

ENGFIS FIS

2013/14

Complementos de Cálculo e de Geometria Analítica EC

Salvatore Cosentino

Departamento de Matemática e Aplicações - Universidade do Minho

Campus de Gualtar - 4710 Braga - PORTUGAL

gab B.4023, tel 253 604086

e-mail scosentino@math.uminho.pt

url <http://w3.math.uminho.pt/~scosentino>

15 de Junho de 2014



This work is licensed under a
[Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 2.5 Portugal License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pt/).

CONTEÚDO	2
----------	---

Conteúdo

1	Equações diferenciais ordinárias	5
2	Integração numérica e simulações	9
3	Teoremas de existência e unicidade	11
4	EDOs simples e autónomas na reta	14
5	Sistemas conservativos	19
6	EDOs lineares de primeira ordem	23
7	EDOs separáveis e homogéneas	26
8	EDOs lineares homogéneas com coeficientes constantes	30
9	Números complexos e oscilações	34
10	Variação dos parâmetros e coeficientes indeterminados	37
11	Oscilador harmónico	40
12	Valores e vetores próprios	44
13	Espaços euclidianos	50
14	Norms and Banach spaces	55
15	Operadores hermíticos e unitários	57
16	Teorema espectral	61
17	Formas quadráticas e cónicas	65
18	Matrizes positivas e teorema de Perron-Frobenius	71
19	Grupos	72
20	Grupos de matrizes	75
21	Exponencial	79
22	Sistemas lineares	81
23	Linearização	84

Notações

Conjuntos. $a \in A$ quer dizer que a é um elemento do conjunto A . $A \subset B$ quer dizer que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B . $A \cap B$ é a interseção dos conjuntos A e B , e $A \cup B$ é a reunião dos conjuntos A e B . $A \times B$ é o produto cartesiano dos conjuntos A e B , o conjunto dos pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

Números. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais. $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ denota o anel dos números inteiros. $\mathbb{Q} := \{p/q \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ denota o corpo dos números racionais. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os corpos dos números reais e complexos, respetivamente.

Funções. Uma função $f : X \rightarrow Y$, com *domínio* o conjunto X e *conjunto de chegada* o conjunto Y , é um subconjunto $R \subset X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe um único $y := f(x) \in Y$, dito *imagem* de x , tal que $(x, y) \in R$. Quando domínio e contradomínio são claros, uma função pode ser denotada apenas por $x \mapsto f(x)$, ou seja, identificada com a “regra” que determina $y = f(x)$ a partir de x . A *imagem* do subconjunto $A \subset X$ é o conjunto $f(A) := \{f(a) \text{ com } a \in A\} \subset Y$. Em particular, a *imagem/contradomínio* da função $f : X \rightarrow Y$ é o conjunto $f(X) := \{f(x) \text{ com } x \in X\} \subset Y$ dos valores da função. O *gráfico* da função $f : X \rightarrow Y$ é o subconjunto

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.q. } y = f(x)\} \subset X \times Y$$

do produto cartesiano do domínio e o conjunto de chegada. A função *identidade* $I_X : X \rightarrow X$ é definida por $I_X(x) = x$, e o seu gráfico é a *diagonal* $\{(x, x) \text{ com } x \in X\} \subset X \times X$.

A *restrição* da função $f : X \rightarrow Y$ ao subconjunto $A \subset X$ é a função $f|_A : A \rightarrow Y$ definida por $f|_A(a) := f(a)$.

A *composição* das funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : f(X) \subset Y \rightarrow Z$ é a função $g \circ f : X \rightarrow Z$ definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, ou seja,

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$$

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *injetiva* se $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$, e portanto a imagem $f(X)$ é uma “cópia” de X . Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *sobrejetiva* se todo $y \in Y$ é imagem $y = f(x)$ de algum $x \in X$, ou seja, se $Y = f(X)$. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *bijetiva/invertível* se é injetiva e sobrejetiva, e portanto admite uma função *inversa* $f^{-1} : Y \rightarrow X$, que verifica $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todos os $x \in X$ e $y \in Y$.

Espaço euclidiano. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço Euclidiano de dimensão n . Fixada a base canónica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são os vetores

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

de coordenadas $x_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \dots, n$. Os pontos e as relativas coordenadas no plano Euclidiano ou no espaço Euclidiano 3-dimensional são também denotados, conforme a tradição, por $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

O *produto interno Euclidiano* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

O produto interno realiza um isomorfismo entre o espaço dual (algébrico) $(\mathbb{R}^n)^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e o próprio $\mathbb{R}^n$: o valor da forma linear $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$ no vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$.

A norma Euclidiana do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. A distância Euclidiana entre os pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo teorema de Pitágoras

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

A bola aberta de centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ se cada seu ponto $\mathbf{a} \in A$ é o centro de uma bola $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Caminhos. Se $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável do “tempo” $t \in I \subset \mathbb{R}$, ou seja, um caminho diferenciável definido num intervalo de tempos $I \subset \mathbb{R}$ com valores no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, então as suas derivadas são denotadas por

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{x}} := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \dddot{\mathbf{x}} := \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}, \quad \dots$$

Em particular, a primeira derivada $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ é dita “velocidade”, e a sua norma $v(t) := \|\mathbf{v}(t)\|$ é dita “velocidade escalar”. A segunda derivada $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$ é dita “aceleração”.

Campos. Um *campo escalar* é uma função real $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* é uma função $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$, cujas coordenadas $F_i(\mathbf{x})$ são k campos escalares.

A derivada do campo diferenciável $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a aplicação linear $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma $\|\mathbf{v}\|$ suficientemente pequena, definida em coordenadas pela matriz Jacobiana $(\text{Jac}\mathbf{F})(\mathbf{x}) := (\partial F_i / \partial x_j(\mathbf{x})) \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$. Em particular, o *diferencial* do campo escalar $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{x} \in X$ é a forma linear $du(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$du(\mathbf{x}) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n$$

(onde dx_k , o diferencial da função coordenada $\mathbf{x} \mapsto x_k$, é a forma linear que envia o vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ em $dx_k \cdot \mathbf{v} := v_k$). A derivada do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na direção do vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicado) no ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, é igual, pela regra da cadeia, a

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}u)(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

O *gradiente* do campo escalar diferenciável $u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vetorial $\nabla u : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$du(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \langle \nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$$

para todo os vetores (tangentes) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (aplicados no ponto $\mathbf{x} \in X$).

1 Equações diferenciais ordinárias

[Ap69], vol 1, chap. 8.

1. **(partícula livre)** A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula livre de massa $m > 0$ num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0, \quad \text{ou seja, se } m \text{ é constante,} \quad m\mathbf{a} = 0, \quad (1)$$

onde $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t)$ denota a *velocidade* e $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{r}}(t)$ denota a *aceleração* da partícula. Em particular, o *momento linear* $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ é uma constante do movimento, de acordo com o princípio de inércia de Galileo¹ ou a primeira lei de Newton². As soluções da equação de Newton (1) da partícula livre, ou seja as trajetórias com aceleração nula, são as retas afins

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{v}t,$$

onde $\mathbf{s} = \mathbf{r}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a posição inicial e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(0) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade (inicial).

- Determine a trajetória de uma partícula livre que passa, no instante $t_0 = 0$, pela posição $\mathbf{r}(0) = (3, 2, 1)$ com velocidade $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2, 3)$.
 - Determine a trajetória de uma partícula livre que passa pela posição $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 2)$ no instante $t_0 = 0$ e pela posição $\mathbf{r}(2) = (3, 4, 5)$ no instante $t_1 = 2$. Calcule a sua “velocidade escalar”, ou seja, a norma $v := \|\mathbf{v}\|$.
2. **(queda livre)** A queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{q} = -mg \quad (2)$$

onde $q(t) \in \mathbb{R}$ denota a altura da partícula no instante t , $m > 0$ é a massa da partícula, e $g \simeq 980 \text{ cm/s}^2$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre. As soluções da equação de Newton (2) da queda livre são as parábolas

$$q(t) = s + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

onde $s = q(0) \in \mathbb{R}$ é a altura inicial e $v_0 = \dot{q}(0) \in \mathbb{R}$ é a velocidade inicial.

- Uma pedra é deixada cair do topo da torre de Pisa, que tem cerca de 56 metros de altura, com velocidade inicial nula. Calcule a altura da pedra após 1 segundo e determine o tempo necessário para a pedra atingir o chão.
 - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a atingir a altura de 20 metros, relativamente ao ponto inicial?
 - Com que velocidade inicial deve uma pedra ser atirada para cima de forma a voltar de novo ao ponto de partida ao fim de 10 segundos?
3. **(o exponencial)** O *exponencial* (real) é a função $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \exp(t) = e^t$, definida pela série de potências

$$e^t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots, \quad (3)$$

que converge uniformemente em cada intervalo limitado da reta real.

¹ “... il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, né erta né china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo” [Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1623.]

² “Lex prima: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare” [Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.]

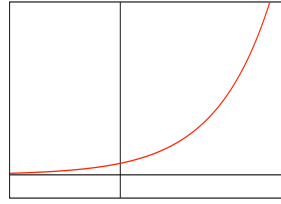


Gráfico do exponencial.

É imediato verificar que $e^0 = 1$, e que $e^{t+s} = e^t e^s$ para todos os $t, s \in \mathbb{R}$ (ou seja, exp define um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+^\times$ dos números reais positivos). Em particular, $e^t \neq 0$ para todos os $t \in \mathbb{R}$, e $e^{-t} = (e^t)^{-1}$.

A derivada do exponencial é o próprio exponencial, ou seja, o exponencial $x(t) = e^t$ satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x} = x. \quad (4)$$

A função $x(t) = x_0 e^t$, com x_0 constante, é a única solução de (4) com condição inicial $x(0) = x_0$ (i.e. tal que o seu valor quando $t = 0$ é x_0). De facto, se $y(t)$ é uma solução de $\dot{y} = y$ com condição inicial $y(0) = x_0$, então o quociente $q(t) = y(t)/e^t$ tem derivada $\dot{q} = (\dot{y} - y)e^t = 0$, e portanto é constante e igual ao seu valor em $t = 0$, que é x_0 .

Em geral, a função $x(t) = e^{\lambda t}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, tem derivada $\dot{x} = \lambda x$. Portanto $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ é a única solução da equação diferencial

$$\dot{x} = \lambda x$$

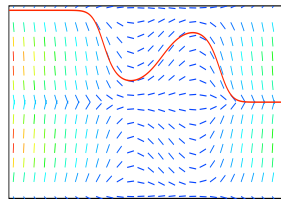
com condição inicial $x(0) = x_0$.

4. (equações diferenciais ordinárias) Uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem (resolúvel para a derivada) é uma lei

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (5)$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ de um sistema com *espaço de fases* $X \subset \mathbb{R}^n$, onde $\mathbf{x}(t) \in X$ denota o *estado* do sistema no instante $t \in T \subset \mathbb{R}$, $\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ denota a derivada do observável/is x em ordem ao tempo t , e $\mathbf{v} : T \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um *campo de direções* dado.

Uma *solução (local)* da EDO (5) é um caminho diferenciável $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ cuja velocidade satisfaz $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$ para cada tempo t num intervalo $I \subset T$, ou seja, uma função $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ cujo gráfico $\Gamma := \{(t, \mathbf{x}(t)) \in I \times X \text{ com } t \in I\}$, dito *curva integral* de (5), é tangente ao campo de direções $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ em cada ponto $(t, \mathbf{x}(t)) \in \Gamma$. Uma solução definida para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é dita *solução global*. Uma solução da EDO (5) com *condição inicial* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in X$, ou solução do “problema de Cauchy”, é uma solução definida numa vizinhança de $t_0 \in T$ cujo gráfico contém o ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$.

Campo de direções e uma solução de $\dot{x} = \sin(x)(1 - t^2)$.

O *teorema de Peano*^{3 4} afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo, então existem sempre soluções locais, i.e. definidas em vizinhanças suficientemente pequenas do tempo inicial,

³G. Peano, Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine, *Atti Accad. Sci. Torino* **21** (1886), 677-685.

⁴G. Peano, Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Mathematische Annalen* **37** (1890) 182-228.

do problema de Cauchy. O *teorema de Picard-Lindelöf*⁵ afirma que, se o campo $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ é contínuo e localmente Lipschitziano⁶ (por exemplo, diferenciável de classe C^1) na variável $\mathbf{x}$, então para cada ponto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T \times X$ passa uma única solução com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

- Esboce o campo de direções das EDOs

$$\dot{x} = t \quad \dot{x} = -x + t \quad \dot{x} = \sin(t)$$

e conjecture sobre o comportamento qualitativo das soluções.

- A função $x(t) = t^3$ é solução da equação diferencial $\dot{x} = 3x^{2/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$? E a função $x(t) = 0$?
- Determine uma EDO de primeira ordem que admita como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

5. (quase todas as EDOs têm ordem um!) A EDO de ordem $n \geq 2$ (resolúvel para a n -ésima derivada)

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

para o observável $y(t) \in \mathbb{R}$ é equivalente à EDO (ou sistema de EDOs) de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$$

para o observável $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$x_1 := y \quad x_2 := \dot{y} \quad x_3 := \ddot{y} \quad \dots \quad x_n := y^{(n-1)},$$

onde o campo de direções é $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) := (x_2, \dots, x_n, F(t, x_1, x_2, \dots, x_n))$.

- Determine os sistemas de ODEs de ordem 1 que traduzem as seguintes ODEs de ordem > 1

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x & \ddot{x} + \dot{x} &= 0 & \ddot{x} + \dot{x} + x &= 0 \\ \ddot{x} &= t - x & \ddot{x} + \dot{x} + x &= 0 & \ddot{x} &= x \end{aligned}$$

- Determine uma EDO de segunda ordem que admita como solução a Gaussiana $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

6. (soluções de Chandrasekhar da equação de Lane-Emden) Um modelo do perfil de equilíbrio hidrostático de uma estrela é a *equação de Lane-Emden*

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^p, \quad (6)$$

onde $\xi \geq 0$ é uma “distância adimensional” do centro da estrela, $\theta(\xi)$ é proporcional à densidade, e p é um parâmetro que depende da equação de estado $P = K\rho^{1+1/p}$ do gás que forma a estrela. O problema físico é determinar a solução com condições iniciais $\theta(0) = 1$ e $d\theta/d\xi(0) = 0$, e o menor zero de $\theta(\xi)$ com $\xi > 0$ é interpretado como sendo o raio da estrela.

- Verifique que

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2, \quad \theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad \text{e} \quad \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}}$$

são soluções da equação de Lane-Emden (6) quando $p = 0, 1$ e 5 , respetivamente⁷.

⁵M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

⁶A função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *Lipschitziana* no domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ se

$$\exists L > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

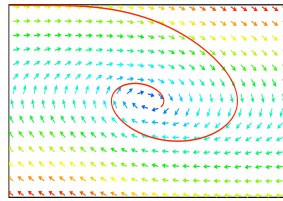
⁷Subrahmanyan Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, 1958.

7. (campos de vetores e EDOs autónomas) Um *campo de vetores* $\mathbf{v} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ no espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$ define uma equação diferencial ordinária *autónoma* (que não depende explicitamente do tempo, como todas as leis fundamentais da física)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

As imagens $\mathbf{x}(I) = \{\mathbf{x}(t) \text{ com } t \in I\} \subset X$ das soluções/trajetórias $\mathbf{x} : I \rightarrow X$ no espaço de fases são ditas *órbitas*, ou *curvas de fases*, do sistema autónomo.

Se $\bar{\mathbf{x}} \in X$ é um ponto singular do campo de vetores, i.e. um ponto onde $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, então o caminho constante $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução da EDO autónoma (7), dita solução de *equilíbrio*, ou *estacionária*.



Campo de vetores e uma curva de fases do pêndulo com atrito,
 $\dot{q} = p, \dot{p} = -\sin(q) - p/2$.

- Esboce o campo de direções e o campo de vetores das EDOs autónomas

$$\dot{x} = -x \quad \dot{x} = x - 1 \quad \dot{x} = x(1 - x)$$

$$\dot{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \quad \dot{x} = (x - 1)^2(x - 2)^2$$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{q} = 2q \\ \dot{p} = -p/2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{q} = q - p \\ \dot{p} = p - q \end{cases}$$

determine as soluções de equilíbrio, e conjecture sobre o comportamento qualitativo das (outras) soluções.

8. (campos completos e fluxos de fases) Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou numa variedade diferenciável). Se por cada ponto $\mathbf{x}_0 \in X$ do espaço de fases passa uma e uma única solução global (i.e. definida para todos os tempos) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X, t \mapsto \varphi(t)$, com condição inicial $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$, então o campo de vetores é dito *completo*. Um campo completo define/gera portanto um *fluxo de fases*, um grupo de transformações $\Phi_t = e^{t\mathbf{v}} : X \rightarrow X$, com $t \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad \text{e} \quad \Phi_0 = \text{id}_X \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

O ponto $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$ é o estado $\varphi(t)$ no tempo t da solução que passa por $\mathbf{x}_0$ no instante 0. Vice-versa, um fluxo de fases diferenciável define um campo de vetores

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{t},$$

dito “gerador infinitesimal” do grupo de transformações. As curvas $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$ são as soluções de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

- Determine os campos de vetores que geram os seguintes fluxos no plano $\mathbb{R}^2$

$$\Phi_t(x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\mu t} y)$$

$$\Phi_t(x, y) = (\cos(t)x - \sin(t)y, \sin(t)x + \cos(t)y)$$

$$\Phi_t(x, y) = (x + ty, y)$$

2 Integração numérica e simulações

1. (método de Euler/diferenças finitas) Considere o problema de simular as soluções da EDO

$$\dot{x} = v(t, x) \quad (8)$$

O método de Euler consiste em utilizar recursivamente a aproximação linear

$$x(t + dt) \simeq x(t) + v(t, x) \cdot dt,$$

dado um “passo” dt suficientemente pequeno. Portanto, a solução $x(t_n)$, nos tempos $t_n = t_0 + n \cdot dt$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é estimada pela sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + v(t_n, x_n) \cdot dt.$$

Numa linguagem como **c++** ou **Java**, o ciclo para obter uma aproximação de $x(t)$, dado $x(t_0) = \mathbf{x}$, é

```
while (time < t)
{
    x += v(time, x) * dt ;
    time += dt ;
}
```

- Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x$$

com condição inicial $x(0) = 1$. Mostre que, se o passo é $dt = \varepsilon$ e o tempo final é $t = n\varepsilon$ com $n \in \mathbb{N}$, então o método de Euler fornece a aproximação

$$x(t) \simeq x_n = (1 + \varepsilon)^n$$

onde $n = t/\varepsilon$ é o número de passos. Deduza que, no limite quando o passo $\varepsilon \rightarrow 0$, as aproximações convergem para a solução $x(t) = e^t$, pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t.$$

- Simule a solução da EDO $\dot{x} = (1 - 2t)x$ com condição inicial $x(0) = 1$. Compare o resultado com o valor exacto $x(t) = e^{t-t^2}$, usando passos diferentes, por exemplo 0.01, 0.001, 0.0001 ...
- Aproxime, usando o método de Euler, a solução do oscilador harmónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

com condição inicial $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Compare o valor de $q(1)$ com o valor exacto $q(1) = \cos(1)$, usando passos diferentes, por exemplo 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 ...

2. (a priori bounds for the finite-difference method) It is important to have some control on the difference between the true solution $x(t)$ of a autonomous ODE

$$\dot{x} = v(x)$$

and the conjecture x_n obtained with the finite-difference method with time-step $\tau > 0$, hence $t = n\tau$ (thus, n is the number of steps). A crude bound is (see [?], page 544)

$$|x(t) - x_n| \leq \frac{1}{2} C \tau (e^{Lt} - 1)$$

where

$$C := \sup_{x \in \Omega} |v(x)| \quad \text{and} \quad L := \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right|$$

(C is the maximal speed, and L is the Lipschitz constant of the velocity field) and $\Omega \subset \mathbb{R}$ is a convex region where we know “a priori” the solution is confined to. Observe that for small times $t \ll 1/L$, the error is $|x(t) - x_n| \approx \frac{1}{2}CL\tau^2n$.

3. (método RK-4) O método de Runge-Kutta (de ordem) 4 para simular a solução de

$$\dot{x} = v(t, x) \quad \text{com condição inicial} \quad x(t_0) = x_0$$

consiste em escolher um “passo” dt , e aproximar $x(t_0 + n \cdot dt)$ com a sucessão (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dt}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

onde $t_n = t_0 + n \cdot dt$, e os coeficientes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são definidos recursivamente por

$$k_1 = v(t_n, x_n) \quad k_2 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_1\right)$$

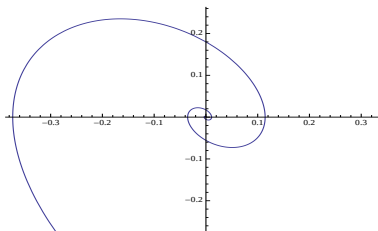
$$k_3 = v\left(t_n + \frac{dt}{2}, x_n + \frac{dt}{2} \cdot k_2\right) \quad k_4 = v(t_n + dt, x_n + dt \cdot k_3)$$

- Implemente um código para simular sistemas de EDOs usando o método RK-4.
4. (simulações com software proprietário) Existem software proprietários que permitem resolver analiticamente, quando possível, ou fazer simulações numéricas de equações diferenciais ordinárias e parciais. Por exemplo, a função `ode45` do [MATLAB](#), ou a função `NDSolve` do [Mathematica](#), calculam soluções aproximadas de EDOs $\dot{x} = v(t, x)$ utilizando variações do método de Runge-Kutta.

- Verifique se os PC do seu Departamento/da sua Universidade têm acesso a um dos software proprietários [MATLAB](#) ou [Mathematica](#).
- Em caso afirmativo, aprenda a usar as funções `ode45` ou `NDSolve`.
Por exemplo, o pêndulo com atrito pode ser simulado, no [Mathematica](#), usando as instruções

```
s = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -Sin[x[t]] - 0.7 y[t],
  x[0] == y[0] == 1}, {x, y}, {t, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 20}]
```

O resultado é



3 Teoremas de existência e unicidade

1. **(iterações de Picard)** Uma função diferenciável $t \mapsto \varphi(t)$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e com valores num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ com condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$ se e só se

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \varphi(s)) ds,$$

ou seja, se $\varphi(t)$ é um ponto fixo do *mapa de Picard* $\mathcal{P} : C(I, X) \rightarrow C(I, X)$, que envia uma função $\phi(t)$ na função

$$(\mathcal{P}\phi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t v(s, \phi(s)) ds.$$

Se a sucessão de funções $\phi, \mathcal{P}\phi, \mathcal{P}^2\phi := \mathcal{P}(\mathcal{P}\phi), \dots, \mathcal{P}^n\phi := \mathcal{P}(\mathcal{P}^{n-1}\phi), \dots$, obtidas iterando o mapa de Picard a partir de uma função inicial ϕ , é convergente (numa topologia apropriada definida num subespaço $\mathcal{C} \subset C(I, X) := \{\phi : I \rightarrow X \text{ contínua}\}$ tal que $\mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ seja contínua), então o limite $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{P}^n\phi)(t)$ é um ponto fixo do mapa de Picard, e portanto uma solução da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ com a condição inicial dada $x(t_0) = x_0$.

- Se o campo de velocidades apenas depende do tempo, ou seja o problema é a EDO simples $\dot{x} = v(t)$, então o mapa de Picard envia toda função inicial $\phi(t)$ na solução

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

com $x(t_0) = x_0$.

- Suppose you want to solve $\dot{x} = x$ with initial condition $x(0) = 1$. You start with the guess $\phi(t) = 1$, and then compute

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = 1 + t \quad (\mathcal{P}^2\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} \quad (\mathcal{P}^3\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \quad \dots$$

Hence the sequence converges (uniformly on bounded intervals) to the Taylor series of the exponential function

$$(\mathcal{P}^n\phi)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} \rightarrow e^t,$$

which is the solution we already knew.

2. **(contrações e teorema de ponto fixo de Banach)** Seja (X, d) um espaço métrico. Uma transformação $f : X \rightarrow X$ é uma *contração* (ou λ -*contração* se é importante lembrar o valor de λ) se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz $\lambda < 1$, ou seja, se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todos $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot d(x, x').$$

As *trajetórias* da transformação $f : X \rightarrow X$ são as sucessões (x_n) definidas recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$, se $n \geq 0$, a partir de uma condição inicial $x_0 \in X$. Os *pontos fixos* de f são os pontos $p \in X$ tais que $f(p) = p$.

O *princípio das contrações* (a.k.a. *teorema de ponto fixo de Banach*) afirma que “todas as trajetórias de uma contração $f : X \rightarrow X$ são sucessões de Cauchy, e a distância entre cada duas trajetórias diminui exponencialmente no tempo. Em particular, se X é completo, então f admite um único ponto fixo p , e a trajetória de todo ponto $x \in X$ converge exponencialmente para o ponto fixo, i.e. $f^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$ ”.

De fato, seja $f : X \rightarrow X$ uma λ -contração. Seja $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, e seja (x_n) a sua trajetória, ou seja, a sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$. Usando k -vezes

a contratividade ve-se que $d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^k$, e portanto que

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \\ &\leq d(x_1, x_0) \cdot \lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Em particular, (x_n) é uma sucessão de Cauchy. O limite $p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, que existe se X é completo, é um ponto fixo de f , porque f é contínua. Se p e p' são pontos fixos, então $d(p, p') = d(f(p), f(p')) \leq \lambda d(p, p')$ com $\lambda < 1$ implica que $d(p, p') = 0$, o que mostra que o ponto fixo é único. Usando a contratividade também ve-se que $d(x_n, p) \leq \lambda^n \cdot d(x_0, p)$, ou seja que a convergência $x_n \rightarrow p$ é exponencial. $\square$

- Utilize o teorema do valor médio para mostrar que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é uma contração sse existe $\lambda < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Mostre que uma transformação $f : X \rightarrow X$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x')$$

para todos $x, x' \in X$ distintos pode não ter pontos fixos, mesmo se o espaço métrico X for completo.

