9/5/2014 1º teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica EC

Nome ....**Nº** .... ☐ ENGFIS ☐ FIS

1. *(2 valores)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$.

   A solução geral de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ é
   $$x(t) = ae^{-t}\cos(2t) + be^{-t}\sin(2t)\,, \qquad \text{com } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

2. *(2 valores)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$.

   A solução com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$ é
   $$x(t) = e^{-t}\left(\cos(2t) + \sin(2t)\right)\,.$$

3. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução de $\ddot{x} + x = \sin(t)$.

   Uma solução é
   $$x(t) = -\tfrac{1}{2}t\cos(t)\,.$$

4. *(2 valores)* Determine uma equação diferencial ordinária de segunda ordem que admita as soluções $x_1(t) = e^{-t}\cos(t)$ e $x_2(t) = e^{-t}\sin(t)$.

   x_1 e x_2 são soluções de
   $$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0\,.$$

5. *(2 valores)* Determine todos os possíveis valores reais de λ tais que a equação diferencial linear homogénea $f''(x) = \lambda f(x)$, no intervalo $x \in [0, \pi]$, admita soluções $f(x)$ não trivias (ou seja, diferentes da solução nula $f(x) = 0$) satisfazendo as condições de fronteira $f(0) = 0$ e $f(\pi) = 0$.

   Os valores possíveis são
   $$\lambda = -n^2 \qquad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots\,.$$

6. *(2 valores)* Considere o espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle = z_1\overline{z_1'} + \cdots + z_n\overline{z_n'}$. Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma transformação linear hermítica, ou seja, tal que $\langle T\mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle = \langle \mathbf{z}, T\mathbf{z}' \rangle$ para todos os $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^n$. Mostre que $\langle T\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$ é real para todo o $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$.

   Pela simetria hermítica do produto interno, $\overline{\langle T\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} = \langle \mathbf{z}, T\mathbf{z} \rangle$, mas, sendo T hermítica, $\langle \mathbf{z}, T\mathbf{z} \rangle = \langle T\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$. Portanto, $\langle T\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \overline{\langle T\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}$, ou seja, $\langle T\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$ é real.

7. *(2 valores)* Considere o espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto interno $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle = z_1\overline{z_1'} + z_2\overline{z_2'}$. Dê um exemplo de uma transformação linear hermítica $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ e um exemplo de uma transformação linear hemi-hermítica $B : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

   $A(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ é hermítica, e $B(\mathbf{z}) = i\mathbf{z}$ é anti-hermítica.

8. *(2 valores)* Considere o espaço euclidiano real $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno canónico, e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x + 2y, 2x + 5y)$. Existe uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$ formada por vetores próprios de T? Justifique.

   Sim, porque T é um operador simétrico. Os valores próprios são 1 e 6, e vetores próprios unitários são $\mathbf{v}_1 = (2, -1)/\sqrt{5}$ e $\mathbf{v}_6 = (1, 2)/\sqrt{5}$, respetivamente.

9. *(2 valores)* Diagonalize, se possível, a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

ou seja, determine uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível U tais que $\Lambda = U^{-1}AU$. É possível escolher U ortogonal? Justifique.

É possível escolher U ortogonal porque os vetores próprios formam uma base ortonormada.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. *(2 valores)* Determine quais das seguintes matrizes são unitárias ou ortogonais:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A é ortogonal, B é unitária, C não é nem ortogonal nem unitária.

20/6/2014 2^o teste	Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica EC

Nome ....**N^o** .... ☐ ENGFIS ☐ FIS

1. *(2 valores)* Identifique a matriz simétrica da forma quadrática

$$Q(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2\,,$$

determine os seus valores próprios e uma matriz ortogonal diagonalizadora.

A forma quadrática é definida pela matriz simétrica

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U^{-1}\,,$$

com valores próprios 8 e 2, onde a matriz ortogonal diagonalizadora é

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

2. *(2 valores)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 10\sqrt{2}\,x - 6\sqrt{2}\,y + 2 = 0\,.$$

A equação define a elipse

$$(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{4} = 1\,,$$

nas variáveis

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. *(2 valores)* Determine a matriz $B \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{R})$ sabendo que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{se} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *(2 valores)* Determine uma matriz $C \in \mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$ tal que

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

5. *(2 valores)* Seja $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ a base canónica do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz $R \in \mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$ de uma rotação de um ângulo $\pi/2$ em torno do eixo $\mathbb{R}\mathbf{k}$.

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *(2 valores)* Se uma matriz quadrada $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é diagonalizável, então o exponencial e^M também é diagonalizável? Justifique.

   Sim, se $M = U^{-1}\Lambda U$ com Λ diagonal e $U \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, então $e^M = U^{-1}e^{\Lambda}U$, e e^{Λ} é diagonal.

7. *(2 valores)* Calcule o exponencial e^D da matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$e^D = eD\,.$$

8. *(2 valores)* Calcule o grupo a um parâmetro das matrizes $G(t) = e^{tE}$ gerado pela matriz

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$e^{tE} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

9. *(2 valores)* Determine e esboce a solução do sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad -2x + y \\ \dot{y} &= \quad -x - 2y \end{aligned}$$

   com condição inicial $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tE}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

10. *(2 valores)* Determine a solução geral da EDO linear homogénea

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 0\,.$$

$$x(t) = a + (b + c\,t)\,e^{-t} \qquad \text{com} \qquad a, b, c, \in \mathbb{R}\,.$$