedrais não são comutativos.

Grupos livres. Seja $A = \{a, b, c, \dots\}$ um “alfabeto”, ou seja, um conjunto finito de “letras”. O *grupo livre* gerado por A é o conjunto F_A das “palavras” finitas nas letras $a, b, c, \dots$ do alfabeto e nas “letras inversas” $a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, \dots$, munido da operação “concatenação”. Isto significa que, por exemplo, o produto das palavras *sobre* e *mesa*, nesta ordem, é a palavra *sobremesa*. A identidade do grupo é a palavra vazia, formada por nenhuma letra. De acordo com os axiomas de grupo, cada vez que numa palavra aparecem juntas uma letra e a sua inversa, como por exemplo as letras c e c^{-1} na palavra $abcc^{-1}de\dots$, é possível omitir a “sílabas” cc^{-1} e substituir a palavra por $abde\dots$. Assim, os elementos de F_A são as “palavras reduzidas” do género $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_n^{\alpha_n}$ com $a_k \in A$ e $\alpha_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

É claro que F_A não é comutativo se o alfabeto A contém pelo menos duas letras.

Grupos livres formado por isometrias hiperbólicas aparecem na teoria dos grupos kleinianos, e podem ser utilizados para gerar conjuntos de Cantor ... Em topologia algébricas, correspondem aos grupos fundamentais de “bouquet de círculos”.

ex: Identifique o grupo livre num alfabeto de apenas uma letra.

Grupo afim. Translações $z \mapsto z + a$ e homotetias $z \mapsto \lambda z$ geram o *grupo afim* do plano complexo, o grupo $\text{Aff}(\mathbb{C})$ das transformações

$$z \mapsto g_{\lambda, a}(z) := \lambda z + a,$$

com $a \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

ex: Calcule o inverso de $g_{\lambda,a}$, e a composição $g_{\lambda,a} g_{\mu,b}$.

ex: Verifique que o grupo afim não é comutativo.

Grupo linear geral. O grupo $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ dos *automorfismos* do espaço linear complexo $\mathbb{C}^n$ é o conjunto das aplicações lineares invertíveis $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, munido da lei de composição $L, M \mapsto L \circ M$. O elemento neutro é a aplicação identidade. Da mesma forma, é definido o grupo $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ dos automorfismos do espaço linear real $\mathbb{R}^n$.

Fixada uma base de $\mathbb{C}^n$ (por exemplo, a base canônica), uma transformação linear invertível $L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é definida por $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz complexa $n \times n$ invertível e $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ é um vetor coluna. A composição das transformações $L_B : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = B\mathbf{x}$ e depois $L_A : \mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} = A\mathbf{y}$ é a transformação $L_{AB} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{z} = AB\mathbf{x}$, e corresponde portanto ao produto “linhas por colunas” entre as matrizes A e B . O grupo $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ pode portanto ser identificado (tecnicamente é “isomorfo”, no sentido explicado a seguir) ao conjunto $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ das matrizes $n \times n$ invertíveis A , munido do produto “linhas por colunas”

$$A, B \mapsto AB,$$

chamado *grupo linear geral complexo* em dimensão n . A condição que decide se uma matriz quadrada A é invertível é $\text{Det} A \neq 0$, portanto

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \text{ t.q. } \text{Det} A \neq 0\}$$

Todo grupo formado por matrizes $n \times n$ é um “subgrupo” de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, no sentido, também explicado a seguir, que é um subconjunto que é ele próprio um grupo. Um exemplo é o *grupo linear geral real*

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \text{Det} A \neq 0\}$$

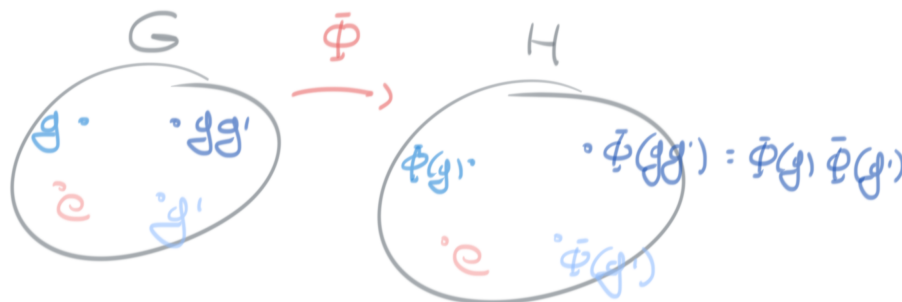
das matrizes invertíveis reais $n \times n$. É isomorfo ao grupo $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ dos automorfismos do espaço linear real $\mathbb{R}^n$.

9.2 Homomorfismos, subgrupos e quocientes

Homomorfismos e isomorfismos. Um *homomorfismo* do grupo G no grupo H é uma transformação $\Phi : G \rightarrow H$ que “envia produtos em produtos”, ou seja, tal que

$$\Phi(g) \Phi(g') = \Phi(gg')$$

para todos os $g, g' \in G$. É imediato verificar que a imagem da identidade é a identidade, ou seja, $\Phi(e) = e$, e que a imagem do inverso de g é o inverso da sua imagem, ou seja, $\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)^{-1}$. Um homomorfismo invertível é chamado *isomorfismo*. A existência de um isomorfismo entre dois grupos, G e H , é uma relação de equivalência, denotada por $G \approx H$. Grupos isomorfos são indistinguíveis do ponto de vista da estrutura de grupo.



e.g. Exponencial. A função exponencial $x \mapsto e^x$ satisfaz a equação funcional

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

e em particular $e^0 = 1$ e $1/e^x = e^{-x}$, logo define um isomorfismo $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ entre o grupo aditivo $\mathbb{R}$ e o grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+^\times$ dos reais positivos. O isomorfismo inverso é a função logaritmo

$$\log t := \int_1^t \frac{dt}{t}$$

O exponencial complexo $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ define um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{C}$ no grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Não é invertível, sendo periódico de período $2\pi i$.

ex: Mostre que o grupo formado pelas simetrias de um cubo é isomorfo ao grupo simétrico S_4 (uma simetria do cubo induz uma permutação das 4 diagonais ...).

Endomorfismos e automorfismos. Um homomorfismo de um grupo G no próprio grupo G é chamado *endomorfismo*. Um endomorfismo invertível é chamado *automorfismo*. É claro que a composição de dois automorfismos é também um automorfismo, assim que o conjunto $\text{Aut}(G)$ dos automorfismos de um grupo G , munido da lei “composição”, forma um grupo, chamado *grupo dos automorfismos* de G .

Um elemento a de um grupo G define dois automorfismos $L_a : G \rightarrow G$ e $R_a : G \rightarrow G$ (multiplicação à esquerda e à direita), definidos por

$$L_a(g) := ag \quad \text{e} \quad R_a(g) = ga,$$

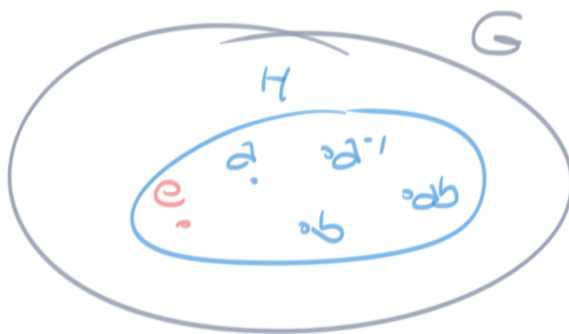
respetivamente. As multiplicações L_a e R_b comutam. Dado um elemento $a \in G$, a composição $\Psi_a := L_a R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} L_a$, que envia

$$g \mapsto aga^{-1}$$

é um automorfismo, chamado *conjugação* (observe que é a mesma fórmula que define matrizes semelhantes, ou seja, a mudança de coordenadas para uma matriz que representa um operador linear!).

ex: Verifique que um endomorfismo $\Psi : G \rightarrow G$ é um automorfismo sse $\Psi^{-1}(\{e\}) = \{e\}$, ou também sse $\Psi(G) = G$.

Subgrupos e quocientes. Um *subgrupo* do grupo G é um subconjunto $H \subset G$ que, munido da lei de composição definida em G , forma ele próprio um grupo. Isto significa que H contém a identidade e , contém o inverso a^{-1} de todo $a \in H$, e contém também o produto ab de todos $a, b \in H$.



Subgrupos triviais de G são o próprio G e o subgrupo minimal $\{e\}$.

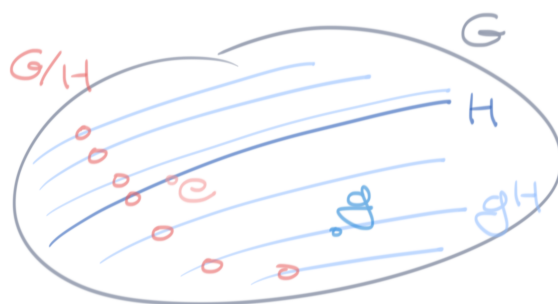
Todo $g \in G$ gera um subgrupo, o *grupo cíclico* $\langle g \rangle$ formado pelas suas potências g^n , com $n \in \mathbb{Z}$. Se finito, a ordem de $\langle g \rangle$ é também chamada *ordem* do elemento g .

O *núcleo* de um homomorfismo $\Phi : G \rightarrow H$ é $\ker \Phi := \Phi^{-1}\{e\}$, o conjunto dos $g \in G$ tais que $\Phi(g)$ é a identidade em H . É imediato verificar que o núcleo de Φ é um subgrupo de G .

Seja $H \subset G$ um subgrupo do grupo G . A *classe lateral à esquerda* (em inglês, *left coset*) de um elemento $g \in G$ é o subconjunto

$$gH := \{gh, \text{ com } h \in H\}$$

(num grupo aditivo, é mais natural usar a notação $g + H$). É imediato verificar que o grupo G é uma reunião disjunta de classes de equivalência (ou seja, pertencer a mesma classe é uma relação de equivalência). É então possível definir o *espaço quociente* G/H , cujos elementos são as classes de equivalência esquerdas (ou, de forma equivalente, um “representante” g para cada classe de equivalência gH).



Em geral, o espaço quociente não tem uma estrutura natural de grupo. Isto acontece quando H é um subgrupo *normal*, ou seja, quando $gH = Hg$ para todo $g \in G$. Neste caso, é possível definir um produto

$$(aH) \cdot (bH) := (ab)H$$

em G/H (que não depende dos representantes escolhidos a e b), e verificar que este produto faz de G/H um grupo, chamado *grupo quociente*. É claro que todo subgrupo de um grupo abeliano é normal.

De forma análoga é possível definir classes laterais à direita Hg , e portanto espaços ou grupos quociente $H \backslash G$.

O *centro* do grupo G é o conjunto $Z(G)$ dos elementos $h \in G$ que comutam, ou seja, satisfazem $gh = hg$, com todos os elementos $g \in G$. É imediato verificar que $Z(G)$ é um subgrupo normal de G . É claro também que um grupo é abeliano sse é igual ao próprio centro.

e.g. Por exemplo, as translações $z \mapsto z + a$ do plano complexo formam um subgrupo do grupo afim $\text{Aff}(\mathbb{C})$, isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{C}$. As homotetias $z \mapsto \lambda z$ do plano complexo, com $\lambda \neq 0$, formam também um subgrupo do grupo afim $\text{Aff}(\mathbb{C})$, isomorfo ao grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$.

ex: Mostre que o subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo se $ab \in H$ e $a^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$.

ex: Mostre que o subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se $ab^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$.

ex: Seja H um subgrupo de G . Verifique que se $g' \in gH$, então também $g \in g'H$, e portanto $g'H = gH$.

ex: Considere o grupo aditivo dos números inteiros $\mathbb{Z}$. O subconjunto $2\mathbb{Z}$ dos números pares é um subgrupo? E o subconjunto $2\mathbb{Z} + 1$ dos números ímpares?

ex: Seja X um conjunto e $A \subset X$ um subconjunto. Mostre que

$$G_A := \{f \in \text{Per}(X) \text{ t.q. } f(a) = a \quad \forall a \in A\} \quad \text{e} \quad G'_A := \{f \in \text{Per}(X) \text{ t.q. } f(A) = A\}$$

são subgrupos de $\text{Per}(X)$.

ex: Seja G um grupo, $a \in G$, e L_a o automorfismo $g \mapsto ag$. Sendo L_a uma permutação de G , todo grupo G pode ser considerado um subgrupo de um grupo de permutações, por exemplo de $\text{Per}(G)$. Em particular, se G é um grupo finito composto de $|G| = n$ elementos, então $a \mapsto L_a$ define um homomorfismo injetivo de G no grupo simétrico $S_n \approx \text{Per}(G)$ (teorema de Cayley-Jordan).

ex: Seja H um subgrupo finito do grupo G . Mostre que cada classe gH de G/H contém exatamente $|H|$ elementos (ou seja, existe uma bijeção de H sobre cada classe gH). Deduza que se G é também finito, então $|H|$ divide $|G|$ (teorema de Lagrange). A cardinalidade de G/H , ou seja, o número de classes diferentes gH em G , é chamada *índice* de H em G , e denotada por $[G : H]$. O teorema de Lagrange assume então a forma “tautológica”

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

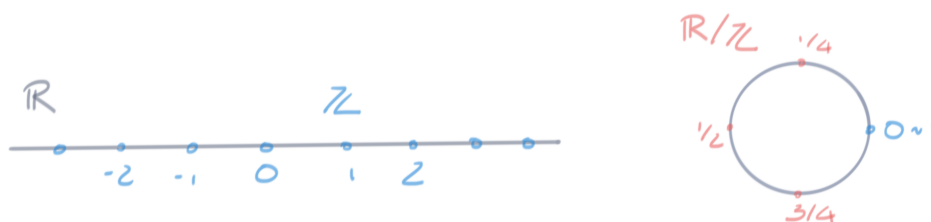
Se H é um subgrupo normal do grupo finito G , então $[G : H] = |G/H|$.

ex: Mostre que um subgrupo $H \subset G$ é normal sse $h \in H$ implica $ghg^{-1} \in H$ para todo $g \in G$

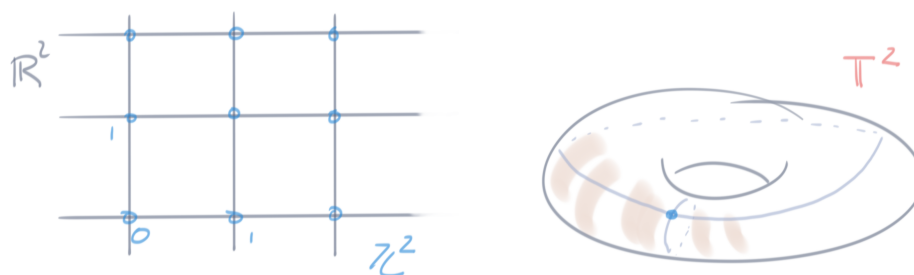
ex: Mostre que $\mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) : \text{Det} A > 0\}$ é um subgrupo de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

Toros. $\mathbb{Z}$ é um subgrupo do grupo aditivo abeliano $\mathbb{R}$. Em geral, $\mathbb{Z}^n$ é um subgrupo do grupo aditivo abeliano $\mathbb{R}^n$, formado pelos vetores de coordenadas inteiras. O quociente $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ é chamado *toro* de dimensão n , e é um grupo abeliano. Cada ponto do toro, ou seja, cada classe $x + \mathbb{Z}^n$, admite um único representante x no “domínio fundamental” $[0, 1)^n$.

Por exemplo, o toro $\mathbb{T}^1$ é obtido do segmento $[0, 1]$ ao identificar os pontos 0 e 1, ou seja, é uma circunferência.



O toro $\mathbb{T}^2$ é obtido do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ ao identificar os lados opostos da forma natural. É portanto a superfície de um “doughnut”.



Circunferência. A circunferência unitária $\mathbf{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$ é um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. A aplicação “exponencial” $\exp : x \mapsto e^{2\pi i x}$ é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ sobre o grupo $\mathbf{S}$. O núcleo é o subgrupo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx \mathbf{S}$.

Aritmética modular. Seja $n \in \mathbb{N}$. Os múltiplos inteiros de n formam um subgrupo $n\mathbb{Z}$ do grupo aditivo $\mathbb{Z}$, e o quociente $Z_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um grupo finito de ordem n . Os elementos são as classes $[k] = k + n\mathbb{Z}$ com $k = 0, 1, \dots, n-1$, e o elemento neutro é a classe $[0]$. A lei “adição” é $(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z}$.

Esta é, por exemplo, a aritmética que utilizam os relógios, que medem o tempo módulo 12 horas.

Raízes da unidade. Seja $G_n := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z^n = 1\} \subset \mathbf{S} \subset \mathbb{C}^\times$ o grupo multiplicativo das raízes n -ésimas da unidade. A aplicação “exponencial” $\exp : k + n\mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i k/n}$ realiza um isomorfismo $Z_n \approx G_n$. Neste sentido, Z_n é interpretado como uma “circunferência discreta”.

Grupos cíclicos. Se g é um elemento de um grupo G , então as suas potências g^k , com $k \in \mathbb{Z}$, formam um subgrupo, chamado (*sub*)grupo cíclico gerado por g , e denotado por $\langle g \rangle$. Observe que, unidade é $e = g^0$, e que este subgrupo é abeliano, pois $g^{n+m} = g^n g^m$.

Em geral, $\langle g \rangle$ contém um número infinito e numerável de elementos. Se existir um inteiro minimal $n \geq 1$ tal que $g^n = e$, então $\langle g \rangle$ é um grupo finito de ordem n , formado pelos elementos

$$e \quad g \quad g^2 \quad g^3 \quad \dots \quad g^{n-1}$$

Este grupo é também denotado por C_n e chamado grupo cíclico de ordem n , sem referência a natureza do gerador g (enquanto elemento de outro grupo maior G).

ex: Mostre que um grupo cíclico de ordem n , ou seja, um grupo do género $C_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ com $g^{n-1} = g^{-1}$, é isomorfo a Z_n .

ex: A multiplicação em $\mathbb{Z}$ também passa ao quociente, e portanto define uma lei de composição interna em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Se p um número primo, então o conjunto $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ dos elementos não nulos (ou seja, diferentes da classe $0 + p\mathbb{Z}$) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é um grupo abeliano multiplicativo se munido da lei “multiplicação” $(a + p\mathbb{Z}) \cdot (b + p\mathbb{Z}) = (a \cdot b) + p\mathbb{Z}$.

ex: Mostre que, se $n \geq 3$, o grupo cíclico Z_n é um subgrupo do grupo diedral (gerado pela rotação de um ângulo $2\pi/n$), que é um subgrupo do grupo simétrico, ou seja,

$$Z_n \subset D_n \subset S_n.$$

Fast Fourier transform: the Cooley-Tukey algorithm. Consider the problem to compute the discrete Fourier transform (DFT) in the cyclic group $Z_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Apart a normalization factor $1/\sqrt{N}$, see (7.7), the DFT takes the discrete signal $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ (thought as a complex valued function $\mathbf{x} : Z_N \rightarrow \mathbb{C}$) to its “transform” $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})$, defined as

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \zeta^{-nm} \quad (9.1)$$

where $\zeta = e^{i2\pi/N}$, and the “frequency” m also runs from 0 to $N-1$. The basic discovery of Cooley and Tukey⁵⁷ is that, when N is composite, the symmetries of Z_N allow some saving in the computations. Assume that N factorizes as $N = PQ$. Then Z_N contains the finite subgroup $\{[0], [Q], [2Q], \dots, [(P-1)Q]\}$ isomorphic to $Z_P = \mathbb{Z}/P\mathbb{Z}$, and an obvious choice of representatives of the quotient group Z_N/Z_P is the set $\{0, 1, 2, \dots, Q-1\}$. Thus, any n between 0 and $N-1$ can be uniquely written as $n = q + pQ$ with $0 \leq q \leq Q-1$ and $0 \leq p \leq P-1$. We now observe that the terms in (9.1) can be rearranged as

$$\begin{aligned} X_m &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \zeta^{-nm} = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{p=0}^{P-1} x_{q+pQ} \zeta^{-(q+pQ)m} \\ &= \sum_{q=0}^{Q-1} \zeta^{-qm} \sum_{p=0}^{P-1} x_{q+pQ} \eta^{-pm} \end{aligned} \quad (9.2)$$

⁵⁷J.W. Cooley and J.W. Tukey, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Mathematics of Computation* **19** (1965), 297-301.

where $\eta = \zeta^Q = e^{i2\pi/P}$. The inner sums in (9.2), namely

$$X_m^q = \sum_{p=0}^{P-1} x_{q+pQ} \eta^{-pm} = \sum_{p=0}^{P-1} x_p^q \eta^{-pm}$$

may be interpreted as DFTs of the signals $\mathbf{x}^q = (x_q, x_{q+Q}, x_{q+2Q}, \dots, x_{q+(P-1)Q})$, one for each q between 0 and $Q-1$, in the smaller group Z_P , computed at the frequency m (which only depend on the class of m modulo P). It takes NP operations (multiplications and sums) to compute all of the X_m^q 's. Computation of all the X_m 's from the X_m^q 's in (9.2) then takes another NQ operations. The total number of operations sufficient to compute all the N components X_m 's with (9.2) is therefore

$$N(P+Q)$$

(assuming all the powers ζ^{-nm} computed and available). This is already much smaller, for large P and Q , than the N^2 operations of a naive algorithm using the definition (9.1).

This idea can be iterated on the factors of N , and it is not difficult to see that if it factorizes as $N = PQRS \dots$ then we may compute the DFT with $N(P+Q+R+S+\dots)$ operations. In particular, if N is a power of two, say $N = 2^M$, a recursive algorithm may compute the DFT with only

$$N(\underbrace{2+2+\dots+2}_{M \text{ times}}) = N(2M) = 2N \log_2 N$$

operations. This is one of the algorithms known as *fast Fourier transform* (FFT). To understand how it works, hence write a code, we set $N = 2^M$, and consider $Q = 2$ and $P = N/2 = 2^{M-1}$. A signal $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2^M-1})$ of length N splits into an even and an odd signal of length $N/2$,

$$\mathbf{x}^{\text{even}} := \mathbf{x}^0 = (x_0, x_2, \dots, x_{N-2}) \quad \text{and} \quad \mathbf{x}^{\text{odd}} := \mathbf{x}^1 = (x_1, x_3, \dots, x_{N-1})$$

Then (9.2) reads

$$X_m = \sum_{p=0}^{N/2-1} x_p^{\text{even}} e^{-i2\pi pm/(N/2)} + e^{-i2\pi m/N} \sum_{p=0}^{N/2-1} x_p^{\text{odd}} e^{-i2\pi pm/(N/2)}$$

This is a weighted sum of two DFT of length $N/2 = 2^{M-1}$, of the even and odd part of the signal. In a recursive code, we may therefore first split the signal of length N into an even and odd part, then compute their FFT (in length $N/2$), and finally concatenate a weighted sum of the even and odd transforms. The code is as follows:

```

8
9 # libraries
10 import numpy as np
11
12 # FFT recursive function
13 def FFT(x):
14
15     N = len(x) # must be a power of two!
16
17     if N == 1:
18         return x
19
20     else:
21         X_even = FFT(x[::2])
22         X_odd = FFT(x[1::2])
23
24         m = np.arange(N)
25         weigh = np.exp(-2j*np.pi*m/N)
26
27         X = np.concatenate(
28             [X_even+weigh[:int(N/2)]*X_odd,
29              X_even+weigh[int(N/2):]*X_odd])
30         return X

```

To have an idea of the gain, assume that a computer is able to do 10^6 multiplications per second, and that a signal has length N of the order of $10^6 \sim 2^{20}$. Then it will run the standard algorithm of the DFT in 12 days and the Cooley-Tuckey algorithm of the FFT in about only 21 seconds!

Presentações: geradores e relações. Todo grupo G pode ser pensado formado por palavras (finitas) nas letras de um alfabeto, e portanto como um subconjunto, de fato um subgrupo, de um grupo livre. Basta, por exemplo, considerar palavras nas letras de G , logo observar que $G \subset F_G$. Mas isto é tautológico, logo pouco interessante.

