01/07/2015
recurso

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica

Nome ....**N**^{o} .... ☐ **ENGFIS** ☐ **FIS**

`Instruções: responda nesta folha de enunciado e justifique as suas resposta numa folha de exame.`

1. *(2 valores)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$ com condições iniciais $x(0) = -1$ e $\dot{x}(0) = 1$.

   A solução com condições iniciais $x(0) = -1$ e $\dot{x}(0) = 1$ é
   $$x(t) = -e^{-t}\cos(\sqrt{2}t)\,.$$

2. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução de $\ddot{x} + 4x = \sin(2t)$.

   Uma solução é
   $$x(t) = -\frac{1}{4}\,t\,\cos(2t)\,.$$

3. *(2 valores)* Seja $\mathbf{V}$ o espaço linear dos polinómios $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ de grau ≤ 2 na variável real $x \in \mathbb{R}$. Seja $D : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ o operador "derivação", definido por $(Df)(x) = f'(x)$. Determine a matriz que representa D numa base de $\mathbf{V}$, e os valores próprios de D.

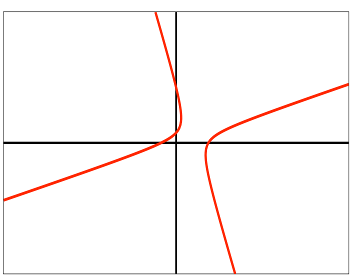
   Na base $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, definida por $\mathbf{e}_0(x) = 1$, $\mathbf{e}_1(x) = x$ e $\mathbf{e}_2(x) = x^2/2$, o operador D é definido pela matriz
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   O único valor próprio é 0 (um vetor próprio sendo $\mathbf{e}_0$).

4. *(2 valores)* Identifique a matriz simétrica da forma quadrática
   $$Q(x,y) = 2x^2 - 4xy - y^2\,,$$
   determine os seus valores próprios e uma matriz ortogonal diagonalizadora.

   A forma quadrática é definida pela matriz simétrica
   $$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} U^{-1}\,,$$
   com valores próprios 3 e -2, onde a matriz ortogonal diagonalizadora é
   $$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

5. *(2 valores)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana
   $$2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0\,.$$

   A equação define a hipérbole
   $$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{6} = 1$$
   nas variáveis
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}\,.$$



6. *(2 valores)* Se a matriz quadrada real A é hemi-simétrica (ou seja, $A^\top = -A$) então e^A é ortogonal. Verdadeiro ou falso? Justifique.

Verdadeiro. Se $A^\top = -A$, então

$$\begin{aligned}(e^A)^\top &= \left(I + A + \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{6}A^3 + \dots\right)^\top \\ &= I + A^\top + \tfrac{1}{2}\left(A^\top\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(A^\top\right)^3 + \dots \\ &= I - A + \tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{6}A^3 + \dots \\ &= e^{-A}\end{aligned}$$

e portanto $(e^A)^\top e^A = e^A (e^A)^\top = I$.

7. *(2 valores)* Determine matrizes $A, B, C \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ tais que

$$AB = C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}$$

$$A = B = C = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

8. *(2 valores)* Calcule o grupo a um parâmetro das matrizes $G(t) = e^{tE}$, com $t \in \mathbb{R}$, gerado pela matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$e^{tE} = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

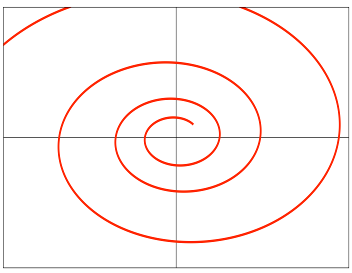
9. *(2 valores)* Determine e esboce a solução do sistema de EDOs

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + y\end{aligned}$$

com condição inicial $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.

A solução é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tE}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^t \begin{pmatrix} \cos(t + \pi/4) \\ \sin(t + \pi/4) \end{pmatrix}.$$



10. *(2 valores)* Determine a solução geral da EDO linear homogénea

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 0\,.$$

$$x(t) = a + (b + ct)e^{-t} \qquad \text{com} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$