3. **(teorema de Picard-Lindelöf⁸.)** Seja $v(t, x)$ um campo de velocidades contínuo definido num domínio D do espaço de fases estendido $\mathbb{R} \times X$. Se v é localmente Lipschitziana (por exemplo, diferenciável com continuidade) com respeito a segunda variável $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma e uma única solução local da equação diferencial $\dot{x} = v(t, x)$ que passa por cada ponto $(t_0, x_0) \in D$.

Indeed, choose a sufficiently small rectangular neighborhood $I \times B = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_\delta(x_0)$ around (t_0, x_0) , where $B = \overline{B}_\delta(x_0)$ denotes the closed ball with center x_0 and radius δ in X . There follows from continuity of v that there exists K such that $|v(t, x)| \leq K$ for any $(t, x) \in I \times B$. There follows from the local Lipschitz condition for v that there exists M such that $|v(t, x) - v(t, y)| \leq M|x - y|$ for any $t \in I$ and any $x, y \in B$. Now restrict, if needed, the (radius of the) interval I in such a way to get both the inequalities $K\varepsilon \leq \delta$ and $M\varepsilon < 1$. Let $\mathcal{C} = C^0(I, B)$ be the space of continuous functions $t \mapsto \phi(t)$ sending I into B . Equipped with the sup norm $\|\phi - \varphi\|_\infty := \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|$ this is a complete space. One verifies that the Picard's map sends $\mathcal{C}$ into $\mathcal{C}$, since

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s))| ds \leq K\varepsilon \leq \delta.$$

Finally, given two functions $\phi, \varphi \in \mathcal{C}$, one sees that

$$|(\mathcal{P}\phi)(t) - (\mathcal{P}\varphi)(t)| \leq \int_{t_0}^t |v(s, \phi(s)) - v(s, \varphi(s))| ds \leq M\varepsilon \cdot \sup_{t \in I} |\phi(t) - \varphi(t)|,$$

hence $\|\mathcal{P}\phi - \mathcal{P}\varphi\|_\infty < M\varepsilon \cdot \|\phi - \varphi\|_\infty$. Since $\lambda := M\varepsilon < 1$, this proves that the Picard's map is a contraction and the Banach fixed point theorem allows to conclude. $\square$

4. **(lema de Gronwall⁹)** Let $\phi(t)$ and $\psi(t)$ be two non-negative real valued functions defined in the interval $[a, b]$, and assume that

$$\phi(t) \leq K + \int_a^t \psi(s)\phi(s) ds$$

⁸M. E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **114** (1894), 454-457.

⁹T.H. Gronwall, Note on the derivative with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, *Ann. of Math* **20** (1919), 292-296.

for any $a \leq t \leq b$ and some constant $K \geq 0$. Then

$$\phi(t) \leq K e^{\int_a^t \psi(s) ds}.$$

First, assume that $K > 0$. Define $\Phi(t) := K + \int_a^t \psi(s)\phi(s) ds$ and observe that $\Phi(a) = K > 0$, hence $\Phi(t) > 0$ for all $a \leq t \leq b$. The logarithmic derivative is

$$\frac{d}{dt} \log \Phi(t) = \frac{\psi(t)\phi(t)}{\Phi(t)} \leq \psi(t)$$

where we used the hypothesis $\phi(t) \leq \Phi(t)$. Integrating the inequality we get, for $a \leq t \leq b$,

$$\log \Phi(t) \leq \log \Phi(a) + \int_a^t \psi(s) ds.$$

Exponentiation gives the result, since

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq K \cdot e^{\int_a^t \psi(s) ds}.$$

The case $K = 0$ follows taking the limit of the above inequalities along a sequence of $K_n > 0$ decreasing to zero. $\square$

5. (dependence on initial data and parameters)

4 EDOs simples e autónomas na reta

1. **(integração de EDOs simples)** O teorema (fundamental do cálculo) de Newton e Leibniz¹⁰ afirma que a derivada do integral indefinido $F(t) := \int_a^t f(s) ds$ de uma função contínua $f(t)$ existe e é igual a $F'(t) = f(t)$. Portanto, se $v(t)$ é um campo de direções contínuo definido num intervalo de tempos $T \subset \mathbb{R}$, a solução da EDO

$$\dot{x} = v(t) \quad (9)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$ é determinada por meio de uma integração, ou seja,

$$\dot{x} = v(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds$$

(donde a tradição de dizer “integrar” uma equação diferencial em vez de “resolver”). Se $x(t)$ é solução de (9) então também $x(t) + c$ é solução, para todos os $c \in \mathbb{R}$.

- Integre (ou seja, determine a solução geral) as seguintes EDOs, definidas em oportunos intervalos de tempo

$$\dot{x} = 2 - t + 3t^2 + 5t^6 \quad \dot{x} = e^{-t} \quad \dot{x} = \cos(3t) \quad \dot{x} = 1/t$$

- Determine $x(t)$ sabendo que

$$\dot{x} = e^{2t} \quad \text{e} \quad x(0) = 6$$

$$\dot{x} = \sin(t) \quad \text{e} \quad x(\pi) = 0$$

2. **(foguetão)** Se um foguetão de massa $m(t)$ no espaço vazio (ou seja, sem forças gravitacionais!) expulsa combustível a uma velocidade relativa constante $-V$ e a uma taxa constante $\dot{m} = -\alpha$, então a sua trajetória num referencial inercial é modelada pela equação de Newton

$$\frac{d}{dt}(mv) = \alpha(V - v), \quad \text{ou seja,} \quad \dot{m}v + m\dot{v} = \alpha V - \alpha v.$$

- Resolva a EDO $\dot{m} = -\alpha$ para a massa do foguetão, com massa inicial $m(0) = m_0$, e substitua o resultado na equação de Newton, obtendo

$$\dot{v} = \frac{\alpha V}{m_0 - \alpha t}$$

(desde que $0 \leq t < m_0/\alpha$).

- Calcule a trajetória do foguetão com velocidade inicial $v(0) = v_0$ e posição inicial $q(0) = 0$, válida para tempos t inferiores ao tempo necessário para acabar o combustível.
3. **(campos de vetores e EDOs autónomas na reta)** Um campo de vetores $v : X \rightarrow \mathbb{R}$, definido num intervalo $X \subset \mathbb{R}$, define uma EDO autónoma

$$\dot{x} = v(x). \quad (10)$$

Se x_0 é um *ponto singular* de $v(x)$, i.e. um ponto onde $v(x_0) = 0$, então a trajetória constante $x(t) = x_0$ para todos os tempos $t \in \mathbb{R}$ é uma solução *estacionária*, ou *de equilíbrio*, da equação diferencial (10). Se x_0 é um ponto não singular do campo contínuo $v(x)$, i.e. se $v(x_0) \neq 0$, então uma solução local de (10) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser

¹⁰A solução do anagrama

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx

contido numa carta de Isaac Newton dirigida a Gottfried Leibniz em 1677, é “*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*”.

determinanda “separando as variáveis”, ou seja, fazendo $\frac{dx}{v(x)} = dt$ e integrando os dois membros, $\int \frac{dx}{v(x)} = \int dt$. Ou seja,

$$\dot{x} = v(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = x_0 & \text{se } v(x_0) = 0 \\ \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)} = t - t_0 & \text{se } v(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Se o campo $v(x)$ é diferenciável, estas soluções são únicas.

Indeed, assume that the velocity field v is continuous and let $J = (x_-, x_+)$ be the maximal interval containing x_0 where v is different from zero. Define a function $H : \mathbb{R} \times J \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$H(t, x) = t - t_0 - \int_{x_0}^x \frac{dy}{v(y)}.$$

If $t \mapsto \varphi(t)$ is a solution of the Cauchy problem, then computation shows that $\frac{d}{dt}H(t, \varphi(t)) = 0$ for any time t . There follows that H is constant along the solutions of the Cauchy problem. Since $H(t_0, x_0) = 0$, we conclude that the graph of any solution belongs to the level set $\Sigma = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times J \text{ s.t. } H(t, x) = 0\}$. Now observe that H is continuously differentiable and that its differential $dH = dt + dx/v(x)$ is never zero. Indeed, both partial derivatives $\partial H/\partial t$ and $\partial H/\partial x$ are always different from zero. Hence we can apply the implicit function theorem and conclude that the level set Σ is, in some neighborhood $I \times J$ of (t_0, x_0) , the graph of a unique differentiable function $x \mapsto t(x)$, as well as the graph of a unique differentiable function $t \mapsto x(t)$, the inverse of t , which solves the Cauchy problem: just compute the derivative (using the inverse function theorem), $\dot{x}(t) = 1/(\frac{dt}{dx}(x(t))) = v(x)$, and check the initial condition. Observe that the function $t(x) - t_0$ has then the interpretation of the “time needed to go from x_0 to x ”. $\square$

Se $x(t)$ é solução de (10), então também $x(t - c)$ é solução, para todos os $c \in \mathbb{R}$ (a física modelada por uma EDO autónoma é invariante para translações no tempo).

- Considere as seguintes EDOs autónomas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x & \dot{x} &= x - 1 & \dot{x} &= x^2 & \dot{x} &= \sqrt{x} \\ \dot{x} &= (x - 1)(x - 2) & \dot{x} &= e^x & \dot{x} &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

definidas em intervalos convenientes. Encontre, caso existam, as soluções estacionárias. Desenhe os respectivos campos de vetores e conjecture sobre o comportamento das soluções. Integre, quando possível, as equações e calcule soluções. Determine, quando possível, umas fórmulas para a solução do problema de Cauchy com condição inicial $x(0) = x_0$ e esboce a representação gráfica de algumas das soluções encontradas.

4. (decaimento radioativo) A taxa de decaimento de matéria radioativa é proporcional à quantidade de matéria existente, desde que a amostra seja suficientemente grande. Quer isto dizer que a quantidade $N(t)$ de matéria radioativa existente no instante t satisfaz a lei

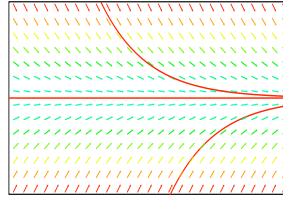
$$\dot{N} = -\beta N, \quad (11)$$

onde o parâmetro $1/\beta > 0$ é a “vida média” dos núcleos¹¹. A solução de (11) com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0 e^{-\beta t},$$

e “decai” para o equilíbrio $\bar{N} = 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

¹¹O tempo de vida de cada núcleo é modelado por uma variável aleatória exponencial X , com lei $\text{Prob}(X \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$ se $t \geq 0$, e 0 se $t < 0$, e média $\mathbf{E}X := \int_0^\infty t d\text{Prob}(X \leq t) = 1/\beta$. A equação diferencial, quando a quantidade N de núcleos é grande, é uma consequência da lei dos grandes números.



- O tempo de *meia-vida* de uma matéria radioativa é o tempo τ necessário até a quantidade de matéria se reduzir a metade da quantidade inicial (ou seja, $N(\tau) = \frac{1}{2}N(0)$). Mostre que o tempo de meia-vida não depende da quantidade inicial $N(0)$, e determine a relação entre o tempo de meia-vida τ e o parâmetro β .
- O radiocarbono ^{14}C tem vida média $1/\beta \simeq 8033$ anos. Mostre como datar um fóssil, assumindo que a proporção de radiocarbono num ser vivente é conhecida¹².
- Se a radiação solar produz radiocarbono na atmosfera terrestre a uma taxa constante $\alpha > 0$, então a quantidade de radiocarbono na atmosfera segue a lei (decaimento com reposição)

$$\dot{N} = -\beta N + \alpha. \quad (12)$$

A solução de equilíbrio de (12) é $\bar{N} = \alpha/\beta$. A diferença $x(t) := N(t) - \bar{N}$ satisfaz a equação diferencial $\dot{x} = -\beta x$ (ou seja, a (11)), e portanto a solução de (12) é

$$N(t) = (N(0) - \bar{N})e^{-\beta t} + \bar{N}.$$

Observe que $N(t) \rightarrow \bar{N}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente da condição inicial $N(0)$ (por exemplo no instante da criação do Universo!).

5. (atrito e tempo de relaxamento) O atrito pode ser modelado como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade. Portanto, a equação de Newton (em dimensão 1) de uma partícula livre de massa m em presença de atrito é

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$$

onde $\gamma > 0$ é o “coeficiente de atrito”.

- Mostre que a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v$$

onde $\tau = m/\gamma > 0$ é um “tempo de relaxamento”. Resolva a equação dada uma velocidade inicial $v(0) = v_0 > 0$. Deduza a trajectória $q(t)$ com posição inicial $q(0) = 0$.

- Mostre que a energia cinética $T := \frac{1}{2}mv^2$ da partícula satisfaz

$$\dot{T} = -\frac{2}{\tau}T,$$

e portanto decresce exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau/2$.

6. (paraquedista) Um modelo da queda de um paraquedista é

$$m\dot{v} = -\alpha v^2 - mg,$$

onde $v(t) := \dot{q}(t)$, $q(t) \in \mathbb{R}$ é a altura no instante t , $m > 0$ é a massa, $g \simeq 9.80 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade próximo da superfície terrestre, e $\alpha > 0$ é uma constante que depende da atmosfera e do paraquedista (um valor realístico é $\alpha \simeq 30 \text{ kg/m}$).

- Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para o valor estacionário $\bar{v} = \sqrt{mg/\alpha}$ quando $t \rightarrow \infty$.

¹²J.R. Arnold and W.F. Libby, Age determinations by Radiocarbon Content: Checks with Samples of Known Ages, *Sciences* **110** (1949), 1127-1151.

7. (circuito/filtro RC) A tensão sobre o capacitor num filtro/circuito RC é modelada pela lei de Kirchoff

$$C\dot{V} + \frac{1}{R}V = 0$$

A solução é

$$V(t) = V(0)e^{-t/\tau}$$

onde o tempo característico do filtro é $\tau = 1/(RC)$.

8. (crescimento exponencial) Um modelo do crescimento de uma população num meio ambiente ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N, \quad (13)$$

onde $N(t)$ é a quantidade de exemplares existentes no instante t , e $\lambda > 0$ (se α é a taxa de natalidade e β é a taxa de mortalidade, então $\lambda = \alpha - \beta$). A solução estacionária é a solução trivial $N(t) = 0$ (população ausente). A solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ é

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

e diverge quanto $t \rightarrow \infty$ (explosão demográfica!).

- Se a população de uma bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?
- Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante $\gamma > 0$, então a população segue a lei

$$\dot{N} = \lambda N - \gamma.$$

Determine o estado estacionário, e discuta o comportamento assintótico das outras soluções (veja a solução do problema do decaimento com reposição).

9. (logística) Um modelo mais realista da dinâmica de uma população num meio ambiente limitado é dado pela *equação logística*¹³

$$\dot{N} = \lambda N (1 - N/M)$$

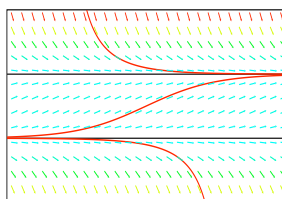
onde a constante positiva $M > 0$ é a população máxima permitida. Observe que $\dot{N} \simeq \lambda N$ se $N \ll M$, e que $\dot{N} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow M$. A “população relativa” $x(t) := N(t)/M$ satisfaz a equação logística “adimensional”

$$\dot{x} = \lambda x (1 - x). \quad (14)$$

As soluções de equilíbrio são $\bar{x} = 0$ (população ausente) e $\bar{x} = 1$ (ou seja, $\bar{N} = M$, população máxima). A solução de (14) com condição inicial $x(0) = x_0 \neq 0, 1$ pode ser determinada separando as variáveis e integrando, e é dada em forma implícita por

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{y(y-1)} = - \int_0^t \lambda ds \quad \Rightarrow \quad \log \left| \frac{x(x_0-1)}{x_0(x-1)} \right| = -\lambda t$$

(a integração usa a identidade $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}$).



¹³Pierre François Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique* **10** (1838), 113-121.

- Verifique que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ é

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}.$$

- Discuta o comportamento assintótico das soluções da equação logística.
10. ([epidemias](#)) Num surto epidémico, a taxa de crescimento do número $I(t)$ de indivíduos infetados, dentro de uma população total constante N , é proporcional ao produto do número de indivíduos infetados e o número $S(t) = N - I(t)$ de indivíduos saudáveis (e portanto susceptíveis de serem infetados), ou seja,

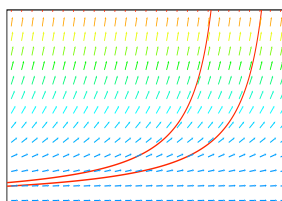
$$\dot{I} = \lambda I(N - I)$$

com $\lambda > 0$.

- Determine a lei de crescimento da população infectada relativa $x(t) := I(t)/N$, e discuta o comportamento assintótico de $x(t)$.
11. ([crescimento super-exponencial](#)) Um outro modelo de dinâmica de uma população em meio ilimitado é

$$\dot{N} = \lambda N^2,$$

ou seja, a taxa de crescimento é proporcional aos pares de indivíduos contidos na população.



- Determine a solução estacionária e a solução com condição inicial $N(0) = N_0 > 0$ arbitrária.
 - Note que as soluções que determinou não estão definidas para toda a recta real: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito!
12. ([fazer modelos](#)) Escreva equações diferenciais que modelem cada uma das seguintes situações. O que pode dizer sobre as soluções?
- A taxa de variação da temperatura de uma chávena de chá é proporcional à diferença entre a temperatura do quarto, suposta constante, e a temperatura do chá.
 - A velocidade vertical de um foguetão é inversamente proporcional à altura atingida.
 - A taxa de crescimento da massa de um cristal cúbico é proporcional à sua superfície.
 - Uma esfera de gelo derrete a uma taxa proporcional à sua superfície.
 - A taxa de crescimento de uma população de marcianos é proporcional ao número de trios que é possível formar com a dada população.

5 Sistemas conservativos

1. (**constantes do movimento**) Seja $\mathbf{v} : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com coordenadas $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))$, um campo de vetores que define a EDO autónoma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

num espaço de fases $X \subset \mathbb{R}^n$. Os *observáveis* são as funções $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Os observáveis que assumem valores $\varphi(\mathbf{x}(t))$ constantes ao longo das soluções $\mathbf{x}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ são ditos *constantes do movimento*, ou *integrais primeiros*. Pela regra da cadeia, o observável diferenciável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma constante do movimento se e só se a *derivada de Lie* de φ ao longo do campo $\mathbf{v}$ é igual a zero, ou seja,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\varphi)(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \cdot v_k(\mathbf{x}) = 0.$$

para todos os pontos $\mathbf{x} \in X$.

As órbitas/curvas de fases estão contidas nas hiperfícies de nível $\Sigma_c := \{\mathbf{x} \in X \text{ t.q. } \varphi(\mathbf{x}) = c\}$ das constantes do movimento. Se o sistema admite k constantes do movimento independentes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ (ou seja, tais que os diferenciais $d\varphi_i(\mathbf{x})$ são linearmente independentes em cada ponto $\mathbf{x}$), então as órbitas do sistema estão contidas nas interseções das k hiperfícies de nível, umas sub-variedades de co-dimensão k . Em particular, a existência de $n - 1$ constantes do movimento independentes permite determinar as órbitas.

- Verifique que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz diagonal com $\det A \neq 0$ (ou seja, todos os valores próprios são $\neq 0$) não admite constantes do movimento não triviais (i.e. constantes).
2. (**sistemas conservativos**) [LL78] A trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula de massa $m > 0$ (suposta constante!) num campo de forças conservativo é modelada pela equação de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

onde a força é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$, e $U(\mathbf{r})$ é um(a energia) *potencial*. Um sistema isolado de N pontos materiais, com posições $\mathbf{r}_\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e massas $m_\alpha > 0$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, é modelado pelas equações de Newton

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

onde a força que atua sobre o α -ésimo ponto material é

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} U := -\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \right),$$

i.e. o oposto do gradiente, com respeito às coordenadas $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, de uma energia potencial $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$. A *energia cinética* é

$$K := \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2$$

onde $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$ é a velocidade do α -ésimo ponto material.

- Verifique que a *energia* (energia cinética + energia potencial)

$$E := K + U = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \|\mathbf{v}_\alpha\|^2 + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

é uma constante do movimento, ou seja, que $\frac{d}{dt}E = 0$ ao longo das trajetórias.

3. **(mecânica lagrangiana e hamiltoniana)** Um sistema mecânico é descrito por um espaço das configurações $M \simeq \mathbb{R}^n$ (ou, em geral, uma variedade diferenciável), com coordenadas locais $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, e uma *lagrangiana* $L : TM \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, uma função $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Por exemplo, o espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_\alpha \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, representa a posição do α -ésimo ponto. A lagrangiana é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N).$$

A *ação* de uma trajetória $[t_0, t_1] \mapsto \mathbf{q}(t) \in M$ entre a posição $\mathbf{q}(t_0)$ e a posição $\mathbf{q}(t_1)$ é o integral

$$S[t \mapsto \mathbf{q}(t)] := \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt.$$

O *princípio de mínima ação* (de Hamilton) afirma que as trajetórias físicas são os pontos críticos da ação. A variação δS , dada uma variações infinitésimas $\mathbf{q}(t) + \delta \mathbf{q}(t)$ da trajetória com $\delta \mathbf{q}(t_0) = \delta \mathbf{q}(t_1) = 0$, é dada por

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) dt \end{aligned}$$

(integrando por partes a segunda soma e usando as condições de fronteira). Portanto, os pontos críticos da ação são as soluções das *equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A forma linear $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N) = p^1 dq_1 + p^2 dq_2 + \dots + p^n dq_n \in T_{\mathbf{q}}^*M$, de coordenadas $p^i := \partial L / \partial \dot{q}_i(\mathbf{q})$, é dito *momento*. O espaço $X = T^*M \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, com coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, é dito *espaço de fases* do sistema mecânico. As equações de Euler-Lagrange são equivalentes às *equações de Hamilton*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde a *hamiltoniana* do sistema, $H : X \rightarrow \mathbb{R}$, é a “transformada de Legendre” da lagrangiana, definida por

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &:= \sup_{\dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}_{\alpha}\|^2 + U(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

- O espaço das configurações de um sistema de N pontos materiais é o espaço dos vetores $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde $\mathbf{r}_{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, representa a posição do α -ésimo ponto. A lagrangiana é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}\|^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N),$$

onde U é a energia potencial da interação. Verifique que as equações de Euler-Lagrange são equivalentes às equações de Newton $m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha}$.

- Mostre que a hamiltoniana é uma constante do movimento, ou seja, que

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = 0$$

ao longo das soluções das equações de Hamilton. Deduza que as órbitas do sistema no espaço de fases X estão contidas nas curvas/superfícies de nível $\{H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\}$ da hamiltoniana.

4. (one-dimensional Newtonian motion in a time independent force field) The one-dimensional motion of a particle of mass m subject to a force $F(x)$ that does not depend on time is described by the Newton equation

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}(x),$$

where the potential $U(x) = -\int F(x)dx$ is some primitive of the force. The total energy

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

(which of course is defined up to an arbitrary additive constant) of the system is a constant of the motion, i.e. is constant along solutions of the Newton equation. In particular, once a value E of the energy is given (depending on the initial conditions), the motion takes place in the region where $U(x) \leq E$, since the kinetic energy $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ is non-negative. Conservation of energy allows to reduce the problem to the first order ODE

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x)),$$

which has the unpleasant feature to be quadratic in the velocity $\dot{x}$. Meanwhile, if we are interested in a one-way trajectory going from some x_0 to x , say with $x > x_0$, we may solve for $\dot{x}$ and find the first order autonomous ODE

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

There follows that the time needed to go from x_0 to x is

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(y))}}.$$

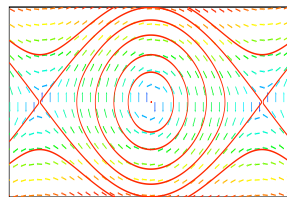
The inverse function of the above $t(x)$ will give the trajectory $x(t)$ with initial position $x(0) = x_0$ and initial positive velocity $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x_0))}$, at least for sufficiently small times t .

5. (pêndulo matemático) A equação de Newton que modela as oscilações de um pêndulo é

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta),$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, $g \simeq 980 \text{ cm s}^{-2}$ é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo e θ é o ângulo que o pêndulo forma com a vertical. No espaço de fases, de coordenadas θ e $p := \dot{\theta}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin(\theta) \end{cases}.$$



- Verifique que a energia

$$H(\theta, p) := \frac{1}{2}p^2 + \omega^2(1 - \cos(\theta))$$

é uma constante do movimento.

- Esboce as curvas de energia constante e o campo de velocidades, e conjecture sobre as trajetórias.
- Show that the motion with energy E is given by

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - \cos(\theta))}}$$

- Define the new variable $x := \sqrt{\frac{2}{E+1}} \sin(\theta/2)$ and the square energy $K := \sqrt{\frac{E+1}{2}}$, and show that the motion reads

$$\dot{x} = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}$$

Deduce that time is given by the so called *Jacobi's elliptic integral of the first kind*

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$$

whose solution (i.e. x as a function of time t) is “defined” as the *elliptic function* $x(t) = \text{sn}(t, K)$ (see [?]).