Mais interessante é encontrar um alfabeto “pequeno” $A = \{a, b, c, \dots\} \subset G$ de elementos, chamados *geradores*, e portanto pensar que $G \subset F_A$. Se, por outro lado, G não é o grupo livre F_A , isto significa que existem palavras diferentes nas letras de A que representam o mesmo elemento de G . Por exemplo, pode acontecer que $abc = df$, ou seja, que $abcf^{-1}d^{-1} = e$. Neste caso, cada palavra que contém a sequência de letras abc pode ser substituída por uma palavra que contém, na posição de abc , a sequência df . Tais palavras equivalentes, ou melhor, as palavras equivalentes a identidade, são chamadas *relações* do grupo G relativamente ao conjunto de geradores A . Um grupo G pode ser então definido por um conjunto A de geradores e por uma família “minimal” R de relações, palavras finitas nas letras de A e nas suas inversas. Esta forma de definir um grupo é chamada *apresentação*, e a notação é

$$G = \langle a, b, c, \dots \mid r_1, r_2, r_3, \dots \rangle$$

onde $a, b, c, \dots$ são as letras de A , e $r_1, r_2, r_3, \dots$ são palavras finitas nas letras de A e as inversas, que são equivalentes à identidade em G . Naturalmente, a escolha dos geradores, e consequentemente das relações, não é única.

Mais formalmente, o grupo G é igual ao quociente $G = F_A/N_A$ do grupo livre F_A módulo o menor subgrupo normal $N_R \subset G$ que contém todas as relações $r \in R$.

Tais apresentações são particularmente úteis quando o alfabeto A é finito e também o conjunto das relações é finito.

e.g. Grupos livres. Naturalmente, um grupo livre gerado por A é simplesmente

$$F_A = \langle A \mid \emptyset \rangle$$

e.g. Grupos cíclicos. Um grupo cíclico de n elementos é

$$C_n = \langle g \mid g^n \rangle$$

um grupo gerado por um elemento g com uma única relação que diz que $g^n = e$.

e.g. Grupos diedrais. Por exemplo, o grupo diedral D_n é gerado por uma rotação r de ordem n (a rotação de um ângulo $2\pi/n$) e uma reflexão s (num dos eixos de simetria do polígono regular), de ordem 2. As outras rotações são as potências $r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$, e r^n é a rotação de um ângulo 2π , logo a identidade. As outras reflexões podem ser obtidas como composições de potências de r com s , pois é imediato verificar que $sr = r^{-1}s$. OS geradores r e s satisfazem portanto as relações $r^n = e$, $s^2 = e$ e $sr = r^{-1}s$. Assim, o grupo diedral admite a apresentação

$$D_n = \langle r, s \mid r^n, s^2, (sr)^2 \rangle$$

Produtos. Dados dois grupos, H_1 e H_2 , é possível construir um *grupo produto* $G = H_1 \times H_2$ considerando pares ordenados (h_1, h_2) , com $h_1 \in H_1$ e $h_2 \in H_2$, e definindo o produto da maneira natural

$$(h_1, h_2) \cdot (h'_1, h'_2) := (h_1 h'_1, h_2 h'_2)$$

A identidade é o produto das identidades. $H'_1 = H_1 \times \{e\}$ e $H'_2 = \{e\} \times H_2$ são subgrupos normais isomorfos a H_1 e H_2 , respetivamente, e é claro que os grupos quocientes são $G/H'_1 \approx H_2$ e $G/H'_2 \approx H_1$.

Iterando esta a construção, é possível definir produtos finitos $\prod_{k=1}^n G_k$ de grupos.

ex: Mostre que o produto $Z_2 \times Z_3$ é isomorfo a Z_6 .

Grupo linear especial. O determinante de uma matriz quadrada, a aplicação $A \mapsto \text{Det}A$, é um homomorfismo

$$\text{Det} : \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

do grupo linear geral complexo sobre o grupo multiplicativo dos números complexos diferentes de zero (pois o determinante de um produto é igual ao produto dos determinantes). O seu núcleo, o conjunto

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \text{Det}A = 1\}$$

das matrizes complexas com determinante igual a um, é portanto um subgrupo do grupo linear, chamado *grupo linear especial*.

Da mesma forma, o grupo *linear especial real*

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ t.q. } \text{Det}A = 1\}$$

é o subgrupo do grupo linear real formado pelas matrizes reais com determinante igual a 1. O determinante de uma matriz quadrada real A é igual ao quociente

$$\text{Det}A = \pm \frac{\text{Vol}(A(\square))}{\text{Vol}(\square)}$$

entre o volumes do hipercubo $\square := [0, 1]^n$ e o volume da sua imagem $A(\square)$ pela transformação linear definida por A , com sinal positivo ou negativo dependendo se A preserva ou inverte a orientação. Consequentemente, $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ representa o grupo dos automorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preservam o volume e também a orientação.

ex: O conjunto das matrizes quadradas $n \times n$ reais com determinante $\text{Det}A = -1$ forma um subgrupo de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$?

ex: O conjunto das matrizes quadradas $n \times n$ reais invertíveis e diagonais superiores (ou seja, tais que $a_{ij} = 0$ se $i > j$) forma um subgrupo de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$?

ex: O conjunto das matrizes quadradas $n \times n$ reais diagonais superiores e iguais à identidade na diagonal (ou seja, tais que $a_{ij} = 0$ se $i > j$ e com $a_{ii} = 1$ para todo i) forma um subgrupo de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$?

9.3 Isometrias e grupos ortogonais ou unitários

Isometrias. Um *espaço métrico* (X, d) é um conjunto não vazio X munido de uma *métrica*, ou seja, uma função “distância” $\text{dist} : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz os axiomas:

M1 (*simetria*) $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$;

M2 (*positividade*) $\text{dist}(x, x) = 0$, e $\text{dist}(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

M3 (*desigualdade do triângulo*) $\text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(x, z) + \text{dist}(z, y)$.

Exemplos são os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, munidos da distância definida pela norma euclidiana, $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, e os seus subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

Uma permutação $f : X \rightarrow X$ do espaço métrico (X, d) é dita *isometria* se preserva as distâncias, ou seja, se

$$\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y)$$

para todos os $x, y \in X$. É imediato verificar que a identidade é uma isometria, a inversa de uma isometria é uma isometria, e a composição de duas isometrias é ainda uma isometria. Consequentemente, o conjunto $\text{Isom}(X)$ das isometrias de (X, d) é um subgrupo do grupo $\text{Per}(X)$ das permutações de X .

Translações. O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) é um grupo abeliano relativamente à operação “soma”, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. O elemento neutro é a origem $\mathbf{0}$. Os seus elementos podem ser pensados como “translações” do próprio espaço $\mathbb{R}^n$. De fato, cada vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ define uma transformação invertível $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a},$$

com inversa $(T_{\mathbf{a}})^{-1} = T_{-\mathbf{a}}$. A composição é $T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$. O elemento neutro $\mathbf{0}$ define a translação trivial $\mathbf{x} \mapsto T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. O grupo $\mathbf{T}(n)$ das translações de $\mathbb{R}^n$ representa as mudanças da origem do referencial. Se $\mathbb{R}^n$ é munido da distância euclidiana $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, então o grupo das translações é um subgrupo do grupo das isometrias de $\mathbb{R}^n$.

Grupo ortogonal e rotações. O grupo das isometrias lineares do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o subgrupo dos automorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preservam o produto escalar canónico. Fixada a base canónica (ou outra base ortonormada), a transformação linear $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, é uma isometria sse $A^{\top}A = AA^{\top} = I$ (ou seja, se A é invertível e a sua inversa é $A^{-1} = A^{\top}$). Portanto, o grupo das isometrias lineares de $\mathbb{R}^n$ é isomorfo ao grupo ortogonal

$$\mathbf{O}(n) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ t.q. } A^{\top}A = AA^{\top} = I\}$$

O grupo especial ortogonal é o subgrupo

$$\mathbf{SO}(n) := \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$$

formado pelas matrizes ortogonais com $\text{Det}A = 1$. É chamado grupo das rotações, ou grupo das isometrias lineares “diretas” de $\mathbb{R}^n$ (ou seja, isometrias lineares que preservam a orientação).

ex: Mostre que o determinante de uma matriz $A \in \mathbf{O}(n)$ é $\text{Det}A = \pm 1$.

ex: Identifique os grupos $\mathbf{O}(1)$ e $\mathbf{SO}(1)$.

Rotações do plano e $\mathbf{O}(2)$. O menor grupo ortogonal não trivial é $\mathbf{O}(2)$, que contém o grupo $\mathbf{SO}(2)$ das rotações do plano. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

uma genérica matriz real 2×2 . A condição $A^{\top}A = I$ diz que

$$a^2 + c^2 = 1 \quad ab + cd = 0 \quad b^2 + d^2 = 1$$

ou seja, que as colunas de A formam uma base ortonormada do plano. Consequentemente, existe um ângulo θ tal que $(a, c) = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $(b, d) = \pm(-\sin \theta, \cos \theta)$. A condição $\text{Det}A = 1$ diz que

$$ad - bc = 1$$

e portanto fixa o sinal da segunda coluna de A . Consequentemente, o grupo $\mathbf{SO}(2)$ é o grupo das matrizes

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

com $\theta \in \mathbb{R}$ (definido a menos de múltiplos inteiros de 2π). Tais matrizes definem de fato rotações de um ângulo θ no sentido anti-horário, e a lei de composição é $R_{\theta}R_{\phi} = R_{\theta+\phi}$. Topologicamente, o grupo das rotações do plano é portanto uma circunferência, parametrizada pelo ângulo $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Consideramos a matriz $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que está em $\mathbf{O}(2)$, é uma involução, ou seja, $J^2 = I$, e tem determinante $\text{Det}J = -1$. Se $B \in \mathbf{O}(2)$ tem determinante $\text{Det}B = -1$, logo não é uma rotação, então $\text{Det}(BJ) = 1$, ou seja, $A = BJ \in \mathbf{SO}(2)$. Consequentemente, existe um ângulo θ (definido a menos de múltiplos inteiros de 2π) tal que

$$B = R_{\theta}J = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Assim, do ponto de vista topológico o grupo $\mathbf{O}(2)$ é uma reunião disjunta de duas circunferências, o subgrupo $\mathbf{SO}(2)$ e o subconjunto $\mathbf{SO}(2) \cdot J$.

ex: Diga se as seguintes matrizes são ortogonais e se são rotações.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: O conjunto das matrizes $A \in \mathbf{O}(n)$ com $\text{Det} A = -1$ é um subgrupo de $\mathbf{O}(n)$?

Rotações do espaço de dimensão 3. O grupo das isometrias lineares do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ (o espaço onde acontece a física newtoniana) é o grupo dos operadores ortogonais, representados numa base ortonormada por matrizes do grupo ortogonal $\mathbf{O}(3)$.

Uma matriz ortogonal A , pensada como matriz complexa, é unitária. Consequentemente, os seus valores próprios (enquanto matriz complexa) satisfazem $|\lambda| = 1$, ou seja, estão na circunferência unitária do plano complexo. O polinómio característico de A é um polinómio de grau 3 com coeficientes reais. Portanto, pelo menos uma das raízes é real, por exemplo $\lambda = \pm 1$ (os únicos pontos reais da circunferência unitária), e as outras duas raízes são complexas conjugadas, por exemplo $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Em particular, $\text{Det} A = \lambda \lambda_+ \lambda_- = \lambda$.

Se $\lambda = \text{Det} A = -1$, então $\text{Det}(-A) = 1$, e portanto $-A \in \mathbf{SO}(3)$, ou seja, A é a composição $A = JR$ de uma rotação $R \in \mathbf{SO}(3)$ e a inversão $J := -I \in \mathbf{O}(3)$. Em particular, o grupo $\mathbf{O}(3)$ é a reunião disjunta do subgrupo $\mathbf{SO}(3)$ e da classe $-\mathbf{SO}(3) := J \cdot \mathbf{SO}(3)$ (que não é um subgrupo). Enquanto grupo, o grupo ortogonal $\mathbf{O}(3)$ é isomorfo ao produto $\mathbf{SO}(3) \times C_2$ do grupo das rotações vezes o grupo cíclico $C_2 = \{\pm I\}$. É suficiente portanto compreender as rotações.

Seja $R \in \mathbf{SO}(3)$. Se $\mathbf{n}$ é um vetor próprio unitário de R associado ao valor próprio $\lambda = 1$, então o complemento ortogonal $\mathbf{n}^\perp \approx \mathbb{R}^2$ é um subespaço invariante para R , e a restrição $R|_{\mathbf{n}^\perp}$ é também uma rotação, representada por uma matriz de $\mathbf{SO}(2)$. Portanto, em um referencial ortonormado $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ tal que $\mathbf{k}' = \mathbf{n}$, a rotação R é representada pela matriz

$$R_{\theta \mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Se o ângulo θ não é um múltiplo inteiro de π , então a reta $\mathbf{n}\mathbb{R}$ é o único espaço próprio de R , e é chamada “eixo de rotação”. Finalmente, R é da forma

$$O^\top R_{\theta \mathbf{k}} O$$

com $O \in \mathbf{SO}(3)$. A mudança de coordenadas ortogonal O que envia $\mathbf{n}$ no eixo $\mathbf{k}'$ é determinada por dois ângulos, por exemplo a longitude $\varphi \in [0, 2\pi]$ e a latitude $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ de $\mathbf{n}$ (que é um ponto da esfera unitária $\mathbf{S}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$). Isto significa que as matrizes do grupo $\mathbf{SO}(3)$ podem ser parametrizadas por 3 ângulos.

ex: Verifique que uma rotação de um ângulo θ em torno de um vetor unitário $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ pode ser representada pelo operador

$$R_{\theta \mathbf{v}} \mathbf{x} = (\cos \theta) \mathbf{x} + (\sin \theta) \mathbf{v} \times \mathbf{x} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{v} \quad (9.3)$$

(escolhe um referencial ortonormado $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ em que $\mathbf{k} = \mathbf{v}$, e observe que se $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$ então $x_3 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ e $(x_1 \mathbf{j} - x_2 \mathbf{i}) = \mathbf{k} \times \mathbf{x} \dots$)

ex: O mesmo argumento utilizado acima mostra que toda rotação $R \in \mathbf{SO}(2n+1)$ de um espaço euclidiano de dimensão ímpar $\mathbb{R}^{2n+1}$ admite um “eixo de rotação”, ou seja, uma reta invariante, formada por vetores próprios com valor próprio 1. Mostre, com exemplos, que isto não acontece com as rotações de um espaço euclidiano de dimensão par $\mathbb{R}^{2n}$.

Ângulos de Euler. Uma parametrização conveniente do grupo das rotações, usada para tratar problemas de física e engenharia como o corpo rígido, usa um sistema de ângulos chamados “ângulos de Euler”.

Uma rotação $R \in \mathbf{SO}(3)$ envia o referencial canônico $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, que define as coordenadas cartesianas x, y, z , num outro referencial ortonormado $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, que define coordenadas cartesianas X, Y, Z . Se $\mathbf{K} \neq \pm \mathbf{k}$ (ou seja, se R não é uma rotação em torno do eixo dos z), então a interseção entre os planos $x-y$ e $X-Y$ determina uma reta, chamada “linha dos nós”. Nesta reta, é possível individuar um vetor unitário $\mathbf{N}$ de maneira tal que uma rotação anti-horária de um ângulo $0 \leq \alpha < 2\pi$ em torno de $\mathbf{k}$, definida pela matriz

$$R_{\alpha \mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

envia $\mathbf{i}$ em $\mathbf{N}$. Existe então um ângulo $0 \leq \beta \leq \pi$ tal que uma sucessiva rotação em torno de $\mathbf{n}$ (que agora é o eixo $\mathbf{i}$), definida pela matriz

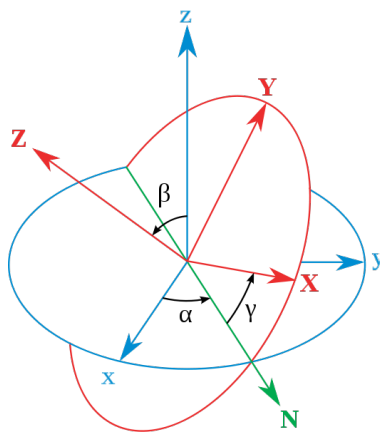
$$R_{\beta \mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix},$$

envia $\mathbf{k}$ em $\mathbf{K}$. Finalmente, existe um ângulo $0 \leq \gamma < 2\pi$ tal que uma sucessiva rotação em torno de $\mathbf{K}$ (que agora é o eixo $\mathbf{k}$), definida pela matriz

$$R_{\gamma \mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

envia $\mathbf{n}$ em $\mathbf{I}$. Assim, a rotação genérica é uma composição de três rotações

$$R = R_{\gamma \mathbf{k}} R_{\beta \mathbf{i}} R_{\alpha \mathbf{k}}.$$



Ângulos de Euler (from <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eulerangles.svg>).
(Lionel Brits / CC BY <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0>)

ex: Diga se as seguintes matrizes são ortogonais e se representam rotações.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Calcule explicitamente o produto $R_{\gamma \mathbf{k}} R_{\beta \mathbf{i}} R_{\alpha \mathbf{k}}$.

Isometrias euclidianas. O grupo das isometrias do espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$ é também chamado $\mathbf{E}(n) = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Toda a isometria do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é do género

$$\mathbf{x} \mapsto T_A \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e T_A uma isometria linear definida, na base canónica, por uma matriz $A \in \mathbf{O}(n)$, ou seja, é a composição de uma “isometria linear” (uma isometria que preserva a origem) e uma translação.

É claro que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria e se $f(\mathbf{0}) = \mathbf{a}$, então a transformação $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}$ é também uma isometria e fixa a origem, i.e. $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. A afirmação acima é portanto consequência do seguinte

Teorema 9.1. *Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação que preserva as distâncias euclidianas entre os pontos de $\mathbb{R}^n$ e que envia a origem na origem, ou seja, $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Então g é uma transformação linear que preserva os produtos escalares, logo definida, na base canónica, por uma matriz $A \in \mathbf{O}(n)$.*

Demonstração. Se g preserva as distâncias e fixa a origem, então também preserva as distâncias da origem, ou seja, as normas (pois $\|g(\mathbf{x})\| = \text{dist}(g(\mathbf{x}), \mathbf{0}) = \text{dist}(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{0})) = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\|$). Pelas identidades de polarização (5.2), g também preserva os produtos escalares, ou seja, $\langle g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada, por exemplo a base canónica. Então também os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$, definidos por $\mathbf{f}_k = g(\mathbf{e}_k)$, formam uma base ortonormada, pois g preserva os produtos escalares. Se $\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$ é um vetor arbitrário, com coordenadas $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$ na base ortonormada $\mathbf{e}_k$, então a sua imagem é

$$g(\mathbf{x}) = \sum_k \langle \mathbf{f}_k, g(\mathbf{x}) \rangle \mathbf{f}_k = \sum_k \langle g(\mathbf{e}_k), g(\mathbf{x}) \rangle \mathbf{f}_k = \sum_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{f}_k = \sum_k x_k \mathbf{f}_k$$

também porque g preserva os produtos escalares. É claro que esta fórmula implica que g é linear. Mas uma isometria linear é definida, num referencial ortonormado, por uma matriz ortogonal (a matriz que envia os $\mathbf{e}_k$'s, pensados como vetores coluna, nos $A\mathbf{e}_k = \mathbf{f}_k$'s). $\square$

Uma isometria $\mathbf{x} \mapsto T_A \mathbf{x} + \mathbf{a}$ é chamada *direta* se preserva a orientação, ou seja, se $\text{Det} A = 1$ e portanto A é uma rotação. Observem que translações e isometrias lineares não comutam. Em geral, a composição de $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = T_A \mathbf{x} + \mathbf{a}$ e depois $\mathbf{y} \mapsto T_B \mathbf{y} + \mathbf{b}$, com $A, B \in \mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, é

$$\mathbf{x} \mapsto T_{BA} \mathbf{x} + (T_B \mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

ex: Verifique que o grupo $\mathbf{T}(n)$ das translações $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ é um subgrupo normal de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, e que o quociente $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)/\mathbf{T}(n)$ é isomorfo ao grupo $\mathbf{O}(n)$.

Grupo de Galilei. A equação de Newton $\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = 0$ de uma partícula livre não relativística de massa m em um referencial inercial é invariante para o grupo das isometrias euclidianas $\mathbf{E}(3)$, gerado pelas translações $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{q}$, com $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, e pelas isometrias lineares $\mathbf{r} \mapsto O\mathbf{r}$, com $O \in \mathbf{O}(3)$. Também é invariante, de acordo com o princípio de inércia de Galileu, se passamos de um referencial inercial a outro em movimento retilíneo uniforme relativamente ao primeiro, ou seja, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{V}t$, onde $\mathbf{V}$ é uma velocidade constante. É subentendido que o tempo t não muda, sendo absoluto na física não relativística. Estas simetrias do espaço-tempo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, de coordenadas $(\mathbf{r}, t)$, formam o *grupo de Galilei*.

Grupo unitário. O grupo dos automorfismos unitários do espaço hermitico $\mathbb{C}^n$ é o subgrupo dos automorfismos que preservam o produto hermitico canónico. A transformação $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$, onde $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ é um vetor coluna e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, é unitária sse $A^*A = AA^* = I$. O grupo dos automorfismos unitários de $\mathbb{C}^n$ é portanto isomorfo ao *grupo unitário*

$$\mathbf{U}(n) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \text{ t.q. } A^*A = I\}$$

O determinante de uma matriz unitária satisfaz $|\text{Det}A| = 1$. O *grupo especial unitário* é o subgrupo

$$\mathbf{SU}(n) := \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$$

formado pelas matrizes unitárias com determinante igual a um.

O grupo $\mathbf{U}(1)$. O grupo $\mathbf{U}(1)$ é o grupo multiplicativo dos números complexos $z = x + iy$ de módulo $|z| = 1$, ou seja, a circunferência unitária $\mathbf{S} \subset \mathbb{C}$. Todo número complexo de módulo um pode ser representado por $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. É imediato verificar que a correspondência

$$e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo $\mathbf{U}(1) \approx \mathbf{SO}(2)$.

ex: Identifique $\mathbf{SU}(1)$.

O grupo $\mathbf{SU}(2)$. As matrizes unitárias são normais, logo diagonalizáveis sobre os complexos numa base ortonormada, e têm valores próprios unitários. Em particular, uma matriz $A \in \mathbf{SU}(2)$ tem valores próprios $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$ para algum ângulo θ , pois o produto é $\lambda_+ \lambda_- = \text{Det}A = 1$. Portanto, uma matriz genérica de $\mathbf{SU}(2)$ é da forma

$$A = U \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} U^*$$

com $U \in \mathbf{SU}(2)$. É também claro que, a menos de reordenar os vetores próprios, basta considerar valores $0 \leq \theta < \pi$ do parâmetro.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

uma genérica matriz complexa 2×2 . A condição $AA^* = I$ é equivalente a

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \quad \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0$$

e a condição $\text{Det}A = 1$ é equivalente a

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Ao multiplicar por γ a terceira condição e usando a quarta e depois a segunda, obtemos $\alpha = \bar{\delta}$. Ao multiplicar por δ a terceira condição e usando a quarta e depois a segunda, obtemos $\beta = -\bar{\gamma}$. Consequentemente, o grupo $\mathbf{SU}(2)$ é o grupo das matrizes complexas

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\gamma} \\ \gamma & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

com α e γ números complexos tais que

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \quad (9.5)$$

Em particular, se identificamos os pontos $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{C}^2$ com os pontos $(x, y, s, t) \in \mathbb{R}^4$ por meio de $\alpha = x + iy$ e $\gamma = s + it$, o grupo $\mathbf{SU}(2)$ é uma esfera $\mathbf{S}^3 = \{x^2 + y^2 + s^2 + t^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$.

Quaterniões e $\mathbf{SU}(2)$. O grupo $\mathbf{U}(1)$ é, tautologicamente, isomorfo à circunferência unitária do plano complexo. Acontece que o grupo $\mathbf{SU}(2)$ é isomorfo ao grupo multiplicativo dos quaterniões unitários.

A cada quaternião $x = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ associamos a matriz complexa 2×2 de acordo com a receita

$$\Phi(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Phi(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \Phi(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Phi(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(observe que $\Phi(\mathbf{1}) = \sigma_0$, $\Phi(\mathbf{i}) = i\sigma_3$, $\Phi(\mathbf{j}) = i\sigma_2$ e $\Phi(\mathbf{k}) = i\sigma_1$, onde as σ_α 's são as matrizes de Pauli (6.14)) e consequentemente, por linearidade,

$$\Phi(x) = x_0\sigma_0 + x_1i\sigma_3 + x_2i\sigma_2 + x_3i\sigma_1 = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

Então é possível verificar que Φ define um homomorfismo entre o grupo multiplicativo $\mathbb{H}^\times$ dos quaterniões não nulos e o grupo multiplicativo das matrizes complexas do género (9.4) e não nulas. Consequentemente, Φ define um isomorfismo entre o grupo multiplicativo dos quaterniões unitários, a esfera $\|x\|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, e o grupo $\mathbf{SU}(2)$, as matrizes do género (9.4) que satisfazem (9.5).

