06/05/2015 1º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

Nome ....**Nº** .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda nesta folha de enunciado e justifique as suas resposta, se achar útil, numa folha de exame.`

1. *(2 valores)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$.

   A solução geral de $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ é
   $$x(t) = ae^{-2t}\cos(t) + be^{-2t}\sin(t)\,, \qquad \text{com } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

2. *(2 valores)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

   A solução com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$ é
   $$x(t) = e^{-2t}\sin(t)\,.$$

3. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução de $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 25t + 2e^{-t}$.

   Uma solução é
   $$x(t) = 5t - 4 + e^{-t}\,.$$

4. *(2 valores)* Determine uma equação diferencial ordinária de segunda ordem que admita as soluções $x_1(t) = e^t$ e $x_2(t) = e^{-3t}$.

   $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções de
   $$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0\,.$$

5. *(2 valores)* Seja $\mathbf{V}$ o espaço linear das funções diferenciáveis $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, e seja $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ o operador linear definido por $g = Tf$ com $g(x) = x\,f'(x)$ se $x \in (0, 1)$. Todo $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio de T. Determine um vetor próprio (ou seja, uma função $f(x)$ não nula) correspondente ao valor próprio λ.

   Um vetor próprio correspondente a $\lambda \in \mathbb{R}$ é
   $$f(x) = x^\lambda$$
   pois
   $$(Tf)(x) = x\,(x^\lambda)' = \lambda\,x^\lambda = \lambda\,f(x)\,.$$

6. *(2 valores)* Dê um exemplo de uma transformação linear ortogonal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e um exemplo de uma transformação linear unitária $B : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

   $A(x, y) = (x, y)$ é ortogonal, e $B(z, w) = (z, w)$ é unitária.

7. *(2 valores)* Considere, no espaço euclidiano real $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno canónico, a reflexão $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na reta $y = 3x$. Determine valores e vetores próprios de R.

   Os valores próprios são 1 e -1, e vetores próprios são $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ e $\mathbf{v}_{-1} = (-3, 1)$, respetivamente.

8. *(2 valores)* Considere, no espaço euclidiano real $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno canónico, a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ e $T\mathbf{w} = -3\mathbf{w}$, onde $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2})$ e $\mathbf{w} = (-1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2})$. Diga se o operador T é simétrico ou hemi-simétrico.

   É simétrico, porque numa base ortonormada é representado pela matriz simétrica $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)$.

9. *(2 valores)* Diagonalize, se possível, a matriz complexa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, determine uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível U tais que $\Lambda = U^{-1}AU$.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

10. *(2 valores)* Determine quais das seguintes matrizes são hermíticas ou hemi-hermíticas:

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

A é hemi-hermítica e B é hermítica.

17/06/2015 2º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

Nome .... **N**^{o} .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

1. *(2 valores)* Identifique a matriz simétrica da forma quadrática
$$Q(x,y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2\,,$$
 determine os seus valores próprios e uma matriz ortogonal diagonalizadora.

A forma quadrática é definida pela matriz simétrica
$$S = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} U^{-1}\,,$$
com valores próprios 1 e 6, e a matriz ortogonal diagonalizadora é
$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

2. *(2 valores)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana
$$5(x-1)^2 - 4(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2 - 6 = 0\,.$$

A equação define a elipse
$$\frac{(x')^2}{6} + (y')^2 = 1\,,$$
nas variáveis
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}\,.$$

3. *(2 valores)* Determine o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$ na circunferência unitária $S = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

O máximo é $6 = f(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ e o mínimo é $1 = f(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

4. *(2 valores)* Dê um exemplo, se existir, de uma matriz quadrada A tal que e^A seja ortogonal, e calcule e^A.

A matriz nula $A = 0$, com $e^A = I$.

5. *(2 valores)* Seja $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ a base canónica do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz $R \in \mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$ que representa uma rotação de um ângulo $\pi/6$ em torno do eixo $\mathbb{R}\mathbf{j}$.

$$R = \begin{pmatrix} \sin(\pi/6) & 0 & \cos(\pi/6) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\pi/6) & 0 & \sin(\pi/6) \end{pmatrix}\,.$$

6. *(2 valores)* Se as matrizes quadradas $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são ortogonais, então a soma $A + B$ também é ortogonal? Justifique.

Falso, por exemplo, I e $-I$ são ortogonais, mas $I + (-I) = 0$ não é ortogonal.

7. *(2 valores)* Calcule o exponencial e^A da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

$$e^A = U \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^6 \end{pmatrix} U^{-1}\,.$$
onde U é definida no exercício 1.

8. *(2 valores)* Calcule o grupo a um parâmetro das matrizes $G(t) = e^{tE}$, com $t \in \mathbb{R}$, gerado pela matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$e^{tE} = \begin{pmatrix} e^t & t\,e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} .$$

9. *(2 valores)* Determine e esboce a solução do sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad x + y \\ \dot{y} &= \quad x \end{aligned}$$

com condição inicial $x(0) = 2$ e $y(0) = 3$.

A solução é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tF} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} V^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

onde

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} V^{-1}$$

com

$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad V = \begin{pmatrix} \lambda_+ & -1 \\ 1 & \lambda_+ \end{pmatrix}$$

10. *(2 valores)* Determine a solução geral da EDO linear homogénea

$$\dddot{x} - 2\,\ddot{x} - 3\,\dot{x} = 0 .$$

$$x(t) = a + be^{-t} + ce^{3t} \qquad \text{com} \qquad a, b, c \in \mathbb{R} .$$