6. ([oscilador harmónico/lei de Hooke](#)) As pequenas oscilações de um pêndulo à volta da posição de equilíbrio $\theta = 0$, ou as oscilações de uma partícula sujeita à *lei de Hooke*, são modeladas pela equação do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.$$

No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}$$

- Verifique que a energia

$$H(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

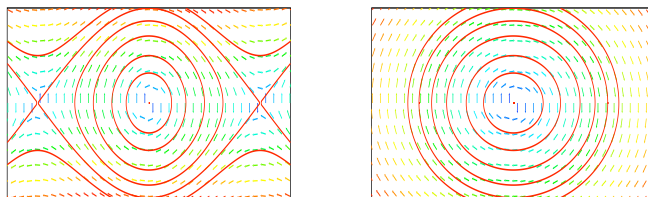
é uma constante do movimento.

- Esboce as curvas de energia constante e o campo de velocidades, e conjecture sobre as trajetórias.
- Fixed a positive energy E , the motion takes place in the interval (x_-, x_+) with $x_{\pm} = \pm\sqrt{2E}/\omega$, and the velocity $\dot{x}$ satisfies the quadratic equation

$$\dot{x}^2 = \omega^2(|x_{\pm}|^2 - x^2).$$

Find the trajectory from x_- to any $x \leq x_+$.

- Compute the time needed to go from x_- to x_+ , and show that it does not depend on the energy E .



Retratos de fases do pêndulo matemático e do oscilador harmónico.

6 EDOS lineares de primeira ordem

1. (EDOs lineares de primeira ordem) Uma EDO linear de primeira ordem é uma lei

$$\dot{x} + p(t)x = q(t) \quad (15)$$

para o observável $x(t)$, onde os “coeficientes” $p(t)$ e $q(t)$ são funções integráveis (por exemplo, contínuas) definidas num intervalo de tempos $T \subset \mathbb{R}$. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções da EDO linear de primeira ordem (15), então a diferença $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução da equação homogênea associada

$$\dot{y} + p(t)y = 0 \quad (16)$$

O espaço das soluções da equação homogênea (16) é um espaço vetorial de dimensão 1, uma reta $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}$ gerada, por exemplo, pela solução

$$y_1(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}$$

que vale $y_1(t_0) = 1$ no instante inicial $t_0 \in T$. Portanto, o espaço das soluções da equação linear (15) é uma reta afim $z + \mathcal{H}$, onde $z(t)$ é uma solução particular de (15).

A solução da EDO linear (15) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ pode ser determinada usando o método da “variação das constantes/dos parâmetros”. O primeiro passo consiste em determinar uma solução não-trivial $y(t)$ da equação homogênea (16) (por exemplo, a solução $y_1(t)$ que tem valor 1 no instante inicial). O segundo passo consiste em substituir a “conjetura” $x(t) = \lambda(t)y(t)$ (o fator λ é o parâmetro que varia!) na equação não-homogênea (15), deduzir a EDO simples $\dot{\lambda}y = q$, e integrar $\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t y^{-1}(s)q(s) ds$, usando a condição inicial $x_0 = \lambda(t_0)y(t_0)$. O resultado é

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(u) du} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(u) du} q(s) ds \right).$$

- Determine a solução geral das EDOs lineares de primeira ordem

$$2\dot{x} - 6x = e^{2t} \quad \dot{x} + 2x = t \quad \dot{x} + x/t^2 = 1/t^2 \quad \dot{x} + tx = t^2$$

definidas em oportunos intervalos da recta real.

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy nos intervalos indicados:

$$2\dot{x} - 3x = e^{2t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 1$$

$$\dot{x} + x = e^{3t} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} - x = t^3 \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 3$$

$$\dot{x} + tx = t \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(0) = 0$$

$$dr/d\theta + r \tan \theta = \cos \theta \quad t \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{com } r(0) = 1$$

2. (queda livre com atrito) Um modelo mais realista da queda livre de uma partícula próxima da superfície terrestre deve ter em conta a resistência do ar. A resistência pode ser modelada como sendo uma força proporcional e contrária à velocidade, assim que a equação de Newton escreve-se

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - mg$$

onde $\gamma > 0$ é um coeficiente de atrito. Portanto, a velocidade $v := \dot{q}$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$m\dot{v} = -\gamma v - mg.$$

- Resolva o problema com condição inicial $v(0) = 0$.

- Mostre que a velocidade $v(t)$ converge para um valor assintótico $\bar{v}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente do seu valor inicial, e determine este valor.
- Utilize a solução encontrada para determinar a trajetória $q(t)$ com condição inicial $q(0) = q_0 > 0$.

3. (circuito RL) A corrente $I(t)$ num circuito RL, de resistência R e indutância L , é determinada pela EDO

$$L\dot{I} + RI = V(t)$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

As soluções da equação homogênea, ou seja, com $V(t) = 0$ (circuito desligado), são proporcionais a $e^{-(R/L)t}$, e portanto decrescem exponencialmente com tempo de relaxamento $\tau = L/R$. Se o circuito é alimentado com tensão constante $V(t) = E$, então a solução estacionária é a $\bar{I} = E/R$ (lei de Ohm). A diferença $x(t) = I(t) - \bar{I}$ é solução de $\dot{x} = -(R/L)x$, e portanto a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = \bar{I} + e^{-\frac{R}{L}t} (I_0 - \bar{I}) ,$$

assintótica à lei de Ohm.

Quando a tensão que alimenta o circuito é variável, então a solução com corrente inicial $I(0) = I_0$ é

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} V(\tau) d\tau \right) .$$

- Resolva a equação para um circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = E \sin(\omega t)$. Verifique que a solução com $I(0) = 0$ é

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde ϕ é uma fase que depende de ω , L e R .

4. (lei do arrefecimento de Newton) Numa primeira aproximação, a temperatura $T(t)$ no instante t de um corpo num meio ambiente cuja temperatura no instante t é $M(t)$ pode ser modelada pela lei do arrefecimento de Newton

$$\dot{T} = -k(T - M(t))$$

onde $k > 0$ é uma constante positiva (que depende do material do corpo). A solução com condição inicial $T(0) = T_0$ é

$$T(t) = e^{-kt} \left(T_0 + k \int_0^t e^{k\tau} M(\tau) d\tau \right) .$$

- Se a temperatura do meio ambiente é mantida constante $M(t) = M$, então a diferença $x(t) := T(t) - M$ satisfaz a EDO

$$\dot{x} = -kx .$$

Determine $T(t)$ e diga o que acontece quando $t \rightarrow \infty$

- Determine a solução assintótica (ou seja, quando t é grande) quando a temperatura do meio ambiente é uma função periódica $M(t) = M \sin(\omega t)$.
- Uma chávena de café, com temperatura inicial de 100°C , é colocada numa sala cuja temperatura é de 20°C . Sabendo que o café atinge uma temperatura de 60°C em 10 minutos, determine a constante k do café e o tempo necessário para o café atingir a temperatura de 40°C .

5. (equações de Bernoulli) Uma EDO da forma

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^n,$$

onde p e q são funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $n \neq 0, 1$ (caso contrário trata-se de uma normal equação linear da primeira ordem), é dita *equação de Bernoulli*.

- Verifique que $x(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio da equação de Bernoulli.
- Seja $k = 1 - n$. Mostre que $x(t)$ é uma solução positiva da equação de Bernoulli com condição inicial $x(t_0) = x_0 > 0$ se e só se a função $y(t) = x(t)^k$ é uma solução da EDO linear

$$\dot{y} + k p(t) y = k q(t)$$

com condição inicial $y(t_0) = (x_0)^{1/k}$.

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy para equações de Bernoulli:

$$\dot{x} + x = x^2 (\cos t - \sin t) \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{com } x(1) = 2$$

$$t\dot{x} + e^{t^2}x = x^2 \log t \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(3) = 0$$

$$\dot{x} - x/t = t\sqrt{x} \quad t \in (0, \infty) \quad \text{com } x(1) = 1$$

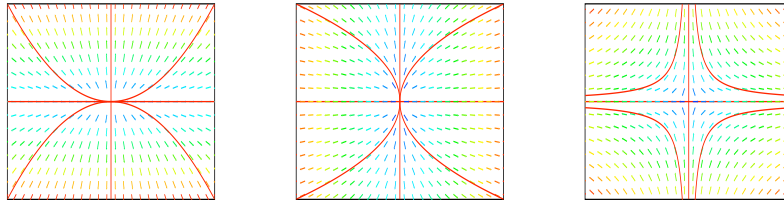
7 EDOs separáveis e homogêneas

1. (**produto direto de EDOs**) O *produto directo* das EDOs autónomas $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{y} = w(y)$ é o sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ \dot{y} = w(y) \end{cases}$$

As soluções do sistema são os caminhos $t \mapsto (x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são as soluções das EDOs autónomas $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$, respetivamente. A curva de fases que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, onde $v(x_0) \neq 0$ (ou onde $w(y_0) \neq 0$), é (localmente) o gráfico de uma função $x \mapsto y(x)$ (ou $y \mapsto x(y)$) que satisfaz a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)} \quad \left(\text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{v(x)}{w(y)} \right).$$



- Determine as soluções e as curvas de fases do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

quando $\lambda = 0, \pm 1, 2, \dots$ e quando $\lambda = 1/2, 1/3, \dots$

2. (**EDOs separáveis**) A solução da uma EDO *separável*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)}.$$

com condição inicial $y(x_0) = y_0$ tal que $v(x_0) \neq 0$ e $w(y_0) \neq 0$, é dada em forma implícita por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w(y)}{v(x)}, \quad y(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{w(\eta)}$$

- Resolva as seguintes EDOs separáveis definidas em oportunos domínios.

$$\frac{dy}{dx} = -x/y \quad \frac{dy}{dx} = x/y \quad \frac{dy}{dx} = kx^\alpha y^\beta \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}$$

$$\dot{x} = tx^3 \quad t\dot{x} + t = t^2 \quad \dot{x} = t^3/x^2 \quad x\dot{x} = e^{x+3t^2}t \quad \dot{x} = e^{t-x}$$

$$\dot{x} = \frac{t-1}{x^2} \quad \frac{x-1}{t}\dot{x} + \frac{x-x^2}{t^2} = 0 \quad (t^2+1)\dot{x} = 2tx \quad \dot{x} = t(x^2-x)$$

- Resolva os seguintes problemas com condições iniciais

3. (**allometric laws**) If two organs/tissues/components of a living body/organism/community grow with different (but both constant!) relative growth rates α and β , say

$$\dot{x} = \alpha x \quad \text{and} \quad \dot{y} = \beta y$$

(the independent variable t may be time, or a linear dimension, or something else), then they satisfy the relation

$$\frac{1}{\beta y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha x} \frac{dx}{dt}$$

Eliminating “ dt ”, we get the linear/separable/homogeneous ODE

$$\frac{dy}{dx} = (\beta/\alpha) \frac{y}{x},$$

whose solution is the *allometric law* ^{14 15}

$$y = c \cdot x^\gamma \quad \text{or, equivalently,} \quad \log y = \gamma \cdot \log x + \log c,$$

with “scaling exponent” $\gamma = \beta/\alpha$, and some constant $c = x_0/y_0$ related to the initial conditions $x(t_0) = x_0$ and $y(t_0) = y_0$.

- A famous example is *Kleiber’s law* ¹⁶ (*mouse-to-elephant curve*)

$$\text{BMR} = c \cdot M^{3/4}$$

which relates the basal metabolic rate BMR to the mass M of an animal.

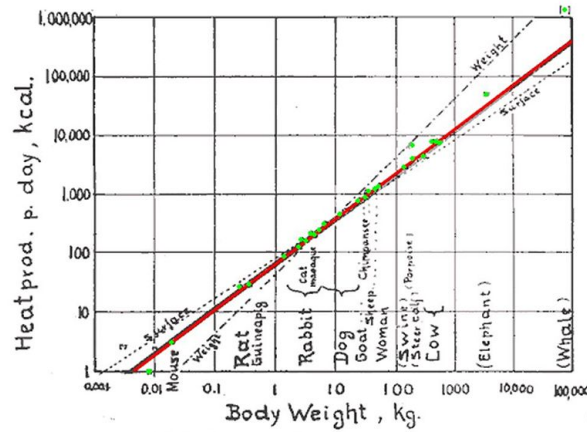


Fig. 1. Log. metabol. rate/log body weight

Original graph of body size versus metabolic rate hand-drawn by Max Kleiber (source [Wikipedia](#))

- The heart rate T and the mass M of an animal are related by the allometric law

$$T = c \cdot M^{1/4}$$

4. (**homotetias e funções homogêneas**) As *homotetias (positivas)* do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ são as transformações $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$, com $\lambda \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$. Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou um campo vetorial $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$), definida num domínio “homogêneo” (i.e. invariante para homotetias) $D \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, é dita *homogênea de grau k* se

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \forall \mathbf{x} \in D,$$

e é dita *homogênea* (de grau 0) se é invariante para homotetias, ou seja, se

$$f(\lambda \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

O *teorema de Euler* afirma que uma função diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau k se e só se $\langle \mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = k f(\mathbf{x})$ para todos os pontos $\mathbf{x} \in D$.

- Prove o teorema de Euler (calcule as derivadas em ordem a λ dos dois termos $f(\lambda \mathbf{x})$ e $\lambda^k f(\mathbf{x})$ quando $\lambda = 1$).

¹⁴W. D’Arcy Thompson, *On Growth and Form*, 1917, 2nd ed. 1942 [Cambridge University Press, 1992].

¹⁵Julian S. Huxley, *Problems of Relative Growth* (2nd ed.), Dover, 1972.

¹⁶M. Kleiber, Body size and metabolism, *Hilgardia* **6** (1932), 315-351. M. Kleiber, Body size and metabolic rate, *Physiological Reviews* **27** (1947), 511-541.

- Determine os polinômios homogêneos de grau 1, de grau 2 e de grau 3 no plano $\mathbb{R}^2$.
- Mostre que as únicas funções homogêneas e contínuas definida em todo o espaço $\mathbb{R}^n$ são as constantes (observe que as funções homogêneas são constantes ao longo das semi-retas que saem da origem, logo, se a origem está no domínio da função ...).
- Determine o grau de homogeneidade dos campos de forças elástico e gravitacional/elétrico, definidos por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

respetivamente (o segundo definido para $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$).

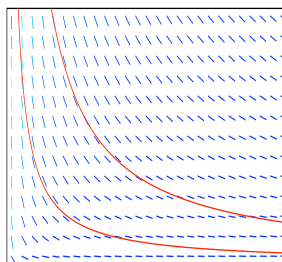
- Diga se as seguintes funções $f(x, y)$, definidas em oportunos domínios do plano, são homogêneas:

$$x/y \quad e^{x-y} \quad \frac{x^2 - xy}{xy + 3y^2} \quad \sin(y) \cos(x)$$

5. (EDOs homogêneas) Uma EDO *homogênea* é uma equação diferencial

$$\dot{x} = v(t, x)$$

definida, num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ do plano de coordenadas (t, x) , por um campo de direções homogêneo, ou seja, tal que $v(\lambda t, \lambda x) = v(t, x)$ para todos os $\lambda > 0$. As homotetias $(t, x) \mapsto (\lambda t, \lambda x)$, com $\lambda \in \mathbb{R}_+$, enviam curvas integrais de uma EDO homogênea em curvas integrais.



A mudança de variável $y(t) := x(t)/t$, num domínio onde $t > 0$ ou $t < 0$, transforma uma EDO homogênea $\dot{x} = v(t, x)$ numa EDO separável $y + t\dot{y} = v(1, y)$. Ou seja,

$$\boxed{\dot{x} = v(1, x/t) \quad \Rightarrow \quad y + t\dot{y} = v(1, y) \quad \text{se } y = x/t}$$

- Seja $\dot{x} = v(t, x)$ uma EDO homogênea. Mostre que, se $\varphi(t)$ é uma solução e $\lambda > 0$, então também $\phi(t) := \lambda \cdot \varphi(t/\lambda)$ é uma solução.
- Seja $\varphi(t)$ uma solução da EDO homogênea $\dot{x} = v(t, x)$ tal que $\varphi(1) = 5$ e $\varphi(2) = 7$. Se $\phi(t)$ é uma outra solução tal que $\phi(3) = 15$, quanto vale $\phi(6)$?
- Resolva as seguintes EDOs homogêneas

$$\dot{x} = -t/x \quad \dot{x} = \frac{x-t}{x+t} \quad \dot{x} = 1 + x/t$$

$$\dot{x} = x/t \quad \dot{x} = 2\frac{t}{x}e^{x/t} + \frac{x}{t} \quad \frac{dy}{dx} = y/x + \sin(y/x),$$

definidas em oportunos domínios, e esboce a representação gráfica de algumas das soluções.

6. (EDOs quase-homogêneas) [Ar89] pag. 16.

7. (equação de Newton com forças homogêneas) [Ar89, LL78] Considere a equação de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

para a trajetória $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ de uma partícula sujeita a uma força homogênea de grau k , ou seja tal que $\mathbf{F}(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^k \mathbf{F}(\mathbf{r})$ para todos os $\lambda > 0$ e todos os pontos $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. As “quase-homotetias” $(t, \mathbf{r}) \mapsto (\lambda^\alpha t, \lambda^\beta \mathbf{r})$, com $\lambda > 0$, enviam curvas integrais em curvas integrais se os “pesos” α e β satisfazem a relação $\beta(1 - k) = 2\alpha$. Em particular, uma órbita fechada de dimensão linear L e período de revolução T é enviada numa órbita fechada de dimensão linear $L' = \lambda^\beta L$ e período de revolução $T' = \lambda^\alpha T$, e portanto o quociente T^β / L^α é constante.

- Considere uma força constante (e.g. a gravidade próximo da superfície da terra)

$$F(x) \propto 1,$$

e determine a relação entre espaço percorrido e tempo necessário.

- Considere a força elástica (e.g. lei de Hooke, oscilador harmónico)

$$F(x) \propto -x,$$

e deduza que os períodos das órbitas fechadas não dependem das amplitudes das oscilações.

- Considere uma força elástica “fraca”

$$F(x) \propto -x^3,$$

Determine o período das pequenas oscilações em função da amplitude.

- Considere a força gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \propto -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

e deduza a *terceira lei de Kepler*¹⁷: “os quadrados dos períodos de revolução T são proporcionais aos cubos das distâncias médias L do Sol aos planetas, ou seja, $T^2 = kL^3$, onde k é uma constante”.

¹⁷Johannes Kepler, *Harmonices mundi*, 1619.

8 EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes

1. (equação de Newton num potencial quadrático) Considere a equação de Newton

$$\ddot{q} = -\beta q$$

que determina a trajetória $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}$ de uma partícula (de massa $m = 1$) num potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$.

- Verifique que $q(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio.
- Verifique que, se $\beta = 0$, as soluções da equação de Newton (da partícula livre)

$$\ddot{q} = 0$$

são $q(t) = a + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

- Verifique que, se $\beta = -k^2 < 0$, as soluções da equação de Newton

$$\ddot{q} = k^2 q$$

são $q(t) = ae^{kt} + be^{-kt}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

- Verifique que, se $\beta = \omega^2 > 0$, as soluções da equação (do oscilador harmónico)

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

são $q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

2. (partícula num potencial quadrático com atrito) A função $q(t) := e^{-\alpha t} y(t)$ é uma solução da equação de Newton de uma partícula num potencial quadrático $U(q) = \frac{1}{2}\beta q^2$ com uma força de atrito $-2\alpha q$ (se $\alpha > 0$),

$$\ddot{q} = -2\alpha \dot{q} - \beta q, \quad (17)$$

se $y(t)$ é uma solução da equação de Newton

$$\ddot{y} = -(\beta - \alpha^2) y$$

de uma partícula num potencial quadrático $U(y) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha^2)y^2$. A solução de (17) é uma combinação linear

$$x(t) = c_+ e^{-\alpha t} \varphi_+(t) + c_- e^{-\alpha t} \varphi_-(t),$$

once c_+ e c_- são coeficientes, e φ_+ e φ_- é um par de *soluções fundamentais* (i.e. linearmente independentes) da EDO $\ddot{y} = \delta y$ com $\delta = \alpha^2 - \beta$, por exemplo:

$$\begin{array}{lll} \varphi_+(t) = 1 & \text{e} & \varphi_-(t) = t, & \text{se } \delta = 0, \\ \varphi_+(t) = e^{kt} & \text{e} & \varphi_-(t) = e^{-kt}, & \text{se } \delta = k^2 > 0, \\ \varphi_+(t) = \cos(\omega t) & \text{e} & \varphi_-(t) = \sin(\omega t), & \text{se } \delta = -\omega^2 < 0. \end{array}$$

- Verifique a afirmação acima (calcule $\dot{q}$ e $\ddot{q}$ em quanto funções das derivadas de $y \dots$).
 - Existem soluções de equilíbrio da equação de Newton (17) ?
 - Mostre, nos três casos, que φ_+ e φ_- são linearmente independentes.
3. (existence and uniqueness theorem for homogeneous second order linear ODEs with constant coefficients) A generic second order linear homogeneous ODE

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \beta x = 0 \quad (18)$$

has at least two linearly independent solutions, as shown by the preceding examples. Here we show that the space of solutions of (18) is indeed a 2-dimensional linear space $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}^2$, or, equivalently, that the solution of (18) with any given initial conditions $x(0) = x_0$ and $\dot{x}(0) = v_0$ is unique.

Proof. It is sufficient to prove the result for the linear ODE $\ddot{x} = \delta x$. Also, by linearity, it is sufficient to show that the only solution of $\ddot{x} = \delta x$ with zero initial data $x(0) = 0$ and $\dot{x}(0) = 0$ is the trivial solution $x(t) = 0$.

The starting observation is that solutions of $\ddot{x} = \delta x$ are analytic functions (their Taylor series converges to the function). The way you prove it is an elementary instance of a strategy, called “bootstrap”, which works for eigenfunctions of a Laplacian or more generally of any elliptic differential operator in any dimension. The equation $\ddot{x} = \delta x$ implies that x admits derivatives all orders, and we can actually compute them. Indeed, $\ddot{x}' = (\ddot{x})' = \delta \dot{x}$, $x^{(4)} = (\ddot{x}')' = (\delta \dot{x})' = \delta \ddot{x} = \delta^2 x$, $\dots$, and by induction you see that

$$x^{(2n)} = \delta^n x \quad \text{and} \quad x^{(2n+1)} = \delta^n \dot{x}.$$

Since x and $\dot{x}$ are bounded on a bounded interval (because they are continuous), the derivatives of x grow at most polynomially, say $x^{(k)}(t) \leq CK^k$ for some constants C and K and any t in a fixed bounded interval. Now you use the fact that a polynomial bound for the derivatives of a function in some bounded interval implies (by the Taylor formula with error, or, if you want, because the series is bounded by the Taylor series of an exponential) absolute convergence of the Taylor series.

Now, assume that $x(t)$ is a solution of $\ddot{x} = \delta x$ with initial conditions $x(0) = 0$ and $\dot{x}(0) = 0$. The above formulas show that all the derivatives of x at the origin are zero. There follows from analyticity that x is identically equal to zero on any bounded interval around the origin. $\square$

4. (EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes, polinômio característico) O uso dos exponenciais complexos permite uma leitura unificada dos três casos tratados acima. A conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução (complexa) da EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0 \quad (19)$$

se z é igual a uma das raízes $z_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ do polinômio característico

$$P(z) := z^2 + 2\alpha z + \beta.$$

Duas soluções (reais) independentes de (19) podem ser obtidas calculando a parte real e a parte imaginária das soluções complexas, e são

$e^{(-\alpha+k)t}$	e	$e^{(-\alpha-k)t}$	se $z_{\pm} = -\alpha \pm k$, com $k > 0$ (raízes reais e distintas)
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	e	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	se $z_{\pm} = -\alpha \pm i\omega$, com $\omega > 0$ (raízes complexas conjugadas)
$e^{-\alpha t}$	e	$te^{-\alpha t}$	se $z_{\pm} = -\alpha$ (raiz dupla)

O espaço das soluções (reais) da EDO homogênea (19) é um espaço linear $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}^2$, de dimensão 2. Se $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ formam uma base de $\mathcal{H}$, então a “solução geral” é $x(t) = c_+ \phi_+(t) + c_- \phi_-(t)$, onde $c_{\pm} \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

- Verifique que o espaço das soluções da EDO homogênea (19) é um espaço linear, ou seja, que uma combinação linear $c_+ x_+(t) + c_- x_-(t)$, com $c_{\pm} \in \mathbb{R}$, de soluções $x_{\pm}(t)$ é uma solução.
- Determine a solução geral das seguintes EDOs homogêneas:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2x = 0 & \quad \ddot{x} + \pi^2 x = 0 & \quad 3\ddot{x} + \dot{x} = 0 & \quad \ddot{x} - \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0 & \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 & \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 & \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0. \end{aligned}$$

- Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 2 \\ \ddot{x} + \dot{x} = 0 & \quad \text{com } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = 0 \\ \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 2 \text{ e } \dot{x}(0) = -1 \\ \ddot{x} - 17\dot{x} + 13x = 0 & \quad \text{com } x(3) = 0 \text{ e } \dot{x}(3) = 0 \\ \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0 & \quad \text{com } x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 9 \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0 & \quad \text{com } x(1) = 2 \text{ e } \dot{x}(1) = 1. \end{aligned}$$

- Determine umas equações diferenciais de segunda ordem que admitem como soluções os seguintes pares de funções:

$$\begin{aligned} e^{2t} \quad \text{e} \quad e^{-2t}, & \quad e^{-t} \sin(2\pi t) \quad \text{e} \quad e^{-t} \cos(2\pi t), & \quad \sinh(t) \quad \text{e} \quad \cosh(t), \\ e^{-3t} \quad \text{e} \quad te^{-3t}, & \quad \sin(2t+1) \quad \text{e} \quad \cos(2t+2), & \quad 3 \quad \text{e} \quad 5t. \end{aligned}$$

5. (**independência linear e Wronskiano**) O (*determinante*) *Wronskiano* entre as funções $f(t)$ and $g(t)$, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, é a função

$$W_{f,g}(t) := \det \begin{pmatrix} f(t) & \dot{f}(t) \\ g(t) & \dot{g}(t) \end{pmatrix} = f(t)\dot{g}(t) - \dot{f}(t)g(t)$$

Se $W_{f,g}(t) = 0$ para todos os tempos $t \in I$ então o quociente g/f (ou f/g) é constante no intervalo I . Consequentemente, se $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes, então o Wronskiano $W_{f,g}(t) \neq 0$ em algum ponto $t \in I$.