Grupos unimodulares e isometrias hiperbólicas. O grupos unimodulares $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ e $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ também podem ser pensados como grupos de isometrias dos espaços hiperbólicos de dimensão 2 (o “plano de Poincaré”) e 3, respetivamente. Certos seus subgrupos discretos são as simetrias dos desenhos de Escher mostrados no início desta seção, e podem produzir imagens ainda mais complexas e fascinantes, como intuído por Felix Klein.⁵⁸ Um exemplo particularmente importante é o grupo $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$, o subgrupo de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ formado por matrizes 2×2 com entradas inteiras, ou melhor o quociente $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z}) := \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\}$, chamado *grupo modular*. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com a, b, c, d inteiros tem determinante $\text{Det} A = ad - bc = 1$ sse as colunas e as linhas de A são pares de inteiros relativamente primos (sem divisores comuns diferentes de ± 1). De fato, se por exemplo $a = pr$ e $b = ps$ com $|p| > 1$, então $ad - bc = p(rd - sc) = 1$, o que é impossível pois $rd - sc$ também é um inteiro.

Existem muitas matrizes deste género, as mais simples sendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots$$

es as outras sendo obtida ao calcular potências e produtos destas. Assim, $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ contém informações aritméticas, sobre a estrutura dos números primos!

Infinite dihedral group. Also interesting are isometries of discrete spaces, such as metric graphs. The simplest infinite and discrete metric space is certainly the space of integers $\mathbb{Z}$, equipped with its obvious metric $\text{dist}(n, m) = |n - m|$. Its isometry group is called *infinite dihedral group*, and denoted $D_\infty := \text{Isom}(\mathbb{Z})$. It can be generated by a reflection and a translation, for example the reflection $r : n \mapsto -n$ about the origin and the unit translation $t : n \mapsto n + 1$, so that

$$D_\infty \approx \langle r, t \mid r^2, trtr \rangle$$

It may also be generated by two reflections, for example the reflection $r : n \mapsto -n$ about the origin and the reflection $s = tr : n \mapsto 1 - n$ about the point $1/2$ (if we think at $\mathbb{Z}$ inside the real line), so that

$$D_\infty \approx \langle r, s \mid r^2, s^2 \rangle$$

9.4 Outros grupos da física-matemática

⁵⁸D. Mumford, C. Series and D. Wright, *Indra's Pearls: the vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002.

Grupos de Poincaré e de Lorentz. O *espaço-tempo de Minkowski*, o espaço-tempo da teoria da relatividade restrita⁵⁹, é o produto cartesiano $\mathbf{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, de coordenadas $(t, \mathbf{r}) = (t, x, y, z)$ (ou seja, uma coordenada temporal t e 3 coordenadas espaciais $\mathbf{r} = (x, y, z)$), munido da *métrica de Minkowski*, a métrica pseudo-euclidiana definida por

$$\langle (t, \mathbf{r}), (t', \mathbf{r}') \rangle := c^2 tt' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

onde $c > 0$ denota a “velocidade da luz”. A pseudo-norma do vetor $(t, \mathbf{r})$ é portanto

$$\|(t, \mathbf{r})\|^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Um ponto $(t, \mathbf{r})$ é de *tipo tempo* se $\|(t, \mathbf{r})\| > 0$, de *tipo espaço* se $\|(t, \mathbf{r})\| < 0$, e de *tipo luz*, ou *nulo*, se $\|(t, \mathbf{r})\| = 0$.

O grupo das isometrias de $\mathbf{M}$ é chamado *grupo de Poincaré*. Translações, no tempo $t \in \mathbb{R}$ ou no espaço $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ fazem parte do grupo de Poincaré. As isometrias lineares, as transformações lineares de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ que preservam a pseudo-norma de Minkowski, formam o *grupo de Lorentz* $\mathbf{O}(1, 3)$. É claro que as isometrias do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, de coordenadas $\mathbf{r} = (x, y, z)$, são transformações de Lorentz, e em particular $\mathbf{O}(3) \subset \mathbf{O}(1, 3)$. O *grupo de Lorentz restrito* é o subgrupo $\mathbf{SO}^+(1, 3) \subset \mathbf{O}(1, 3)$ das transformações de Lorentz que preservam a direção do tempo e a orientação do espaço.

É claro que $\mathbf{SO}^+(1, 3)$ contém o grupo as rotações $\mathbf{SO}(3)$. Mais interessantes são as transformações de Lorentz chamadas *boosts* (ou seja, “empurrões”), que descrevem as coordenadas (t', x', y', z') em um referencial em movimento retilíneo uniforme relativamente a um referencial inercial (t, x, y, z) . Se o eixo x é escolhido na direção da velocidade $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, então a transformação de Lorentz é

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

onde $|v| < c$. Em particular, a transformação linear que envia (ct, x) em (ct', x') é definida pela matriz dois por dois

$$H_\varphi = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

onde o “ângulo hiperbólico” φ (chamado, em inglês, *rapidity*) é definido por $\tanh \varphi = v/c$, ou seja,

$$\cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{e} \quad \sinh \varphi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Observe que $-\infty < \varphi < \infty$ se $-c < v < c$, e que $\varphi = 0$ se $v = 0$, que corresponde a $H_0 = I$. A matriz H_φ define uma “rotação hiperbólica” de um ângulo hiperbólico φ .

Para obter boost com velocidade em uma direção arbitrária $\mathbf{v}$, é suficiente aplicar uma rotação do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ que envie $\mathbf{v}$ em $v\mathbf{i}$.

ex: Verifique a lei de composição $H_\varphi H_\psi = H_{\varphi+\psi}$, que corresponde à lei de adição das velocidades (escalares)

$$(u, v) \mapsto w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}$$

Verifique que se $|u| < c$ e $|v| < c$ então também $|w| < c$.

SL(2, $\mathbb{C}$) & grupo de Lorentz. ...

⁵⁹A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17** (1905), 891-921. [On the electrodynamics of moving bodies, *The Principle of Relativity*, 1923]

Grupo de Weyl/Heisenberg. Em mecânica quântica, assim como em análise de Fourier, são importantes os operadores de *translação* $T_{\mathbf{q}}$, com $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, definidos por

$$(T_{\mathbf{q}}f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{q}).$$

e os operadores de *modulação* $M_{\mathbf{p}}$, com $\mathbf{p} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, definidos por

$$(M_{\mathbf{p}}f)(\mathbf{x}) := e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}).$$

O domínio dos operadores pode ser o espaço $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (onde vivem as funções próprias, que são as ondas planas), ou subespaços de $L^2(\mathbb{R}^n)$, onde é possível definir o produto interno L^2 , como o espaço das *funções de prova* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (as funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto) ou o *espaço de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (as funções infinitamente diferenciáveis tais que todas as derivadas decaem mais rapidamente que o inverso de qualquer polinômio quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$). Estes operadores são unitários relativamente ao produto L^2 , pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} + \mathbf{q})|^2 dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 dx_1 \dots dx_n$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x})|^2 dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 dx_1 \dots dx_n.$$

A composição $W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}$ é chamada *operador de Weyl*. Os operadores translação e modulação geram o *grupo de Weyl*, ou *grupo de Heisenberg reduzido*, $\text{Wey}_n \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{S}$, parametrizado por $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbf{S}$, de acordo com a identificação

$$M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}z \approx (\mathbf{p}, \mathbf{q}, z).$$

O produto, que corresponde a composição dos operadores $M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}z$, com $z \in \mathbf{S}$, é dado por

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) \cdot (\mathbf{p}', \mathbf{q}', z') \mapsto (\mathbf{p} + \mathbf{p}', \mathbf{q} + \mathbf{q}', zz'e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}'})$$

O *grupo de Heisenberg* (não reduzido) é o conjunto $\text{Heis}_n \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, munido do produto

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \cdot (\mathbf{p}', \mathbf{q}', t') \mapsto (\mathbf{p} + \mathbf{p}', \mathbf{q} + \mathbf{q}', t + t' + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}')$$

e é claro que a aplicação $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \mapsto (\mathbf{p}, \mathbf{q}, e^{it})$ é um homomorfismo do grupo de Heisenberg sobre o grupo de Heisenberg reduzido. É possível realizar o grupo de Heisenberg como um grupo de matrizes. De fato, a correspondência $M : \text{Heis}_n \rightarrow \text{Mat}_{(n+2) \times (n+2)}(\mathbb{R})$, que envia $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ na matriz

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & \dots & p_n & t \\ 0 & 1 & \dots & 0 & q_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & q_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo do grupo de Heisenberg Heis_n no grupo $\mathbf{GL}(n+2, \mathbb{R})$.

ex: Verifique que $T_{\mathbf{q}}M_{\mathbf{p}} = e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}M_{\mathbf{p}}T_{\mathbf{q}}$.

ex: Verifique que o centro do grupo de Heisenberg é o subgrupo $Z(\text{Heis}_n) \approx \mathbb{R}$ dos elementos da forma $(0, 0, t)$, e que o quociente $\text{Heis}_n/Z(\text{Heis}_n)$ é (isomorfo a) o grupo aditivo abeliano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Grupo simplético. ...

Plane waves and Pontryagin dual. A *plane wave* is a complex valued function $e_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ defined by

$$e_\xi(\mathbf{x}) := e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}}$$

for some “wave vector” $\xi \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ (an alternative definition omits the factor 2π). For example, a plane wave

$$e^{2\pi i(\omega t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

in the space-time $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ with coordinates $(t, \mathbf{r})$, describes a (transversal) wave traveling in the direction of the vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ with frequency ω (observe that vectors and covectors have different dimensions, e.g. if t is time and $\mathbf{r}$ is a length, then ω is a frequency while $\mathbf{p}$ is the inverse of a length, hence the distinction between a linear space and its dual is real!).

Any plane wave is a continuous (actually infinitely differentiable) homeomorphism from the abelian additive group $\mathbb{R}^n$ into the abelian multiplicative group $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$ of unit complex numbers, i.e.

$$e_\xi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = e_\xi(\mathbf{x}) e_\xi(\mathbf{y})$$

The set $\widehat{\mathbb{R}^n}$ of all plane waves, or, technically, the set of all continuous homomorphisms $e_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{S}$, equipped with the group law

$$(e_\xi \cdot e_{\xi'}) (\mathbf{x}) = e_\xi(\mathbf{x}) e_{\xi'}(\mathbf{x}),$$

is called *Pontryagin/topological dual* of the abelian (topological) group $\mathbb{R}^n$, and, as an abelian group, it is isomorphic to $\widehat{\mathbb{R}^n} \approx (\mathbb{R}^n)^*$, the isomorphism being $e_\xi \leftrightarrow \xi$.

Lattices and reciprocal lattices. A (*Bravais*) *lattice* is an additive subgroup

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{v}_n \\ &:= \{ n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + \cdots + n_n\mathbf{v}_n \text{ with } n_1, n_2, \dots, n_n \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

of the additive group $\mathbb{R}^n$, generated by n linearly independent vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$, called *primitive vectors*. A plane wave $e_\xi(\mathbf{x}) := e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}}$ in $\mathbb{R}^n$ is Λ -periodic, i.e. satisfies $e_\xi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = e_\xi(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ and all $\mathbf{v} \in \Lambda$, provided the wave vector ξ belongs to the *reciprocal lattice*

$$\Lambda_* := \{ \xi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ s.t. } \xi \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \quad \forall \mathbf{v} \in \Lambda \} \subset (\mathbb{R}^n)^*,$$

isomorphic to the *dual subgroup*

$$\Lambda^\perp := \{ e_\xi \in \widehat{\mathbb{R}^n} \text{ s.t. } e_\xi(\mathbf{v}) = 1 \quad \forall \mathbf{v} \in \Lambda \} \subset \widehat{\mathbb{R}^n}.$$

For example, the reciprocal lattice of the one-dimensional lattice $\Lambda = \lambda\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, with $\lambda > 0$, is $\Lambda_* = \lambda^{-1}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^*$. Physicists are mainly interested in lattices $\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_3 \subset \mathbb{R}^3$ generated by three independent vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, since they describe (the positions of atoms in) crystals. The volume of a *fundamental domain* (or *primitive unit cell*) for such a lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ (a domain $F \subset \mathbb{R}^3$ such that $\cup_{\mathbf{v} \in \Lambda} T_{\mathbf{v}}(F) = \mathbb{R}^3$, and such that the different images $T_{\mathbf{v}}(F)$ and $T_{\mathbf{v}'}(F)$ for $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ in Λ have disjoint interiors), or, equivalently, the volume of the quotient space $\mathbb{R}^3/\Lambda$, is

$$\text{Vol}(\mathbb{R}^3/\Lambda) = |\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)|.$$

The reciprocal lattice is the lattice $\Lambda_* = \mathbb{Z}\xi_1 + \mathbb{Z}\xi_2 + \mathbb{Z}\xi_3 \subset (\mathbb{R}^3)^*$ generated by the co-vectors

$$\xi_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \quad \xi_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1)} \quad \xi_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}$$

(under the identification $(\mathbb{R}^3)^* \approx \mathbb{R}^3$ induced by the Euclidian scalar product).

10 Exponencial e álgebras de Lie

ref: [Ap69] Vol. 2, 7.1-10, 7.12

10.1 Normas de operadores

16 mai 2023

Normas. Uma *norma* no espaço linear $\mathbf{V}$, real ou complexo, é uma função real não-negativa $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz os axiomas

N1 (*positividade*) $\|\mathbf{x}\| > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$.

N2 (*homogeneidade*) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ e } \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

N3 (*desigualdade do triângulo*) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

Um *espaço normado* é um espaço vetorial $\mathbf{V}$ munido de uma norma. A *distância* entre os pontos/vetores de $\mathbf{V}$ é definida por $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

É imediato verificar que

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$$

são normas no espaço $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. De fato, estas normas são os dois extremos de uma família de normas parametrizadas por um número $1 \leq p \leq \infty$, definidas por

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Quando $p = 2$ esta é a norma euclidiana usual $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, definida à custa do produto interno usual.

ex: Use N3 para deduzir a desigualdade do triângulo

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \text{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

para a distância.

ex: Uma norma $\|\cdot\|$ é euclidiana (ou seja, é definida à custa de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usando $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$) sse satisfaz a identidade do paralelogramo.

ex: Dada uma norma $\|\cdot\|$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), e um operador linear invertível $A \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$, verifique que $\|\mathbf{v}\|_A := \|A\mathbf{v}\|$ é uma norma.

Normas equivalentes. Duas normas $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ no mesmo espaço vetorial $\mathbf{V}$ são *equivalentes* se existem constantes $c, C > 0$ tais que para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

$$c \|\mathbf{x}\|_\beta \leq \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq C \|\mathbf{x}\|_\beta$$

Normas equivalentes definem a mesma noção de limite, ou seja, a mesma “topologia”.

Teorema 10.1. *Todas as normas num espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes.*

Demonstração. Fixada uma base (arbitrária) $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, é possível definir uma norma declarando que os $\mathbf{e}_k$'s formam uma base ortonormada. Basta dizer que a norma do vetor $\mathbf{v} = \sum_k v_k \mathbf{e}_k$ é $\|\mathbf{v}\|_2 := (\sum_k |v_k|^2)^{1/2}$ (esta é uma norma euclidiana, induzida pelo produto interno tal que $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$). Seja $\|\cdot\|$ uma outra norma em $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{v} = \sum_k v_k \mathbf{e}_k$, então

$$\|\mathbf{v}\| \leq \sum_k |v_k| \|\mathbf{e}_k\| \leq \left(\sum_k |v_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k \|\mathbf{e}_k\|^2 \right)^{1/2} = M \|\mathbf{v}\|_2$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz 5.1, e onde a constante positiva M é

$$M = \left(\sum_k \|\mathbf{e}_k\|^2 \right)^{1/2}.$$

Isto mostra também que $\|\cdot\|$ é uma função contínua se a topologia é definida pela norma $\|\cdot\|_2$. Por outro lado, a esfera unitária $\mathbf{S} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \|\mathbf{v}\|_2^2 = 1\}$ é compacta (porque estamos em um espaço de dimensão finita!), logo a função contínua $\|\cdot\|$ atinge um mínimo em $\mathbf{S}$, que é necessariamente positivo, pela N1. Ou seja, existe $m > 0$ tal que $\|\mathbf{v}\| \geq m$ se $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$. Se $\mathbf{v} \neq 0$ é um vetor genérico com norma $\|\mathbf{v}\|_2 = \lambda > 0$, então $\mathbf{v}/\lambda \in \mathbf{S}$, e portanto

$$\|\mathbf{v}\| = \|\lambda(\mathbf{v}/\lambda)\| = \lambda \|\mathbf{v}/\lambda\| \geq \lambda m = m \|\mathbf{v}\|_2$$

Logo, $m \|\mathbf{v}\|_2 \leq \|\mathbf{v}\| \leq M \|\mathbf{v}\|_2$. □

Este resultado é importante porque diz que a topologia de um espaço linear de dimensão finita, ou seja, os conceitos de limites e vizinhanças, não dependem da particular norma usada na definição (desde que seja usada uma norma!).

Normas na álgebra das matrizes quadradas. O espaço $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ das matrizes quadradas $n \times n$ é um espaço linear isomorfo a $\mathbb{C}^{n^2}$. Como tal, admite muitas normas, que pelo teorema 10.1 são todas equivalentes.

Por exemplo, a norma de uma matriz $A = (a_{ij})$ pode ser

$$\|A\|_1 := \sum_{i,j} |a_{ij}| \quad \|A\|_2^2 := \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \quad \dots \quad \|A\|_\infty := \max_{i,j} |a_{ij}|$$

A segunda destas normas é a norma definida pelo *produto escalar de Hilbert-Schmidt*, definido por

$$\langle A, B \rangle_2 := \text{Tr}(A^* B)$$

Outra possibilidade importante é considerar o operador $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$ do espaço euclidiano $\mathbb{C}^n$ definido pela matriz A , e definir a *norma do operador* de A como

$$\|A\| := \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{z}\|=1} \|A\mathbf{z}\| = \sup_{0 \neq \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \frac{\|A\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|}$$

onde $\|\mathbf{z}\|$ denota a norma euclidiana de um vetor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. O operador A dilata ou contrai cada vetor não nulo $\mathbf{z}$ de um fator $\|A\mathbf{z}\|/\|\mathbf{z}\|$. A norma do operador é o supremo destes fatores de dilatação. Ou seja, $\|A\|$ é o menor raio R tal que a imagem da bola unitária $B_1(0) = \{\|\mathbf{z}\| \leq 1\}$ pela transformação linear definida por A está contida na bola $B_R(0) = \{\|\mathbf{z}\| \leq R\}$. De acordo com a decomposição em valores singulares 8.13, $A(B_1(0))$ é um elipsoide com semieixos iguais aos valores singulares $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$ de A (as raízes quadradas dos valores próprios de A^*A). Consequentemente, $\|A\| = \sigma_n$, o maior dos valores singulares.

O produto linhas por colunas (ou seja, a composição das transformações lineares) faz do espaço das matrizes quadradas uma álgebra. É fácil provar que algumas de estas normas são “sub-multiplicativas”, ou seja,

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1 \quad \text{e} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (10.1)$$

Em particular, considerando $A = B$ e iterando,

$$\|A^k\|_1 \leq \|A\|_1^k \quad \text{e} \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

ex: Mostre que $\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n^2 \|A\|_\infty$.

ex: Mostre que $\|AB\|_1 \leq \|A\|_\infty \|B\|_1$. Deduza a primeira das desigualdades (10.1).

ex: Prove a segunda das desigualdades (10.1).

ex: Mostre que $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$. Deduza que

$$\|A^k\|_\infty \leq n^k \|A\|_\infty^k.$$

Séries de Neumann. Se a matriz N é pequena, por exemplo tem raio espectral $\rho(N) < 1$, então a série

$$I + N + N^2 + N^3 + \dots$$

é convergente, e claramente é a inversa de $I - N$. A prova é a mesma que funciona no caso da série geométrica.

Esta observação sugere uma estratégia para resolver sistemas lineares. O sistema $AX = B$ é equivalente ao problema $(I - N)X = C$ se existe uma matriz invertível M tal que $MA = I - N$ e $MB = C$. Se o raio espectral de N é pequeno, então a solução é $X = (I + N + N^2 + \dots)C$.

10.2 Exponencial de um operador

9 mai 2023

Exponencial de uma matriz. O *exponencial* da matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz quadrada e^A , ou $\exp(A)$, definida pela série de potências

$$\begin{aligned} e^A &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\ &= I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots \end{aligned} \tag{10.2}$$

A definição é bem posta porque cada entrada de e^A é a soma de uma série absolutamente convergente. De fato, se $a_{ij}^{(k)}$ são as entradas de A^k , então

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A^k\|_\infty \leq n^k \|A\|_\infty^k.$$

Portanto, as séries dos valores absolutos das entradas de e^A são limitadas pela série convergente

$$\left(\delta_{ij} + |a_{ij}| + \frac{|a_{ij}^{(2)}|}{2} + \frac{|a_{ij}^{(3)}|}{6} + \dots \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k \|A\|_\infty^k}{k!} = e^{n\|A\|_\infty}.$$

Em alternativa, basta observar que, pela (10.1), os termos da série que define o exponencial são limitados por

$$\|A^k/k!\| \leq \|A\|^k/k!$$

e que a série $\sum \|A\|^k/k! = e^{\|A\|}$ é convergente. Em particular, isto prova a desigualdade

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$$

Exponencial de um operador. Se A e B são matrizes semelhantes, ou seja, $A = UBU^{-1}$ com $U \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, então também os exponenciais são semelhantes, pois as potências de A são $A^n = UB^nU^{-1}$ para todo $n \geq 0$, e portanto

$$\begin{aligned} e^A &= I + UBU^{-1} + \frac{1}{2}UB^2U^{-1} + \frac{1}{6}UB^3U^{-1} + \dots \\ &= U \left(I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{6}B^3 + \dots \right) U^{-1} \\ &= Ue^BU^{-1}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Consequentemente, se $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ é um operador do espaço linear de dimensão finita $\mathbf{V} \approx \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$, representado em uma base fixada pela matriz A , então a fórmula (10.2) define um operador

$$e^L = I + L + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{6}L^3 + \dots$$

Pela observação (10.3), esta definição não depende da base escolhida.

e.g. O exponencial da matriz nula é

$$e^0 = I,$$

pois todos os outros termos da série de potências são nulos. Portanto, o exponencial do operador nulo é o operador identidade.

Exponencial de matrizes nilpotentes. Uma matriz $N \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é nilpotente se alguma sua potência é nula, ou seja, se $N^m = 0$ para algum inteiro minimal $m \geq 1$ (e neste caso é chamada nilpotente de ordem m). Sendo também nulas todas as potências superiores N^k com $k \geq m + 1$, a série de potência que define o seu exponencial é de fato uma soma finita

$$e^N = I + N + \frac{1}{2}N^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!}N^{m-1}.$$

Assim, as entradas do exponencial de uma matriz nilpotente são polinômios nas entradas da matriz.

e.g. Por exemplo, a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é nilpotente, e o seu quadrado é nulo. Então

$$e^N = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exponencial de matrizes diagonalizáveis. Se A é uma matriz em blocos, como por exemplo

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

com $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ e $C \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{C})$ então também todas as suas potências são matrizes em blocos

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ 0 & C^k \end{pmatrix}$$

Consequentemente, o seu exponencial é também uma matriz em blocos

$$e^A = \begin{pmatrix} e^B & 0 \\ 0 & e^C \end{pmatrix}$$

Em particular, se Λ é uma matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

com valores próprios λ_k 's, então o seu exponencial também é diagonal

$$e^\Lambda = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

com valores próprios e^{λ_k} 's. Consequentemente, se A é diagonalizável, ou seja, $A = U\Lambda U^{-1}$ com Λ diagonal e U invertível, então o seu exponencial é diagonalizável, pois, pela (10.3),

$$e^A = U e^\Lambda U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Uma consequência importante é a relação entre o exponencial e os invariantes principais de uma matriz quadrada, o determinante e o traço:

Teorema 10.2. *Se A é uma matriz quadrada, então*

$$\boxed{\text{Det}(e^A) = e^{\text{Tr}A}} \quad (10.4)$$

Esta fórmula é evidente se A é diagonalizável, e segue por continuidade no caso geral (porque, de acordo com o teorema 7.13, o conjunto das matrizes diagonalizáveis é denso no espaço $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ das matrizes quadradas complexas). Em alternativa, é possível usar a forma canónica de Jordan.

ex: Calcule o exponencial das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ex: Mostre que

$$(e^A)^\top = e^{A^\top} \quad \text{e} \quad (e^A)^* = e^{A^*}$$

ex: Mostre que um vetor próprio de A é também um vetor próprio de e^A . De fato, se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ então $e^A\mathbf{v} = e^\lambda\mathbf{v}$.

