4/7/2014
recurso

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica EC

Nome ....**N^o** ....

☐ ENGFIS
☐ FIS

1. *(2 valores)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$$

com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 3$.

$$x(t) = 3e^{-t}\sin(t)\,.$$

2. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução da equação diferencial linear

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t}\,.$$

$$x(t) = e^{-t}\,.$$

3. *(2 valores)* Seja $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma transformação unitária do espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno canónico. A composição A^2 é unitária? A inversa de A é unitária? Justifique.

A^2 e A^{-1} também são unitárias, pois o conjunto das transformaçõs unitárias forma um grupo.

4. *(2 valores)* Considere o espaço euclidiano real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico, e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a inversão relativamente ao plano $x = 0$, definida por $T(x, y, z) = (-x, y, z)$. Existe uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de T? Justifique.

Sim, porque T é um operador simétrico. Os valores próprios são ± 1, e vetores próprios unitários são, por exemplo, $\mathbf{i}$ (com valor próprio -1), $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ (com valor próprio 1).

5. *(2 valores)* Identifique a matriz simétrica da forma quadrática

$$Q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy\,,$$

determine os seus valores próprios e uma matriz ortogonal diagonalizadora.

A forma quadrática é definida pela matriz simétrica

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U^{-1}\,,$$

com valores próprios 0 e 2, onde a matriz ortogonal diagonalizadora é

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

6. *(2 valores)* Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2xy - 3x - y - 1 = 0\,.$$

A equação define a parábola

$$x' = (y')^2\,,$$

nas variáveis $x' = 3x + y + 1$ e $y' = y - x$.

7. *(2 valores)* Calcule a potência C^3 da matriz $C \in \mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$ definida por

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & 0 & -\sin(\pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\pi/2) & 0 & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} .$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} \cos(3\pi/2) & 0 & -\sin(3\pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(3\pi/2) & 0 & \cos(3\pi/2) \end{pmatrix} .$$

8. *(2 valores)* Calcule o grupo a um parâmetro das matrizes $G(t) = e^{tE}$ gerado pela matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

$$e^{tE} = U \begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix} U^{-1} \qquad \text{onde} \qquad U = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

9. *(2 valores)* Esboce o retrato de fase (ou seja, algumas soluções) do sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \ x + y \\ \dot{y} &= \ x - y \end{aligned}$$

e determine a natureza do equilíbrio $(0,0)$.

O equilíbrio é um ponto de sela.

10. *(2 valores)* Determine a solução geral da EDO linear homogénea

$$\dddot{x} + \dot{x} = 0 .$$

$$x(t) = a + b\cos(t) + c\sin(t) \qquad \text{com} \qquad a, b, c, \in \mathbb{R} .$$