Se ϕ_+ e ϕ_- são duas soluções da mesma EDO linear $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e $t_0 \in I$, então o Wronskiano satisfaz a *identidade de Abel*

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = W_{\phi_+, \phi_-}(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

Portanto, ϕ_+ e ϕ_- são linearmente independente se e só se $W_{\phi_+, \phi_-}(t) \neq 0$ num ponto (e portanto em todos os pontos) $t \in I$.

- Sejam ϕ_+ e ϕ_- duas soluções da EDO linear $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$. Calcule a derivada de $W_{\phi_+, \phi_-}(t)$, e deduza a identidade de Abel.
- Calcule

$$W_{e^{-\alpha t}, te^{-\alpha t}}, \quad W_{e^{-\alpha t} e^{kt}, e^{-\alpha t} e^{-kt}} \quad \text{and} \quad W_{e^{-\alpha t} \sin(\omega t), e^{-\alpha t} \cos(\omega t)}.$$

6. (**equação de Schrödinger estacionária**) Considere a *equação de Schrödinger estacionária*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, $h \simeq 6.262... \times 10^{-34}$ J.s.

- Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).

7. (**EDOs equidimensionais**) Uma equação diferencial da forma

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

é dita *equidimensional* (é invariante pela transformação $x \mapsto \lambda x$ com $\lambda > 0$).

- Mostre que a substituição $x = e^t$ transforma a equação equidimensional para $y(x)$ numa equação com coeficientes constantes para $z(t) := y(x(t))$.
- Resolva a equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0,$$

na semirecta $x > 0$.

8. (**EDOs de Riccati**) Uma equação diferencial da forma

$$\ddot{y} + p(t)y^2 + q(t)y + r(t) = 0$$

é dita *equação de Riccati*.

- Mostre que a variável $x(t)$, solução da EDO simples

$$\dot{x} = -p(t)y(t),$$

satisfaz a EDO linear

$$\ddot{x} + \left(q(t) + \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \right) \dot{x} + p(t)r(t)x = 0.$$

9 Números complexos e oscilações

1. (o plano dos números complexos) O corpo dos *números complexos* é o conjunto $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ dos pontos/números $z = x + iy \approx (x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, munido das operações “soma”, definida por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

(que corresponde à soma dos vetores (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano $\mathbb{R}^2$), e “multiplicação”, definida por

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Em particular, se $i := 0 + i \cdot 1 \in \mathbb{C}$, então $i \cdot i = -1$, ou seja, $i = \sqrt{-1}$. O *conjugado* de $z = x + iy$ é $\bar{z} := x - iy$. O *módulo* de $z = x + iy$ é

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Os números reais

$$x = \Re(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \Im(z) := \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

são ditos *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z = x + iy$. A *representação polar* do número complexo $z = x + iy \approx (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$z = \rho e^{i\theta}$$

onde $\rho = |z| \geq 0$ é o módulo de z , $\theta \in \mathbb{R}$ é “um” *argumento* de z , ou seja, um “ângulo” $\arg(z) = \theta + 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$, tal que $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$, e o número complexo $e^{i\theta}$ é definido pela *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

- Verifique que o inverso multiplicativo de um número complexo $z \neq 0 := 0 + i0$ é

$$1/z = \bar{z}/|z|^2$$

- Represente na forma $x + iy$ os seguintes números complexos

$$1/i \quad \frac{2-i}{1+i} \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{i}{2+i} \quad (1-i3)^2$$

- Resolva as seguintes equações

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

- Verifique que, se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, então

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{se } \rho_2 \neq 0).$$

Deduzza que a multiplicação por $z = \rho e^{i\theta}$, no plano $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, corresponde a uma dilatação/contração por ρ e uma rotação de um ângulo θ . Em particular, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$ é a “raiz quadrada” da rotação $z \mapsto e^{i\pi} z = -z$ de um ângulo π , portanto uma rotação de um ângulo $\pi/2$.

- Use a fórmula de Euler para provar as fórmulas

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) \mp \sin(\theta) \sin(\phi)$$

e

$$\sin(\theta \pm \phi) = \cos(\theta) \sin(\phi) \pm \sin(\theta) \cos(\phi).$$

- Use a representação polar e a fórmula de Euler para provar a *fórmula de de Moivre*

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Deduzas as fórmulas

$$\cos(n\theta) = \dots \quad \text{e} \quad \sin(n\theta) = \dots$$

- Verifique que o conjugado de $z = \rho e^{i\theta}$ é $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.

- Calcule

$$\sqrt{i} \quad \sqrt{-i} \quad \sqrt{1+i}$$

- Resolva as equações $z^3 = 1$, $z^5 = 1$ e $z^3 = 81$.
- Mostre que se ω é uma raiz n -ésima não trivial da unidade (ou seja, $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$) então

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

(multiplique por $1 - \omega \dots$).

2. (**exponencial complexo e funções trigonométricas**) A função exponencial $\exp(z) := e^z$, é a função inteira $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida pela série de potências

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

- Verifique a fórmula de adição $e^{z+w} = e^z e^w$, e deduza que $e^z \neq 0$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.
- Verifique que e^z é igual à sua derivada, ou seja, $\exp'(z) = \exp(z)$.
- Mostre que, se $\theta \in \mathbb{R}$, então o conjugado de $e^{i\theta}$ é $e^{-i\theta}$, e portanto $|e^{i\theta}| = 1$. Defina as funções reais de variável real “cos” e “sin” usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, ou seja,

$$\cos(\theta) := \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) := \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

e deduza as suas expansões em série de potências em torno de 0.

- Deduza que, se $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha+i\theta} = e^{\alpha} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

3. (**oscilações complexas e sobreposições**) A função $t \mapsto z(t) = e^{i\omega t}$ descreve um ponto que percorre a circunferência unitária $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$ do plano complexo no sentido anti-horário com “frequência angular” $\omega > 0$, i.e. uma rotação cada período $T = 2\pi/\omega$, e portanto frequência $\nu = \omega/(2\pi)$ (medida em Hertz, rotações por segundo).

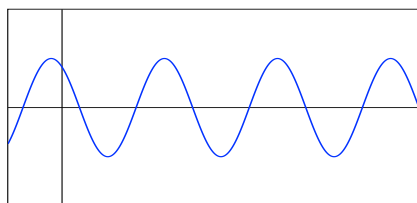
- Verifique que a função $z(t) = e^{i\omega t}$ satisfaz as equações diferenciais lineares

$$\dot{z} = i\omega z \quad \text{e} \quad \ddot{z} = -\omega^2 z.$$

- Deduza que a parte real (e a parte imaginária) de $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$, com $z(0) = \rho e^{i\varphi}$,

$$q(t) := \Re[z(t)] = \rho \cos(\omega t + \varphi)$$

é uma solução (real) do oscilador harmônico $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Identifique as condições iniciais $q(0)$ e $\dot{q}(0)$ em quanto funções de $z(0) = \rho e^{i\varphi}$.



Oscilação $q(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi)$.

- Observe que a sobreposição das oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$,

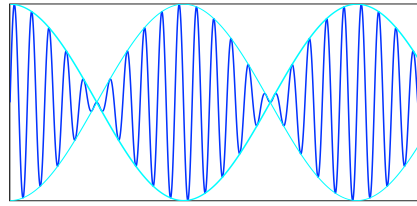
$$z(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t},$$

é máxima quando $\omega_1 t = \omega_2 t$ (módulo 2π), e mínima quando $\omega_1 t - \omega_2 t = \pi$ (módulo 2π).

- Observe que, se $\omega_1 = \omega + \varepsilon$ e $\omega_2 = \omega - \varepsilon$, a sobreposição das duas oscilações $z_1(t) = e^{i\omega_1 t}$ e $z_2(t) = e^{i\omega_2 t}$ pode ser representada como

$$z(t) = e^{i\omega t} (e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t}) = 2e^{i\omega t} \cos(\varepsilon t)$$

Em particular, se $|\varepsilon| \ll |\omega|$, então a sobreposição consiste numa modulação lenta (com período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) da frequência fundamental $\omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$.



Sobreposição $z(t) = \sin(0.95 \cdot t) + \sin(1.05 \cdot t)$.

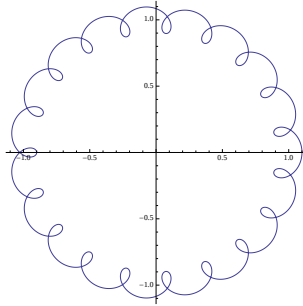
4. (**epiciclos e deferentes**) Números e circunferências (os objectos matemáticos mais elementares e as figuras geométricas mais perfeitas!) podem descrever os movimentos das estrelas fixas e errantes com uma precisão espectacular. A ideia de Aristóteles e Platão, de que “todos os movimentos são combinações de movimentos circulares uniformes” está na base dos calendários calculados por Iparco e Ptolomeu, e transmitidos até nós pelos árabes no *Almagesto*.

Nestas cosmologias, cada corpo celeste descreve uma circunferência, dita *epiciclo*, à volta de uma circunferência, que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência, ... , que por sua vez descreve uma circunferência à volta de uma circunferência inicial, dita *deferente*, centrada na Terra. Até o sistema de Nicholas Copernicus, apesar do escândalo que gerou, funciona assim: a única novidade, que também não é uma novidade porque os próprios gregos consideraram esta possibilidade!, é que o centro do deferente é posto no Sol, ideia que pareceu simplificar muito o modelo.

Indeed, any quase-periodic¹⁸ (planar) motion may be approximated with arbitrary precision by a “superposition”

$$z(t) = a_0 e^{i\omega_0 t} + a_1 e^{i\omega_1 t} + \dots + a_n e^{i\omega_n t}$$

of a finite number of uniform circular motions. This is the content of modern Fourier analysis.



¹⁸G. Gallavotti, Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, *Rendiconti Lincei - Matematica e Applicazioni*, Series 9, Band 12, No. 2 (2001), 125-152 (<http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9907004>).

10 Variação dos parâmetros e coeficientes indeterminados

1. (EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes) Uma EDO de segunda ordem linear com coeficientes constantes é uma lei

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t) \quad (20)$$

para a trajetória $x(t)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são os coeficientes constantes, e $f(t)$ é uma função dada (uma força externa dependente do tempo) definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções de (20), então a diferença $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ é uma solução da EDO homogênea associada

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0, \quad (21)$$

obtida de (20) ao fazer $f(t) = 0$ (i.e. força nula). Portanto, a solução geral de (20) pode ser representada como uma soma

$$x(t) = z(t) + y(t),$$

onde $z(t)$ é (apenas!) uma “solução particular” de (20) e $y(t) := c_+\phi_+(t) + c_-\phi_-(t)$ é a solução geral da EDO homogênea associada (21), combinação linear de duas soluções independentes $\phi_{\pm}(t)$ com coeficientes arbitrários $c_{\pm} \in \mathbb{R}$. Em particular, o espaço das soluções da EDO linear (20) é um plano afim $z + \mathcal{H}$, modelado sobre o espaço linear $\mathcal{H} \approx \mathbb{R}^2$ das soluções da EDO homogênea associada (21).

A procura de uma solução particular de (20) pode ser simplificada usando o *princípio de sobreposição*, consequência da linearidade do problema: se $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ são soluções das EDOs lineares

$$\ddot{x}_k + 2\alpha\dot{x}_k + \beta x_k = f_k(t) \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, n,$$

(observe que α e β são sempre os mesmos!) então a “sobreposição”

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$$

é solução da EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t).$$

- Determine a solução geral de

$$\ddot{x} = \sin(t) \quad \ddot{x} + \dot{x} = t \quad \ddot{x} + x = e^{-t}$$

- Determine uma solução particular de

$$\ddot{x} = 1 + t + t^2 \quad \ddot{x} + \dot{x} = e^{-t} - e^{-2t}$$

2. (variação dos parâmetros) Uma solução particular da EDO linear não homogênea

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t) \quad (22)$$

pode ser determinada usando a conjectura

$$z(t) = \lambda_+(t)\phi_+(t) + \lambda_-(t)\phi_-(t) \quad (23)$$

onde $\phi_+(t)$ e $\phi_-(t)$ são duas soluções independentes da equação homogênea $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = 0$, e $\lambda_{\pm}(t)$ são “coeficientes/parâmetros” variáveis. Um cálculo mostra que

$$\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \beta z = \frac{d}{dt} \left(\dot{\lambda}_+\phi_+ + \dot{\lambda}_-\phi_- \right) + 2\alpha \left(\dot{\lambda}_+\phi_+ + \dot{\lambda}_-\phi_- \right) + \left(\lambda_+\dot{\phi}_+ + \lambda_-\dot{\phi}_- \right)$$

Em particular, (23) é solução de (22) se (mas não só se!) as derivadas $\dot{\lambda}_{\pm}$ dos coeficientes satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_+\phi_+ + \dot{\lambda}_-\phi_- &= 0 \\ \lambda_+\dot{\phi}_+ + \lambda_-\dot{\phi}_- &= f \end{cases}$$

O determinante da matriz 2×2 que define o sistema é o Wronskiano

$$W_{\phi_+, \phi_-}(t) = \phi_+(t)\dot{\phi}_-(t) - \dot{\phi}_+(t)\phi_-(t),$$

que é diferente de zero porque as $\phi_{\pm}$ são independentes. Ao integrar a única solução do sistema acima temos os coeficientes

$$\lambda_+(t) = - \int \phi_-(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt, \quad \lambda_-(t) = \int \phi_+(t) \frac{f(t)}{W_{\phi_+, \phi_-}(t)} dt,$$

definidos a menos de constantes aditivas arbitrárias (que correspondem a somar soluções da EDO linear homogênea associada a (22)).

- Determine uma solução particular das seguintes EDOs lineares, definidas em oportunos domínios, utilizando o método de variação dos parâmetros:

$$\ddot{x} + x = 1/\sin(t) \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t} \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t} \log t.$$

$$\ddot{x} + x = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \quad \ddot{x} + x = \tan(t) \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x = \frac{e^{2t}}{\cos(2t)}.$$

3. (coeficientes indeterminados) O método dos coeficientes indeterminados permite determinar soluções particulares de uma EDO linear

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

quando o segundo membro (a força externa) $f(t)$ é um “quase-polinómio”. Se

$$f(t) = p(t)e^{\lambda t} := p(t)e^{\rho t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)),$$

onde $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_k t^k$ é um polinómio de grau k , e $\lambda = \rho + i\omega \in \mathbb{C}$, então a EDO admite uma solução particular

$$z(t) = t^n q(t) e^{\lambda t},$$

onde $q(t) = q_0 + q_1 t + \dots + q_k t^k$ é um polinómio de grau $\leq k$, se λ é uma raiz do polinómio característico $z^2 + 2\alpha z + \beta$ com multiplicidade $n \leq 2$. Usando o princípio de sobreposição, é possível determinar soluções particulares quando o segundo membro $f(t)$ é uma combinação linear de quase-polinómios.

- Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

$$\ddot{x} + x = t \quad \ddot{x} - \dot{x} = t^2 \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = t^2 - 1 \quad \ddot{x} - 4x = e^{-2t}$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t^3 e^{-t} + e^t \quad \ddot{x} + x = \sin(t) \quad \ddot{x} + 4x = 2t \cos(t)$$

$$\ddot{x} + 9x = \sin(\pi t) \quad \ddot{x} + 4x = \cos(2t) \quad \ddot{x} - 4x = te^{-2t} \quad \ddot{x} + 4x = te^{-t} \cos(2t).$$

4. (representação integral da resposta de um oscilador) Mostre que uma solução particular (com condições iniciais triviais) da equação do oscilador harmónico forçado $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau.$$

Calcule o limite quando $\omega \rightarrow 0$, e deduza que uma solução particular da equação de Newton $\ddot{x} = f(t)$ é

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) (t - \tau) d\tau.$$

Verifique e que uma solução particular da equação $\ddot{x} - k^2 x = f(t)$ é

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sinh(k(t - \tau)) d\tau.$$

5. (partícula num campo de forças dependente do tempo) Considere a equação de Newton

$$m\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} + F(t)$$

de uma partícula de massa m sujeita a uma força $F(t)$, onde $2\alpha := 1/\tau \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$, determine a trajectória quando a força é

- $F(t) = g$, ou seja, constante,
- $F(t) = -t^2$,
- $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$,
- $F(t) = \sum_{i=1}^n F_i \cos(\gamma_i t)$.

11 Oscilador harmónico

1. (**oscilador harmónico**) As pequenas oscilações de um pêndulo $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta)$ em torno da posição de equilíbrio estável $\theta = 0$ são descritas pela equação de Newton do *oscilador harmónico*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q, \quad (24)$$

onde $\omega > 0$ é a “frequência (angular) característica”. No espaço de fases $X = \mathbb{R}^2$, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases}. \quad (25)$$

- Mostre que a solução com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ é

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

- Mostre que as trajectórias podem ser escritas como

$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega t + \phi),$$

onde a amplitude A e as fases φ e ϕ dependem dos dados iniciais $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = v_0$ (use as fórmulas $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$).

- Mostre que a energia

$$E(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

é uma constante do movimento, ou seja que se $(q(t), p(t))$ é uma solução do oscilador harmónico então $\frac{d}{dt}E(q(t), p(t)) = 0$ para todo o tempo t .

- Mostre que a variável complexa $z := p + i\omega q$ satisfaz

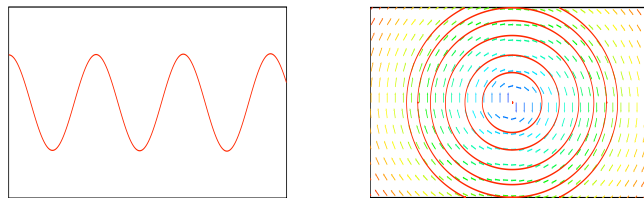
$$\dot{z} = i\omega z,$$

cujas soluções são $z(t) = z(0)e^{i\omega t}$. Verifique que a energia do oscilador é dada por $E = \frac{1}{2}|z|^2$.

- Determine a energia em quanto função da amplitude e da frequência das oscilações.
- “Elimine” dt no sistema (25), e mostre que as curvas de fases são soluções da EDO exacta

$$p dp + \omega^2 q dq = 0,$$

equivalente a $dE = 0$.



Uma trajectória e retrato de fases do oscilador harmónico.

2. (**oscilações amortecidas**) Considere a equação das *oscilações amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q,$$

onde $2\alpha := 1/\tau > 0$ é um coeficiente de atrito (τ é o tempo de relaxamento). No espaço de fases, de coordenadas q e $p := \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q - 2\alpha p \end{cases}.$$

- Mostre que a energia

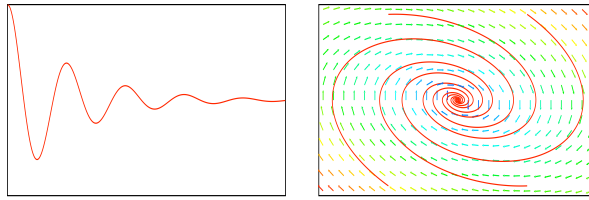
$$E(q, \dot{q}) := \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

não é uma constante do movimento.

- Mostre que as soluções do sistema “sub-crítico”, ou seja, com $\alpha^2 < \omega^2$, são

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t + \varphi\right)$$

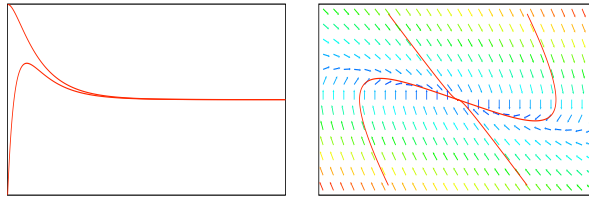
Observe que a frequência é $\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \simeq \omega - \frac{\alpha^2}{2\omega} + \dots$ se $\alpha \ll \omega$, mas tende para zero (e consequentemente, o período das oscilações tende para o ∞) quando $\alpha \rightarrow \omega$.



Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido sub-crítico.

- Mostre que as soluções do sistema “super-crítico”, ou seja, com $\alpha^2 > \omega^2$, são

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sinh\left(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t + \varphi\right)$$



Trajectórias e retrato de fases do oscilador amortecido super-crítico.

- Mostre que as soluções do sistema “crítico”, ou seja, com $\alpha^2 = \omega^2$ (uma condição muito difícil de observar!), são

$$q(t) = (a + bt)e^{-\alpha t}.$$

3. (oscilações forçadas, batimentos e ressonância) Considere a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + F_0 \cos(\gamma t).$$

- Mostre que, quando $\gamma^2 \neq \omega^2$, a solução geral é

$$q(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t)$$

onde A e ϕ são constantes arbitrárias.

- Verifique que a solução com condições iniciais triviais pode ser escrita

$$q(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} (\cos(\gamma t) - \cos(\omega t)) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} 2 \sin\left(\frac{\omega - \gamma}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega + \gamma}{2} t\right)$$

Quando a diferença $2\varepsilon := \omega - \gamma$ é pequena, ou seja $|\varepsilon| \ll |\omega|$, e portanto $\frac{\omega + \gamma}{2} \simeq \omega$, podemos estimar

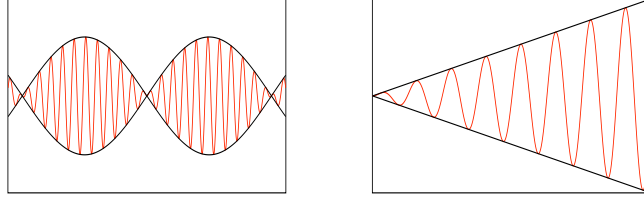
$$q(t) \simeq \frac{F_0}{2\omega\varepsilon} \sin(\varepsilon t) \cdot \sin(\omega t).$$

Portanto, a resposta do oscilador à força externa é uma “modulação” lenta (de período $2\pi/\varepsilon \gg 2\pi/\omega$) de uma oscilação com frequência fundamental ω . Este fenómeno é chamado “batimentos”. Calcule o limite da resposta $q(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Mostre que, quando $\gamma^2 = \omega^2$, a solução com condições iniciais triviais é

$$q(t) = \frac{F_0}{2\omega} t \sin(\omega t) .$$

Este fenómeno, uma resposta cuja amplitude cresce linearmente no tempo, é chamado “ressonância”.



Batimentos e ressonância.

4. (oscilações forçadas em notação complexa) Considere a equação das *oscilações forçadas*

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + F(t) .$$

- Verifique que a variável complexa $z := p + i\omega q$ satisfaz a EDO linear de primeira ordem

$$\dot{z} - i\omega z = F(t) .$$

Uma solução não trivial da EDO homogénea associada $\dot{y} - i\omega y = 0$ é $y(t) = e^{i\omega t}$. Use o método da variação das constantes para determinar a solução na forma de um produto $z(t) = \lambda(t)e^{i\omega t}$, onde λ é solução de $\dot{\lambda} = F(t)e^{-i\omega t}$. Deduza que

$$z(t) = e^{i\omega t} \left(z(t_0) + \int_{t_0}^t F(s) e^{-i\omega \tau} d\tau \right) .$$

- Verifique que a energia cedida ao oscilador por uma força $F(t)$ que actua num intervalo de tempos $(-\infty, \infty)$ é dada por [LL78]

$$E = \frac{1}{2} |z(\infty)|^2 = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 .$$

5. (oscilações forçadas amortecidas) Considere a equação das *oscilações forçadas amortecidas*

$$\ddot{q} = -2\alpha\dot{q} - \omega^2 q + F(t) ,$$

onde $2\alpha := 1/\tau > 0$ é um coeficiente de atrito, e a força é $F(t) = F_0 \sin(\gamma t)$.

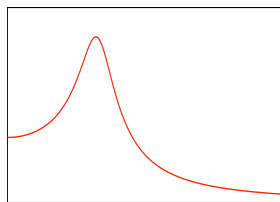
- Mostre que, se $\alpha^2 < \omega^2$ (ou seja, se o sistema não forçado é sub-crítico), a solução geral é

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \varphi) + R(\gamma)F_0 \sin(\gamma t + \phi) ,$$

onde a amplitude A e a fases φ dependem dos dados iniciais,

$$R(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \quad \text{e} \quad \tan \phi = -\frac{2\alpha\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} .$$

A primeira parcela da solução representa um “regime transitório” (transiente), desprezável para grandes valores do tempo (i.e. para $t \gg 2\tau$). A segunda é dita “solução estacionária”, e representa a resposta sincronizada, mas desfasada, do sistema à força periódica. A função $R(\gamma)$ é dita *curva de ressonância* do sistema, pois representa o factor de proporcionalidade entre a amplitude da força e a amplitude da resposta.