10.3 Grupos a um parâmetro de matrizes

Derivar matrizes. Uma matriz quadrada pode ser pensada como um vetor do espaço linear real $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, que é naturalmente isomorfo a $\mathbb{C}^{n^2} \approx \mathbb{R}^{2n^2}$. Assim, uma “matriz dependente do tempo” $A(t)$ pode ser pensada como uma curva $t \mapsto A(t)$ neste espaço vetorial. É portanto natural calcular a sua derivada em ordem ao tempo, quando existir, e chamar $\frac{d}{dt} A(t) = \dot{A}(t)$ “velocidade” da curva no instante t . Se $A(t) = (a_{ij}(t))$, então $\dot{A}(t)$ é uma matriz cujas entradas são as derivadas $\dot{a}_{ij}(t)$.

É claro que a derivada é linear, ou seja, se $A(t)$ e $B(t)$ são duas curvas de matrizes quadradas da mesma dimensão e λ é um escalar, então

$$\frac{d}{dt}(A + B) = \dot{A} + \dot{B} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}(\lambda A) = \lambda \dot{A}$$

É também possível definir a curva “produto linha por colunas” $C(t) = A(t)B(t)$, cujas entradas são as sobreposições de produtos $c_{ij}(t) = \sum_k a_{ik}(t)b_{kj}(t)$. Aplicando a regra de Leibniz a cada entrada, temos

$$\dot{c}_{ij}(t) = \sum_k \left(\dot{a}_{ik}(t) b_{kj}(t) + a_{ik}(t) \dot{b}_{kj}(t) \right)$$

Mas isto significa que

$$\boxed{\frac{d}{dt}(AB) = \dot{A}B + A\dot{B}} \quad (10.5)$$

ou seja, a regra de Leibniz também se aplica ao produto entre matrizes! (naturalmente, até este ponto as mesmas considerações se aplicam a curvas de matrizes retangulares, quando os produtos fazem sentido, mas isto não é relevante para a nossa discussão). Seja agora $G(t)$ uma curva composta por matrizes quadradas invertíveis. Então o produto de $G(t)$ com $G(t)^{-1}$ é igual a $G(t)G(t)^{-1} = I$ para todo tempo t , e portanto a sua derivada é a matriz nula. Aplicando a regra de Leibniz (10.5),

$$0 = \frac{d}{dt}(GG^{-1}) = \dot{G}G^{-1} + G\frac{d}{dt}(G^{-1})$$

e finalmente, multiplicando à direita por G^{-1} , descobrimos que a derivada da matriz inversa é

$$\boxed{\frac{d}{dt}(G^{-1}) = -G^{-1}\dot{G}G^{-1}} \quad (10.6)$$

uma fórmula que lembra a derivada do inverso de uma função!

Equação diferencial & subgrupos a um parâmetro. Dada uma matriz $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, podemos construir a família das matrizes

$$G(t) := e^{tA}, \quad \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

É imediato ver que $G(0) = I$. As séries de funções $t \mapsto (e^{tA})_{ij}$ que definem as entradas de e^{tA} convergem uniformemente em cada intervalo limitado da reta real, assim como as séries das derivadas das entradas. Portanto, $t \mapsto G(t)$ define uma curva $G : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, que passa pela identidade quando $t = 0$.

Em particular, as derivadas em ordem a t podem ser calculadas derivando cada termo. O resultado é que

$$\frac{d}{dt} G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = A G(t) = G(t) A \quad (10.7)$$

Em particular, A comuta com $G(t)$.

A derivada de $F(t) := e^{tA}e^{-tA}$ é igual, pela regra de Leibniz (aplicada a cada entrada do produto), a

$$\dot{F}(t) = AF(t) - F(t)A = 0$$

porque A comuta com $G(t)$. Pelo teorema do valor médio, $F(t) = F(0) = I$. Consequentemente, $G(t) = e^{tA}$ é invertível, e a sua inversa é $G(-t)$, ou seja,

$$\boxed{(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}}. \quad (10.8)$$

Em particular,

Teorema 10.3. *O exponencial envia o espaço linear das matrizes quadradas, reais ou complexas, no grupo geral linear, real ou complexo, respetivamente, ou seja,*

$$\exp(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})) \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \quad e \quad \exp(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})) \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}).$$

O exponencial também resolve umas equações diferenciais no espaço das matrizes, de acordo com o seguinte

Teorema 10.4. *Seja $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$. A única solução da equação diferencial*

$$\dot{X} = AX \quad \text{ou} \quad \dot{X} = XA$$

com condição inicial $X(0) = X_0 \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, é

$$X(t) = e^{tA} X_0 \quad \text{ou} \quad X(t) = X_0 e^{tA},$$

respetivamente.

Demonstração. As fórmulas (10.7) dizem que $e^{tA} X_0$ ou $X_0 e^{tA}$ são soluções. Para provar a unicidade, basta observar que, se $X(t)$ é uma solução, então a quociente $H(t) = e^{-tA} X(t)$ (ou $X(t)e^{-tA}$ no segundo caso) satisfaz, pela regra de Leibniz e as (10.7),

$$\dot{H}(t) = -Ae^{-tA} X(t) + e^{-tA} AX(t) = 0$$

pois A comuta com e^{-tA} . Pelo teorema do valor médio (aplicada a cada entrada da matriz), $H(t) = H(0) = X_0$, e portanto $X(t) = e^{tA} X_0$. $\square$

Em geral, se A e B não comutam, $e^{A+B} \neq e^A e^B \neq e^B e^A$ (e a expressão de Z tal que $e^Z = e^A e^B$, ou seja, moralmente “ $\log(\exp(A)\exp(B))$ ”, em termos dos comutadores iterados de A e B , é chamada *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*). O que é verdade é o seguinte

Teorema 10.5. *Se A e B comutam, ou seja, se $AB = BA$, então*

$$\boxed{e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A}$$

Demonstração. Se A comuta com B , então todas as potências A^k comutam com todas as potências B^j , e consequentemente com os exponenciais e^{tB} e e^{tA} , respetivamente. Então a derivada de

$$H(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA} e^{tB}$$

é, usando as fórmulas 10.7,

$$\dot{H}(t) = (A+B) e^{t(A+B)} - A e^{tA} e^{tB} - e^{tA} e^{tB} B = (A+B) H(t)$$

Pelo teorema 10.4, $H(t) = e^{t(A+B)} H(0)$. Mas $H(0) = 0$, logo $H(t) = 0$ para todo t , em particular quando $t = 1$. $\square$

Em particular (sendo que todos os múltiplos tA de uma matriz quadrada A comutam),

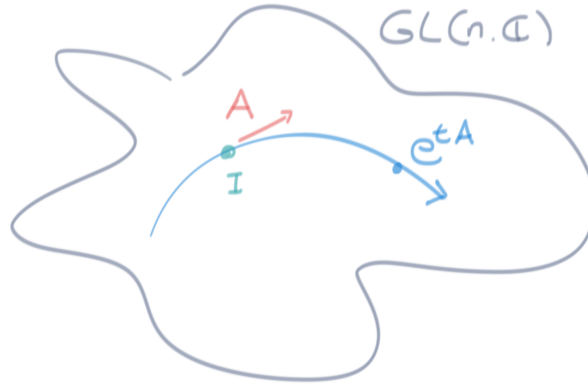
$$\boxed{e^{0A} = I \quad \text{e} \quad e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A} .}$$

Isto significa que a família dos $G(t) = e^{tA}$, com $t \in \mathbb{R}$, é um *subgrupo a um parâmetro* do grupo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, ou seja, a correspondência $t \mapsto G(t) = e^{tA}$ é um homomorfismo contínuo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Geometricamente, $t \mapsto G(t)$ é uma curva no grupo linear, passando pela identidade quando $t = 0$, que resolve a equação diferencial $\dot{G} = AG$. A matriz A é dita *gerador (infinitesimal)* do subgrupo $\{G(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, e pode ser obtida calculando o limite

$$A = \dot{G}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t) - I}{t} .$$

É a derivada, ou seja, a “velocidade” da curva $G(t)$ no instante $t = 0$.



Vice-versa, é possível provar que

Teorema 10.6. *Todo subgrupo a um parâmetro $t \mapsto G(t)$ de matrizes de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ que seja diferenciável na origem é da forma e^{tA} para alguma matriz A .*

Demonstração. Seja $A = \dot{G}(0)$ a velocidade do subgrupo em $t = 0$, quando $G(0) = I$. A derivada nos outros pontos também existe e é igual, pelas propriedades de grupo, a

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(t+\varepsilon) - G(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(\varepsilon)G(t) - G(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(\varepsilon) - I}{\varepsilon} G(t) = \dot{G}(0) G(t) = A G(t) . \end{aligned}$$

Pelo teorema 10.4, $G(t) = e^{tA}G(0) = e^{tA}$. □

ex: Verifique que as identidades $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$ são em geral falsas quando A e B não comutam. Por exemplo, considere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Verifique que se A é simétrica/ então também e^A é simétrica.

ex: Verifique que se A é hermítica então também e^A é hermítica.

ex: Mostre que se A é anti-simétrica (real) então e^A é ortogonal.

ex: Mostre que se A é anti-hermítica então e^A é unitária. Deduza que se H é hermítica então e^{iH} é unitária.

ex: Use a identidade (10.4) para verificar que o exponencial de uma matriz A com traço nulo, $\text{Tr}A = 0$, é uma matriz do grupo linear especial, i.e. $e^A \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$.

ex: [Ap69] vol. 2, 7.12.

10.4 Cálculo do exponencial

e.g. Grupos a um parâmetros gerados por matrizes nilpotentes. Por exemplo, a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(que representa o operador derivação na base $1, x$ do espaço linear dos polinómios de grau ≤ 1) é nilpotente de ordem 2, e portanto

$$e^{tN} = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(que representa o operador derivação na base $1, x, x^2/2$ do espaço linear dos polinómios de grau ≤ 2) é nilpotente de ordem 3, e o seu quadrado é

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$e^{tM} = I + tM + \frac{1}{2}t^2M = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Considere o espaço vetorial $V = \text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$ dos polinómios $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ de grau $\leq n$. O operador derivada envia o polinómio $f(x)$ no polinómio $(Df)(x) = f'(x)$. Determine a matriz D que representa o operador derivada na base de V formada pelos monómios $e_k(x) := x^k/k!$, com $k = 0, 1, \dots, n$. Calcule o exponencial e^{tD} , e verifique que

$$(e^{tD}f)(x) = f(x+t)$$

ou seja, $e^{tD} = T_t$, onde o operador translação é definido por $(T_t f)(x) = f(x+t)$.

Grupos a um parâmetros gerados por blocos de Jordan. Se $A = \lambda I + B$, então $e^A = e^\lambda e^B$, porque λI comuta com todas as matrizes. Em particular, é simples calcular o exponencial de um “bloco de Jordan”

$$A = \lambda I + N$$

onde N é uma matriz nilpotente, por exemplo de ordem m :

$$e^{\lambda I + N} = e^\lambda \left(I + N + \frac{1}{2}N^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}N^{m-1} \right).$$

ex: Verifique que se

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

então

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: Verifique que se

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

então

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotações do plano. O exponencial de uma matriz anti-simétrica é uma matriz ortogonal. O caso mais simples é em dimensão 2. Seja

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que J não é diagonalizável sobre os reais, pois o polinómio caraterístico é $z^2 + 1$, e a suas raízes são $\pm i$. O quadrado de J é $J^2 = -I$ (assim como o número imaginário i , cujo quadrado é $i^2 = -1$), e portanto todas as suas potências sJ^k são iguais a $\pm J$ ou $\pm I$, com periodicidade 4. A fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ sugere que também a matriz e^{tJ} seja relacionada com as funções trigonométricas. De fato, ao escrever as séries de potências de t que definem as entradas de e^{tJ} ,

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots & -t + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{120}t^5 + \dots \\ t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \dots & 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots \end{pmatrix}$$

é imediato reconhecer que

$$\boxed{e^{t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}} \quad (10.9)$$

que representa uma rotação do plano de um ângulo t no sentido anti-horário.

Rotações hiperbólicas. A matriz simétrica

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável sobre os reais, pois representa uma reflexão na reta $y = x$, e portanto tem valores próprios ± 1 . De fato, é imediato ver que

$$S = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^\top,$$

onde $U = R_{\pi/4}$ é uma rotação de um ângulo $\pi/4$. O seu exponencial é portanto

$$e^{tS} = U \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} U^\top$$

Mais interessante é calcular o exponencial usando diretamente a série de potências. O quadrado de S é $S^2 = I$, e portanto as potências são iguais a S ou a I , dependendo da paridade. Então

$$e^{tS} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \dots & t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \dots \\ t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \dots & 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \dots \end{pmatrix}$$

e finalmente

$$e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

Esta é uma *rotação hiperbólica* do plano. O caminho $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ descreve um ponto que percorre um ramo da hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ do plano. As rotações hiperbólicas são, em uma interpretação conveniente das coordenadas, os “boost” do grupo de Lorentz da relatividade especial.

ex: Verifique que o exponencial de

$$B = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}$$

é

$$e^B = e^\lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ex: Se P é uma projeção, ou seja, satisfaz $P^2 = P$ (é “idempotente”), então

$$e^P = I + (e - 1)P.$$

ex: [Ap69] vol. 2, 7.12.

10.5 Grupos de matrizes e espaço tangente na identidade

Grupos de matrizes. O determinante é uma função contínua $\text{Det} : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (de fato, um polinómio de grau n nas entradas da matriz, ou seja, nas coordenadas do espaço linear). O grupo linear geral real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ é portanto um aberto de $\mathbb{R}^{n^2}$, sendo o conjunto das matrizes com $\text{Det} A \neq 0$ (ou seja, uma matriz suficientemente próxima de uma matriz invertível é invertível). Da mesma forma, o grupo linear geral complexo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ é um aberto do espaço linear real $\mathbb{C}^{n^2} \approx \mathbb{R}^{2n^2}$.

Um *grupo de matrizes* é um subgrupo $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ ou $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ que é um conjunto fechado relativamente a topologia do grupo linear correspondente. Exemplos são os próprios grupos lineares gerais, e os subgrupos especiais, ortogonais e unitários considerados no capítulo anterior (e outros que não teremos tempo de considerar).

É possível provar, usando o teorema da função implícita, que todos estes grupos são “variedades diferenciáveis”, de fato, subvariedades do aberto $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ ou $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$. Também, as operações de grupo, o produto $(g, h) \mapsto gh$ e a inversão $g \mapsto g^{-1}$, são funções diferenciáveis de $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ e $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$.

e.g. O grupo linear especial $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo fechado de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ por ser o conjunto de nível 1 da função contínua “determinante” $\text{Det} : \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

e.g. O grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é um subgrupos fechado de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ por ser a imagen inversa da origem pelas função contínua $f : \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ definida por $f(A) = A^\top A - I$ (observe que cada coordenada desta função é um polinómio de grau 2 nas entradas da matriz A).

e.g. O grupo ortogonal especial $\mathbf{SO}(n) = \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{O}(n)$ é também um subgrupo fechado de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ por ser uma interseção de dois fechados.

e.g. Da mesma forma, também $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ e $\mathbf{SU}(n)$ são subgrupos fechados de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, logo grupos de matrizes.

$U(1) \approx SO(2)$ é uma circunferência S^1 . O grupo unitário $U(1)$ é o grupo multiplicativo dos números complexos de módulo um $e^{i\theta}$, que formam a circunferência unitária $S^1 \subset \mathbb{C}$ do plano complexo. É isomorfo ao grupo $SO(2)$ das rotações do plano, através do isomorfismo

$$e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$SU(2)$ é uma esfera S^3 . O espaço linear $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ é isomorfo a $\mathbb{C}^4 \approx \mathbb{R}^8$. O grupo especial unitário $SU(2)$ é o grupo das matrizes complexas 2×2 da forma

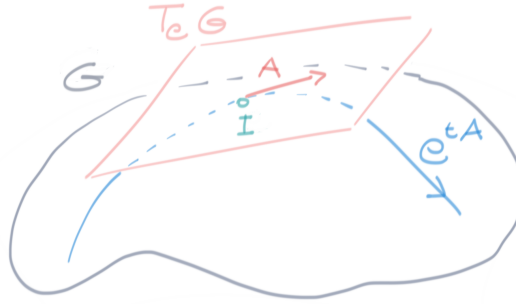
$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

onde $\alpha = x + iy$ e $\beta = u + iv$ são dois números complexos tais que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Esta condição define a esfera unitária $S^3 = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1\}$ dentro do espaço euclidiano real $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$ de coordenadas $(\alpha, \beta) \approx (x, y, u, v)$. É claro que a aplicação $S^3 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, definida por $(\alpha, \beta) \mapsto A(\alpha, \beta)$, é injetiva. Assim, o grupo especial unitário $SU(2)$ é uma esfera de dimensão real três $S^3 \subset \mathbb{R}^8$.

Espaço tangente na identidade. Seja $\mathbf{G}$ um grupo de matrizes, real ou complexo, e seja $e = I$ a identidade. Consideramos curvas diferenciáveis $t \mapsto g(t)$ de matrizes $g(t) \in \mathbf{G}$, definidas num intervalo de tempos $(-\varepsilon, \varepsilon)$ em torno da origem, que passem pela identidade $g(0) = e$ quando $t = 0$. A velocidade de uma tal curva no tempo $t = 0$ é uma matriz $X = \dot{g}(0) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

O espaço de todas as possíveis velocidades $X = \dot{g}(0)$ das curvas diferenciáveis que passam pela identidade (ou melhor, as classes de equivalências das curvas que têm a mesma velocidade em e) é chamado espaço tangente ao grupo no ponto e , e denotado por $T_e \mathbf{G}$.

Por exemplo, se o grupo de matrizes é o próprio $GL(n, \mathbb{C})$, e se A é uma matriz $n \times n$ arbitrária, então a curva $t \mapsto e^{tA}$ passa pela identidade com velocidade A . Portanto, o espaço tangente $T_e \mathbf{G}$ é o próprio espaço $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$. O mesmo acontece para grupo linear geral real $GL(n, \mathbb{R})$.



O espaço tangente na identidade de um grupo de matrizes tem uma estrutura natural de espaço vetorial real (não é gralha, “real”, independentemente do grupo ser formado por matrizes reais ou complexas!).

Teorema 10.7. *O espaço $T_e \mathbf{G}$ é um subespaço vetorial real de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ou de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, dependendo se $\mathbf{G}$ é real ou complexo.*

Demonstração. De fato, seja $g(t)$ uma curva que passa pela identidade $g(0) = e$ com velocidade $X = \dot{g}(0)$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então a curva reparametrizada $f(t) = g(\lambda t)$ também passa pela identidade $f(0) = e$, e a sua velocidade quando $t = 0$ é, pela regra da cadeia, $\dot{f}(0) = \lambda X$. Em particular, a curva constante $c(t) = g(0 \cdot t)$ tem velocidade $\dot{c}(0) = 0$. Por outro lado, seja $h(t)$ uma outra curva que passa pela identidade $h(0) = e$ com velocidade $Y = \dot{h}(0)$. Então a curva produto $\ell(t) = g(t)h(t)$ também passa pela identidade quando $t = 0$. Pela regra de Leibniz (10.5), a sua velocidade quando $t = 0$ é $\dot{\ell}(0) = X + Y$.

Observem também que se a curva $g(t)$ tem velocidade $X = \dot{g}(0)$, então a curva $g(t)^{-1}$ tem velocidade $-X$ na identidade, pois a velocidade da curva constante $g(t)g(t)^{-1} = e$ na identidade é 0. $\square$

Parêntese de Lie. A estrutura multiplicativa do grupo se reflete em mais uma operação natural no espaço tangente na identidade. Todo $g \in \mathbf{G}$ define um automorfismo $\Psi_g := L_g \circ R_{g^{-1}} \in \text{Aut}(\mathbf{G})$, de acordo com

$$\Psi_g(h) = g h g^{-1}.$$

Como Ψ_g fixa a identidade, pois $\Psi_g(e) = e$, envia curvas passando pela identidade em curvas passando pela identidade. O seu diferencial, calculado no ponto I , é portanto um automorfismo do espaço tangente na identidade, denotado por

$$\text{Ad}_g := d\Psi_g|_I \in \text{Aut}(T_e \mathbf{G})$$

Explicitamente, se $t \mapsto h(s)$ é uma curva passando por $h(0) = e$ com velocidade $\dot{h}(0) = Y$, então a velocidade da curva $s \mapsto \Psi_g(h(s)) = g h(s) g^{-1}$ quando $s = 0$ é

$$\text{Ad}_g Y = g Y g^{-1}.$$

O mapa $\text{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(T_e \mathbf{G})$, que envia g no automorfismo Ad_g , é chamado *representação adjunta* do grupo (tecnicamente, é uma representação do grupo G no espaço linear $T_e \mathbf{G}$). O seu diferencial na identidade, $\text{ad} := d\text{Ad}|_e : T_e \mathbf{G} \rightarrow \text{End}(T_e \mathbf{G})$, define uma transformação bilinear $T_e \mathbf{G} \times T_e \mathbf{G} \rightarrow T_e \mathbf{G}$, chamada *parêntese de Lie*, de acordo com

$$\boxed{[X, Y] := \text{ad}_X Y}$$

Para calcular a parêntese de Lie, consideramos uma curva $g(t)$ com $\dot{g}(0) = X$. Então

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)} Y \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} g(t) Y g(t)^{-1} \right|_{t=0} \\ &= \dot{g}(0) Y g(0)^{-1} - g(0) Y g^{-1}(0) \dot{g}(0) g^{-1}(0) \\ &= XY - YX \end{aligned}$$

Assim, a parêntese de Lie entre dois vetores do espaço tangente na identidade é simplesmente o “comutador” entre as matrizes (o que justifica ter utilizado a mesma notação). Esta derivação mostra que o comutador entre duas matrizes de $T_e \mathbf{G}$ é também uma matriz de $T_e \mathbf{G}$, coisa que não era evidente a priori. É imediato então verificar que a parêntese de Lie/comutador é linear nas duas variáveis, é anti-simétrica, ou seja, satisfaz

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

e satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

ex: Verifique que Ψ_G é um automorfismo do grupo $\mathbf{G}$.

ex: Verifique que $\text{Ad}_{gh} = \text{Ad}_g \text{Ad}_h$.

ex: Verifique que o comutador satisfaz a identidade de Jacobi.

ex: Dados $X, Y \in T_e \mathbf{G}$, observe que

$$\begin{aligned} & e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY} \\ &= \left(I + tX + \frac{t^2}{2} X^2 + \dots \right) \left(I + tY + \frac{t^2}{2} Y^2 + \dots \right) \left(I - tX + \frac{t^2}{2} X^2 + \dots \right) \left(I - tY + \frac{t^2}{2} Y^2 + \dots \right) \\ &= I + 2(XY - YX)t^2 + \mathcal{O}(t^3) \end{aligned}$$

e deduza que o comutador entre X e Y é

$$[X, Y] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY} \Big|_{t=0}$$

10.6 Álgebras de Lie dos grupos de matrizes

Álgebra de Lie de um grupo de matrizes. O espaço tangente $T_e \mathbf{G}$, munido da estrutura de espaço linear real e da parêntese de Lie $[\cdot, \cdot]$ (que é anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi), é chamado *álgebra de Lie* do grupo de matrizes $\mathbf{G}$. Costuma ser denotado pelas letras germânicas correspondentes às letras que denotam o grupo: por exemplo, $\mathfrak{g}$ denota a álgebra de Lie do grupo $\mathbf{G}$. A dimensão real de $\mathfrak{g}$ é chamada *dimensão* do grupo de matrizes $\mathbf{G}$.

Sendo um espaço linear de dimensão finita, a álgebra de Lie de um grupo de matrizes admite uma base finita $X_1, X_2, \dots, X_m$. Os comutadores são combinações lineares dos próprios elementos da base, logo expressões do género

$$[X_i, X_j] = \sum_{ijk} c_{ij}^k X_k,$$

com certos coeficientes c_{ij}^k que dependem da base escolhida e da estrutura do grupo, chamados *constantes de estrutura*. Observe que se o grupo é comutativo então Ad é constante, e portanto a sua derivada é nula. Assim, a álgebra de Lie de um grupo abeliano é comutativa, ou seja é formada por matrizes que comutam.

Num certo sentido, a álgebra de Lie é uma “cópia linearizada” de uma vizinhança da identidade do grupo. Ou seja, módulo conhecer o significado de algumas das palavras, a função exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ define um “difeomorfismo” (uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) de uma vizinhança $U \subset \mathfrak{g}$ da origem 0 sobre uma vizinhança $V \subset G$ da identidade e .

e.g. Exponencial. O grupo $\mathbf{GL}(1, \mathbb{R})$ é o grupo multiplicativo $\mathbb{R}^\times$ dos reais diferentes de zero. O espaço tangente a identidade é a reta real $\mathbb{R}$. A função exponencial $x \mapsto e^x$ define um homeomorfismo e um difeomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ sobre o subgrupo multiplicativo $\mathbb{R}_+^\times$ dos reais positivos.

Cálculo de álgebras de Lie. É claro que a álgebra de Lie do grupo linear geral real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ é

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

pois toda matriz X define um subgrupo a um parâmetro e^{tX} que passa pela identidade com velocidade X . Da mesma forma, a álgebra de Lie do grupo linear geral real complexo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ é $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, pensado como espaço vetorial real de dimensão $2n^2$.

Para compreender as álgebras de Lie dos grupos especiais é útil a seguinte observação, que revela o significado geométrico do traço de uma matriz: é o diferencial do determinante calculado na identidade. De fato, o determinante de uma pequena variação $I + \varepsilon X$ da matriz identidade tem um desenvolvimento

$$\text{Det}(I + \varepsilon X) \simeq 1 + \varepsilon \text{Tr} X + \dots$$

onde os outros termos são quadráticos em ε . Ao calcular a derivada, temos

Teorema 10.8. *Seja $g(t)$ é uma curva derivável em $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ passando por $g(0) = I$ com velocidade $\dot{g}(0) = X$. Então*

$$\frac{d}{dt} \text{Det} g(t) \Big|_{t=0} = \text{Tr} X.$$

Consequentemente,

Teorema 10.9. *A álgebra de Lie do grupo especial linear $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ é o espaço linear das matrizes com traço nulo,*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{Tr} X = 0\}$$

Demonstração. O teorema 10.8 prova uma inclusão. Por outro lado, a identidade (10.4) mostra que se X é uma matriz com traço nulo então e^{tX} é uma curva em $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ que passa pela identidade com velocidade X . $\square$

E particular, $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ tem dimensão $n^2 - 1$. A mesma demonstração prova que

Teorema 10.10. *A álgebra de Lie do grupo especial linear $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ é o espaço linear real das matrizes complexas com traço nulo,*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) : \text{Tr} X = 0\}$$

Assim, $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ tem dimensão real $2(n^2 - 1)$.

Determinamos agora as álgebras de Lie dos grupos ortogonais e unitários, os outros grupos clássicos importantes.

Teorema 10.11. *A álgebra de Lie do grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é o espaço linear das matrizes reais anti-simétricas,*

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : X + X^\top = 0\}$$

Demonstração. Seja $t \mapsto g(t) \in \mathbf{O}(n)$ uma curva que passa pela origem $g(0) = I$ com velocidade $\dot{g}(0) = X$. Sendo ortogonais, as matrizes satisfazem $g(t)g(t)^\top = I$. Derivando esta relação, e usando a regra de Leibniz (10.5), obtemos

$$\dot{g}(t)g(t)^\top + g(t)\dot{g}(t)^\top = 0,$$

que, quando $t = 0$, diz que $X + X^\top = 0$. Vice-versa, é um exercício verificar que se X é anti-simétrica então e^{tX} é uma curva em $\mathbf{O}(n)$ que passa com velocidade X pela identidade I . $\square$

Assim, $\mathbf{O}(n)$ tem dimensão $n(n-1)/2$. Em particular, o grupo ortogonal tem a mesma dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$ apenas quando $n = 3$, a dimensão do espaço onde acontece a mecânica de Galileo e Newton! Esta coincidência é responsável da possibilidade de parametrizar as rotações do espaço com vetores do próprio espaço.

Uma matriz anti-simétrica tem automaticamente traço nulo, portanto $\mathfrak{o}(n)$ é também a álgebra de Lie do grupo ortogonal especial $\mathbf{SO}(n) = \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$. De fato, a função determinante envia $\text{Det} : \mathbf{O}(n) \rightarrow \{\pm 1\}$. O grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é composto por duas componentes conexas: a componente conexa que contém a identidade I (por onde passam as curvas que definem a álgebra de Lie), que é $\mathbf{SO}(n) = \text{Det}^{-1}(\{1\})$, e o subconjunto (que não é um grupo!) das matrizes ortogonais com determinante -1 .

Teorema 10.12. *A álgebra de Lie do grupo unitário $\mathbf{U}(n)$ é o espaço linear real das matrizes anti-hermíticas,*

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) : X + X^* = 0\}$$

Demonstração. Seja $t \mapsto g(t) \in \mathbf{U}(n)$ uma curva que passa pela origem $g(0) = I$ com velocidade $\dot{g}(0) = X$. Sendo unitárias, as matrizes satisfazem $g(t)g(t)^* = I$. Derivando esta relação, e usando a regra de Leibniz (10.5), obtemos

$$\dot{g}(t)g(t)^* + g(t)\dot{g}(t)^* = 0,$$

que, quando $t = 0$, diz que $X + X^* = 0$. Vice-versa, é um exercício verificar que se X é anti-hermitica então e^{tX} é uma curva em $\mathbf{U}(n)$ que passa com velocidade X pela identidade I . $\square$

O grupo especial unitário é uma interseção $\mathbf{SU}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$. Consequentemente, usando o teorema 10.10,

Teorema 10.13. *A álgebra de Lie do grupo especial unitário $\mathbf{SU}(n)$ é o espaço linear das matrizes anti-hermiticas com traço nulo,*

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) : X + X^* = 0, \text{Tr}X = 0\}$$

Rotações infinitesimais do plano, álgebra de Lie de $\mathbf{SO}(2)$ e $\mathbf{U}(1)$. Uma rotação genérica do plano é uma matriz $R(\theta) \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, definida por

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

É claro que $\theta \mapsto R(\theta)$ é um grupo a um parâmetro, passando por $R(0) = I$, cuja imagem é todo o grupo $\mathbf{SO}(2)$. As sua derivada quando $\theta = 0$ é

$$\left. \frac{d}{d\theta} R(\theta) \right|_{\theta=0} = J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$ é portanto uma reta, gerada pelo vetor J . De acordo com a (10.9), toda rotação é do género $R(\theta) = e^{\theta J}$ para algum θ , definido a menos de múltiplos inteiros de 2π .

Por outro lado, $\mathbf{U}(1)$ é o grupo multiplicativo dos números complexos de valor absoluto unitário, que pode ser parametrizado por $e^{i\theta}$, com θ real, de acordo com a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

A derivada da curva $\theta \mapsto e^{i\theta}$ quando $\theta = 0$ é i , assim que a álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1)$ é a reta imaginária $i\mathbb{R}$, gerada pelo vetor i . A correspondência $i \mapsto J$ define um isomorfismo (trivial, pois estamos em dimensão um) entre $\mathfrak{u}(1)$ e $\mathfrak{so}(2)$, e a correspondência

$$e^{i\theta} \mapsto e^{\theta J}$$

define um isomorfismo entre os grupos $\mathbf{U}(1)$ e $\mathbf{SO}(2)$.

Rotações infinitesimais do espaço, álgebra de Lie de $\mathbf{SO}(3)$. O espaço linear das matrizes 3×3 reais anti-simétricas tem dimensão 3, e uma base natural é formada pelas matrizes/vetores

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os exponenciais $e^{\theta X_1}$, $e^{\theta X_2}$ e $e^{\theta X_3}$ representam rotações anti-horárias de um ângulo θ em torno dos eixos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respetivamente. Os comutadores são

$$[X_1, X_2] = X_3 \quad [X_2, X_3] = X_1 \quad [X_3, X_1] = X_2 \quad (10.11)$$

Uma rotação anti-horária genérica de um ângulo ω em torno do eixo definido pelo vetor unitário $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ é então representada pela matriz

$$e^{\omega X}$$

onde $X = n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3$. De fato, um cálculo elementar mostra que se $\mathbf{v}$ é um vetor (coluna) genérico do espaço $\mathbb{R}^3$, então, pelas (10.7),

$$\frac{d}{dt} e^{tX} \mathbf{v} = e^{tX} X \mathbf{v} = X e^{tX} \mathbf{v} = e^{tX} \mathbf{n} \times \mathbf{v}$$

Em particular, no tempo $t = 0$,

$$\left. \frac{d}{dt} e^{tX} \mathbf{v} \right|_{t=0} = \mathbf{n} \times \mathbf{v} \quad (10.12)$$

onde $\times$ denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$. Então é claro que $\mathbb{R}\mathbf{n}$ é o eixo de rotação, e que a velocidade angular da rotação $t \mapsto e^{t\omega X} \mathbf{v}$ é ω .

É possível portanto associar a cada matriz Ω da álgebra de Lie de $\mathbf{SO}(3)$ um vetor $\mathbf{\Omega}$ do espaço $\mathbb{R}^3$, de acordo com

$$\Omega = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \omega_3 X_3 \quad \mapsto \quad \mathbf{\Omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}, \quad (10.13)$$

de maneira tal que a matriz e^{Ω} representa uma rotação anti-horária de um ângulo $\omega = \|\mathbf{\Omega}\|$ em torno do vetor unitário $\mathbf{n} = \mathbf{\Omega}/\omega$. O vetor $\mathbf{\Omega}$ é chamado (*vetor*) *velocidade angular* da rotação $e^{t\Omega}$. Esta correspondência, que é claramente um isomorfismo entre espaços lineares reais, envia os vetores da base X_1, X_2, X_3 nos vetores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, respetivamente. É imediato então verificar que as parênteses de Lie entre os vetores X_k correspondem aos produtos vetoriais entre os vetores da base canónica. Assim, a correspondência $\mathfrak{so}(3) \approx \mathbb{R}^3$, definida pela (10.13), é um isomorfismo entre a álgebra de Lie do grupo das rotações, munida da parêntese de Lie, e o espaço euclidiano real de dimensão três, munido do produto vetorial.

Também interessante é observar a topologia de $\mathbf{SO}(3)$. É claro que, ao retirar múltiplos de 2π , toda rotação pode ser representada como e^{Ω} , onde a velocidade angular $\mathbf{\Omega}$ tem norma $\|\mathbf{\Omega}\| \leq \pi$. Também é evidente que rotações opostas $e^{\pm\Omega}$ deste género são idênticas quando $\|\mathbf{\Omega}\| = \pi$. Assim, o grupo das rotações é o quociente da bola fechada $\mathbf{B}^3 \approx \overline{B_\pi(0)}$ de raio π de $\mathbb{R}^3$ módulo a relação de equivalência que identifica os pontos antipodais da fronteira $\partial\mathbf{B}^3 = \mathbf{S}^2$. Os matemáticos chamam este espaço $\mathbb{RP}^3$, ou seja, “espaço projetivo real” de dimensão 3.

Sistemas não inerciais, força de Coriolis. Seja $\mathbf{q}(t)$ a posição de uma partícula de massa m num referencial inercial $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathbb{R}^3$. Consideramos um segundo referencial $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, em movimento circular uniforme em torno do eixo determinado pelo vetor unitário $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}$ com velocidade angular ω (por exemplo, um referencial solidário com a terra). Então a posição $\mathbf{Q}(t)$ da partícula neste referencial não inercial é determinada por

$$\mathbf{q} = e^{t\Omega} \mathbf{Q}$$

onde $\Omega = \omega(n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3)$. Derivando em ordem ao tempo t , e usando a (10.12), observamos que a velocidade $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ no sistema inercial é

$$\mathbf{v} = e^{t\Omega} \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times e^{t\Omega} \mathbf{Q}$$

onde $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{Q}}$ denota a velocidade no sistema não inercial e $\mathbf{\Omega} = \omega \mathbf{n}$ denota o vetor velocidade angular. Derivando mais uma vez em ordem ao tempo, e fazendo finalmente $t = 0$, descobrimos que a aceleração $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{q}}$ no sistema inercial é uma soma

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= e^{t\Omega} \mathbf{A} + \mathbf{\Omega} \times e^{t\Omega} \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times (e^{t\Omega} \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times e^{t\Omega} \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q}) + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{Q}}$ denota a aceleração no sistema não inercial. Isto significa que se $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ é a força que age sobre a partícula no sistema inercial, então a partícula no sistema não inercial sente uma força total

$$m\mathbf{A} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}) - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$$

ou seja, sente também uma força fictícia que é uma soma de $\mathbf{F}_c = -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q})$, chamada *força centrífuga*, e de $\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$, chamada *força de Coriolis* (advertida apenas por partículas em movimento no sistema não inercial).

Pêndulo de Foucault. Uma consequência famosa da força de Coriolis é a experiência ideada por Léon Foucault em 1851 para “observar” a rotação da Terra [Ar87, LL78]. Fixado um ponto da superfície da Terra, por exemplo a Sé de Braga, consideramos um referencial não inercial com origem neste ponto, tal que o eixo $\mathbf{I}$ aponta na direção do Polo Norte, o eixo $\mathbf{J}$ aponta na direção Este, e o eixo $\mathbf{K}$ aponta na perpendicular à superfície da terra. Um pêndulo de massa m e comprimento ℓ efetua pequenas oscilações em torno da vertical, e a sua posição projeta no plano $\mathbf{I}\text{--}\mathbf{J}$ (o plano tangente à superfície da terra) o vetor $X(t)\mathbf{I} + Y(t)\mathbf{J}$. A força centrífuga, que age na mesma direção da gravidade, pode ser desprezada numa primeira aproximação. A força de Coriolis, por outro lado, é igual a $-2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$, onde $\boldsymbol{\Omega}$ é o vetor velocidade angular de rotação da terra, e $\mathbf{V}$ é a velocidade do pêndulo no referencial não inercial. Um cálculo elementar mostra que a sua componente no plano $\mathbf{I}\text{--}\mathbf{J}$ é dada por

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} \simeq 2m\Omega \sin(\varphi) \dot{Y}\mathbf{I} - 2m\Omega \sin(\varphi) \dot{X}\mathbf{J}$$

onde Ω denota a velocidade angular de rotação da Terra e φ denota a latitude da origem do referencial não inercial (por exemplo, $\varphi \simeq 41^\circ 33'\text{N}$ no caso de Braga). É possível mostrar (mas não é importante nesta discussão) que, na aproximação das pequenas oscilações do pêndulo (que portanto é descrito por um oscilador harmónico), a componente da força de Coriolis na direção $\mathbf{K}$ é desprezável quando comparada com a força elástica do oscilador. As equações das pequenas oscilações do pêndulo para as coordenadas X e Y no referencial não inercial são portanto

$$\begin{aligned} m\ddot{X} &= 2m\Omega \sin(\varphi) \dot{Y} - m\omega^2 X \\ m\ddot{Y} &= -2m\Omega \sin(\varphi) \dot{X} - m\omega^2 Y \end{aligned}$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$ é a frequência própria do pêndulo (sendo $g \simeq 9.8 \text{ cm/s}^2$ a aceleração gravitacional). Se dividimos por m , e definimos a variável complexa $Z = X + iY$, estas equações são equivalentes à equação linear homogénea de segunda ordem

$$\ddot{Z} + 2i\beta \dot{Z} + \omega^2 Z = 0 \quad (10.14)$$

com $\beta = \Omega \sin(\varphi)$ (observem o “coeficiente de atrito” imaginário puro!).

ex: Verifique que, desprezando termos quadráticos no quociente Ω/ω (o que faz sentido se o período próprio $2\pi/\omega$ do pêndulo é bastante inferior ao período $2\pi/\Omega$ de rotação da Terra, que é igual a um dia), as soluções da equação diferencial (10.14) são

$$Z(t) \simeq e^{-i\beta t} (ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t})$$

Isto significa que a direção de oscilação do pêndulo roda de um ângulo igual a $-2\pi \sin(\varphi)$ radianos em cada dia (que é nulo no Equador, igual a -2π radianos, ou seja, uma rotação completa, no Polo Norte, como esperado, e aproximadamente -237° em Braga).

Álgebra de Lie de $\text{SU}(2)$. A álgebra de Lie do grupo especial unitário $\text{SU}(2)$ é formada por matrizes anti-hermítica com traço nulo, ou seja, do género

$$X(a, \beta) = \begin{pmatrix} ia & -\bar{\beta} \\ \beta & -ia \end{pmatrix}$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{C}$. Uma base do espaço linear real $\mathfrak{su}(2)$ é formada pelas matrizes $J_k = \frac{i}{2}\sigma_k$, onde as σ_k são as matrizes de Pauli, definidas em (6.14). Explicitamente,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix} \quad (10.15)$$

assim que o vetor genérico é $X(a, \beta) = 2(\Im\beta)J_1 + 2(\Re\beta)J_2 + 2aJ_3$. É imediato verificar que as relações de comutação são

$$[J_1, J_2] = J_3 \quad [J_2, J_3] = J_1 \quad [J_3, J_1] = J_2 \quad (10.16)$$

Estas são as mesmas relações (10.11) entre os geradores canónicos X_1, X_2 e X_3 de $\mathfrak{so}(3)$, a álgebra de Lie do grupo das rotações do espaço! A razão desta coincidência é profunda, e de acordo com os físicos tem a ver com o “spin” das partículas quânticas ...

ex: Verifique que

$$e^{\theta J_1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad e^{\theta J_2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad e^{\theta J_3} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

Spin, $\mathbf{SU}(2)$ e $\mathbf{SO}(3)$. As matrizes J_1, J_2 e J_3 definidas em (10.15) formam uma base do espaço linear real $\mathfrak{su}(2)$, que portanto pode ser identificado com o espaço $\mathbb{R}^3$ por meio do isomorfismo $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{su}(2)$, definido por

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \mapsto \quad X = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3.$$

(para simplificar as fórmulas, a imagem de um vetor $\mathbf{x}$ será uma matriz $X = \phi(\mathbf{x})$ denotada pela letra maiúscula correspondente). É claro, pelas relações de comutação (10.16), que esta correspondência associa ao produto vetorial o comutador, ou seja,

$$\phi(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = [X, Y].$$

Um cálculo elementar mostra que ao produto escalar euclidiano corresponde o traço do produto entre matrizes, ou melhor,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(XY).$$

Consequentemente, o produto misto é igual a

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}([X, Y]Z).$$

É imediato verificar que se $X \in \mathfrak{su}(2)$ e $U \in \mathbf{SU}(2)$, então também $UXU^* \in \mathfrak{su}(2)$. Isto permite associar a cada $U \in \mathbf{SU}(2)$ uma transformação linear $T_U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$T_U(\mathbf{x}) := \phi^{-1}(UXU^*)$$

Mas

$$T_U(\mathbf{x}) \cdot T_U(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(UXU^*UYU^*) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(XY) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

e também

$$(T_U \mathbf{x}) \times (T_U \mathbf{y}) \cdot (T_U \mathbf{z}) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}([UXU^*, UYU^*]UZU^*) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}([X, Y]Z) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$$

Isto significa que T_U preserva os produtos escalares e também a orientação do espaço euclidiano, ou seja, é uma rotação definida, na base canónica, por uma matriz $T_U \in \mathbf{SO}(3)$. É também claro que $T_{UV} = T_V \circ T_U$ se $U, V \in \mathbf{SU}(2)$. Assim, a correspondência $U \mapsto T_U$ define um homomorfismo

$$\Phi: \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

entre o grupo unitário de dimensão 2 e o grupo das rotações do espaço $\mathbb{R}^3$. Explicitamente (com algum trabalho, sugerido nos exercícios), o homomorfismo Φ é dado por

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Re(\alpha^2 - \beta^2) & \Im(\alpha^2 - \beta^2) & 2\Re(\alpha\bar{\beta}) \\ -\Im(\alpha^2 + \beta^2) & \Re(\alpha^2 + \beta^2) & -2\Im(\alpha\bar{\beta}) \\ -2\Re(\alpha\bar{\beta}) & -2\Im(\alpha\bar{\beta}) & |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (10.17)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ verificam $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

É imediato então observar que o núcleo de Φ , ou seja, a imagem inversa da identidade, é o subgrupo formado por $\pm I$, isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Também é possível observar que o homomorfismo Φ é sobrejetivo. De fato, a correspondência é quadrática (U é uma espécie de “raiz quadrada” de T_U), e a imagem inversa de cada $R \in \mathbf{SO}(3)$ é formada por exatamente dois elementos, $\pm U$, de $\mathbf{SU}(2)$. Isto significa que o grupo das rotações é isomorfo ao quociente $\mathbf{SO}(3) \approx \mathbf{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$. Os matemáticos dizem que $\mathbf{SU}(2)$ é um “recobrimento duplo” de $\mathbf{SO}(3)$. De fato, sendo o “grupo fundamental” da esfera $\mathbf{S}^3$ trivial, $\mathbf{SU}(2)$ é isomorfo ao “recobrimento universal” de $\mathbf{SO}(3)$, chamado $\mathbf{Spin}(3)$. Do ponto de vista topológico, o grupo $\mathbf{SU}(2)$ é uma esfera $\mathbf{S}^3 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^4 : \|\mathbf{r}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$. Consequentemente, o grupo $\mathbf{SO}(3)$ é o quociente da esfera de dimensão 3 pela relação de equivalência $\mathbf{r} \sim -\mathbf{r}$, que identifica os pontos antipodais. Dois pontos antipodais da esfera identificam uma e uma única reta passando pela origem. Em outras palavras, $\mathbf{SO}(3)$ tem a topologia do espaço projetivo $\mathbb{RP}^3$, o espaço dos subespaços vetoriais de dimensão um (as retas passando pela origem) de $\mathbb{R}^4$.

ex: Verifique que se $X \in \mathfrak{su}(2)$ e $U \in \mathbf{SU}(2)$ então também $UXU^* \in \mathfrak{su}(2)$.

ex: Dada $U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(2)$, calcule os produtos $U\sigma_k U^*$, com $k = 1, 2, 3$, como sobreposições das matrizes de Pauli σ_1, σ_2 e σ_3 . Deduza a fórmula (10.17).

ex: Verifique que

$$\Phi(e^{\theta J_k}) = e^{\theta X_k}$$

ou seja, explicitamente,

$$\begin{aligned} \Phi \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \Phi \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \Phi \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deduza que o homomorfismo Φ é sobrejetivo.

Quaterniões e rotações. O homomorfismo entre $\mathbf{SU}(2)$ e $\mathbf{SO}(3)$ é talvez mais compreensível usando a linguagem dos quaterniões.

A conjugação $x \mapsto \bar{x}$ é uma involução do espaço vetorial real dos quaterniões, que portanto é uma soma direta $\mathbb{H} = H_+ \oplus H_-$ do subespaço $H_+ \approx \mathbb{R}$ dos quaterniões “reais”, que satisfazem $\bar{x} = x$, e do subespaço $H_- \approx \mathbb{R}^3$ dos quaterniões “vetoriais”, que satisfazem $\bar{x} = -x$ (também chamados quaterniões “puros”, em analogia com os imaginários puros do plano complexo). Assim, um quaternião é uma soma formal $x = x_0 + \mathbf{x}$ da sua parte real $x_0 = x_0 \mathbf{1}$ e a sua parte vetorial $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$.