Um exemplo de curva de ressonância.

- Mostre que a curva de ressonância $R(\gamma)$ atinge um máximo para o valor

$$\gamma_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2}$$

da frequência, chamada *frequência de ressonância*. Observe que, se $\omega\tau \gg 1$, então $\gamma_r \simeq \omega(1 - 1/(4\tau^2\omega^2) + \dots)$.

- Discuta também os casos $\alpha^2 = \omega^2$ e $\alpha^2 > \omega^2$.

6. (**circuito RLC**) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, de resistência R , indutância L e capacidade C , é determinada pela EDO

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{V},$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão constante $V(t) = V_0$, e esboce as soluções (compare com a equação das oscilações amortecidas).
 - Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado com uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).
 - Determine a frequência de ressonância do circuito.
7. (**impedância**) A resposta estacionária de um elemento de circuito a uma tensão alternada $V(t) = e^{i\omega t}$ é descrita pela *impedância* $Z = R + iX = |Z|e^{i\theta}$ (a parte real R é a resistência e a parte imaginária X a *reatância*), definida pela lei de Ohm generalizada

$$V = ZI$$

- Mostre que a impedância de um elemento de circuito RLC é

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

e determine o módulo e a fase de Z .

- Mostre que a impedância de dois elementos em série, de impedância Z_1 e Z_2 , é

$$Z = Z_1 + Z_2$$

e que a impedância de dois elementos em paralelo, de impedância Z_1 e Z_2 , é (a metade da média harmónica)

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

8. (**filters**) see http://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit#Filters

12 Valores e vetores próprios

1. (**subespaços invariantes**) Seja $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ um operador linear. Um subespaço linear $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ é L -invariante se $L(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$, ou seja, se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ implica $L\mathbf{v} \in \mathbf{W}$.
 - Mostre que o subespaço trivial $\{\mathbf{0}\}$, o núcleo $\ker(L)$ e a imagem $\text{im}(L)$ são subespaços invariantes de $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$.
 - Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à reta $y = x$.
 - Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua projeção ortogonal sobre a reta $y = x$.
 - Determine os subespaços invariantes da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 3y, y)$.
2. (**valores e vetores próprios**) Seja $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ um operador linear definido no espaço linear $\mathbf{V}$, real ou complexo. Um *vetor próprio/autovetor* (em inglês *eigenvector*, do alemão *eigen* = próprio) de L é um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tal que $L\mathbf{v}$ é proporcional a $\mathbf{v}$, ou seja,

$$L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$) é um escalar, chamado *valor próprio/autovalor* (em inglês *eigenvalue*) do operador L (associado ao vetor próprio $\mathbf{v}$).

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são vetores próprios e se os correspondentes valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são dois a dois distintos (i.e. $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$), então os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são linearmente independentes. A prova é por indução. O caso $k = 1$ é trivial. Seja $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$. Aplicando o operador L ou multiplicando por λ_{k+1} , e depois calculando a diferença, obtemos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \dots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Pela hipótese indutiva todos os coeficientes são nulos, e portanto, sendo os valores próprios distintos, $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Então também $c_{k+1} = 0$ (pois $\mathbf{v}_{k+1} \neq \mathbf{0}$).

Se λ é um valor próprio de L , o conjunto

$$\mathbf{V}_\lambda := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\} = \ker(\lambda - L)$$

$(\lambda - L)$ denota o operador $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v} - L(\mathbf{v})$ é um subespaço vetorial invariante para A , diferente do espaço trivial $\{\mathbf{0}\}$, dito *subespaço próprio* associado ao valor próprio λ . A restrição do operador linear L a cada espaço próprio $\mathbf{V}_\lambda$ é uma homotetia $L|_{\mathbf{V}_\lambda} = \lambda : \mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v}$. Em particular, se existe uma decomposição de $\mathbf{V}$ como soma direta $\mathbf{V} = \bigoplus_k \mathbf{V}_k$ de espaços próprios $\mathbf{V}_k$ associados aos valores próprios (distintos) λ_k , então o operador é uma soma direta $L = \bigoplus_k \lambda_k$ de homotetias. Tais operadores são chamados “diagonalizáveis”.

- Todo vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um vetor próprio da transformação identidade $I_{\mathbf{V}}\mathbf{v} := \mathbf{v}$, com valor próprio $\lambda = 1$. Todo vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um vetor próprio da transformação nula $0_{\mathbf{V}}\mathbf{v} := \mathbf{0}$, com valor próprio $\lambda = 0$.
- Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) no seu simétrico em relação à reta $y = 2x$.
- Determine valores e vetores próprios da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua projeção ortogonal sobre a reta $3y = x$.
- Uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ por

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

não admite vetores próprios se o ângulo $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$. No entanto, a mesma rotação pode ser pensada como a transformação $z \mapsto e^{i\theta}z$ definida no espaço vetorial complexo $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Neste caso, todo vetor $z \neq 0$ é um vetor próprio, de valor próprio $e^{i\theta}$.

- Determine os valores e os vetores próprios das transformações

$$\begin{aligned} L(x, y) &= (x, 0) & L(x, y) &= (x/2, 3y) & L(x, y) &= (-y, x) \\ L(x, y) &= (x, x + y) & L(x, y) &= (x + \lambda y, y) & L(x, y) &= (x + \alpha y, y) \\ L(x, y, z) &= (0, y, -z) & L(x, y, z) &= (y, z, x) \end{aligned}$$

- Se λ é um valor próprio de $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ e $k \in \mathbb{N}$, então λ^k é um valor próprio de L^k . Em particular, os valores próprios de um operador nilpotente não podem ser diferentes de zero.
 - Se $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ é um automorfismo (i.e. uma transformação linear invertível) e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é um vetor próprio de L , então $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de L^{-1}
 - [Ap69] 4.4.
3. (resolvente e espectro) Se λ é um valor próprio do operador linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, então o operador

$$L_\lambda := \lambda - L$$

não é invertível (pois um autovetor $\mathbf{v}$ associado a λ está no seu núcleo). O *espectro* do operador L é o conjunto

$$\sigma(L) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \lambda - L \text{ não é invertível} \} \subset \mathbb{C},$$

ou seja, o conjunto dos valores complexos de $z \in \mathbb{C}$ fora dos quais existe o operador *resolvente*

$$R_z := (z - L)^{-1}$$

O número $\rho(L) := \sup_{z \in \sigma(L)} |z|$ é dito *raio espectral*. Quando $\mathbf{V}$ tem dimensão finita, o espectro $\sigma(L)$ coincide com o conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ dos valores próprios. Em geral, o espectro pode conter mais pontos.

- O operador *deslocamento* (em inglês, *shift*)

$$L : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

definido no espaço das sucessões reais $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ não é invertível, portanto $0 \in \sigma(L)$. No entanto, 0 não é um valor próprio de L .

4. (operador derivação e exponencial) O operador *derivação* envia uma função derivável $f(x)$ na função

$$(Df)(x) := f'(x).$$

Pode ser pensado como um endomorfismo do espaço linear $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, as funções infinitamente diferenciáveis com valores reais ou complexos. O produto $P := -i\hbar D$, onde $\hbar \simeq 1.054 \dots \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ é a constante de Planck reduzida, é o *operador momento* na “representação de Schrödinger”.

- O subespaço $\text{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómios é um subespaço invariante de D . O subespaço $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R}) \subset \text{Pol}(\mathbb{R})$ dos polinómios de grau $\leq n$ é um subespaço invariante do operador derivação $D : \text{Pol}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}(\mathbb{R})$?
- Mostre que os vetores próprios do operador $L = xD$, definido em $\text{Pol}(\mathbb{R})$, são os monómios $f(x) = x^n$.
- Verifique que todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio do operador “derivação” $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e que espaço próprio associado ao valor próprio λ é gerado pela função exponencial $f(x) = e^{\lambda x}$. Deduza que $e^{i\xi x/\hbar}$ é uma função própria do operador momento, e calcule o valor próprio.

5. (**operadores diferenciais, translações e ondas planas**) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\mathbf{V} = \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis. Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, de grau $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, o operador diferencial $\partial^\alpha : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ é definido por

$$(\partial^\alpha f)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x}).$$

- Verifique que as ondas planas $e_\xi(\mathbf{x}) := e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}$, com $\xi \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, são funções próprias dos operadores diferenciais ∂^α , com $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com valores próprios $(i\xi)^\alpha := (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n}$, ou seja,

$$\partial^\alpha e_\xi = (i\xi)^\alpha e_\xi.$$

- O operador de *translação* $T_{\mathbf{a}}$, com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(T_{\mathbf{a}}f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{a}).$$

Verifique que as ondas planas $e_\xi(\mathbf{x}) = e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}$ são também funções próprias dos operadores de translação com valores próprios $\lambda_{\mathbf{a}}(\xi) = e^{i\xi \cdot \mathbf{a}}$, ou seja,

$$T_{\mathbf{a}}e_\xi = e^{i\xi \cdot \mathbf{a}} e_\xi.$$

- O operador de *modulação* M_ξ , com $\xi \in (\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$, é definido por

$$(M_\xi f)(\mathbf{x}) := e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}).$$

Mostre que $T_{\mathbf{a}} \circ M_\xi = e^{i\xi \cdot \mathbf{a}} M_\xi \circ T_{\mathbf{a}}$. Os operadores translação e modulação geram o *grupo de Heisenberg*.

6. (**PDEs e símbolo de um operador diferencial**) Um *operador diferencial linear* de grau $\leq k$, definido num domínio $X \subset \mathbb{R}^n$, é um polinómio

$$P(\partial, \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha,$$

em ∂ , com “coeficientes” $a_\alpha(\mathbf{x})$ que são funções $a_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$. O operador comuta com as translações de $\mathbb{R}^n$, os operadores $T_{\mathbf{a}}$, se os coeficientes a_α não dependem do ponto $\mathbf{x}$, i.e. são constantes. As “ondas planas” $e_\xi(\mathbf{x}) := e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}$ são funções próprias do operador linear com coeficientes constantes $L = P(\partial)$, ou seja, satisfazem

$$Le_\xi = \sigma(\xi) e_\xi,$$

onde o valor próprio, o polinómio $\sigma(\xi) := P(i\xi)$, é dito *símbolo* do operador L . O *símbolo principal* é o termo (polinómio homogêneo) de grau máximo, $\sigma_p(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \cdot (i\xi)^\alpha$.

7. (**polinómio caraterístico**) Se λ é um valor próprio do operador linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, então o operador $L_\lambda := \lambda - L$ não é invertível, e os vetores próprios com valor próprio λ são os vetores não triviais do núcleo de L_λ . Se $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ tem dimensão finita, então o operador L é $X \mapsto AX$, onde $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz quadrada (que depende da base escolhida). O escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio da matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ (ou do operador L) sse a matriz $\lambda I_n - A$ é singular, ou seja, sse

$$\det(\lambda I_n - A) = 0,$$

O *polinómio caraterístico* da matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é

$$P_A(t) := \det(tI_n - A)$$

e portanto λ é um valor próprio de A sse é uma raiz do polinómio caraterístico, i.e. se $P_A(\lambda) = 0$. O espaço próprio associado ao valor próprio λ é $\mathbf{V}_\lambda = \ker(\lambda - L)$. Em particular,

os vetores próprios associados ao valor próprio λ são as soluções não triviais do sistema homogêneo $(\lambda I_n - A)V = 0$.

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são as raízes (em geral, complexas e distintas) do polinómio caraterístico da matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} P_A(t) &= (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n) \\ &= t^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) t^{n-1} + \cdots + (-1)^n (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) \end{aligned}$$

Mas $P_A(0) = \det A$, e portanto

$$\boxed{\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$$

Também acontece que

$$\boxed{\text{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}$$

- Mostre que A e $A^\top$ têm o mesmo polinómio caraterístico.
- Verifique que o polinómio caraterístico da matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é $P_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad-bc)$. Verifique que $P_A(A) = 0$, ou seja, que $A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)I_2 = 0$.

- Os valores próprios de uma matriz nilpotente não podem ser diferentes de zero.
- A matriz quadrada A é unipotente sse o seu polinómio caraterístico é uma potência de $t - 1$.
- Determine valores e vetores próprios dos endomorfismos definidos pelas seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- [Ap69] 4.10.

8. (**matrizes semelhantes e diagonalização**) As matrizes quadradas $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ são ditas *semelhantes* se existe uma matriz invertível $U \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$B = U^{-1}AU,$$

ou seja, se representam a mesma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em bases que podem ser diferentes. Se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$. Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio caraterístico, pois

$$\begin{aligned} \det(tI_n - U^{-1}AU) &= \det(tU^{-1}I_nU - U^{-1}AU) \\ &= \det(U^{-1}(tI_n - A)U) = \det(tI_n - A) \end{aligned}$$

e portanto os mesmos valores próprios.

A matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é *diagonalizável* se é semelhante a uma matriz diagonal. Se (o operador linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido na base canônica pela) matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ admite n vetores próprios linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respetivamente (não necessariamente distintos), e se $U \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é matriz (invertível) cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$, então $U^{-1}AU$ é a matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- Mostre que se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$.

- As matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são semelhantes?

- Diagonalize as seguintes matrizes, ou mostre que não é possível.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. (**diagonalização simultânea**) Sejam $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ e $M : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ dois operadores lineares que comutam (i.e. $[L, M] = 0$) definidos no espaço linear $\mathbf{V}$. Se λ é um valor próprio de L , então o espaço próprio $\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ t.q. } L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$ é um subespaço invariante para o operador M , i.e. $M(\mathbf{V}_\lambda) \subset \mathbf{V}_\lambda$. De fato, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$, então

$$LM\mathbf{v} = ML\mathbf{v} = \lambda M\mathbf{v}$$

e portanto $M\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$.

DA FINIRE

10. (**gato de Arnold**) Considere a transformação $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ou seja, $L(x, y) = (2x + y, x + y)$. O polinómio caraterístico é $P_A(t) = t^2 - 3t - 5$, e portanto os valores próprios são $\lambda_\pm = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Vetores próprios correspondentes, que satisfazem $L(\mathbf{v}_\pm) = \lambda_\pm \mathbf{v}_\pm$, são (por exemplo)

$$\mathbf{v}_+ = (\varphi, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_- = (1, -\varphi)$$

onde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.6180339887 \dots$ é a “razão” dos gregos. A matriz que representa L na base $(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-)$ é a matriz diagonal $A' = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$. Observem que $\lambda_+ > 1$ e $0 < \lambda_- < 1$, e portanto L estica os vetores da reta $\mathbb{R}\mathbf{v}_+$ e contrae os vetores da reta $\mathbb{R}\mathbf{v}_-$. Observem também que $\det A = \lambda_+ \lambda_- = 1$. Em particular, L preserva as áreas, ou seja, a área de uma região (mensurável!) $R \subset \mathbb{R}^2$ é igual à área da sua imagem $L(R)$. A matriz A é invertível, e a sua inversa A^{-1} tem entradas inteira (pois $\det A = 1$). Em particular, L preserva o subgrupo $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, ou seja, $L(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. Isto implica que L define uma transformação invertível $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ do “toro” $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, definida por

$$(x, y) + \mathbb{Z}^2 \mapsto (2x + y, x + y) + \mathbb{Z}^2$$

A “dinâmica” da transformação T , ou seja, o comportamento das trajetórias $\mathbf{v} \mapsto T(\mathbf{v}) \mapsto T(T(\mathbf{v})) \mapsto \dots$, é particularmente interessante, e T é o arquétipo de uma classe importante de transformações, ditas “hiperbólicas”.

11. (**Cayley-Hamilton theorem**) If $p \in \mathbb{C}[t]$ or $\mathbb{R}[t]$ is a polynomial in the indeterminate t , say $p(t) = a_k t^k + \dots + a_1 t + a_0$, and A an $n \times n$ matrix, real or complex, one defines the matrix $p(A)$ as

$$p(A) := a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I_n.$$

For example, one may consider the characteristic polynomial $P_A(t)$ of a square matrix A , and try to compute $P_A(A)$.

If $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ is a diagonal matrix, a simple computation (using the fact that its powers are also diagonal with entries which are powers of the λ_i 's) shows that $P_\Lambda(\Lambda) = 0$. A diagonalizable matrix as $D = U^{-1}\Lambda U$ has its powers of the form $D^k = U^{-1}\Lambda^k U$, and consequently $P_D(D) = U^{-1}P_\Lambda(\Lambda)U = 0$, since $P_D = P_\Lambda$.

The set of diagonalizable complex matrices is dense in the space $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^{n^2}$. Indeed, it is the set of those matrices such that the characteristic polynomial $P_A(t)$ has n distinct complex roots. In particular, for any $n \times n$ matrix A , real or complex, we may find a sequence $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ of diagonalizable complex matrices such that $D_m \rightarrow A$ (w.r.t. some compatible norm). By continuity we conclude the *Cayley-Hamilton theorem*: any square matrix A satisfies its characteristic equation, i.e.

$$\boxed{P_A(A) = 0}$$

- If A is an invertible $n \times n$ matrix, then we may multiply the identity $P_A(A) = 0$ by A^{-1} , and obtain a formula for the inverse matrix A^{-1} as a function of the powers $A^0, A, A^2, \dots, A^{n-1}$. For example, show that the inverse of an invertible 2×2 matrix A is

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} ((\text{tr} A)I_2 - A) .$$

13 Espaços euclidianos

DRAFT

1. (**espaços euclidianos**) Um *espaço euclidiano real/complexo* é um espaço vetorial $\mathbf{E}$, real ou complexo, munido de um *produto interno* (também dito *hermítico* se o espaço é complexo), uma aplicação que associa a cada par de vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$ um escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, satisfazendo os axiomas

$$\mathbf{E1} \text{ (simetria hermítica)} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E2} \text{ (linearidade)} \quad \langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{E} \text{ e } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

$$\mathbf{E3} \text{ (positividade)} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \text{ se } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Se o espaço é real o axioma E1 diz simplesmente que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$. O axioma E2 diz que, para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{E}$ fixado, $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ é uma forma linear. Em particular, a correspondência $\mathbf{y} \mapsto \xi_{\mathbf{y}} := \langle \cdot, \mathbf{y} \rangle$ define uma inclusão $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}^*$.

Os arquétipos de espaços euclidianos de dimensão finita são: o espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$, munido do produto interno “usual” $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$; o espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$, munido do produto interno “usual” $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}$.

A *norma* do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ é o número real não negativo definido por

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

Pelas E2 e E3, o único vetor com norma 0 é o vetor nulo $\mathbf{0}$. A *desigualdade de Schwarz* afirma que se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

e a igualdade verifica-se sse os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente dependentes. Os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{E}$ são *ortogonais/perpendiculares* quando $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Pela desigualdade de Schwarz, a norma satisfaz a desigualdade do triângulo

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

A *distância* entre os vetores/pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{E}$ é definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

que satisfaz a desigualdade do triângulo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

- Verifique que $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Em particular, se o espaço é real, o produto escalar é linear também na segunda variável.
- Mostre que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ sse $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Prove a desigualdade de Schwarz (aplique o axioma E3, ou seja, a positividade, ao vetor $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}$ com $\lambda = \|\mathbf{y}\|$ e $\mu = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$).
- Verifique que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \sum_i x_i y_i$ é um produto escalar em $\mathbb{R}^n$.
- Verifique que $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \mapsto \sum_i z_i \overline{z'_i}$ é um produto escalar hermiteano em $\mathbb{C}^n$.
- Mostre que num espaço euclidiano real

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 4 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

e deduza que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ sse $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

- Prove o *teorema de Pitágoras*: se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais então

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

- Verifique a *identidade do paralelogramo*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$$

- Mostre que a norma, e portanto a distância, satisfazem a *desigualdade do triângulo*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

(calcule $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ e use a desigualdade de Schwarz ...).

- [Ap69] 15.12.

2. (**matrizes simétricas e positivas**) Os axiomas E1 e E2 dizem que um produto interno no espaço $\mathbb{R}^n$ é

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} x^i y^j$$

onde $G = (g_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica, i.e. tal que $g_{ij} = g_{ji}$. O axioma E3 diz que a matriz G é *positiva*, i.e. $\sum_{i,j} g_{ij} x^i x^j > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Em particular, $g_{ii} > 0$.

Numa base em que a matriz G é diagonal, com valores próprios $\lambda_i > 0$, o produto interno é

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1 x^1 y^1 + \lambda_2 x^2 y^2 + \dots + \lambda_n x^n y^n$$

- Verifique que

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle = 2xx' + xy' + yx' + yy'$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

- Verifique que a *métrica de Lorentz/Minkowski*

$$\langle (t, \mathbf{r}), (t', \mathbf{r}') \rangle = c^2 tt' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

não é um produto interno em $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

3. (**ℓ^2 space**) The simplest infinite dimensional Euclidean space is the space $\ell^2(\mathbb{C})$ of those infinite sequences $\mathbf{z} = (z_k)_{k \in \mathbb{N}} = (z_1, z_2, z_3, \dots)$ of complex numbers $z_k \in \mathbb{C}$ such that $\|\mathbf{z}\|^2 := \sum_k |z_k|^2 < \infty$, equipped with the inner product $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle := \sum_k z_k \overline{z'_k}$ (convergence of the inner product comes from the Schwartz inequality applied to finite sums and convergence of the infinite sums defining the norms of the two vectors). The infinite system $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$, ... is made of pairwise orthogonal unitary vectors.
4. (**L^2 spaces**) Typical spaces of interest in analysis of PDEs (and in physics) are spaces $\mathbf{E}$ made of continuous (or at least integrable) functions $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, defined in some domain X which may be an interval like $[0, \pi]$, the whole real line $\mathbb{R}$, some domain in the space $\mathbb{R}^n$ (or more sophisticated objects called “manifolds”, and so on), equipped with an inner product like

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(t) \overline{g(t)} dt.$$

In some sense this space is too small, and one should “complete” it in order to include the limits of its fundamental sequences. In some other sense it is too large, since interesting linear operators, such as differential operators, may only be defined in strict subspaces of $\mathbf{E}$, made of those functions which admit a sufficient number of derivatives.

5. (**ortonormalização de Gram-Schmidt**) Um conjunto ortogonal de elementos $\mathbf{v} \neq 0$ de um espaço euclidiano $\mathbf{E}$ é independente. Em particular, todo o conjunto ortogonal de n vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ não nulos num espaço euclidiano $\mathbf{E} \approx \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ de dimensão n é uma base. Os vetores $\mathbf{v}_k / \|\mathbf{v}_k\|$ formam uma base ortonormada.

Seja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \dots$ um conjunto independente de vetores do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Então o conjunto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \dots$, definido recursivamente por

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1} - \frac{\langle \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\langle \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_n \rangle}{\|\mathbf{u}_n\|^2} \mathbf{u}_n$$

é um conjunto ortogonal tal que $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$ para todo o n e tal que $\mathbf{u}_{n+1}$ é ortogonal ao subespaço $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$. Em particular, todo espaço euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormada.

6. (polinômios de Legendre) Ortonormalize a família $v_0(t) = 1$, $v_1(t) = t$, $v_2(t) = t^2$, $\dots$, $v_n(t) = t^n$, $\dots$ de vetores no espaço $\mathbf{E}$ das funções contínuas $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, munido do produto interno

$$\langle x, y \rangle := \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt.$$

O resultado é a família dos *polinômios de Legendre*,

$$\ell_0(t) = 1, \quad \ell_1(t) = t, \quad \ell_2(t) = t^2 - 1/3, \quad \ell_3(t) = t^3 - \dots$$

7. (espaços ...

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt$$

Verifique que $1, \cos(t), \cos(2t), \dots, \sin(t), \sin(2t), \dots$ é um conjunto ortogonal.

8. (o espaço L^2) O produto interno L^2 no espaço das funções complexas (ou reais) no espaço $\mathbb{R}^n$ é

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

onde $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ denota a “medida de Lebesgue”. é um produto escalar hermiteano no espaço $C^0(I, \mathbb{C})$. A norma L^2 é

$$\|f\|_2 := \langle f, f \rangle$$

O “complemento” de ...

9. (complemento ortogonal, projeção ortogonal) Seja $\mathbf{E}$ um espaço euclidiano, real ou complexo. O complemento ortogonal do subconjunto $X \subset \mathbf{E}$ (não necessariamente um subespaço) é o subespaço linear

$$X^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbf{E} \text{ t.q. } \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X\}$$

Seja $S \subset \mathbf{E}$ um subespaço de dimensão finita do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Então cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ pode ser representado de maneira única como soma

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$$

de um vetor $\mathbf{s} \in S$ e um vetor $\mathbf{t} \in S^\perp$, ou seja, o espaço $\mathbf{E}$ é uma soma direta $\mathbf{E} = S \oplus S^\perp$. De fato, se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma sua base ortonormada de S (que existe pelo teorema de Gram-Schmidt), basta escolher

$$\mathbf{s} = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$$

e verificar que $\mathbf{t} := \mathbf{v} - \mathbf{s}$ é ortogonal a todos os vetores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, e portanto a todos os vetores de S . O vetor $\mathbf{s}$ é dito *projeção (ortogonal)* de $\mathbf{v}$ sobre S , e o operador $P_S : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, definido por $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{s}$, é dito *projeção ortogonal* sobre o subespaço S . A projecção realiza a distância $d(\mathbf{v}, S)$ entre $\mathbf{v}$ e S , ou seja, (*teorema de aproximação*)

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{s}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{s}'\| \quad \forall \mathbf{s}' \in S$$

De fato, o vetor $\mathbf{s}' - \mathbf{s}$, que pertence ao subespaço S , é ortogonal ao vetor $\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{s}$, e portanto, pelo teorema de Pitágoras, $\|\mathbf{v} - \mathbf{s}'\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{s}' - \mathbf{s}\|^2 \geq \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2$.