Por outro lado, o grupo $\mathbf{SU}(2)$ é isomorfo à esfera unitária $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{H}$, os quaterniões q de norma $\|q\| = q\bar{q} = 1$, de acordo com (9.6). Cada quaternião unitário $q \in \mathbf{S}^3 \approx \mathbf{SU}(2)$ define um operador $\text{Ad}_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ de acordo com

$$x \mapsto qxq^{-1}$$

(observe que o inverso de um quaternião unitário é $q^{-1} = \bar{q}$). Um cálculo mostra que este operador comuta com a conjugação, e consequentemente preserva a decomposição de $\mathbb{H}$ como soma direta dos quaterniões reais e vetoriais. Em particular, a restrição de Ad_q define um operador $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ no subespaço $H_- \approx \mathbb{R}^3$ dos quaterniões vetoriais. A restrição da norma $\|x\|^2 = x\bar{x}$ ao subespaço H_- coincide com a norma euclidiana $\|\mathbf{x}\|^2$ do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Como a norma é multiplicativa, o operador R_q preserva a norma dos vetores de $H_- \approx \mathbb{R}^3$, e portanto é um operador ortogonal. Também é fácil verificar que R_q preserva a orientação, e é portanto representado na base canônica por uma matriz de $\mathbf{SO}(3)$. Como $\text{Ad}_q \text{Ad}_{q'} = \text{Ad}_{qq'}$, a conclusão é que $q \mapsto R_q$ define um homomorfismo de $\mathbf{S}^3 \approx \mathbf{SU}(2)$ no grupo das rotações $\mathbf{SO}(3)$.

É possível calcular explicitamente a rotação R_q . O operador Ad_q fixa q e $\bar{q}$, e consequentemente fixa o vetor $\mathbf{q} = (q - \bar{q})/2 \in H_- \subset \mathbb{H}$. Se a parte vetorial de $q = q_0 + \mathbf{q}$ é nula, ou seja, $\mathbf{q} = 0$, então $q = \pm 1$ e portanto R_q é o operador identidade. Por outro lado, se $\mathbf{q} \neq 0$ então R_q fixa o vetor unitário $\mathbf{v} = \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$ de $\mathbb{R}^3$, e portanto é uma rotação em torno de $\mathbf{v}$. De fato, de acordo com a (3.10), existe um ângulo θ , definido a menos de múltiplos de 2π , tal que

$$q = e^{\theta \mathbf{v}} = \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta$$

Observe que o espaço tangente a $\mathbf{SU}(2) \approx \mathbf{S}^3$ na identidade é H_- , e esta fórmula diz que todo quaternião unitário é igual ao exponencial de um quaternião vetorial. Finalmente, um cálculo que usa a (3.8) mostra que o operador $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é

$$R_q \mathbf{x} = e^{\theta \mathbf{v}} \mathbf{x} e^{-\theta \mathbf{v}} = \cos(2\theta) \mathbf{x} + \sin(2\theta) \mathbf{v} \times \mathbf{x} + (1 - \cos(2\theta))(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{v}$$

e esta é uma rotação de um ângulo 2θ em torno de $\mathbf{v}$ (de acordo com (9.3)). Isto mostra, mais uma vez, que $\mathbf{SU}(2)$ é um recobrimento duplo de $\mathbf{SO}(3)$, pois quando $\theta \mapsto e^{\theta \mathbf{v}}$ percorre uma circunferência no grupo especial unitário então o correspondente $\theta \mapsto R_{e^{\theta \mathbf{v}}}$ percorre duas vezes uma circunferência no grupo especial ortogonal.

Álgebra de Lie de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$. A álgebra de Lie do grupo $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ é o espaço linear $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ das matrizes reais 2×2 com traço nulo. Uma base é formada pelas matrizes

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad H_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que satisfazem as relações de comutação

$$[X, H_{\pm}] = \pm H_{\pm} \quad [H_+, H_-] = 2X$$

Os vetores desta base geram os subgrupos a um parâmetro

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \quad e^{xH_+} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e^{yH_-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, o subgrupo a um parâmetro gerado por $J = H_- - H_+$ é

$$e^{\theta(H_- - H_+)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

o subgrupo $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R}) \subset \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ das rotações do plano.

ex: Verifique as relações de comutação

$$e^{tX} e^{xH_{\pm}} e^{-tX} = e^{(e^{\pm t} x)H_{\pm}}$$

Geradores infinitesimais dos grupos unitários. Seja A um operador auto-adjunto de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Os operadores

$$U_t := e^{itA}$$

com t real (por exemplo, um “tempo”) formam uma família a um parâmetro de operadores unitários, ou seja, U_0 é a identidade, e $U_t U_s = U_{t+s}$. Isto é evidente em dimensão finita, mas não trivial em dimensão infinita, onde a própria definição de exponencial precisa de uma versão do teorema espectral para operadores auto-adjuntos não necessariamente limitados.

O *teorema de Stone*⁶⁰ afirma que toda família a um parâmetro de operadores unitários U_t , desde que “fortemente contínua”, é gerada por um operador auto-adjunto, possivelmente não limitado. Fortemente contínua significa que $\lim_{t \rightarrow s} \|U_t |\psi\rangle - U_s |\psi\rangle\| = 0$ para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. O *gerador infinitesimal* é definido pela fórmula natural

$$A |\psi\rangle := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t |\psi\rangle - |\psi\rangle}{it}$$

no domínio $D_A \subset \mathcal{H}$ onde o limite existe (e o que não é trivial é provar que este subespaço é suficientemente grande, ou seja, denso).

O teorema de Stone é particularmente importante em mecânica quântica, onde, por exemplo, o gerador da evolução temporal é o operador Hamiltoniano H , o observável que corresponde a energia do sistema. A evolução temporal de um sistema que é preparado no estado $|\psi(0)\rangle$ no tempo $t = 0$, é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itH/\hbar} |\psi(0)\rangle,$$

que é a solução da *equação de Shrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle.$$

Geradores infinitesimais do grupo de Weyl/Heisenberg. Outro exemplo clássico, importante em mecânica quântica ou mais em geral em análise de Fourier (vejam, por exemplo, [Fo89]), é o *grupo de Weyl/Heisenberg*, gerado pelas translações

$$(T_q f)(x) := f(x + q)$$

e pelas modulações

$$(M_p f)(x) := e^{ipx} f(x),$$

com $q \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^* \approx \mathbb{R}$. Translações e modulações são grupos a um parâmetro de operadores unitários de $L^2(\mathbb{R})$, pois são invertíveis e é claro que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x + q)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} |e^{ipx} f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

Como tais devem ser gerados, de acordo com o teorema de Stone, por certos operadores hermiticos. O gerador infinitesimal das translações é (em unidades em que a fator dimensional $\hbar$, a constante de Plank reduzida, é igual a um) o *operador momento linear* $P = -iD$, definido, por exemplo no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, por $(Pf)(x) = -if'(x)$. Ou seja,

$$T_q = e^{iqP} = e^{qD}$$

Este fato é razoável, interpretando a fórmula de Taylor como

$$\begin{aligned} f(x + q) &= f(x) + q f'(x) + \frac{q^2}{2} f''(x) + \frac{q^3}{6} f'''(x) + \dots \\ &= \left(\left(1 + qD + \frac{1}{2} q^2 D^2 + \frac{1}{6} q^3 D^3 + \dots \right) f \right)(x) \\ &= (e^{qD} f)(x) \end{aligned}$$

⁶⁰M.H. Stone, On one-parameter unitary groups in Hilbert Space, *Annals of Mathematics* **33** (1932), 643-648.

(naturalmente, esta não é uma demonstração!). O gerador infinitesimal das modulações é *operador posição* X , definido por $(Xf)(x) = xf(x)$, também no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Ou seja, como parece tautológico,

$$M_p = e^{ipX} = e^{pQ}$$

se definimos o operador hemi-hermítico $Q = iX$. Assim como T_q e M_p , também os operadores momento e posição não comutam. De fato, satisfazem a relação de comutação $[P, Q] = I$, e geram a álgebra de Lie do grupo de Heisenberg de dimensão 3.

Grupo de Heisenberg. O grupo de Heisenberg também pode ser realizado como grupo de matrizes. O *grupo de Heisenberg* (“polarizado”, em alguns textos como [Fo89]) de dimensão 3, ou “grupo de Heisenberg do espaço $\mathbb{R}$ ”, é o grupo **Heis**($\mathbb{R}$) formado pelas matrizes 3×3 reais do género

$$M(p, q, t) = \begin{pmatrix} 1 & p & t \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $p, q, t \in \mathbb{R}$. O cálculo elementar

$$M(p, q, t)M(p', q', t') = M(p + p', q + q', t + t' + pq')$$

mostra que **Heis**($\mathbb{R}$) é de fato um subgrupo do grupo linear **GL**₃($\mathbb{R}$). Observem também que $M(p, q, t)^{-1} = M(-p, -q, pq - t)$, e que as matrizes do género $M(0, 0, t)$ comutam com todas as outras (ou seja, formam o centro do grupo). Uma base da álgebra de Lie **heis**($\mathbb{R}$) é formada pelas matrizes

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que satisfazem as relações de comutação

$$[P, Q] = T \quad [P, T] = 0 \quad [Q, T] = 0$$

Da mesma forma (substituindo p e q com vetores n -dimensionais linha e coluna, respetivamente) é possível definir o grupo de Heisenberg $\text{Heis}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{GL}_{n+2}(\mathbb{R})$ do espaço $\mathbb{R}^n$, e calcular a sua álgebra de Lie.

ex: Verifique que

$$e^{pP+qQ+tT} = \begin{pmatrix} 1 & p & t + \frac{1}{2}pq \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M\left(q, p, t + \frac{1}{2}pq\right)$$

Operadores momento angular. No contexto da mecânica quântica, os *operadores momento angular* são

$$L_1 = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad L_2 = i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad L_3 = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

definidos, por exemplo, no espaço das funções de Schwartz $f(x, y, z)$ definidas em $\mathbb{R}^3$. É um exercício mostrar que satisfazem as relações de comutação

$$[L_1, L_2] = i\hbar L_3 \quad [L_2, L_3] = i\hbar L_1 \quad [L_3, L_1] = i\hbar L_2$$

essencialmente (a menos de um fator $i\hbar$) as mesmas relações (10.11) da álgebra de Lie **so**(3) do grupo das rotações de $\mathbb{R}^3$.

ex: Defina o “operador de Casimir” $L^2 := L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$. Verifique que L^2 comuta com os L_1, L_2 e L_3 .

11 Sistemas lineares

ref: [Ap69] Vol. 2, 7.9 , 7.16-17, [HS74]

11.1 Campos e fluxos lineares

23 mai 2023

Campos lineares. Um *sistema linear homogêneo* com coeficientes constantes (real) é uma EDO autónoma $\dot{\mathbf{x}} = L(\mathbf{x})$ para uma variável $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, definida por um campo de vetores linear $L \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$.

Fixada uma base de $\mathbb{R}^n$, por exemplo a base canónica, o sistema pode ser escrito em notação matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (11.1)$$

onde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna e $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz que representa o campo linear na base escolhida.

Fluxos lineares. A origem é uma solução de equilíbrio do sistema (11.1). É a única solução de equilíbrio se a matriz A é invertível.

Pelo teorema 10.4 (ou melhor, pela demonstração deste teorema), a solução do sistema (11.1) com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ é

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 \quad (11.2)$$

A família a um parâmetro de operadores $\Phi_t := e^{tA}$, que a cada tempo $t \in \mathbb{R}$ e a cada ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder o valor (11.2) no instante t da solução com condição inicial $\mathbf{x}_0$, é dita *fluxo* do campo linear. Observe que $\Phi_0 = I$ e que $\Phi_{t+s} = \Phi_t\Phi_s$. Em particular, os Φ_t são invertíveis, e $\Phi_{-t} = (\Phi_t)^{-1}$.

O espaço linear $\mathbb{R}^n$ é chamado *espaço de fases* do sistema: é o espaço das possíveis condições iniciais, que determinam o futuro (e o passado) do sistema. Os caminhos $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$ são chamados *trajetórias* do sistema, e as suas imagens, que são curvas $\{\Phi_t(\mathbf{x}_0) : t \in \mathbb{R}\}$ no espaço de fases, são chamadas *órbitas*.

Conjugações lineares. Naturalmente, é possível fazer mudanças lineares de coordenadas $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ com $U \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, que transformam o sistema (11.1) no sistema $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$, definido pela matriz semelhante $B = UAU^{-1}$. Os dois sistemas são ditos *linearmente equivalentes*. Os fluxos e^{tA} e e^{tB} de dois sistemas linearmente equivalentes são ditos *linearmente conjugados*, no sentido em que

$$e^{tB} = Ue^{tA}U^{-1}.$$

Esta identidade diz que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{e^{tA}} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow U & & \downarrow U \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{e^{tB}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Isto implica, em particular, que o automorfismo $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, a *conjugação* entre os dois fluxos, envia bijectivamente trajetórias/órbita de um sistema em trajetórias/órbitas do outro, respeitando a direção do tempo.

É claro então que a compreensão das soluções passa pela compreensão do exponencial de uma matriz semelhante UAU^{-1} mais “simples” possível.

Fluxos de campos lineares diagonalizáveis. Já vimos que se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de A com valor próprio λ , assim que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, então $\mathbf{v}$ é também um vetor próprio do exponencial de A , e de fato $e^{tA}\mathbf{v} = e^{t\lambda}\mathbf{v}$. Se A é diagonalizável, ou seja, possui n valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (não necessariamente diferentes) com vetores próprios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ que formam uma base, então o sistema (11.1) é equivalente a um sistema definido pela matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$,

cujo fluxo $e^{t\Lambda}$ é também uma família de matrizes diagonais com valores próprios $e^{t\lambda_k}$. A solução com condição inicial genérica $\mathbf{x}(0) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k$ é portanto uma sobreposição

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} c_k \mathbf{v}_k$$

O comportamento qualitativo assintótico das soluções é então determinado pelos sinais dos valores próprios. Por exemplo, se todos os valores próprios são negativos, ou seja, $\lambda_k < 0$ para todo $k = 1, \dots, n$, então todas as soluções decaem exponencialmente, e em particular $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso a origem é um equilíbrio “assintoticamente estável”. Se todos os valores próprios são positivos, ou seja, $\lambda_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, n$, então todas as soluções com condição inicial $\mathbf{x}(0) \neq 0$ se afastam exponencialmente da origem, e em particular $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Neste caso, a origem é um equilíbrio “assintoticamente instável”.

No caso geral, uma compreensão do comportamento qualitativo das trajetórias passa pela compreensão da forma normal de uma matriz genérica A , que nem sempre é diagonalizável.

11.2 Campos lineares no plano

Começamos pelo caso de dimensão dois, onde já são presentes todos os fenómenos típicos do caso geral e as provas são simples.

Sistemas lineares no plano. Um campo linear no plano é definido, na base canónica, por uma matriz quadrada real 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

O sistema linear definido por A é

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (11.3)$$

Sejam λ_+ e λ_- os valores próprios de A pensada como matriz complexa, ou seja, as raízes complexas do polinómio caraterístico $c_A(z) = \text{Det}(zI - A)$. O produto $\lambda_+ \lambda_-$ dos valores próprios é igual ao determinante $q := \text{Det}(A) = ad - bc$, e a soma $\lambda_+ + \lambda_-$ dos valores próprios é igual ao traço $p := \text{Tr}(A) = a + d$. O polinómio caraterístico é $z^2 - pz + q$, e os valores próprios são portanto

$$\lambda_{\pm} = \frac{p \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

onde $\Delta = p^2 - 4q$.

Três casos distintos são possíveis. A matriz que define o campo é diagonalizável sobre os reais: isto acontece quando $\Delta > 0$ (pois neste caso a matriz admite dois valores próprios reais e distintos) ou quando $\Delta = 0$ e a matriz é proporcional à matriz identidade (o que é independente da base escolhida). A matriz que define o campo admite apenas uma reta de vetores próprios: isto acontece quando $\Delta = 0$ e a matriz não é proporcional à matriz identidade. Finalmente, a matriz que define o campo não admite valores próprios reais: isto acontece quando $\Delta < 0$, e portanto as raízes do polinómio caraterístico são dois números complexos conjugados com parte imaginária não nula.

Campos lineares planares diagonalizáveis. Se a matriz A é diagonalizável sobre os reais (e, em particular, $\Delta \geq 0$), então admite dois vetores próprios independentes $\mathbf{v}_{\pm}$, com valores próprios reais $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$, respetivamente (não necessariamente distintos), assim que $A\mathbf{v}_{\pm} = \lambda_{\pm}\mathbf{v}_{\pm}$. Na base formada pelos vetores $\mathbf{v}_+$ e $\mathbf{v}_-$ o campo linear L é portanto definido pela matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

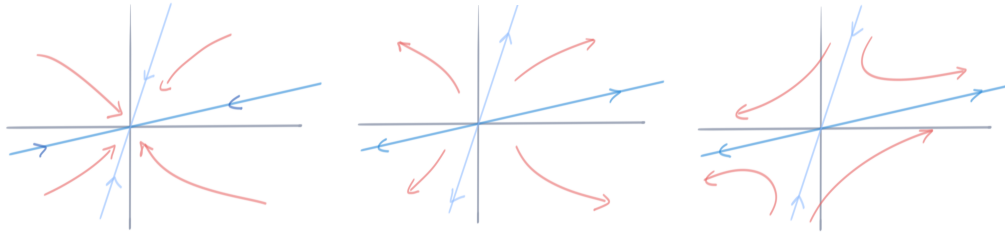
cujo fluxo é também diagonal

$$e^{t\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}$$

A solução com condição inicial genérica $\mathbf{x}(0) = a\mathbf{v}_+ + b\mathbf{v}_-$ é portanto

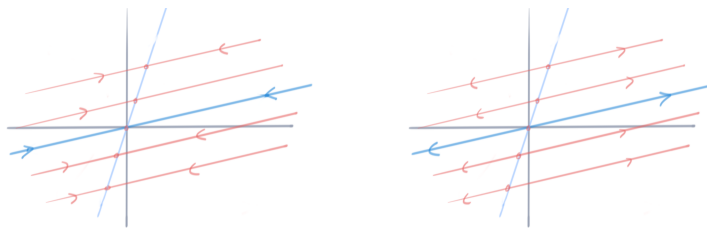
$$\mathbf{x}(t) = ae^{\lambda_+ t}\mathbf{v}_+ + be^{\lambda_- t}\mathbf{v}_-$$

A origem é o único equilíbrio se os dois valores próprios são diferentes de zero. É dita *nodo estável* se $\lambda_{\pm} < 0$ (logo se $q > 0$ e $p < 0$), assim que todas as trajetórias convergem exponencialmente para a origem. É dita *nodo instável* se $\lambda_{\pm} > 0$ (logo se $q > 0$ e $p > 0$), assim que todas as trajetórias com condição inicial não nula divergem exponencialmente. É dita *ponto de sela* se os valores próprios têm sinais opostos, por exemplo $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ (logo quando $q < 0$). Neste terceiro caso, as trajetórias que começam na reta gerada por $\mathbf{v}_-$ convergem exponencialmente para a origem, e todas as outras trajetórias divergem, desenhando curvas parecidas a hipérbolas.



Nodos estável, nodo instável e ponto de sela.

Se um dos valores próprios é nulo, por exemplo $\lambda_- = 0$, então todos os pontos da reta gerada por $\mathbf{v}_-$ são soluções de equilíbrio. As outras trajetórias vivem em retas paralelas ao vetor próprio $\mathbf{v}_+$, e se afastam ou se aproximam exponencialmente da reta gerada por $\mathbf{v}_-$ dependendo se o sinal de λ_+ é positivo ou negativo, respetivamente. Se os dois valores próprios são nulos, o sistema é trivial e todos os pontos do plano são pontos de equilíbrio. É claro que estas últimas duas possibilidades não representam sistemas “genéricos”, pois não persistem ao fazer pequenas perturbações dos parâmetros.



Nodos com um valor próprio nulo.

Campos lineares planares com “apenas um” vetor próprio. O segundo caso é uma matriz A que admite apenas um espaço próprio de dimensão um, contendo um vetor próprio $\mathbf{v}_1$, com valor próprio real λ . Seja $\mathbf{w}$ um vetor não nulo independente de $\mathbf{v}_1$. Então a matriz que representa o campo linear na base $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}$ é uma matriz diagonal superior do género

$$\begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

A segunda entrada diagonal μ é também igual a λ (pois uma segunda entrada diagonal diferente seria mais uma raiz do polinómio característico, logo mais um valor próprio diferente e portanto mais um vetor próprio independente) e a entrada superior direita c é diferente de zero (pois caso contrário a matriz seria diagonalizável). Ou seja, o campo linear envia $L\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ e $L\mathbf{w} = c\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{w}$ com $c \neq 0$. Na base formada pelos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 := c^{-1}\mathbf{w}$, o campo linear L é portanto definido pela matriz triangular superior

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

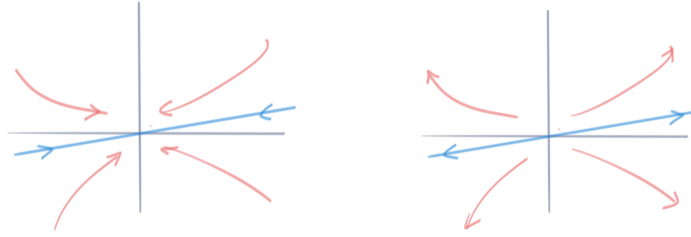
cujo fluxo é

$$e^{tJ_\lambda} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A solução com condição inicial genérica $\mathbf{x}(0) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$ é portanto

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} ((a + bt)\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2)$$

A origem é dita *nodo degenerado*, estável ou instável, dependendo dse o sinal de λ é negativo ou positivo, respetivamente.



Nodos degenerados estável e instável.

ex: Discuta o caso em que o valor próprio do nodo degenerado é $\lambda = 0$.

Blocos de Jordan no plano. Uma prova mais abstrata do fenómeno ilustrado acima introduz a ideia das “cadeias de Jordan”, os tijolos elementares da forma normal de Jordan de uma matriz.

Seja L o campo linear no plano $\mathbb{R}^2$ definido, na base canónica, pela matriz A . Assumimos que L admite apenas um espaço próprio de dimensão um, gerado pelo vetor próprio $\mathbf{v}_1$ com valor próprio λ . Isto significa que o núcleo do operador $L_\lambda := L - \lambda \text{Id}$ é $\text{Ker}(L_\lambda) = \mathbb{R}\mathbf{v}_1$. Por razões dimensionais, também a imagem de L_λ tem dimensão um. A interseção destas duas retas não pode ser trivial, caso contrário o plano seria uma soma direta $\mathbb{R}^2 = \text{Im}(L_\lambda) \oplus \text{Ker}(L_\lambda)$ de dois subespaços invariantes, logo o operador L seria diagonalizável. Isto significa que $\text{Im}(L_\lambda) = \text{Ker}(L_\lambda)$, e em particular existe um vetor (não nulo) $\mathbf{v}_2$ tal que $L_\lambda \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, que formam uma “cadeia de Jordan”, são independentes. De fato, seja $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = 0$. Aplicando o operador L_λ obtemos $L_\lambda(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = a_2\mathbf{v}_1 = 0$ (pois $L_\lambda\mathbf{v}_1 = 0$ e $L_\lambda\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$), e portanto $a_2 = 0$. Mas então $a_1\mathbf{v}_1 = 0$ implica que também $a_1 = 0$. Finalmente, basta observar que, na base formada por $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ (chamada “base de Jordan”), o operador L é representado pela matriz (11.4), pois $L\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ e $L\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$.

Campos lineares planares sem vetores próprios. O terceiro e último caso é um campo linear L definido por uma matriz A sem valores próprios reais (e portanto com $\Delta < 0$). Podemos pensar que a mesma matriz real A define um operador $L^\mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}^2$, a “complexificação do operador L definido no plano $\mathbb{R}^2$ ”. Este operador $L^\mathbb{C}$ admite dois valores próprios distintos e conjugados

$$\lambda_\pm = \alpha \pm i\omega.$$

com $\omega > 0$ (conjugados porque o polinómio caraterístico tem coeficientes reais, e diferentes porque o operador L não admite valores próprios reais). Se $\mathbf{v}_+ \in \mathbb{C}^2$ é um vetor próprio associado ao valor próprio λ_+ , assim que $A\mathbf{v}_+ = \lambda_+\mathbf{v}_+$, então $\mathbf{v}_- = \overline{\mathbf{v}_+}$ é um vetor próprio com valor próprio λ_- , pois

$$A\mathbf{v}_- = A\overline{\mathbf{v}_+} = \overline{A\mathbf{v}_+} = \overline{\lambda_+\mathbf{v}_+} = \overline{\lambda_+}\overline{\mathbf{v}_+} = \lambda_-\mathbf{v}_-$$

(sendo A real). Os vetores $\mathbf{v}_+$ e $\mathbf{v}_-$ são independentes sobre os complexos, por serem vetores próprios de $L^\mathbb{C}$ associados a valores próprios diferentes. Os vetores

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-) \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_- = \frac{1}{2i}(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)$$

são reais, tendo como coordenadas as partes reais e as partes imaginárias das coordenadas do vetor $\mathbf{v}_+$, respetivamente. São também independentes, logo formam uma base de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$. De fato, se $a\mathbf{e}_+ + b\mathbf{e}_- = 0$ com $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{a - ib}{2}\mathbf{v}_+ + \frac{a + ib}{2}\mathbf{v}_- = 0$$

e isto implica $a \pm ib = 0$ pela independência dos $\mathbf{v}_{\pm}$. Observando que $\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{e}_{+} \pm i\mathbf{e}_{-}$, um cálculo elementar mostra que

$$A\mathbf{e}_{+} = \alpha \mathbf{e}_{+} - \omega \mathbf{e}_{-} \quad \text{e} \quad A\mathbf{e}_{-} = \alpha \mathbf{e}_{-} + \omega \mathbf{e}_{+}$$

Portanto, a matriz que representa o campo linear L na base formada por $\mathbf{e}_{+}$ e $\mathbf{e}_{-}$ é a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soma de αI e da matriz anti-simétrica $-\omega J$, com

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como toda matriz comuta com os múltiplos da identidade, pelo teorema 10.5 podemos calcular separadamente os fluxos de αI e $-\omega J$ e depois multiplicar. O fluxo da parte diagonal é simplesmente $e^{t\alpha I} = e^{\alpha t} I$. O fluxo de $-\omega J$ é, de acordo com (10.9),

$$e^{-t\omega J} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

e representa uma rotação horária do plano com frequência angular ω . O resultado é que o fluxo do campo linear, na base formada por $\mathbf{e}_{+}$ e $\mathbf{e}_{-}$, é

$$e^{t(\alpha I - \omega J)} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

A solução com condição inicial genérica $\mathbf{x}(0) = a\mathbf{e}_{+} + b\mathbf{e}_{-}$ é portanto

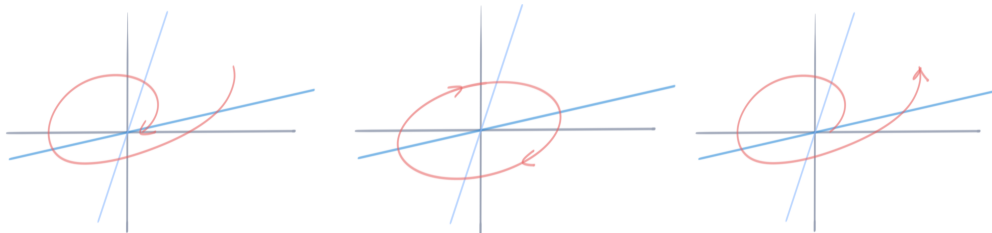
$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} ((a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))\mathbf{e}_{+} + (-a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t))\mathbf{e}_{-})$$

Finalmente, se U denota a matriz invertível cujas colunas são as coordenadas dos vetores $\mathbf{e}_{\pm}$ na base canônica, então a solução do sistema (11.3) com condições iniciais $x(0)$ e $y(0)$ é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = U e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

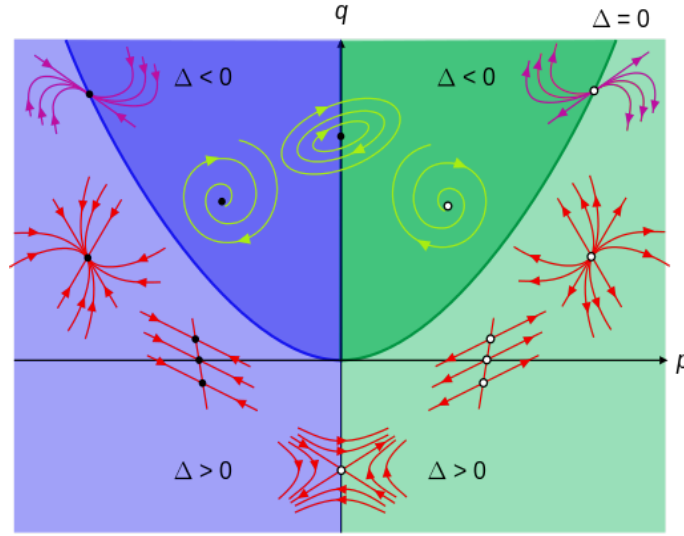
Se $\alpha = 0$ (ou seja, se $p = 0$), então as órbitas são elipses $a^2 + b^2 = \text{constante}$. A origem, que é um equilíbrio estável mas não assintoticamente estável (pois a trajetória de um ponto próximo não converge para a origem, mesmo ficando numa sua vizinhança) é chamada *centro*. Este caso corresponde a um oscilador harmônico.

Se $\alpha \neq 0$, as órbitas são espirais logarítmicas, que saem da origem ou entram na origem, dependendo do sinal de α . A origem é dita *foco estável* se $\alpha < 0$ (ou seja, se $p < 0$), e *foco instável* se $\alpha > 0$ (ou seja, se $p > 0$). Os focos estáveis, em que todas as trajetórias não nulas convergem exponencialmente para a origem, correspondem ao caso físico de um oscilador amortecido.



Focos estável, centro, e foco instável.

Desenho global dos campos lineares planares. É claro que a estabilidade ou instabilidade de nodos ou focos é preservada ao fazer pequenas perturbações dos parâmetros, pois as partes reais dos valores próprios mantêm os seus sinais. Esta é uma figura famosa que mostra os possíveis retratos de fase, dependendo do traço $p = \text{Tr}A$ e do determinante $q = \text{Det}A$ da matriz A que define o sistema linear no plano (vejam, por exemplo, o clássico [HS74] de Hirsch e Smale).



$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + By & p &= A + D \\ \frac{dy}{dt} &= Cx + Dy & q &= AD - BC \\ & & \Delta &= p^2 - 4q \end{aligned}$$

By Maschen, from [Wikimedia Commons](#).

e.g. Oscilador harmónico. Um exemplo paradigmático é o oscilador harmónico, cujas soluções podem ser obtidas, naturalmente, pelos métodos elementares descritos na seção 3.2. A equação de Newton $\ddot{q} = -\omega^2 q$ é equivalente ao sistema (de Hamilton)

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}$$

definido pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

As raízes do polinómio caraterístico de A são $\pm i$, assim que a origem é um centro. Naturalmente, neste caso é fácil determinar explicitamente as soluções, pois a mudança de variáveis $Q = \omega q$ e $P = p$ transforma o sistema em

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \dot{P} = -Q \end{cases}$$

definido pela matriz

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

O fluxo é

$$e^{tA'} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

e consiste numa rotação horária com velocidade angular ω do espaço de fases Q - P .

e.g. Oscilador harmónico amortecido. A equação de Newton $\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2q$ do oscilador amortecido (com α positivo, no caso físico) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2q - 2\alpha p \end{cases}$$

definido pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

As raízes do polinómio caraterístico são

$$z_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

Se o atrito é pequeno, $\alpha < \omega$, então a matriz não é diagonalizável, mas a sua complexificada tem valores próprios complexos conjugados e não reais $-\alpha \pm i\Omega$ (onde $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} < \omega$) com parte real negativa. A origem é um foco estável (sistema sub-crítico).

Se o atrito é grande, $\alpha > \omega$, então a matriz é diagonalizável com valores próprios negativos $-\alpha \pm k$ (onde $k = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} < \alpha$). A origem é um nodo estável (sistema super-crítico).

O caso intermédio é o caso crítico (e pouco provável) em que $\alpha = \omega$. A matriz admite um único valor próprio negativo, igual a $-\alpha$, e não é diagonalizável. A origem é um nodo degenerado estável.

e.g. Oscilador invertido. Outro exemplo paradigmático é o oscilador invertido, descrito pela equação de Newton $\ddot{q} = \omega^2q$, logo pelo sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \omega^2q \end{cases}$$

definido pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz é diagonalizável, e os valores próprios $\lambda_{\pm} = \pm\omega$ têm sinais opostos. A origem é, como esperado, um ponto de sela. O equilíbrio é de fato instável, as soluções com condição inicial fora da reta associada ao valor próprio negativo λ_- divergem exponencialmente.

ex: Discuta os casos degenerados quando pelo menos um dos valores próprios é nulo (ou seja, $\text{Det}(A) = 0$). Considere, por exemplo, os sistemas definidos pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ex: Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas órbitas em torno da posição de equilíbrio no espaço de fases) dos seguintes sistemas lineares homogéneos.

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = 4x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = 3y \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = -7x + y \\ \dot{y} = -4x - 3y \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = -x + 5y \\ \dot{y} = -5x - y \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = x + 5y \\ \dot{y} = -5x + y \end{cases} \end{array}$$

Determine também a solução com condições iniciais genéricas $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.

ex: A corrente que circula num circuito *LRC* é solução da equação diferencial homogénea

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

Escreva o sistema linear correspondente, e esboce os possíveis retratos de fases dependendo dos valores dos parâmetros L , R e C .

ex: [Ap69] Vol. 2, 7.12

Ciclotrão. A força de Lorentz que age sobre uma partícula de carga q em um campo magnético $\mathbf{B}$ é igual ao produto vetorial $\mathbf{F} = (q/c) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, onde $\mathbf{v}$ é a velocidade da partícula e $c \simeq 299,792,458$ m/s denota a velocidade da luz. Consequentemente, a equação do movimento (de Newton) da partícula de massa m é

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Se o campo é homogêneo e constante, por exemplo $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ com B independente da posição e do tempo, então a componente vertical v_z da velocidade $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ é constante (pois tem derivada nula), e as componentes v_x e v_y satisfazem o sistema de EDOs lineares

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= \omega v_y \\ \dot{v}_y &= -\omega v_x\end{aligned}$$

onde $\omega = qB/mc$ é chamada *frequência de ciclotrão*. As trajetórias da partícula são hélices

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (A \cos(\omega t + \varphi), A \sin(\omega t + \varphi), v_z t)$$

onde os parâmetros $\mathbf{r}_0, v_z, A, \varphi$ dependem da posição e da velocidade iniciais.

11.3 Forma normal de Jordan

Blocos de Jordan. Seja $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ um operador linear definido num espaço linear complexo de dimensão finita. Dado um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, denotamos por L_λ o operador $L - \lambda$. Se o núcleo de L_λ não é trivial, então λ é um valor próprio de L , e $\mathbf{V}_\lambda = \text{Ker}(L_\lambda)$ é o espaço próprio associado.

Um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é dito *vetor próprio generalizado* se está no núcleo de alguma potência de L_λ , ou seja, se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $L_\lambda^n \mathbf{v} = 0$ para algum inteiro minimal $n \geq 1$. Este inteiro n é dito *período* de $\mathbf{v}$, e o vetor $\mathbf{v}$ é também dito *L_λ -cíclico* (a órbita de $\mathbf{v}$ pela aplicação L_λ é formada por n vetores não nulos distintos).

Se o período é $n = 1$, então $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de L . Em geral, os n vetores

$$\mathbf{v}_1 = L_\lambda^{n-1} \mathbf{v} \quad \mathbf{v}_2 = L_\lambda^{n-2} \mathbf{v} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{n-1} = L_\lambda \mathbf{v}_n \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{v} \quad (11.5)$$

são vetores próprios generalizados, pois $L_\lambda^k \mathbf{v}_k = L_\lambda^k L_\lambda^{n-k} \mathbf{v} = L_\lambda^n \mathbf{v} = 0$, e $\mathbf{v}_1$ é um vetor próprio com valor próprio λ . O espaço gerado pelos $\mathbf{v}_k$'s é L -invariante porque

$$L\mathbf{v}_k = L(L_\lambda^{n-k} \mathbf{v}) = L_\lambda^{n-k+1} \mathbf{v} + \lambda L_\lambda^{n-k} \mathbf{v} = \mathbf{v}_{k-1} + \lambda \mathbf{v}_k$$

onde, naturalmente, $\mathbf{v}_0 = (L - \lambda I)^n \mathbf{v} = 0$.

Teorema 11.1. *Se $\mathbf{v}$ é um vetor L_λ -cíclico de período n , então os n vetores (11.5) são linearmente independentes e geram um subespaço L -invariante de vetores próprios generalizados.*

Demonstração. Seja $a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n = 0$. Ao aplicar L_λ^{n-1} aos dois termos da igualdade, temos que $a_n \mathbf{v}_1 = 0$, logo $a_n = 0$. Ao aplicar L_λ^{n-2} aos dois termos da igualdade que sobra $a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} = 0$, temos que $a_{n-1} \mathbf{v}_1 = 0$, logo também $a_{n-1} = 0$. E assim a seguir. □

O núcleo $\text{Ker}(L_\lambda^k)$ é chamado *espaço próprio generalizado* de ordem k . É imediato ver que $\text{Ker}(L_\lambda) \subset \text{Ker}(L_\lambda^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(L_\lambda^n)$.

Se os vetores (11.5) geram o próprio espaço $\mathbf{V}$, que portanto é isomorfo a $\mathbf{V} = \text{Ker}(L_\lambda^n) \approx \mathbb{C}^n$, então o espaço $\mathbf{V}$ é dito *cíclico*. O cálculo acima mostra que

$$L\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad L\mathbf{v}_k = \lambda \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1} \quad \text{se } 2 \leq k \leq n$$

Então, a matriz que representa L nesta base é

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (11.6)$$

Em particular, $\mathbf{v}_1$ é um vetor próprio com valor próprio λ . O espaço próprio $\mathbf{V}_\lambda = \text{Ker}(L_\lambda)$ é a reta $\mathbf{V}_\lambda = \mathbb{C}\mathbf{v}_1$, ou seja, a multiplicidade geométrica do valor próprio λ é igual a 1. A matriz (11.6) é dita *bloco de Jordan* de dimensão n , e a base (11.5) é dita *base de Jordan*, ou *cadeia de Jordan* de comprimento n .

Observe que um bloco de Jordan de dimensão n é da forma

$$J_\lambda = \lambda I + N$$

onde N é a matriz nilpotente (triangular superior)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

que verifica $NE_k = E_{k-1}$, se E_k denotam os vetores coluna da base canónica de $\mathbb{C}^n$, e $N^n = 0$. O operador definido pela matriz N , que envia $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_n, 0)$, é também chamado *deslocamento esquerdo*.

O polinómio caraterístico de um bloco de Jordan J_λ de comprimento n é $P_{J_\lambda}(z) = (z - \lambda)^n$, e portanto a multiplicidade algébrica do valor próprio λ é n . O polinómio minimal (o polinómio mónico $p(t)$ de grau mínimo tal que $p(J) = 0$) é também $M_{J_\lambda}(z) = (z - \lambda)^n$ (comparado com o polinómio minimal da matriz λI , com I matriz identidade de ordem n , que é apenas $M_{\lambda I}(z) = (z - \lambda)$).

e.g. Quase-polinómios e derivada. O modelo de um bloco de Jordan é o operador derivação $D : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, definido por $(\partial f)(t) := f'(t)$, no espaço linear $\mathbf{V}$ dos quase-polinómios $f(t) = p(t)e^{\lambda t}$ de grau $\deg(p) < n$. Se $\lambda = 0$, então $D^n = 0$, pois a n -ésima derivada de um polinómio de grau $< n$ é nula. Em geral, é imediato verificar que $(D - \lambda)^n = 0$. O vetor próprio é $f(t) = e^{\lambda t}$, com valor próprio λ . A base de Jordan é

$$e^{\lambda t} \quad t e^{\lambda t} \quad \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda t} \quad \dots \quad \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda t}$$

Nesta base, o operador D é representado pela matriz (11.6).

Fluxo de um bloco de Jordan. Consideramos um bloco de Jordan J_λ de dimensão n , definido em (11.6). O exponencial de $t J_\lambda$ define o fluxo do sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = J_\lambda \mathbf{x}$$

cujo espaço de fases é um espaço cíclico $\mathbb{C}^n$. Como a parte nilpotente N comuta com λI , podemos calcular separadamente os exponenciais e depois multiplicar. Sendo N nilpotente de período n , temos que $N^n = 0$ e portanto também $N^k = 0$ se $k \geq n$. Consequentemente, a série que define o exponencial de tN é de fato um polinómio de grau $n - 1$, pois

$$e^{tN} = I + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} N^{n-1}.$$

O exponencial da parte diagonal é $e^{t\lambda}I$, e finalmente

$$\begin{aligned} e^{tJ_\lambda} &= e^{t\lambda} \left(I + tN + \frac{t}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1} \right) \\ &= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sendo uma correção polinomial desprezável se comparada com um crescimento ou um decaimento exponenciais, é claro que o comportamento assintótico das trajetórias do sistema linear definido por um bloco de Jordan apenas dependem do sinal da parte real de λ , desde que não seja nula.

Teorema 11.2. Se $\Re(\lambda) < 0$, então para todo $0 < \alpha < |\Re(\lambda)|$ existe uma constante C tal que

$$\|e^{tJ_\lambda} \mathbf{v}\| \leq C e^{-\alpha t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } t \geq 0.$$

Demonstração. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ é uma base de Jordan, então um vetor genérico é $\mathbf{v} = \sum_k a_k \mathbf{v}_k$. É claro que

$$e^{tJ_\lambda} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \left(\sum_i a_i p_{ik}(t) \right) \mathbf{v}_k$$

onde os $p_{ik}(t)$'s são certos polinômios de grau $< n$, que apenas dependem da dimensão n do bloco de Jordan. Seja $\Re(\lambda) = -\rho < 0$. Consideramos $0 < \alpha < \rho$, e definimos $\varepsilon = \rho - \alpha > 0$. Podemos definir uma norma no espaço cíclico gerado pelos $\mathbf{v}_k$'s de acordo com $\|\mathbf{v}\| := \max_k |a_k|$. Então, se $M = \max_{i,k} M_{ik}$ denota o valor máximo dos $M_{ik} = \sup_{t \geq 0} |e^{-t\varepsilon} p_{ik}(t)|$ (que são finitos porque $\varepsilon > 0$), é claro que

$$\|e^{tJ_\lambda} \mathbf{v}\| \leq M e^{-\alpha t} \|\mathbf{v}\|$$

para todos os tempos positivos $t \geq 0$. Como todas as normas de um espaço de dimensão finita são equivalentes, a mesma afirmação é verdadeira se usamos a norma euclidiana, possivelmente substituindo a constante M com alguma outra constante C . $\square$

Assim, se $\Re(\lambda) < 0$, todos os vetores são contraídos pelo fluxo de J_λ , e decaem exponencialmente para zero quando $t \rightarrow \infty$.

Invertendo a direção do tempo, é claro que se $\Re(\lambda) = \rho > 0$ e $\rho > \beta > 0$, então existe uma constante C tal que

$$\|e^{-tJ_\lambda} \mathbf{v}\| \leq C e^{-\beta t} \|\mathbf{v}\| \quad \forall t \geq 0$$

Assim, se $\Re(\lambda) > 0$, todos os vetores são dilatados pelo fluxo de J_λ , e decaem exponencialmente para zero quando $t \rightarrow -\infty$.

Forma normal de Jordan. Acontece que todo operador linear num espaço linear complexo de dimensão finita é uma soma direta de blocos de Jordan.

Teorema 11.3 (forma normal de Jordan). *Seja L é um operador linear de um espaço vetorial complexo de dimensão finita $\mathbb{C}^n$. O espaço é uma soma direta $\mathbb{C}^n = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_d$ de subespaços L -invariantes cíclicos.*

Se em cada subespaço invariante cíclico escolhemos uma base de Jordan, a matriz que representa L na base resultante é uma matriz diagonal em blocos

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_d} \end{pmatrix} \quad (11.8)$$

onde cada $J_{\lambda_k} = \lambda_k I + N_k$ é um bloco de Jordan da forma (11.6) de dimensão $n_k \leq n$. Os λ_k 's, não necessariamente diferentes, são os valores próprios de L , ou seja, as raízes do polinómio caraterístico $P_A(z) = \text{Det}(zI - A)$, se A é a matriz que representa L na base canónica. De fato, o polinómio caraterístico é um produto $P_A(z) = \prod_k (z - \lambda_k)^{n_k}$. A *multiplicidade algébrica* de cada valor próprio λ é igual à soma das dimensões n_k dos blocos de Jordan com $\lambda_k = \lambda$. A *multiplicidade geométrica* do valor próprio λ é a dimensão do espaço próprio $\text{Ker}(L_\lambda)$, que é igual à cardinalidade de blocos de Jordan com $\lambda_k = \lambda$. O polinómio minimal de A é um produto $M_A(z) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (z - \lambda)^{\mu_\lambda}$, sendo μ_λ a dimensão do maior bloco de Jordan com $\lambda_k = \lambda$.

Se A é a matriz que representa o operador L na base canónica (ou em qualquer outra base), então existe uma matriz invertível U (cujas colunas são os vetores das bases de Jordan) tal que $U^{-1}AU = J$. A *forma canónica* J é única a menos de permutações dos blocos. Em particular, a matriz pode ser representada como uma soma

$$A = \Lambda + N$$

de uma matriz semi-simples, ou seja, diagonalizável, $\Lambda = U(\lambda_1 I \oplus \lambda_2 I \oplus \dots)U^{-1}$ e uma matriz nilpotente $N = U(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots)U^{-1}$ que comutam.

As demonstrações clássicas do teorema 11.3 são elementares mas demoradas, e podem ser encontradas, por exemplo, em [Ax97, Co22, HS74, La87]. Uma prova elegante e moderna é esboçada por Terence Tao no seu blog [What's new](#).

Forma normal de Jordan de matrizes reais. Consideramos agora um operador $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido, na base canónica, pela matriz real $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Podemos pensar em A como numa matriz complexa, que define a complexificação, $L^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, e como tal conjugada, de acordo com o teorema 11.3, a uma matriz diagonal em blocos (11.8). Como A é real, o seu polinómio caraterístico tem coeficientes reais, e portanto os valores próprios de A são números reais λ ou pares de números complexos conjugados $\lambda = \alpha + i\omega$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$.

Teorema 11.4 (forma normal de Jordan real). *Seja L um operador no espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Então o espaço total é uma soma direta*

$$\mathbb{R}^n = \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathbf{E}_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}} \right).$$

de subespaços invariantes $\mathbf{E}_\lambda$, associados aos valores próprios reais λ 's, e $\mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}$, associados aos pares de valores próprios conjugados não reais $\lambda, \bar{\lambda}$.

Numa base apropriada, a restrição do operador L a cada subespaços invariantes $\mathbf{E}_\lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, é um bloco de Jordan da forma (11.6). Numa base apropriada, a restrição do operador L a cada subespaços invariante $\mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}$, com $\lambda = \alpha + i\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, é uma matriz da forma

$$J_{\lambda, \bar{\lambda}} = \begin{pmatrix} R_{\lambda, \bar{\lambda}} & I & & & \\ & R_{\lambda, \bar{\lambda}} & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R_{\lambda, \bar{\lambda}} & I \\ & & & & R_{\lambda, \bar{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (11.9)$$

com

$$R_{\lambda, \bar{\lambda}} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Consequentemente, numa base apropriada, o operador L é representado por uma matriz diagonal em blocos (11.8), onde cada bloco J_k é da forma (11.6) ou (11.9).

Demonstração. De acordo com o teorema 11.3, $\mathbb{C}^n$ é uma soma direta de subespaços $\mathbf{V}_\lambda$ invariantes para a complexificação do operador L . A matriz que define o operador complexificado numa base apropriada é uma soma direta de blocos de Jordan.

Consideramos um bloco de Jordan com valor próprio real λ . Se $\mathbf{x} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ é o vetor L_λ -cíclico que gera o espaço cíclico $\mathbf{V}_\lambda$, então x ou y é um vetor L_λ -cíclico real. Este vetor gera portando um espaço cíclico real $\mathbf{E}_\lambda$, e portanto uma cadeia de Jordan de dimensão real igual à dimensão complexa de $\mathbf{E}_\lambda$.