- Mostre que $X^\perp$ é um subespaço linear de $\mathbf{E}$.
- Verifique que $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{t}\|^2$.
- Verifique que $P_S P_S = P_S$.

10. (**bases ortonormadas e coeficientes de Fourier**) Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$ um conjunto ortonormado do espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Os *coeficientes de Fourier* do vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ (relativamente ao conjunto ortonormado $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots$) são os escalares $x_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle$. A projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{x}$ sobre o subespaço de dimensão finita $\mathbf{E}_n \subset \mathbf{E}$, gerado pelos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, é o vetor $\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. Da desigualdade $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|^2 \geq 0$ segue que $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$. Em particular, a série (de termos não-negativos) $\sum |x_i|^2$ é convergente. No limite quando $n \rightarrow \infty$, segue a *desigualdade de Bessel*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

Se $\mathbf{E}$ tem dimensão finita e $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada, então vale a *identidade de Parseval*

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle|^2$$

O produto escalar entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é dado pela *identidade de Parseval*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{y} \rangle$$

- Mostre que um conjunto finito ortogonal de vetores não nulos é independente.
- Mostre que se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é uma base ortonormada do espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{E} \approx \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, então todo o vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ é igual a

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$$

- [Ap69] 15.12.

11. (**Hilbert spaces and Dirac's notation**) Physicists are interested in certain infinite dimensional complex Euclidean spaces $\mathbf{H}$ called *Hilbert spaces*. They are characterized by a certain “completeness condition” and by the fact of having an “infinite countable basis” $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots$. Each vector may be written as an infinite sum $\mathbf{x} = \sum_k x_k \mathbf{e}_k$, with Fourier coefficients $x_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle$, and (the square of) its norm is the sum of the series $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_k |x_k|^2$. It happens that the inner product induces an isomorphism between $\mathbf{H}$ and its dual $\mathbf{H}^*$. Paul Dirac invented the following terminology¹⁹: a generic vector is denoted by $|x\rangle$ and called *ket*, while a generic co-vector is denoted by $\langle y|$ and called *bra*, so that their pairing $\langle y|x\rangle$, the inner product, is a *bra-ket*.
12. (**fatorização QR**) Uma matriz $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ cujas colunas são linearmente independentes pode ser decomposta na forma

$$A = QR$$

onde $Q \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ é uma matriz ortogonal e $R \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular superior.

- Sejam $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ as colunas da matriz $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, e seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ a base ortonormada obtida utilizando o processo de ortonormadaização de Gram-Schmidt. Então a matriz Q , cujas colunas são os vetores $\mathbf{e}_i$, é ortogonal, e $A = QR$ onde R é a matriz triangular

$$R = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3 \rangle & \dots \\ 0 & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3 \rangle & \dots \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3 \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Mostre que a solução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, quando A é invertível e tem decomposição $A = QR$, é

$$\mathbf{x} = R^{-1}Q^T \mathbf{b}$$

¹⁹PAM Dirac, A new notation for quantum mechanics. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 35 (3) (1939), 416-418.

P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1930.

- Determine a decomposição QR das matrizes

.....

13. (alternativa de Fredholm) Seja $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, e sejam $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $L_{A^t} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ as transformações lineares definidas por $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \mapsto A^t\mathbf{y}$, respectivamente. Então

$$\ker(L_A) = \text{im}(L_{A^t})^\perp \quad \text{im}(L_A) = \ker(L_{A^t})^\perp \quad \ker(L_{A^t}) = \text{im}(L_A)^\perp \quad \text{im}(L_{A^t}) = \ker(L_A)^\perp$$

Em particular, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite soluções sse o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ é ortogonal ao espaço das soluções do “sistema homogêneo adjunto” $A^t\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

• ...

14. (quadrados mínimos e regressão linear) Sejam $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathbb{R}^m$. Uma *solução de quadrados mínimos* do sistema $AX = B$ (que pode ser inconsistente!) é um vetor $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ que minimiza a soma

$$(\epsilon^1)^2 + (\epsilon^2)^2 + \dots + (\epsilon^m)^2$$

dos quadrados dos “erros” $\epsilon^i := (\sum_j a^i_j x^j) - b^i$, ou seja, o quadrado da norma $\|AX - B\|^2$ em $\mathbb{R}^m$. Se as colunas de A são linearmente independentes, então a matriz $A^t A$ é invertível, e a única solução de quadrados mínimos é

$$\bar{X} = (A^t A)^{-1} A^t B$$

- Verifique que $\bar{X} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) \in \mathbb{R}^n$ é um mínimo de $\|AX - B\|^2$ se $A^t A \bar{X} = A^t B$ (calcule as derivadas parciais em ordem aos $\bar{x}^j$'s).
- Mostre que se $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tem característica n então $A^t A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ também tem característica n , e portanto é invertível.

14 Norms and Banach spaces

DRAFT

1. (**normas**) Uma *norma* no espaço linear $\mathbf{V}$, real ou complexo, é uma função real não-negativa $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz os axiomas

$$\mathbf{N1} \text{ (positividade)} \quad \|\mathbf{x}\| > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0.$$

$$\mathbf{N2} \text{ (homogeneidade)} \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ e } \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$$

$$\mathbf{N3} \text{ (desigualdade do triângulo)} \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}.$$

Um *espaço normado* é um espaço vetorial $\mathbf{V}$ munido de uma norma. A *distância* entre os pontos/vetores de $\mathbf{V}$ é definida por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

- Use N3 para deduzir a desigualdade do triângulo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

para a distância.

- Verifique que

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$$

são normas no espaço $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. De fato, estas normas são os dois extremos de uma família de normas parametrizadas por um número $1 \leq p \leq \infty$, definidas por

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Quando $p = 2$ esta é a norma euclidiana usual $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, definida à custa do produto interno usual.

- Uma norma $\|\cdot\|$ é euclidiana (ou seja, é definida à custa de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usando $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$) sse satisfaz a identidade do paralelogramo.
2. (**métricas**) Uma *métrica* no conjunto X é uma função “distância” $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz os axiomas:
- M1** (*simetria*) $d(x, y) = d(y, x)$;
- M2** (*positividade*) $d(x, x) = 0$, e $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;
- M3** (*desigualdade do triângulo*) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
3. (**completeness and Banach spaces**) A distância permite de definir a convergência das sucessões definidas num espaço normado. Uma sucessão $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vetores $\mathbf{x}_k \in \mathbf{V}$ converge para um vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ se para todo a “precisão” $\varepsilon > 0$ existe um “tempo” $\bar{k}$ tal que se $k > \bar{k}$ então $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$.
4. (**normas L^p**) Verifique que

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$$

é uma norma no espaço $\mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{C})$ das funções contínuas e limitadas definidas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Verifique que

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

é uma norma no espaço $\mathcal{C}_b^0(I, \mathbb{C})$ das funções contínuas e limitadas definidas no intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

5. (**operadores limitados e norma dos operadores**) Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ dois espaços lineares normados. Um operador linear $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é *limitado* se existe um $C > 0$ tal que $\|T\mathbf{v}\| \leq C \|\mathbf{v}\|$ para todo o $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Por exemplo, o operador $N \in \mathcal{L}(\ell^2)$, definido por $N\mathbf{e}_n = n\mathbf{e}_n$, não é limitado. O seu inverso, $N^{-1} : \mathbf{e}_n \mapsto n^{-1}\mathbf{e}_n$, é limitado, e podemos fazer $C = 1$. Em dimensão finita, um operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ é definido, fixada uma base unitária, por uma matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Se $M := \max_{i,j} |a_{ij}|$ denota o máximo valor absoluto das entradas de A , então é imediato verificar que

O subespaço $\mathcal{B}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ dos operadores lineares limitados de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{W}$ pode ser munido de uma norma, chamada *norma dos operadores*, definida assim: a norma da transformação linear $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é

$$\|L\| := \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{0\}} \frac{\|L\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Em particular, $\|L\mathbf{v}\| \leq \|L\| \|\mathbf{v}\|$. Uma definição equivalente, usando a homogeneidade das normas (N2), é

$$\|L\| := \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|L\mathbf{v}\|$$

(a condição $\|\mathbf{v}\| = 1$ pode ser substituída por ≤ 1 ou < 1), ou seja, a norma de um operador limitado é o raio da menor bola centrada em zero que contém a imagem da bola unitária. Em particular, o espaço dual $\mathbf{V}^* := \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{C})$, dependendo se $\mathbf{V}$ é real ou complexo, pode ser munido da norma

$$\|\xi\| := \sup_{\mathbf{v}=1} |\langle \xi, \mathbf{v} \rangle|.$$

A norma dos operadores é natural com respeito às composições. De fato, se $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ e $T : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{Z}$ são operadores lineares entre os espaços normados $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ e $\mathbf{Z}$, então a composição $TL : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Z}$ tem norma limitada por

$$\|TL\| \leq \|T\| \|L\|$$

Se $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ é um operador linear limitado definido num espaço euclidiano $\mathbf{E}$, real ou complexo, então

$$\|T\| = \|T^*\| \quad \text{e} \quad \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

- Show that the norm of a bounded linear operator $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ may also be defined as the infimum of those $C > 0$ such that $\|T\mathbf{v}\| \leq C \|\mathbf{v}\|$ for all $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
 - Show that the operator norm is indeed a norm. In particular, show that it satisfies the triangular inequality N3.
 - Mostre que se $T \in \text{End}(\mathbf{E})$ é um operador linear limitado definido num espaço euclidiano, então $\rho(T) \leq \|T\|$, e portanto $\rho(T) \leq \|T^k\|^{1/k}$. Mostre que se $N \in \text{End}(\mathbf{E})$ é normal então $\rho(N) = \|N\|$.
6. (**normas nos espaços de matrizes**) Por exemplo, se $\mathbf{V} \approx \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{W} \approx \mathbb{R}^m$, munidos das normas euclidianas usuais, então um operador linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, representado por uma matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ relativamente às bases canónicas, envia a esfera unitária $S^{n-1} \setminus \{\sum_{k=1}^n x_k^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ numa elipse

The spectral radius is given by the *Gelfand's formula*

$$\rho(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k}$$

- Mostre que outras normas no espaço $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ou $(\mathbb{C})$ das matrizes $m \times n$ são

$$\|A\|_\infty := \sup_{i,j} |a_{ij}| \quad \text{e} \quad \|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

15 Operadores hermíticos e unitários

1. (**operador adjunto**) Seja $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, real ou complexo, de dimensão finita. O *adjunto* do operador linear $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ é o único operador $T^* \in \text{End}(\mathbf{H})$ (a notação dos físicos é $T^\dagger$) tal que

$$\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T^*\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}.$$

Se o espaço linear é real, fixada uma base ortonormada, podemos considerar que $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ munido do produto interno canônico $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i$. Se $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz que representa o operador T na base escolhida, então a *matriz transposta* $A^\top = (a_{ij}^\top)$, definida por $a_{ij}^\top := a_{ji}$ (ou seja, as linhas de $A^\top$ são as colunas de A e vice-versa), define o operador adjunto T^* . Se o espaço linear é complexo, fixada uma base ortonormada, podemos considerar que $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ munido do produto hermítico $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i$. Se $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador T na base escolhida, então a matriz do operador adjunto T^* é a matriz *conjugada transposta* $\bar{A}^\top = (a_{ij}^*)$, definida por $a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}$. Isto prova a existência do adjunto. A unicidade é um exercício. Por outro lado, a existência do adjunto em espaços euclidianos de dimensão infinita é problemática.

É imediato verificar que

$$(T^*)^* = T \quad (T + S)^* = T^* + S^* \quad (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^* \quad (TS)^* = S^* T^*$$

- Mostre que o adjunto de um operador linear é único (lembre que o único vetor ortogonal a todos os vetores de um espaço euclidiano é o vetor nulo). Observe que esta prova não usa a dimensão finita do espaço.
 - Mostre que $\ker T^* = (\text{im } T)^\perp$ e que $(\ker T^*)^\perp = \text{im } T$.
 - Se T é invertível, então $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.
 - Um subespaço $V \subset \mathbf{H}$ é invariante para o operador T sse o subespaço ortogonal $V^\perp$ é invariante para o operador adjunto T^* .
2. (**operadores auto-adjuntos**) Um operador linear $T \in \text{End}(\mathbf{H})$, definido num espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$, é dito *auto-adjunto* ou *hermítico* (em inglês *self-adjoint* or *hermitian*) se $T^* = T$, ou seja, se

$$\langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = \langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$$

(observe que para definir um operador auto-adjunto não é necessário definir o adjunto de um operador!). Se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, e se $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz que representa o operador T numa base ortonormada, então T é auto-adjunto sse a matriz é “hermítica”, i.e. se $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano real é também dito *simétrico*, e é representado, numa base ortonormada, por uma matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ *simétrica*, ou seja, tal que $a_{ij} = a_{ji}$.

Se um operador T é auto-adjunto então o “valor médio” $\langle T\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ é real para todos os $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, pois

$$\langle T\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle = \overline{\langle T\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

Em particular, os valores próprios de um operador auto-adjunto T são reais, pois se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio com valor próprio λ , então

$$\lambda = \langle T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle / \|\mathbf{v}\|^2.$$

Um operador S é dito *hemi-hermítico* (em inglês *skew-hermitian*) se $S^* = -S$, e portanto a sua matriz numa base ortonormada satisfaz $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$. Se o espaço é complexo, $S = iT$ é hemi-hermítico sse T é hermítico. Em particular, os valores próprios de um operador hemi-hermítico num espaço euclidiano complexo estão no eixo imaginário $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Um operador hemi-hermítico de um espaço euclidiano real é também dito *hemi-simétrico*, pois a sua matriz numa base ortonormada satisfaz $a_{ij} = -a_{ji}$, e não pode ter valores próprios diferentes de zero.

- Se T é auto-adjunto, então também os operadores T^n , com $n = 1, 2, \dots$, são auto-adjuntos. Se T é também invertível, então o inverso T^{-1} é também auto-adjunto.
- Sejam T e S dois operadores hermíticos de um espaço euclidiano $\mathbf{E}$. Em geral, a composição TS não é hermítico (encontre exemplos). A composição TS é um operador hermítico se T e S comutam, ou seja, se $TS = ST$.
- Se S é um operador hemi-simétrico de um espaço vetorial real $\mathbf{E}$, então $\langle S\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.
- Para cada operador linear $T \in \text{End}(\mathbf{E})$, o operador T^*T é auto-adjunto. Se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio de T com valor próprio λ , então $\langle T^*T\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\lambda|^2 \|\mathbf{v}\|^2$.
- Cada operador $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ de um espaço euclidiano de dimensão finita pode ser decomposto, de maneira única, como soma

$$T = X + iY$$

de um operador hermítico X e um operador hemi-hermítico iY (ou seja, i vezes um operador hermítico Y). Basta escolher $X = (T + T^*)/2$ e $Y = (T - T^*)/2i$. Observe que $T^* = X - iY$. Mostre que T é normal, ou seja, comuta com o próprio adjunto (i.e. $TT^* = T^*T$), sse $XY = YX$.

- Verifique a *identidade de polarização*

$$\langle A(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle - \langle A(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = 2(\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle A\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle) \quad (26)$$

válida para um operador genérico $A \in \text{End}(\mathbf{H})$. Aplique (26) aos pares de vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}$, $i\mathbf{y}$, e deduza que o único operador que verifica $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ é o operador trivial $A = 0$. Mostre que se $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ é real para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, então $\langle (A - A^*)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Deduza que um operador com “valor médio” $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$ para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ é auto-adjunto.

- A inversão $T(x, y, z) = (-x, y, z)$ relativamente ao plano y - z é simétrica? E a inversão relativamente a um plano genérico de $\mathbb{R}^3$ passando pela origem?
 - [Ap69] Vol. 2 5.5.
3. (adjoint and self-adjointness in infinite dimension) When the euclidian space $\mathbf{H}$ has infinite dimension, interesting linear operators may be defined only in proper subspaces of well behaved vectors, i.e. are linear maps $L : \mathbf{D}(L) \rightarrow \mathbf{H}$ from a “domain” $\mathbf{D}(L) \subset \mathbf{H}$ into $\mathbf{H}$. When $\mathbf{H}$ is an Hilbert space, an operator is said *symmetric* or *hermitian* if $\langle L\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle$ for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}(L)$ (typically we also ask that such domain is “dense” in $\mathbf{H}$, if you know what it means). The term *self-adjoint* is reserved to operators which are defined in the whole $\mathbf{H}$, satisfying $\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle$ for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$. Such operators are actually bounded, i.e. satisfy a bound $\|T\mathbf{v}\| \leq K \|\mathbf{v}\|$ for all $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ and some minimal $K := \|T\| < \infty$. Typical differential operators are not bounded!
4. (multiplication and differential operators) Physicists interested in solving ordinary or partial differential equations must deal with differential and multiplication operators defined in spaces of functions, which are infinite dimensional linear spaces. For example, we may consider the space $\mathbf{E}$ of continuous functions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, equipped with the inner product $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$. Any continuous function $m(t)$ induces a *multiplication operator* $M \in \text{End}(\mathbf{E})$ defined as

$$(Mf)(t) := m(t) f(t)$$

It is clear that M satisfies $\langle f, Mg \rangle = \langle Mf, g \rangle$ for all $f, g \in \mathbf{E}$. Differential operators can only operate on smaller domains, for example in the subspaces $\mathbf{E}^k \subset \mathbf{E}$ of those functions which admit $k = 1, 2, \dots$, or ∞ continuous derivatives. There, we may define the *derivative operator*

$$(\partial f)(t) := f'(t),$$

its powers ∂^k , and therefore polynomials $L = \sum_{k=0}^N a_k \partial^k$. Looking for the adjoint of ∂ , we observe that integration by parts gives the identity

$$\langle f, \partial g \rangle = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \langle \partial f, g \rangle$$

Choosing appropriate “boundary conditions”, for example restricting ∂ to the subspace $\mathbf{E}_0^1 \subset \mathbf{E}^1$ of those functions satisfying $f(a) = f(b)$, this operator ∂ becomes skew-symmetric. Most important is the *Laplacian* $\Delta := \partial^2$, which therefore is symmetric when defined on $\mathbf{E}_0^2$.

- Given a continuous function $q(t)$ and continuously differentiable function $p(t)$, consider the subspace $\mathbf{E}_p^2 \subset \mathbf{E}^2$ of those twice continuously differentiable functions satisfying the boundary conditions $p(a)f(a) = p(b)f(b) = 0$, and the *Sturm-Liouville operator* $L : \mathbf{E}_p^2 \rightarrow \mathbf{E}$, defined by

$$Lf := (pf')' + qf.$$

For example, if $q = 0$ e $p = 1$, we recover the Laplacian $\Delta = D^2$. Show that L is symmetric.

- Let $P : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ be the *primitive operator*, defined as

$$(Pf)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Show that it is skew-symmetric when restricted to the kernel $\mathbf{V} = \ker(I)$ of the linear form $I(f) := \int_a^b f(t) dt$.

5. (**isometrias e operadores ortogonais/unitários**) Seja $\mathbf{H}$ um espaço euclidiano, real ou complexo. Um operador linear $T \in \text{End}(\mathbf{H})$ é uma *isometria (linear)* se preserva os produtos internos, i.e. se

$$\langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$$

ou seja, se preserva as normas, i.e. $\|T\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}$, e portanto as distâncias. Se existe o operador adjunto $T^* \in \text{End}(\mathbf{H})$, então esta condição é equivalente a $T^*T = I$.

Um operador linear $U \in \text{End}(\mathbf{H})$ é dito *unitário* se

$$U^*U = UU^* = I,$$

ou seja, se é uma isometria invertível, e portanto $U^{-1} = U^*$. Um operador unitário de um espaço euclidiano real é também dito *ortogonal*.

Se $\mathbf{H}$ é um espaço euclidiano de dimensão finita, então toda a isometria é unitária, pois envia uma base (finita) ortonormada numa base ortonormada, e portanto é invertível. Se o espaço é complexo, $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, então a matriz $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ que define um operador numa base ortonormada é uma “matriz unitária”, ou seja, tal que $A^*A = AA^* = I$. Se o espaço é real, $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$, então a matriz A que define um operador ortogonal numa base ortonormada é uma “matriz ortogonal”, ou seja, tal que $A^T A = AA^T = I$.

Os valores próprios de um operador unitário estão na circunferência unitária $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, i.e. têm valor absoluto $|\lambda| = 1$. Em particular, um operador ortogonal só pode ter valores próprios ± 1 .

- Mostre que $\|T\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}$ implica $\langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$ (aplique a primeira identidade aos vetores $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ou $\mathbf{x} + i\mathbf{y}$, dependendo se o espaço é real ou complexo).
- As translações $T_{\mathbf{y}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y}$ são isometrias, ou seja preservam os produtos internos, mas não são transformações lineares, se $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.
- Em dimensão infinita existem isometrias não invertíveis, e portanto não unitárias! Por exemplo, o *shift* $\sigma : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, que envia $\sigma(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_{k+1}$.
- Mostre que um operador $U \in \text{End}(\mathbf{H})$ de um espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$ é unitário sse envia bases ortonormadas em bases ortonormadas.
- Sejam $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ duas bases ortonormadas do espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H}$, e seja U a matriz que realiza a mudança de base, ou seja, a matriz cujas colunas são as componentes dos $\mathbf{v}_k$ relativamente à base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Mostre que U é unitária, se $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ é um espaço euclidiano complexo, ou ortogonal, se $\mathbf{H} \approx \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano real.

- [Ap69] Vol. 2 5.11.
- [Ba77] 4.3.

6. (Mazur-Ulam theorem) An isometry $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ between normed linear spaces is not necessarily affine! For example, $f(x) = (x, |x|)$ defines an isometry between the real line $\mathbb{R}$, equipped with the standard euclidean distance, and the plane $\mathbb{R}^2$, equipped with the sup norm $\|(x, y)\|_{\max} := \max\{|x|, |y|\}$. What is true is the content of the *Mazur-Ulam theorem*²⁰: any bijective isometry between normed linear spaces is affine.

7. (transformações de Cayley) O mapa de Cayley

$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

é um automorfismo da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Em particular, envia o semi-plano superior $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \Im(z) > 0\}$ no disco unitário $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < 1\}$, e a “circunferência” $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ (a fronteira ideal $\partial\mathbb{H}$ do “plano hiperbólico”) na circunferência unitária $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| = 1\}$. Esta ideia admite muitas generalizações.

Por exemplo, se S é uma matriz hemi-hermítica (ou hemi-simétrica), e portanto os seus valores próprios são imaginários puros, então $I + S$ é invertível e a *transformada de Cayley*²¹

$$U := (I - S)(I + S)^{-1}$$

é uma matriz unitária (respetivamente, ortogonal).

Seja $\mathfrak{H}_g$ o *espaço de Siegel* de genus g , o espaço das matrizes complexas simétricas $Z = X + iY \in \text{Mat}_{g \times g}(\mathbb{C})$ tais que a parte imaginária Y é positiva. Então o mapa

$$Z \mapsto (Z - iI)(Z + iI)^{-1}$$

envia $\mathfrak{H}_g$ no espaço $\mathbb{D}_g$ das matrizes simétricas $Z \in \text{Mat}_{g \times g}(\mathbb{C})$ tais que $I - Z\overline{Z} > 0$, ou seja, tais que $\|Z\| < 1$, onde a “norma” de uma matriz está definida por $\|Z\| := \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|Z\mathbf{v}\|$.

²⁰S. Mazur and S. Ulam, Sur les transformations isométriques d’espaces vectoriels normés, *C. R. Acad. Sci. Paris* **194** (1932) 946-948.

²¹A. Cayley, Sur quelques propriétés des déterminants gauches, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **32** (1846), 119-123.