Consideramos agora um bloco de Jordan associado a um espaço cíclico $\mathbf{V}_\lambda$, com valor próprio $\lambda = \alpha + i\omega$ que não é real (ou seja, com $\omega \neq 0$). Então o operador complexificado também admite o valor próprio conjugado $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$, e o correspondente espaço cíclico $\mathbf{V}_{\bar{\lambda}}$. É claro que as dimensões de $\mathbf{V}_\lambda$ e $\mathbf{V}_{\bar{\lambda}}$ são iguais, pois se $\mathbf{v}$ is L_λ -cíclico então $\bar{\mathbf{v}}$ é $L_{\bar{\lambda}}$ -cíclico, e vice-versa. Procedendo como no caso planar (i.e. usando um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do teorema 7.7), é então fácil verificar que o subespaço invariante $\mathbf{V}_\lambda \oplus \mathbf{V}_{\bar{\lambda}} \subset \mathbb{C}^n$ dá origem a um subespaço invariante real $\mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}} \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão real igual à dimensão complexa de $\mathbf{V}_\lambda$, onde o operador é um bloco do género (11.9). $\square$

e.g. Fatorização de operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes. De acordo com o teorema de Picard-Lindelöf 1.3, o espaço das soluções da EDO linear homogênea com coeficientes constantes de ordem n

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0 \quad (11.10)$$

é um subespaço linear $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de dimensão $\dim \mathcal{H} = n$ do espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente deriváveis. Pode ser caracterizado como sendo o núcleo $\mathcal{H} = \text{Ker} L$ do operador diferencial com coeficientes constantes

$$L = \partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_2\partial^2 + a_1\partial + a_0.$$

É claro que a EDO (11.10) é equivalente a um sistema linear em $\mathbb{R}^n$, e portanto pode ser estudada com os métodos ilustrados até agora. No entanto, existe também uma outra possibilidade, que revela o significado analítico dos blocos de Jordan.

As soluções de (11.10) são combinações lineares (finitas) de “quase-polinómios”. De fato, a conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução de (11.10) se z é uma raiz do *polinómio caratéristico*

$$P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0.$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinómio $P(z)$ é um produto

$$P(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} (z - \lambda_2)^{n_2} \cdots (z - \lambda_\ell)^{n_\ell}$$

de fatores $(z - \lambda_k)^{n_k}$, onde os $\lambda_k \in \mathbb{C}$ são as raízes (em geral, complexas) do polinómio, e os inteiros $n_k \geq 1$ as respetivas multiplicidades algébricas. As multiplicidades algébricas satisfazem $n_1 + n_2 + \cdots + n_\ell = n$.

A correspondência entre o polinómio $P(z)$ e o operador $L = P(\partial)$ é um isomorfismo entre álgebra dos polinómios em uma variável complexa e a álgebra dos operadores diferenciais com coeficientes constantes. Ou seja, combinações lineares de polinómios são enviadas em combinações lineares de operadores diferenciais, e ao produto pontual entre dois polinómios corresponde o produto, i.e. a composição, dos operadores diferenciais (que é comutativa quando os coeficientes são constantes). Consequentemente, o operador L também fatoriza num produto

$$L = (\partial - \lambda_1)^{n_1} (\partial - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\partial - \lambda_\ell)^{n_\ell}.$$

Os operadores $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$, com λ_k 's diferentes, comutam. Consequentemente, o núcleo de L contém os núcleos de cada um dos fatores. O núcleo de $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$ é o espaço de dimensão n_k dos

quase-polinômios $p(t)e^{\lambda_k t}$, onde $p(t)$ é um polinômio de grau $\deg(p) < n_k$. Portanto, a solução geral de (11.10) é uma sobreposição

$$x(t) = \sum_k p_k(t) e^{\lambda_k t},$$

onde $\lambda_k \in \mathbb{C}$ são as raízes do polinômio característico, com multiplicidades algébricas n_k , e os $p_k \in \mathbb{C}[t]$ são polinômios arbitrários de grau $\deg(p_k) < n_k$.

Se os coeficientes a_k 's da equação diferencial linear (11.10) são números reais (como acontece frequentemente na física!), então o polinômio característico possui raízes reais ou pares de raízes complexas conjugadas. É então possível construir um espaço de dimensão real n de soluções reais, da forma seguinte.

A cada raiz real $\lambda_k \in \mathbb{R}$ com multiplicidade algébrica $n_k \geq 1$ está associado o espaço de dimensão real n_k dos quase-polinômios reais que anulam o operador $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$, ou seja, o espaço linear de dimensão real n_k dos quase-polinômios

$$p(t) e^{\lambda_k t}$$

com $\deg(p) < n_k$.

A cada par de raízes complexas conjugadas $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$ e $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - i\omega_k \in \mathbb{C}$ (com $\omega_k > 0$), de multiplicidade algébrica n_k , ou seja, a cada fator

$$(\partial - \lambda_k)^{n_k} (\partial - \bar{\lambda}_k)^{n_k} = ((\partial - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)^{n_k}$$

de L , está associado o espaço linear de dimensão real $2n_k$ dos quase-polinômios

$$p(t) e^{\alpha_k t} \cos(\omega_k t) + q(t) e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t)$$

onde $p, q \in \mathbb{R}[t]$ são polinômios reais de grau $\deg(p) < n_k$ e $\deg(q) < n_k$.

ex: Verifique que o espaço das soluções de $\partial^n x = 0$ é o espaço linear $\text{Pol}_{<n}$ dos polinômios de grau $< n$.

ex: Verifique que o núcleo do operador linear $L_\lambda := \partial - \lambda$ é o espaço linear de dimensão 1 gerado pela função $e^{\lambda t}$.

ex: Seja M_λ o operador *modulação*, definido por $(M_\lambda x)(t) := e^{\lambda t} x(t)$. Verifique que

$$\partial - \lambda = M_\lambda \partial M_\lambda^{-1}$$

(ou seja, M_λ realiza uma conjugação entre os operadores ∂ e $\partial - \lambda$), e portanto

$$(\partial - \lambda)^n = M_\lambda \partial^n M_\lambda^{-1}.$$

Deduz a que o núcleo da potência $(\partial - \lambda)^n$, com $n \geq 1$, é o espaço linear (de dimensão n) dos quase-polinômios $p(t)e^{\lambda t}$ de grau $\deg(p) < n$.

ex: Determine a solução geral das seguintes ODEs lineares

$$\ddot{x} - \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \quad \ddot{x} = x \quad \ddot{x} + 2\ddot{x} + x = 0 \quad \ddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

ex: [Ap69] Vol. 2, 6.9.

11.4 Campos lineares hiperbólicos

Espaços estável, neutro e instável Seja $L \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ um campo linear, definido na base canônica pela matriz real A . O fluxo do sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

é dado por $\Phi_t = e^{tA}$. O comportamento assintótico do fluxo em cada subespaço invariante (ou, com abuso de linguagem, cadeia de Jordan) $\mathbf{E}_\lambda$ ou $\mathbf{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}$ descrito no teorema 11.4 depende da parte real do valor próprio λ correspondente.

É possível representar o espaço de fases como soma direta de três subespaços invariantes

$$\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^- \oplus \mathbf{E}^0 \oplus \mathbf{E}^+$$

onde o *espaço estável* $\mathbf{E}^-$ é a soma direta das cadeias de Jordan com $\Re(\lambda) < 0$, o *espaço instável* $\mathbf{E}^+$ é a soma direta das cadeias de Jordan $\Re(\lambda) > 0$, e finalmente o *espaço neutro* $\mathbf{E}^0$ é a soma direta das cadeias de Jordan com $\Re(\lambda) = 0$.

Poços e fontes. O sistema linear, ou, melhor, o ponto de equilíbrio 0, é chamado *poço* (em inglês, *sink*) se todos os valores próprios têm parte real negativa, i.e. $\Re(\lambda) < 0$, assim que $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^-$. Por exemplo, nodos e focos estáveis no plano são poços.

O sistema linear é chamado *fonte* (em inglês, *source*) se todos os valores próprios têm parte real positiva, assim que $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^+$. Por exemplo, nodos e focos instáveis no plano são fontes.

É claro que uma inversão da direção do tempo transforma um poço numa fonte e vice-versa pois $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$. O seguinte teorema diz que os poços são os sistemas lineares cujas trajetórias decaem exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 11.5. *O sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ é um poço sse satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:*

- i) *todos os valores próprios de A têm parte real negativa,*
- ii) *todas as soluções decaem $e^{tA}\mathbf{v} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$,*
- iii) *existe um expoente $\alpha > 0$ e uma constante C tais que para todos os $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*

$$\|e^{tA}\mathbf{v}\| \leq C e^{-\alpha t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } t \geq 0. \quad (11.11)$$

Demonstração. É óbvio que iii) $\Rightarrow$ ii). É também claro que ii) $\Rightarrow$ i), pois se algum valor próprio tem $\Re(\lambda) \geq 0$, então é fácil encontrar, na cadeia de Jordan correspondente, uma solução que não decai quando $t \rightarrow \infty$. Para provar que i) $\Rightarrow$ iii), começamos por observar que iii) acontece em cada cadeia de Jordan, pelo teorema 11.2. Mas se fixamos uma norma em cada subespaço de uma soma direta (por exemplo a restrição da norma euclidiana), então podemos definir uma norma no espaço total considerando o máximo (ou a soma, ou a raiz quadrada da soma dos quadrados) entre as normas das componentes dos vetores. Relativamente a esta norma temos claramente a desigualdade (11.11) com algum expoente $\alpha > 0$ estritamente inferior ao menor dos $|\Re(\lambda)|$'s e alguma constante C . Pela equivalência de todas as normas em $\mathbb{R}^n$, a mesma desigualdade é verificada relativamente a toda outra norma, com possivelmente uma constante C diferente. $\square$

Mudando a direção do tempo, obtemos também uma caracterização das fontes. Todas as trajetórias não nulas de uma fonte divergem exponencialmente, ou seja, satisfazem

$$\|e^{tA}\mathbf{v}\| \geq C e^{\beta t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } t \geq 0,$$

para algum expoente $\beta > 0$, alguma constante C .

Campos lineares hiperbólicos. Um campo linear L é chamado *hiperbólico* se o espectro da sua complexificação é disjunto do eixo imaginário, ou seja, se todos os valores próprios λ , reais ou complexos, têm parte real $\Re(\lambda) \neq 0$. O espaço de fases de um campo hiperbólico é então uma soma direta

$$\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^- \oplus \mathbf{E}^+$$

apenas dos subespaços estável e instável.

É claro que poços e fontes são hiperbólicos, mas o caso mais interessante é quando ambos os espaços $\mathbf{E}^\pm$ são não vazios. Um argumento análogo a prova do teorema 11.5 mostra a seguinte caracterização de um campo hiperbólico.

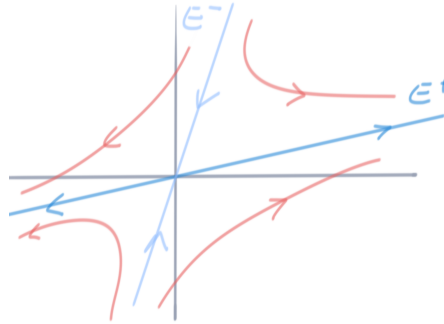
Teorema 11.6. *Seja A um campo hiperbólico em $\mathbb{R}^n$. O espaço de fase é uma soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}^- \oplus \mathbf{E}^+$ dos supespaços invariantes estável e instável, e existem expoentes positivos $\alpha, \beta > 0$ e uma constante C tais que*

$$\|e^{tA}\mathbf{v}\| \leq C e^{-\alpha t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } \mathbf{v} \in \mathbf{E}^- \text{ e } t \geq 0$$

e

$$\|e^{-tA}\mathbf{v}\| \leq C e^{-\beta t} \|\mathbf{v}\| \quad \text{se } \mathbf{v} \in \mathbf{E}^+ \text{ e } t \geq 0$$

O fluxo de um campo hiperbólico contrai os vetores do espaço estável e dilata os vetores do espaço instável. De fato, os espaços estável e instável podem ser caracterizados como os conjuntos dos vetores $\mathbf{v}$ satisfazendo $e^{\pm tA}\mathbf{v} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, respetivamente. Se os dois subespaços não são vazios, trajetórias genéricas $e^{tA}\mathbf{v}$, que não começam em $\mathbf{E}^- \cup \mathbf{E}^+$, divergem quando $t \rightarrow \pm\infty$.



Os campos lineares hiperbólicos são o modelos paradigmáticos de uma grande classe de sistemas dinâmicos, tratada pela área da teoria moderna dos sistemas dinâmicos chamada *teoria hiperbólica*. Uma introdução clássica é [HS74].

11.5 Sistemas lineares forçados

25 mai 2021

Sistemas forçados. Um *sistema linear não homogêneo*, ou *forçado*, é uma lei

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (11.12)$$

para o vetor $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, onde $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ é uma “força” dependente do tempo.

As soluções da equação homogênea associada $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ são $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{z}$, onde $\mathbf{z}$ é um vetor constante. A conjectura $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{z}(t)$ (obtida ao fazer “variar as constantes” da solução da homogênea) é solução de (11.12) sse

$$A e^{tA}\mathbf{z} + e^{tA}\dot{\mathbf{z}} = A e^{tA}\mathbf{z} + \mathbf{f}(t),$$

e portanto sse $\mathbf{z}(t)$ é solução do sistema simples

$$\dot{\mathbf{z}} = e^{-tA}\mathbf{f}(t).$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, aplicado a cada entrada da matriz,

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\tau A} \mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

Sendo $\mathbf{z}(t_0) = e^{-t_0 A}\mathbf{x}(t_0)$, a solução de (11.12) com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ é

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} \mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

Mais uma vez, mais fácil do que lembrar esta fórmula é útil lembrar o método.

Oscilador forçado. A posição e o momento linear do oscilador harmónico forçado satisfazem o sistema

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -q + f(t)\end{aligned}$$

onde $f(t)$ é uma força externa. O fluxo da parte homogénea, definida pela matriz anti-simétrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, é uma rotação

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

A solução com condição inicial arbitrária $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$ é portanto

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

Em particular, a solução com condição inicial nula admite a representação integral

$$q(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

(isto é suficiente pois $p(t) = \dot{q}(t)$, de acordo com a primeira das equações). Assim, a resposta do oscilador é uma “convolução” entre a força $f(t)$ e a “resposta impulsiva” $\sin t$. A teoria da transformada de Laplace generaliza esta observação.

ex: Considere o sistema forçado

$$\begin{aligned}\dot{q} &= q + p \\ \dot{p} &= p + e^{-t}\end{aligned}$$

Determine a solução com condição inicial arbitrária $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.

ex: Considere o sistema forçado

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -q + p \\ \dot{p} &= -p + t\end{aligned}$$

Determine a solução com condição inicial arbitrária $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.

Osciladores acoplados e forçados. Consideramos um sistema de dois osciladores acoplados e forçados, com lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} \varepsilon (x_1 - x_2)^2 + f_1(x_1, t) + f_2(x_2, t).$$

onde $\partial f_1 / \partial x_1$ e $\partial f_2 / \partial x_2$ são as forças externas que agem sobre o primeiro e o segundo oscilador, respetivamente.

Um caso simples é uma força constante, do género $f_k(x_k, t) = x_k f(t)$. Nas coordenadas (não ortonormadas) $q = (x_1 + x_2)/2$ e $Q = (x_1 - x_2)/2$ que diagonalizam a forma quadrática da energia potencial em ausência de força externa, as equações de Euler-Lagrange assumem a forma

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + 2f(t) \quad \text{e} \quad \ddot{Q} = -\Omega^2 Q,$$

onde $\Omega = \sqrt{\omega^2 + 2\varepsilon} \simeq \omega + \varepsilon/\omega^2 + \dots$. Portanto, a força age sobre o centro de massa do sistema, de coordenada q e frequência própria ω , mas não sobre as oscilações “internas”, descritas pela coordenada Q com frequência própria Ω .

ex: Determine a solução geral (pode assumir que $\omega = 1$).

ex: [Ap69] Vol. 2, 7.17.

Compartment models.

Linear control theory.

Referências

- [Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, 1969 [*Cálculo*, Editora Reverté, 1999].
- [Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR, 1985. [*Ordinary Differential Equations*, Springer, 1992]
- [Ar87] V.I. Arnold, *Métodos matemáticos da mecânica clássica*, MIR, 1987. [*Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1989]
- [Ar89] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, 1989. [*Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1988]
- [Ax97] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, second edition, Springer, 1997.
- [Ba77] F. Banino, *Geometria per fisici*, Feltrinelli, 1977.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Bl08] S.M. Blinder, *Guide to Essential Math, a review for Physics, Chemistry and Engineering Students*, Elsevier, 2008.
- [Bo89] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Algebra I*, Springer, 1989.
- [BR98] T.S. Blyth and E.F. Robertson, *Basic Linear Algebra*, McGraw Hill, 1998.
- [Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [Co22] S. Cosentino, *Álgebra Linear e Geometria Analítica para Ciências*, Universidade do Minho, 2022.
- [CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948. [*O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000].
- [Di47] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (2nd edition), Clarendon Press, 1947
- [Fe63] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading, 1963.
- [Fo89] G.B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press, 1989.
- [Go96] R. Godement, *Cours d'algèbre* (Troisième édition mise à jour), Hermann Éditeurs, 1996.
- [Ha58] P.R. Halmos, *Finite dimensional vector spaces*, Van Nostrand, 1958.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [HW59] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fourth edition, Oxford University Press, 1959.
- [KKR62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics Course, Vol. 1 - Mechanics*, McGraw-Hill, 1962.
- [Kn19] O. Knill, *Linear Algebra and Vector Calculus II*, handouts, 2019.
- [La87] S. Lang, *Linear Algebra*, Third Edition, UTM Springer, 1987.
- [La97] S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, UTM Springer, 1997.
- [LL78] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.

- [MW85] J.E. Marsden and A. Weinstein, *Calculus I & II*, Springer, 1985.
- [Me00] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.
- [MB99] S. MacLane and G. Birkhoff, *Algebra (Third Edition)*, AMS Chelsea Publishing, 1999.
- [Na06] P.J. Nahin, *Dr. Euler's fabulous formula: cures many mathematical ills*, Princeton University Press, 2006.
- [Pe05] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Knopf, 2005.
- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2006.
- [Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 2004.
- [Ru87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [Se89] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1989.
- [Si91] G. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill, 1991.
- [SG04] M. Stone and P. Goldbart, *Mathematics for Physics*, Cambridge University Press, 2004.
- [St98] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Hartcourt Brace Jonovich Publishers, 1998.
- [St09] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, fourth edition, Wellesley-Cambridge Press and SIAM 2009.
<http://math.mit.edu/linearalgebra/> , MIT Linear Algebra Lectures
- [Tr13] W.F. Trench, *Elementary Differential Equations*, 2013. Books and Monographs. Book 8.
<http://digitalcommons.trinity.edu/mono/8>
- [Wa91] B.L. van der Waerden, *Algebra*, Springer, 1991 [*Moderne Algebra*, 1930-1931].
- [We52] H. Weyl, *Space Time Matter*, Dover, 1952 [*Raum Zeit Materie*, 1921].
- [Ze16] A. Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists*, Princeton University Press, 2016.

Índice

- aceleração, 7
- álgebra
 - de Lie, 187
- algoritmo
 - de Cooley-Tuckey, 161
- automorfismo, 158
- avaliação, 112

- base ortonormada, 80
- batimentos, 62
- braquistócrona, 26

- campo
 - completo, 16
 - de direções, 13
 - de forças, 7
- catenária, 31
- classe lateral, 159
- coeficientes de Fourier, 86
- complemento ortogonal, 84
- componente, 76
- condição
 - inicial, 14
- conjugação
 - linear, 197
- curva de ressonância, 65
- curva integral, 13

- delta de Dirac, 69
- desigualdade
 - de Bessel, 86
 - de Heisenberg, 114
 - de Schwarz, 76
 - de Weyl, 132
 - do triângulo, 76
- determinante
 - Wronskiano, 48
- DFT (discrete Fourier transform), 111
- direções principais, 133
- distância euclidiana, 76
- distribuição, 71

- elipsoide, 133
- endomorfismo, 158
- energia, 8, 92
- equação
 - de Newton, 7
 - secular, 141
- equação diferencial
 - autônoma, 15, 27
 - de Bernoulli, 39
 - exata, 35
 - homogênea, 36
 - homogênea de segunda ordem, 49
 - linear de primeira ordem, 36
 - linear de segunda ordem, 57
 - ordinária, 13
 - separável, 33
- espaço
 - de fases, 13, 197
 - euclidiano, 74
 - hermítico, 74
 - quociente, 159
- exponencial, 9

- fórmula
 - de Euler, 41
- família
 - ortogonal, 80
- fator integrante, 35
- fatorização
 - QR, 83
- FFT (fast Fourier transform), 162
- fluxo, 197
 - de fase, 16
- foco
 - estável, 201
 - instável, 201
- força
 - de Coriolis, 44, 190
- forma bilinear, 127
- forma quadrática, 125

- gaussiana, 136
- grupo, 154
 - afim, 156
 - cíclico, 161
 - comutativo ou abeliano, 155
 - de Lorentz, 171
 - de Poincaré, 171
 - de transformações, 154
 - de Weyl-Heisenberg, 172
 - diedral, 156
 - linear especial, 164
 - linear geral, 157
 - livre, 156
 - ortogonal, 165
 - simétrico, 154
 - unitário, 168
- homomorfismo, 157

- identidade
 - aproximada, 70
 - de Jacobi, 186
 - de Parseval, 86
 - de polarização, 75
- impedência, 66

- interpolação, 112
- isometria, 82, 97, 164
- isomorfismo, 157
- laplaciano discreto, 112
- lei
 - de inércia de Sylvester, 130
 - dos cosenos, 77
- método
 - de Euler, 20
 - de Runge-Kutta, 23
 - dos coeficientes indeterminados, 59
 - dos mínimos quadrados, 135
- mapa
 - de Picard, 18
- matriz
 - anti-simétrica, 95
 - de Gram, 75
 - hermítica, 92
 - ortogonal, 83, 98
 - simétrica, 92
 - unitária, 98
- matrizes
 - circulantes, 112
 - congruentes, 126
 - de Pauli, 98
- momento linear, 7
- nodo
 - degenerado, 200
 - estável, 199
 - instável, 199
- norma, 75
 - de Frobenius, 77
- operador
 - adjunto, 90
 - auto-adjunto, 92
 - criação, 120
 - de Hermite, 120
 - destruição, 120
 - diagonalizável, 101
 - hemi-hermítico, 95
 - hermítico, 92
 - momento linear, 195
 - não-negativo, 115
 - normal, 96, 106
 - ortogonal, 98
 - permutação cíclica, 110
 - posição, 196
 - positivo, 115
 - semi-simples, 101
 - unitário, 98
- órbita, 197
- ortogonal, 75
- oscilador
 - amortecido, 55
 - forçado, 62
 - forçado amortecido, 64
 - harmônico, 53
- parêntese de Lie, 186
- período, 15
- permutação, 154
- polinómio caraterístico, 50
- ponto de sela, 199
- ponto regular, 27
- ponto singular, 15, 27
- princípio
 - das contrações, 19
 - de indeterminação de Heisenberg, 114
 - de sobreposição, 58
 - min-max de Courant-Fischer, 132
- problema de valores iniciais, 14
- produto
 - direto de ODEs, 32
 - escalar de Hilbert-Schmidt, 175
 - escalar/interno, 74
- projeção
 - ortogonal, 76, 84
- quase-polinómio, 59
- quaterniões, 44
- quociente de Rayleigh-Ritz, 131
- reatância, 66
- repametrização, 16
- representação adjunta, 186
- ressonância, 63
- rotação
 - hiperbólica, 184
- rotações, 165
- semi-eixos, 133
- sistema
 - linear homogêneo, 197
- solução
 - estacionária, 15, 27
 - global, 13
 - local, 13
 - maximal, 13
 - periódica, 15
- subgrupo, 158
 - normal, 159
- teorema
 - de aproximação, 85
 - de Cayley-Hamilton, 122, 123
 - de Gram-Schmidt, 81
 - de Lagrange, 129
 - de Peano, 14
 - de Picard-Lindelöf, 14, 19
 - de Pitágoras, 75
 - de Riesz, 79

- de Schur, 122
- espectral, 102, 106
- toro, 160
- tractrix, 31
- trajetória, 197
- transformação
 - de Cayley, 100
 - transformada de Fourier discreta, 110
- valores singulares, 137
- velocidade, 7
 - angular, 190