16 Teorema espectral

DRAFT

1. (teorema espectral para operadores auto-adjuntos) Seja $L \in \text{End}(\mathbf{H})$ um operador auto-adjunto do espaço euclidiano complexo de dimensão finita $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ (ou um operador simétrico do espaço euclidiano real $\mathbf{E}$). Os valores próprios de A são reais. Vetores próprios com valores próprios distintos são ortogonais. De fato, se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e $A\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$ então

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu) \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0.$$

Portanto, $\lambda \neq \mu$ implica $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. O *teorema espectral* afirma que existe uma base ortonormada $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ de $\mathbf{H}$ formada por vetores próprios de L , com valores próprios reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, respetivamente. Se P_λ denota a projeção ortogonal de $\mathbf{H}$ sobre o espaço próprio $\mathbf{H}_\lambda \subset \mathbf{H}$, então $L = \sum_{\lambda \in \sigma(L)} \lambda P_\lambda$. Em particular, se a matriz auto-adjunta $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ representa L numa base ortonormada, então existe uma matriz unitária U tal que

$$A = U \Lambda U^*.$$

onde Λ é a matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (as colunas de U são os vetores próprios de A na base ortonormal inicial). Se o espaço euclidiano é real, então existe uma matriz ortogonal O tal que

$$A = O \Lambda O^\top.$$

De fato, pelo teorema fundamental da álgebra, o polinómio caraterístico $\det(\lambda - A)$ da matriz auto-adjunta A que representa L numa base ortonormada possui (pelo menos) uma raiz λ , e portanto o operador admite um vetor próprio $\mathbf{v}$ com valor próprio λ , que é real. Mas o espaço ortogonal $(\mathbb{C}\mathbf{v})^\perp \approx \mathbb{C}^{n-1}$ é um subespaço invariante de L , e a restrição de L a este espaço é ainda um operador auto-adjunto. O teorema espectral segue por indução finita, sendo trivial num espaço de dimensão um $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}$. $\square$

- Verifique que um operador auto-adjunto L num espaço euclidiano de dimensão um $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ é uma homotetia $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Seja $\mathbf{v}$ um vetor próprio do operador auto-adjunto L . Mostre que $(\mathbb{C}\mathbf{v})^\perp$ é um subespaço invariante de L .
 - Mostre que as potências de $L = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$ são $L^n = \sum_{\lambda \in \sigma(L)} \lambda^n P_\lambda$.
 - Observe que um operador $L = iT$ é hemi-hermítico sse T é hermítico. Enuncie o correspondente teorema espectral para operadores hemi-hermíticos.
 - Diagonalize, if possible, the transformation $T(z, w) = (z - iw, iz - 2w)$ of $\mathbb{C}^2$ equipped with the standard inner product.
2. (diagonalização simultânea) Sejam L e M são dois operadores lineares definidos num espaço linear $\mathbf{V}$. Se L e M comutam, e se $\mathbf{V}_\lambda$ é um espaço próprio de L associado ao valor próprio λ , então $\mathbf{V}_\lambda$ é invariante para M , i.e. $M(\mathbf{V}_\lambda) \subset \mathbf{V}_\lambda$. De fato, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$, então

$$L(M\mathbf{v}) = M(L\mathbf{v}) = \lambda M\mathbf{v},$$

o que significa que $M\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$.

Em particular, se L e M são dois operadores auto-adjuntos, definidos num espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$, então existe uma base ortonormada de vetores próprios para os dois operadores sse L e M comutam.

3. (min-max theorem) The eigenvalues of a self-adjoint operator $L \in \text{End}(\mathbf{H})$ in a complex or real Euclidian space $\mathbf{H}$ may be characterized a certain extremal properties, and this is useful when we face the problem of estimating them. The *quociente de Rayleigh-Ritz quotient*^{22 23} is the function $R_A : \mathbf{H} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$R_L(\mathbf{x}) := \frac{\langle L\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

²²J.W. Strutt (later Lord Rayleigh), In Finding the Correction for the Open End of an Organ-Pipe, *Phil. Trans.* **161** (1870) 77.

²³W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. reine angew. Math.* **135** (1908).

Let $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_n$ be the eigenvalues of L , arranged in non-decreasing order (some eigenvalues may be equal). Then

$$\lambda_k = \min_{\dim V=k} \max_{0 \neq \mathbf{x} \in V} R_L(\mathbf{x})$$

e

$$\lambda_k = \max_{\dim V=n-k+1} \min_{0 \neq \mathbf{x} \in V} R_L(\mathbf{x})$$

In particular, $\lambda_1 \leq R_L(\mathbf{x}) \leq \lambda_n$, and the limits are attained.

4. (Laplacian and momentum operators) Let $\mathbf{E}$ be the space of continuous functions $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, equipped with the inner product $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) \overline{g(x)} dx$. Recall that the *Laplacian* is the differential operator $\Delta = \partial^2$, namely

$$(\Delta f)(x) := f''(x).$$

Let $\mathbf{E}_0^\infty \subset \mathbf{E}$ be the space of infinitely differentiable functions $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the boundary conditions $f(0) = f(\pi) = 0$ (the space of transversal displacements of a vibrating string). As an operator $\Delta : \mathbf{E}_0^\infty \rightarrow \mathbf{E}$ the Laplacian is symmetric, i.e. $\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle$ for all $f, g \in \mathbf{E}_0^\infty$. It is a simple exercise on ordinary differential equations to show that the eigenvalues of the Laplacian are $\lambda_n = -n^2$, with $n = 1, 2, 3, \dots$, and the corresponding eigenfunctions are, for example,

$$\mathbf{v}_n(x) = \sin(nx).$$

Observe that the Laplacian is not bounded, since $\|\Delta \mathbf{v}_n\| = n^2 \|\mathbf{v}_n\|$.

The “momentum operator” (in quantum mechanics) $P = -i\partial$ is also symmetric when restricted to the subspace $\mathbf{E}_0^\infty \subset \mathbf{E}$ (since ∂ is skew-symmetric). Nevertheless, it does not have any eigenvalue! Indeed, functions satisfying $Pf = \lambda f$ are the plane waves $e^{i\lambda x}$, but no such exponential can satisfy also the boundary conditions $f(0) = f(\pi) = 0$.

- Show that the “positive definite” Laplacian $-\Delta$ is positive, namely

$$\langle -\Delta f, f \rangle > 0$$

for all non-trivial $f \in \mathbf{E}_0^\infty$. Indeed, integrating by parts and using the boundary conditions, $f(0) = f(\pi) = 0$, show that

$$\langle -\Delta f, f \rangle = \langle \nabla f, \nabla f \rangle = \|\nabla f\|^2.$$

5. (equação de Schrödinger estacionária) Considere a equação de Schrödinger estacionária

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E \psi$$

para a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula livre, onde m é a massa da partícula, e $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida ($\hbar \simeq 6.262 \dots \times 10^{-34}$ J·s).

- Determine para quais valores E da energia existem soluções não triviais da equação no intervalo $x \in [0, \ell]$ com condições de fronteira $\psi(0) = 0$ e $\psi(\ell) = 0$ (partícula numa caixa).
6. (spectral theorem for normal operators) The largest class of operators where is possible to prove the spectral theorem is the class of normal operators.

Let $\mathbf{H} \approx \mathbb{C}^n$ be a finite dimensional complex Euclidean space. A linear operator N is said *normal* if it commutes with its adjoint, i.e. if $N^*N = NN^*$. Hermitian and skew-hermitian operators are, in particular, normal operators. Indeed, an operator is normal iff the Hermitian operator A and the skew-Hermitian operator B of the decomposition $T = A + iB$ commute.

- Show that N is normal iff N^* is normal.

- Show that N is normal if $\|N\mathbf{v}\| = \|N^*\mathbf{v}\|$ for all vectors $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Conclude (applying the above observation to the operator $N - \lambda$ and its adjoint $N^* - \bar{\lambda}$) that if N is a normal operator, then $\mathbf{v}$ is an eigenvector of N with eigenvalue λ iff it is an eigenvector of N^* with eigenvalue $\bar{\lambda}$.
- Deduce from the previous exercise that two eigenvectors of a normal operator corresponding to different eigenvalues are orthogonal.

The spectral theorem now reads: a normal operator N on a finite dimensional complex Euclidean space $\mathbf{H}$ admits an orthonormal basis of eigenvectors, and therefore is a directed sum $N = \oplus_k \lambda_k$ of homoteties w.r. to an orthogonal decomposition $\mathbf{H} = \oplus_k \mathbf{H}_k$, where the $\mathbf{H}_k$'s are the eigenspaces of the distinct eigenvalues λ_k 's (which are just complex, not necessarily real!).

The proof, again, is by induction. The operator N admits an eigenvalue λ , by the fundamental theorem of algebra. The corresponding eigenspace $\mathbf{H}_\lambda$ is also an eigenspace of the adjoint operator N^* with eigenvalue $\bar{\lambda}$. But then the orthogonal subspace $(\mathbf{H}_\lambda)^\perp$ is N -invariant, and has dimension strictly smaller than the dimension of $\mathbf{H}$. The theorem follows by induction observing that it is trivial in dimension one. $\square$

7. (Schur lemma) The spectral theorem may be used to give a simple proof of the following result about the structure of generic complex square matrices (which is independent of the euclidian structure necessary to define self-adjointness!). Any $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ is conjugated to a upper diagonal matrix B through a unitary matrix $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, i.e.

$$A = U^* B U.$$

8. (corda vibrante e harmônicas) As pequenas vibrações transversais de uma corda de comprimento ℓ , tensão k e densidade linear ρ são modeladas pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (27)$$

com condições de fronteira $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$, onde $u(x, t)$ denota o deslocamento transversal da corda na posição $x \in [0, \ell]$ e no tempo t , e $c = \sqrt{k/\rho}$.

O produto $u(x, t) = X(x)T(t)$ é uma solução “separável” de (27) se $XT'' = c^2 X''T$, e portanto se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$X'' = \lambda X \quad \text{e} \quad T'' = \lambda c^2 T$$

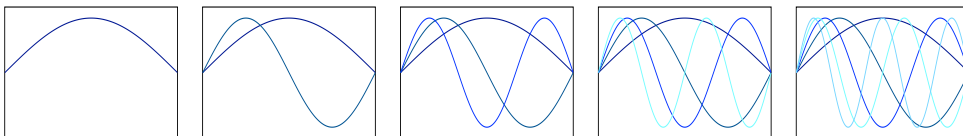
As únicas soluções não triviais do problema de Sturm-Liouville $X'' = \lambda X$ no intervalo $[0, \ell]$ com condições de fronteira nulas $X(0) = X(\ell) = 0$ são proporcionais a $X_n(x) = \sin(\pi n x / \ell)$ e têm valores próprios $\lambda_n := -\pi^2 n^2 / \ell^2$ com $n = 1, 2, 3, \dots$. As soluções separáveis do problema da corda vibrante são portanto as *ondas estacionárias*

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &:= \left(a_n \cos(2\pi \nu_n t) + b_n \sin(2\pi \nu_n t) \right) \sin(2\pi x / \ell_n) \\ &= A_n \sin(2\pi \nu_n t + \tau_n) \sin(2\pi x / \ell_n), \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

onde os coeficientes a_n e b_n , ou a amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, e a fase $\tau_n = \arctan(a_n/b_n)$ são constantes arbitrárias, e as *frequências próprias* e os *comprimentos de onda* são

$$\nu_n := \frac{c}{2\ell} n \quad \text{e} \quad \ell_n := \frac{2\ell}{n}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots,$$

respetivamente. A primeira frequência, $\nu_1 = c/\ell_1$, é dita *som* (ou *tom*, ou *modo*) *fundamental*, e as outras, $\nu_n = n\nu_1 = c/\ell_n$, com $n = 2, 3, 4, \dots$, são ditas *n-ésimas harmônicas* (ou *overtones*) da corda.



Primeiras 5 harmônicas de uma corda vibrante.

Por exemplo, se a fundamental é o A_4 de 440 Hz (é o caso da segunda corda de um violino), então a segunda harmónica é o A_5 de 880 Hz, a terceira está próxima do E_6 de 1318.5 Hz, a quarta é o A_6 de 1760 Hz, a quinta está próxima do $C\sharp_7$ de 2217.5 Hz, a sexta está próxima do E_7 de 2637 Hz, a sétima está próxima do G_7 de 3136 Hz, ... Em particular, as primeiras harmónicas contêm a “fundamental” A , a “quinta justa” E e a “terça maior” $C\sharp$, as três notas (“tríade maior”) do “acorde maior”!²⁴

- A primeira corda de um violino, que tem comprimento 325 mm e costuma ser afinada com uma tensão de 70 N (ou seja, $\simeq 7.1$ Kg), vibra com frequências 660 Hz, 1320 Hz, 1980 Hz, ... O que deve fazer um violinista para obter o Lá5 de 880 Hz com esta corda?

9. (observáveis em mecânica quântica) O espaço dos estados de uma partícula quântica (não relativística) é um espaço projetivo $\mathbb{P}\mathbf{H} := (\mathbf{H} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ de um espaço de Hilbert $\mathbf{H}$ (i.e. um espaço euclidiano complexo de dimensão infinita). Os observáveis são operadores auto-adjuntos A , cujos vetores próprios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ formam uma base de $\mathbf{H}$. Os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ são os possíveis resultados das observações. O valor esperado da observação do observável A no estado unitário $\mathbf{v}$ (i.e. $\|\mathbf{v}\|^2 = 1$) é dado por

$$\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \sum_n \lambda_n |v_n|^2$$

se $\mathbf{v} = \sum_n v_n \mathbf{e}_n$, onde os $v_n := \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle$ são os coeficientes de Fourier de $\mathbf{v}$ relativamente à base dos vetores próprios.

²⁴To learn more about music, you may want to visit <http://www.phys.unsw.edu.au/music/>

17 Formas quadráticas e cónicas

1. (**formas quadráticas**) Uma *forma quadrática* em n variáveis reais é um polinómio homogéneo $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de grau 2 nas coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}^n$, ou seja, um polinómio $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Uma matriz quadrada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ (e a escolha de uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$, por exemplo a base canónica) define uma forma quadrática $Q_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$, ou seja,

$$Q_A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j$$

Dada uma forma quadrática Q , existem muitas matrizes A tais que $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$, sendo apenas fixados os elementos diagonais $a_{ii} = Q(\mathbf{e}_i)$ e as somas $a_{ij} + a_{ji}$. Em particular, substituindo A por $(A + A^\top)/2$, podemos assumir que uma forma quadrática é definida por uma matriz simétrica.

- Determine a matriz simétrica que define as seguintes formas quadráticas

$$Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 \quad Q(x, y) = 2x^2 + 6xy + 7y^2$$

- Seja $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática. Mostre que $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2} (Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y}))$$

é uma “forma bilinear”, ou seja, é linear em cada variável, e que a forma quadrática pode ser reconstruída como $Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

2. (**diagonalização de Jacobi e lei de inércia de Sylvester**) Seja $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$ uma forma quadrática no espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$, definida pela matriz simétrica $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ relativamente à base canónica $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (ou outra base ortonormada), onde $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$. Se X denota o vetor coluna $(x_1, \dots, x_n)$, então a forma quadrática pode ser escrita em forma matricial

$$Q(\mathbf{x}) = X^\top A X.$$

Pelo teorema espectral, existe uma base ortonormada de vetores próprios $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ de A , com valores próprios (reais) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, e portanto uma matriz ortogonal $U = (u_{ij}) \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, cujas colunas são os vetores próprios (ou seja, $\mathbf{v}_j = \sum_i u_{ij} \mathbf{e}_i$), tal que

$$U^\top A U = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Nesta base, a forma quadrática é “diagonal”. De fato, se $\mathbf{x} = y_1 \mathbf{v}_1 + \dots + y_n \mathbf{v}_n$ e portanto o vetor coluna das novas coordenadas é $Y = U^\top X$, então

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= X^\top A X = (UY)^\top A (UY) \\ &= Y^\top \Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

Mais uma mudança de coordenadas $y_k \mapsto z_k := \sqrt{|\lambda_k|} y_k$, não necessariamente ortogonal se $|\lambda_k| \neq 1$, pode ainda transformar a matriz Λ numa matriz diagonal com valores próprios 0 ou ± 1 . Assim, existe uma base ortogonal (não necessariamente ortonormada!) na qual a forma quadrática é

$$Q(\mathbf{x}) = (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n_+}^2) - (z_{n_++1}^2 + z_{n_++2}^2 + \dots + z_{n_++z_-}^2)$$

As dimensões $n_\pm$ e $n_0 := n - (n_+ + n_-)$ são invariantes da forma quadrática.

- Diagonalize as seguintes formas quadráticas:

$$Q(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad Q(x, y) = xy \quad Q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$$

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 4yz + 6xz - 3z^2$$

3. (**quociente de Rayleigh**) Seja $S \in \text{End}(\mathbf{E})$ um operador simétrico do espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbf{E} \approx \mathbb{R}^n$, definido numa base ortonormada (e.g. a base canónica) pela matriz simétrica $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, e seja

$$Q_A(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j$$

a forma quadrática associada. Os extremos da forma quadrática Q_A na esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\mathbf{x}\|^2 = 1\}$ são atingidos nos pontos onde o gradiente de $Q_A(\mathbf{x})$ é proporcional ao gradiente de $\|\mathbf{x}\|^2$, ou seja nos pontos onde existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Em particular, um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ onde Q_A é máximo/mínimo é um vetor próprio de A com valor próprio λ , e este valor próprio é o maior/menor dos valores próprios de A . Em particular, uma matriz real/operador simétrica/o admite pelo menos um valor próprio (pois a esfera é compacta, e a função Q_A é contínua).

O *quociente de Rayleigh* da matriz/operador A é a função

$$R_A(\mathbf{x}) := \frac{Q_A(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

definida em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- Seja T um operador arbitrário definido no espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$. Mostre que existe um operador simétrico A tal que $\langle T\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
 - Use os multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos locais de Q_A na esfera unitária.
 - Em alternativa (se não sabe o que são os multiplicadores de Lagrange), assuma que $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ é um extremo local de Q_A na esfera unitária. Os “equadores” que passam por $\mathbf{x}$ são os caminhos $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{x} + \sin(t)\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$, onde $\mathbf{v}$ é um vetor unitário do hiperplano $\mathbf{x}^\perp$ (observe que $\mathbf{x} + \mathbf{x}^\perp$ é o plano tangente à esfera unitária no ponto $\mathbf{x}$). Calcule a derivada da função $t \mapsto f(t) := Q_A(\mathbf{r}(t))$ no instante $t = 0$ (usando a simetria de A). Mostre que se $\mathbf{x}$ é um extremo local, então a derivada $f'(0)$ é igual a zero para todos os $\mathbf{v} \in \mathbf{x}^\perp$, e isto implica que $A\mathbf{x}$ é proporcional a $\mathbf{x}$. Deduza que $\mathbf{x}$ é um vetor próprio de A .
 - Mostre que o quociente de Rayleigh $R_A(\mathbf{x})$ de um vetor próprio $\mathbf{x}$ é igual ao valor próprio associado λ .
 - Deduza que o quociente de Rayleigh atinge máximo e mínimo, e que estes valores são o maior e o menor valor próprio de A , respetivamente.
4. (**frequências próprias**) Numa vizinhança de um mínimo local não degenerado (que podemos assumir ser a origem do sistema de coordenadas), a energia potencial de um sistema mecânico pode ser aproximada por uma forma quadrática positiva

$$V(\mathbf{x}) \simeq \sum_{i,j=1}^3 u_{ij} q_i q_j,$$

onde $U = (u_{ij}) := (\partial^2 V / \partial q_i \partial q_j(0))$ é a matriz jacobiana de V , e $\sum_{i,j} u_{ij} q_i q_j > 0$ se $\mathbf{q} \neq 0$. Numa base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ que diagonaliza Q , a equação de Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V$ fica decomposta nas 3 equações

$$m\ddot{y}_i = -\omega_i^2 y_i \quad i = 1, 2, 3$$

onde $\mathbf{r} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$, e $\lambda_i := \omega_i^2 > 0$ denotam os autovalores de Q . As trajetórias são combinações lineares de 3 osciladores harmónicos

$$\mathbf{r}(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \mathbf{e}_1 + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \mathbf{e}_2 + A_3 \sin(\omega_3 t + \phi_3) \mathbf{e}_3$$

com amplitudes A_i e fases iniciais ϕ_i . Os movimentos são periódicos ou quase-periódicos, dependendo se as frequências próprias ω_1, ω_2 e ω_3 são racionalmente dependentes ou não.

5. (tensor de inércia e eixos principais) A energia cinética de rotação de um corpo rígido é

$$E = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, I \boldsymbol{\omega} \rangle$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular e I é o *tensor de inércia*, uma matriz simétrica (e positiva). Pelo teorema espectral existe um referencial em que o tensor de inércia é diagonal. Os vetores próprios são os “eixos principais”, e os valores próprios são os momentos de inércia principais.

6. (pseudo-métrica de Minkowsky)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

7. (conic sections) The first, tautological, definition is the following: a *conic section* is the intersection between a (right circular) cone $C \subset \mathbb{R}^3$ and a plane $P \subset \mathbb{R}^3$ (not passing through the vertex, for otherwise we have the degenerate cases of a point, a line or two lines).

There are other definitions, much more useful in physical applications, which were already known to Apollonius of Perga and Pappus of Alexandria. The modern route to the understanding of them passes through the construction of the *Dandelin spheres*. These are spheres tangent to both the cone C and the plane P , inside the cone itself. There are two of them, say $S_{\pm}$, in the case of an ellipse (one on each side of the plane) or an hyperbola (one in each branch of the hyperbola), and only one for a parabola (say, the one with “+”). The points where the Dandelin spheres touch the plane P , say $F_{\pm} := S_{\pm} \cap P$, are called *foci* of the conic section. It is clear that when the plane P is orthogonal to the axis of the cone, the two foci coincide and the conic section is a circle. Each Dandelin sphere touches the cone at a circle $C_{\pm}$, belonging to a certain plane $P_{\pm}$, and the intersection of each of those planes with P determines a line $D_{\pm} := P_{\pm} \cap P$, called *directrix* of the conic section.

Second definition: *focal properties*. Consider a moving point $\mathbf{r}$ in the Euclidean plane $P \approx \mathbb{R}^2$. Let $f_{\pm} := d(\mathbf{r}, F_{\pm})$ denote the distances between $\mathbf{r}$ and a foci $F_{\pm}$, and let $\delta_{\pm} := d(\mathbf{r}, D_{\pm})$ denote the distances between $\mathbf{r}$ and the directrices $D_{\pm}$. Then, the moving point $\mathbf{r}$ describes

- an *ellipse* iff $f_{+} + f_{-} = \text{constant}$;
- an *hyperbola* iff $|f_{+} - f_{-}| = \text{constant}$;
- a *parabola* iff $f_{+} = \delta_{+}$.

Third definition: *eccentricity*. The three conditions above may be merged into one single condition relating the distances between the moving point and one focus or one directrix, respectively. A moving point $\mathbf{r}$ in the plane describes a conic section if the ratio $e := f_{+}/\delta_{+}$ is constant, i.e.

$$f_{+} = e \delta_{+}. \quad (28)$$

The constant ratio e is called *eccentricity* of the conic section. One has an ellipse if $e < 1$, an hyperbola if $e > 1$, and a parabola if $e = 1$.

Polar equation. Consider the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$, with coordinates x - y . Modulo a translation, we may assume that one of the foci is at the origin, say $F_{+} = (0,0)$. Modulo a rotation, we may also assume that the directrix is a vertical line $D_{+} = \{x = d\}$, for some $d = d(F_{+}, D_{+}) > 0$. Then, if the moving point has polar representation $\rho e^{i\theta}$, i.e. $\mathbf{r} = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$, the defining equation (28) reads

$$\rho = e |\rho \cos(\theta) - d|.$$

Solving for ρ , we get

$$\rho = \frac{ed}{e \cos(\theta) \pm 1}.$$

If $e \leq 1$, the only solution is the one with the + sign, and the curve is an ellipse ($e < 1$) or a parabola ($e = 1$). If $e > 1$, the curve is a hyperbola, with the two solutions corresponding to its two branches.

Cartesian equations. Good looking Cartesian equations are those which are symmetric w.r. to the origin, i.e. such that $\mathbf{r}$ and $-\mathbf{r}$ both belong to the curve. The canonical form of an ellipse or a hyperbola is then

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

The foci are $F_{\pm} = (\pm ae, 0)$, while the directrices are the vertical lines $D_{\pm} = \{x = \pm a/e\}$. If $e < 1$, hence it is an ellipse, we may write

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (29)$$

with $a > 0$ and $b = a\sqrt{1-e^2} \leq a$. The foci are $F_{\pm} = (\pm c, 0)$ with $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. The case $e = 0$, hence $a = b$ and $c = 0$, is a circle centered at the origin. If $e < 1$, hence it is a hyperbola, we may write

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (30)$$

with $a > 0$ and $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. The foci are $F_{\pm} = (\pm c, 0)$ with $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. The canonical form of a parabola, with focus at $F = (h, 0)$ and directrix $D = \{x = -d\}$ is

$$\boxed{y^2 = 4dx} \quad (31)$$

- Use the Dandelin spheres to prove that the tautological definition of the conic sections implies their focal properties.
 - Check that the canonical Cartesian equations (29), (30) and (31) of the conic sections satisfy the focal properties as well as (28).
 - Compute the area of the region bounded by the ellipse of (29).
8. (degree 2 equations in the plane and conics) Consider a degree two equation in two real variables, x and y , like

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad (32)$$

where $a, b, \dots, \gamma$ are real coefficients. Our task is to change coordinates and reduce (32) to canonical form.

The quadratic form $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ may be diagonalized by a orthogonal change of variables. In the new variables, say x' and y' , the equation (32) reads

$$\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + \alpha'x' + \beta'y' + \gamma' = 0,$$

where λ and μ are the eigenvalues (of the symmetric matrix inducing Q). Observe that the product of the eigenvalues is equal to the determinant of the symmetric matrix defining the quadratic form: $\lambda\mu = ac - b^2$. Completing the squares, and after a further translation of the form $x'' = x' - \xi$ and $y'' = y' - \eta$, this finally gives

$$\lambda(x'')^2 + \mu(y'')^2 = \delta,$$

if both $\lambda \neq 0$ and $\mu \neq 0$. This is an ellipse if $\lambda\mu > 0$ and δ has the right (opposite) sign, a hyperbola if $\lambda\mu < 0$ and $\delta \neq 0$, or some degenerate conics like a point (as $x^2 + y^2 = 0$), a couple of lines (as $x^2 - y^2 = 0$) or the empty set (as $x^2 + y^2 = -1$). If one of the eigenvalues vanishes, say $\lambda = 0$, we are left with a parabola

$$\lambda(y'')^2 = \delta x'',$$

or a line if also $\delta = 0$. If both the eigenvalues are zero, i.e. $\lambda = \mu = 0$, we are left with a degree one equation $\alpha'x' + \beta'y' + \gamma' = 0$, hence an affine line.

In particular, if we know a priori that the conic defined by (32) is non-degenerate, its type is determined by the sign of the determinant $d := ac - b^2 = \lambda\mu$ of the matrix of the quadratic form: we have an ellipse if $d > 0$, and hyperbola if $d < 0$, and a parabola if $d = 0$.

- Write a Cartesian equation of a right circular cone $C \subset \mathbb{R}^3$
- Find the conics defined by the following equations:

$$x^2 + xy + 2x = 0 \quad \dots \text{more exercises} \dots$$

- [Ap69], vol. 2, 5.15.

9. (motion in a central force and Kepler problem) Consider the Newton equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(\|\mathbf{r}\|) \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \quad (33)$$

describing the motion of a particle of mass $m > 0$ in a central force field $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(\|\mathbf{r}\|) \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$. If $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ denotes the velocity vector, then a computation shows that the angular momentum $\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ is a constant of the motion. If at some (initial) time the vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{v}$ are not parallel, then $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ and the motion occurs in the plane orthogonal to $\mathbf{L}$. We may therefore choose a reference Cartesian system $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ in which $\mathbf{L} = L\mathbf{k}$ for some $L > 0$, and write the position vector as $\mathbf{r}(t) = \rho \cos(\theta)\mathbf{i} + \rho \sin(\theta)\mathbf{j}$ for some time-dependent angle θ and lenght $\rho = \|\mathbf{r}\|$. In polar coordinates Newton equation (33) reads

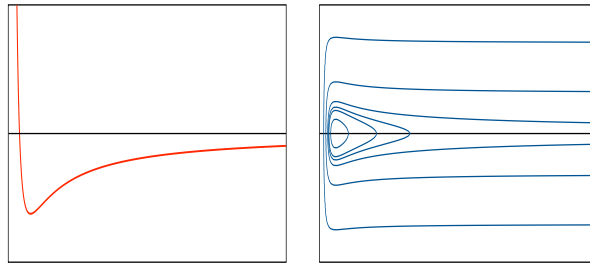
$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 &= F(\rho)/m \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

The second equation (34) says that the “areal velocity” (“velocidade areal”) $\ell := \rho^2\dot{\theta}$ is a constant of the motion, and this is *Kepler’s second law* (which therefore holds for all central forces). We specialize now to Newton’s gravitational force $F(\rho) = -\frac{GmM}{\rho^2}$, where M is the mass of the Sun and G is the gravitational constant. It may be observed that the first equation (34) then reads

$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} V_\ell(\rho),$$

where we defined the “effective potential energy” as

$$V_\ell(\rho) := \frac{1}{2}m\ell^2/\rho^2 - GmM/\rho.$$



Kepler’s effective potential and some energy level sets.

The conserved energy is therefore

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2/\rho^2 - GmM/\rho.$$

Now we set $\rho = 1/x$ and look for a differential equation for x as a function of θ . Computation shows that $dx/d\theta = -\dot{\rho}/\ell$, and, using conservation of ℓ , that $d^2x/d\theta^2 = -\rho^2\ddot{\rho}/\ell^2$. There follows that the first Newton equation (34) reads

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\theta^2} + x &= -\frac{1}{\ell^2 x^2 m} F(1/x) \\ &= -\frac{GM}{\ell^2}. \end{aligned}$$

The general solution of this second order linear differential equation is

$$x(\theta) = \frac{GM}{\ell^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)) ,$$

for some constants e and θ_0 . Back to the original radial variable we get the solution

$$\rho(\theta) = \frac{\ell^2/GM}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} ,$$

Hence, orbits are conic sections with eccentricity e and focus at the origin. We get an ellipse for $0 \leq e < 1$, corresponding to negative energy, hence to planets, and this is *Kepler's first law*. We get a parabola for $e = 1$, corresponding to zero energy, or an hyperbola for $e > 1$, corresponding to positive energy.

10. (hodograph and Hamilton's theorem) ^{25 26}

11. (Kepler & Hooke) ^{27 28}

²⁵W.R. Hamilton, The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction, *Proc. Roy. Irish Acad.* **3** (1846), 344-353.

²⁶J. Milnor, On the geometry of the Kepler problem, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 353-365.

²⁷V.I. Arnold, *Huyghens & Barrow, Newton & Hooke*, Birkhäuser, 1990.

²⁸T. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Math.* **42** (1920), 99-144.

18 Matrizes positivas e teorema de Perron-Frobenius

SKETCH

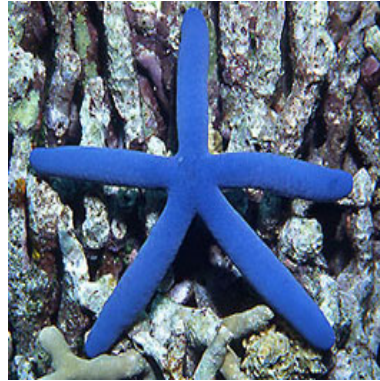
1. (positive matrices and Perron-Frobenius theorem)
2. (cadeias de Markov e teorema ergódico)
3. (random walk)
4. (gambler's ruin)
5. (discrete Laplacian)
6. (google algorithm)

19 Grupos

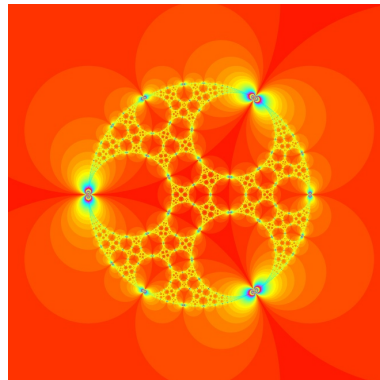
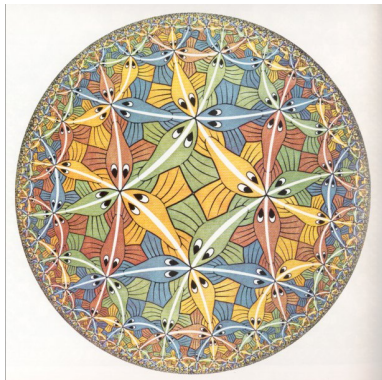
DRAFT

- (symmetries) Symmetries are, (very!) roughly speaking, movements of the background space which leave unchanged the figure/pattern we are interesting in. The concept that capture this vague idea is that of a “group”.

- Describe the symmetries of the following figures:



- Try to describe the symmetries of those other figures:



- (grupos) Um *grupo* é um conjunto G munido de uma (operação binária) lei de composição interna $G \times G \rightarrow G$, que associa a cada par ordenado $g \in G$ e $g' \in G$ um elemento $g \cdot g' \in G$ (ou simplesmente gg'), que verifica os seguintes axiomas:

G1 (*propriedade associativa*) $(gg')g'' = g(g'g'')$,

G2 (*existência do elemento neutro*) existe um elemento $1 \in G$, chamado “elemento neutro”, tal que $1g = g1 = g$.

G3 (*existência do inverso*) para todo o $g \in G$ existe um elemento $g^{-1} \in G$, chamado “inverso” de g , tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$.

Sei a lei de composição satisfaz também o axioma

G4 (*comutatividade*) $gg' = g'g$,

então o grupo é dito *comutativo*, ou *abeliano*. Num grupo abeliano costuma ser usada a notação “aditiva” $g + g'$ para a composição de g e g' , e consequentemente o elemento neutro costuma ser denotado por 0.

Num grupo (abeliano ou não), as equações

$$ax = b \quad \text{e} \quad ya = b$$

admitem sempre soluções únicas, dadas por $x = a^{-1}b$ e $y = ba^{-1}$, respetivamente (que são iguais se o grupo é abeliano). Em particular, o elemento neutro é único.

Um *homomorfismo* do grupo G no grupo H é uma transformação $\Phi : G \rightarrow H$ que “envia produtos em produtos”, ou seja, tal que $\Phi(g)\Phi(g') = \Phi(gg')$ para todos os $g, g' \in G$. Um homomorfismo invertível é chamado *isomorfismo*. A existência de um isomorfismo entre dois grupos, G e H , é uma relação de equivalência, denotada por $G \approx H$. Grupos isomorfos são indistinguíveis do ponto de vista da estrutura de grupo.

- Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, munidos da lei “adição” $a, b \mapsto a + b$, são grupos abelianos.
- Os conjuntos $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, munidos da lei “multiplicação” $a, b \mapsto a \cdot b$, são grupos abelianos.

3. (*permutações*) Seja X um conjunto não vazio. As *permutações* de X são as transformações invertíveis $f : X \rightarrow X$. O conjunto $\text{Per}(X)$ das permutações, munido da lei de composição $fg := f \circ g$, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, é um grupo. A identidade de $\text{Per}(X)$ é a transformação identidade, definida por $1(x) = x$ para todo o $x \in X$.

Por exemplo, se $X_n \approx \{1, 2, \dots, n\}$ é um conjunto finito formado por n elementos, então $\text{Per}_n := \text{Per}(X_n)$ é um grupo finito formado por $n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$ elementos.

- Calcule a tabuada de multiplicar do grupo Per_2 .
- Mostre que o grupo Per_3 não é comutativo.

4. (*isometrias*) Seja X um espaço munido de uma *métrica*, ou seja, uma função “distância” $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz os axiomas:

M1 (*simetria*) $d(x, y) = d(y, x)$;

M2 (*positividade*) $d(x, x) = 0$, e $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

M3 (*desigualdade do triângulo*) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Uma permutação $f : X \rightarrow X$ é dita *isometria* se preserva as distâncias, i.e. se

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

para todos os $x, y \in X$. O espaço $\text{Isom}(X)$ das isometrias de X é um subgrupo do grupo das permutações de X .

5. (*translações*) O espaço vetorial $G = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) é um grupo abeliano relativamente à operação “soma”, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. O elemento neutro é a origem $\mathbf{0}$. Os elementos de G podem ser pensados como “translações” do espaço $\mathbb{R}^n$. De fato, cada vetor $\mathbf{a} \in G$ define uma transformação invertível $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a},$$

com inversa $(T_{\mathbf{a}})^{-1} = T_{-\mathbf{a}}$. A composição é $T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$. O elemento neutro $\mathbf{0}$ define a translação trivial $\mathbf{x} \mapsto T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. O grupo das translações representa as mudanças da origem do referencial. Se $\mathbb{R}^n$ é munido da distância euclidiana $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, então o grupo das translações é um subgrupo $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ do grupo das isometrias de $\mathbb{R}^n$.

6. (*subgrupos e quocientes*) Um *subgrupo* do grupo G é um subconjunto $H \subset G$ que forma um grupo com respeito à lei de composição de G . Para que o subconjunto $H \subset G$ seja um subgrupo é suficiente que $ab \in H$ e $a^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$.

... to be completed ...

- Mostre que o subconjunto $H \subset G$ é um subgrupo de G se $ab^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$.
- $\mathbb{Z}$ é um subgrupo do grupo aditivo $\mathbb{R}$. Em geral, $\mathbb{Z}^n$ é um subgrupo do grupo aditivo $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos vetores de coordenadas inteiras. O quociente $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ é chamado “toro” de dimensão n . Cada ponto do toro admite um representante no “domínio fundamental” $[0, 1)^n$.

- A circunferência unitária $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| = 1\}$ é um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. A aplicação “exponencial” $\exp : x \mapsto e^{2\pi i x}$ é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ sobre o grupo $\mathbb{S}$. O núcleo é o subgrupo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx \mathbb{S}$.
- Seja $n \in \mathbb{N}$. Os múltiplos inteiros de n formam um subgrupo $n\mathbb{Z}$ do grupo aditivo $\mathbb{Z}$, e o quociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um grupo finito de ordem n . Os elementos são as classes $[k] = k + n\mathbb{Z}$ com $k = 0, 1, \dots, n-1$, e o elemento neutro é a classe $[0]$.
- Seja $G_n := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z^n = 1\} \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ o grupo das raízes n -ésimas da unidade. A aplicação “exponencial” $\exp : [k] \mapsto e^{2\pi i k/n}$ realiza um isomorfismo de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \approx G_n$.
- Um elemento a de um grupo G define dois homomorfismos $L_a : G \rightarrow G$ e $R_a : G \rightarrow G$ (multiplicação a esquerda (*left*) e a direita (*right*), definidos por

$$L_a(g) := ag \quad \text{e} \quad R_a(g) = ga,$$

respetivamente. Em particular, todo grupo G é um subgrupo de um grupo de permutações, por exemplo de $\text{Per}(G)$.

20 Grupos de matrizes

DRAFT

1. (**grupo linear**) O grupo $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ dos *automorfismos* do espaço linear $\mathbb{R}^n$ é o conjunto das aplicações lineares invertíveis $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, munido da lei de composição $LM := L \circ M$. O elemento neutro é a aplicação identidade. Fixada uma base de $\mathbb{R}^n$ (por exemplo, a base canônica), uma transformação linear invertível é definida por uma matriz quadrada regular $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, sendo $X \mapsto AX$ onde $X \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna. Portanto, $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ é isomorfo ao *grupo linear geral real*

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \det A \neq 0\}$$

das matrizes invertíveis, munido da multiplicação (linhas por colunas). O elemento neutro de é a matriz identidade I_n . As transformações do grupo linear geral representam as mudanças de bases (as mudanças de referencial que preservam a origem) do espaço linear $\mathbb{R}^n$.

O *grupo linear especial* é o subgrupo

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ t.q. } \det A = 1\}$$

das matrizes invertíveis $n \times n$ com determinante 1, ou seja, o núcleo do homomorfismo $\det : \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$. As transformações do grupo linear especial representam as mudanças de bases do espaço linear $\mathbb{R}^n$ que preservam a orientação e o volume.

O grupo linear geral real é um subgrupo do *grupo linear geral complexo*

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \text{ t.q. } \det A \neq 0\}$$

- Verifique que a função “determinante” $A \mapsto \det A$ é um homomorfismo do grupo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ no grupo multiplicativo $\mathbb{R}^\times$ dos números reais diferentes de zero, ou do grupo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ no grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$.
- Verdadeiro ou falso? Dê uma demonstração ou um contra-exemplo.

Se $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ e $B \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ então $A + B \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$?

Se $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ e $B \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ então $AB \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$?

Se $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ e $AB \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ então $B \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$?

2. (**grupo de Galilei**)
3. (**conformal maps and Möbius group**)
4. (**grupo ortogonal, rotações**) O grupo das *isometrias lineares* do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o subgrupo dos automorfismos $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preservam o produto escalar canônico, ou seja, tais que $\langle L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Fixada a base canônica (ou outra base ortonormada), a transformação $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $X \mapsto AX$ onde $X \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, é uma isometria sse $A^\top A = AA^\top = I_n$ (ou seja, se A é invertível e a sua inversa é $A^{-1} = A^\top$). Portanto, o grupo das isometrias lineares de $\mathbb{R}^n$ é isomorfo ao *grupo ortogonal*

$$\mathbf{O}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ t.q. } A^\top A = AA^\top = I_n\}$$

das matrizes ortogonais. É possível mostrar que toda a isometria do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é do gênero $\mathbf{x} \mapsto L_A \mathbf{x} + \mathbf{b}$ com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, ou seja, é a composição de uma “isometria linear” (uma isometria que preserva a origem) e uma translação $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$.

O *grupo especial ortogonal* é o subgrupo $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes ortogonais $A \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ com determinante $\det A = 1$. É chamado grupo das *rotações*, ou grupo das isometrias lineares “diretas” de $\mathbb{R}^n$ (ou seja, isometrias lineares que preservam a ‘orientação’).

O *grupo ortogonal complexo* é

$$\mathbf{O}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \text{ t.q. } A^\top A = AA^\top = I_n\}$$

- Mostre que o determinante de uma matriz $A \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ é $\det A = \pm 1$.
- Mostre que uma matriz $A \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ é

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

com $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, e portanto define uma rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

- Verdadeiro ou falso? Dê uma demonstração ou um contra-exemplo.
Se $A \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ e $B \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ então $A - B \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$?
Se $A \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ então $A^{-1} \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$?
Se $A \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ e $AB \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ então $B \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$?
O conjunto das matrizes $A \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ com $\det A = -1$ é um subgrupo de $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$?
- Diga se as seguintes matrizes são ortogonais.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. (ângulos de Euler)
6. (precession, nutation and intrinsic rotation of the Earth)
7. (grupo unitário) O grupo dos automorfismos unitários do espaço hermitico $\mathbb{C}^n$ é o subgrupo dos automorfismos $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ que preservam o produto hermitico, ou seja, tais que $\langle L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$. A transformação $L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, definida por $X \mapsto AX$ onde $X \in \mathbb{C}^n$ é um vetor coluna e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, é unitária sse $A^*A = AA^* = I_n$. Fixada a base canônica de $\mathbb{C}^n$ (ou outra base ortonormada), o grupo dos automorfismos unitários de $\mathbb{C}^n$ é isomorfo ao grupo unitário

$$\mathbf{U}(n) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \text{ t.q. } A^*A = A^*A = I_n\}.$$

O determinante de uma matriz unitária satisfaz $|\det A| = 1$. O grupo especial unitário é o subgrupo $\mathbf{SU}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbf{U}(n, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes unitárias $A \in \mathbf{U}(n, \mathbb{R})$ com determinante $\det A = 1$.

- O grupo $\mathbf{U}(1)$ é o grupo multiplicativo dos números complexos $z = x + iy$ de módulo $|z| = 1$, ou seja, a circunferência unitária $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$. Mostre que a correspondência

$$x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo de $\mathbf{U}(1)$ sobre $\mathbf{SO}(2)$.

- Identifique $\mathbf{SU}(1)$.
- Mostre que o grupo $\mathbf{SU}(2)$ é o grupo das matrizes complexas

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

8. (matrizes de Pauli) As matrizes de Pauli são as matrizes complexas

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Verifique que as matrizes de Pauli geram a álgebra $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$.

- Verifique que

$$\det \sigma_i = -1 \quad \text{e} \quad \text{tr} \sigma_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

e que

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determine os valores próprios das matrizes de Pauli.

9. (matrizes de Dirac) As matrizes de Dirac são as matrizes $\gamma^\mu \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$, com $\mu = 0, 1, 2, 3$, definidas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Verifique que o anticomutator²⁹

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski com assinatura $(+ - - -)$.

10. (grupo simplético) A forma simplética canónica em $\mathbb{R}^{2n}$ é a forma bilinear e anti-simétrica $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\omega((p, q), (p', q')) = \sum_{i=1}^n (p'_i q_i - p_i q'_i)$$

onde usamos a notação $\mathbb{R}^{2n} \ni z = (p, q)$ com $p, q \in \mathbb{R}^n$. Se $J_n \in \text{Mat}_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ denota a matriz

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

então a forma simplética é

$$\omega(z, z') = \langle z J_n, z' \rangle$$

O grupo simplético $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ é o grupo dos automorfismos $L : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ que preservam a forma simplética ω , ou seja, tais que $\omega(Lz, Lz') = \omega(z, z')$ para todos os $z, z' \in \mathbb{R}^{2n}$.

$$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(2n, \mathbb{R}) \text{ t.q. } A^\top J_n A = J_n\}$$

- Mostre que

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

com $A, B, C, D \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, é simplética sse

$$C^\top A = A^\top C \quad A^\top D - C^\top B = I_n \quad D^\top B = B^\top D$$

- Mostre que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D^\top & -B^\top \\ -C^\top & A^\top \end{pmatrix}$$

11. (flow of Hamilton equations and symplectic transformations)

²⁹ $\{A, B\} = AB - BA$

12. ([grupo/transformações de Poincaré e de Lorentz](#)) O *espaço-tempo de Minkowski* é o produto cartesiano $\mathbf{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ munido da *métrica de Minkowski*, a métrica pseudo-euclidiana definida por

$$\langle (t, x, y, z), (t', x', y', z') \rangle := c^2 tt' - xx' - yy' - zz'$$

onde $c > 0$ denota a “velocidade da luz”. A pseudo-norma do vetor $\mathbf{v} = (t, x, y, z)$ é portanto

$$\|\mathbf{v}\|^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Um vetor/ponto $\mathbf{v} = (t, x, y, z)$ é de *tipo tempo* se $\|\mathbf{v}\| > 0$, de *tipo espaço* se $\|\mathbf{v}\| < 0$, e de *tipo luz*, ou *nulo*, se $\|\mathbf{v}\| = 0$.

O grupo das isometrias de $\mathbf{M}$ é chamado *grupo de Poincaré*. Os isometrias do grupo de Poincaré que preservam a origem formam o *grupo de Lorentz* $\mathbf{O}(1, 3)$

...to be completed ...

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

A transformação linear que envia (x, t) em (x', t') é definida pela matriz

$$L_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \frac{-v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

O *grupo de Lorentz* bidimensional é o grupo

$$\mathbf{O}(1, 1) := \{L_v \text{ com } |v| < c\}$$

- Verifique que $L_0 = I$.
- Verifique a lei de composição $L_u L_v = L_w$, onde

$$w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}$$

(e verifique que se $|u| < c$ e $|v| < c$ então também $|w| < c$).

13. ([campo eletromagnético](#)) O produto vetorial no espaço 3-dimensional $\mathbb{R}^3$, assim como os campos elétrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = \nabla \phi$ e magnético $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = \nabla \times \mathbf{A}$, são ilusões não-relativísticas. Os verdadeiros objetos físicos, que vivem no espaço-tempo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ de coordenadas $(x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, x, y, z)$, são o *campo eletromagnético* $F_{\alpha\beta}$ e o *4-potencial* A_α , invariantes pelas transformações de Lorentz da relatividade restrita. O campo eletromagnético é o 4-tensor (em unidades em que $c = 1$)

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

definido por

$$F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

onde o 4-potencial é

$$A := (\phi, -\mathbf{A})$$

Se $J^\alpha = (\rho, \mathbf{J})$ denota a 4-corrente, então as leis de Gauss e Ampère e as leis de Gauss e Faraday

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \mu_0 J^\beta \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0$$

onde $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o símbolo de Levi-Civita (igual a zero se dois índices são iguais, e igual a ± 1 dependendo da paridade da permutação $\alpha\beta\gamma\delta$).

21 Exponencial

DRAFT

1. (**exponencial**) O *exponencial* da matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ é a matriz quadrada e^A , ou $\exp(A)$, definida pela série de potências

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

A definição é bem posta porque cada entrada de e^A é a soma de uma série absolutamente convergente. De fato, seja $M > 0$ um majorante para os valores absolutos das entradas de A , i.e. $|a_{ij}| \leq M$. Então, por indução, $(nM)^k$ é um majorante para as entradas de $A^k = (a_{ij}^{(k)})$, pois

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = \left| \sum_{\ell} a_{i\ell} a_{\ell j}^{(k)} \right| \leq \sum_{\ell} |a_{i\ell}| |a_{\ell j}^{(k)}| \leq nM \max_{i,j} |a_{ij}^{(k)}| \leq (nM)^{k+1}.$$

Portanto, as séries das entradas de e^A são limitadas pela série $\sum_k (nM)^k / k! = e^{nM}$.

O exponencial de uma matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal $e^\Lambda = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Se A e B são matrizes conjugadas, ou seja, $A = U^{-1}BU$ com $U \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, então também as potências são conjugadas, pois $A^n = U^{-1}B^nU$ se $n \geq 0$, e portanto

$$e^A = U^{-1}e^B U.$$

Por exemplo, se A é diagonalizável, ou seja, $A = U^{-1}\Lambda U$ com Λ diagonal, então o seu exponencial é conjugado a matriz diagonal e^Λ .

O determinante do exponencial de A é dado pela fórmula

$$\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$$

(evidente se A é diagonalizável).

- Mostre que se A e B comutam então $e^A B = B e^A$ e $e^{A+B} = e^A e^B$. Mostre que estas identidades são em geral falsas quando A e B não comutam.
- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^A = e^\lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule $e^A e^B$, $e^B e^A$ e e^{A+B} .

- Se A é simétrica/hermítica então e^A também é simétrica/hermítica.
- Se A é hemi-simétrica/hemi-hermítica então e^A é ortogonal/unitária.
- Verifique que se P é uma projeção, i.e. satisfaz $P^2 = P$ (é “idempotente”), então

$$e^P = I + (e - 1)P.$$

- Se N é nilpotente de ordem k , ou seja, verifica $N^k = 0$, então o seu exponencial é um polinómio em N ,

$$e^N = I + N + \frac{1}{2}N^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1}.$$

2. (subgrupos a um parâmetro) Se $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, a família das matrizes $G(t) := e^{tA}$, com $t \in \mathbb{R}$, é um “subgrupo a um parâmetro” do grupo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, ou seja, satisfaz

$$e^{0A} = I \quad \text{e} \quad e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}.$$

(em outras palavras, a correspondência $t \mapsto e^{tA}$ é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$). Em particular, o exponencial de uma matriz arbitrária é invertível, e $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. A matriz A é dita *gerador* do subgrupo $G(t)$, e pode ser obtida calculando o limite

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t) - I}{t}.$$

De fato, as séries de funções $t \mapsto (e^{tA})_{ij}$ que definem as entradas de e^{tA} convergem uniformemente em cada intervalo limitado da reta real, assim como as séries das derivadas das entradas. Em particular, as derivadas em ordem a t podem ser calculadas derivando cada termo, e o resultado é que

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \quad \text{ou} \quad = e^{tA} A.$$

Ou seja, $G(t) = e^{tA}$ é solução das equações diferenciais

$$\dot{G} = AG \quad \text{e} \quad \dot{G} = GA$$

com condição inicial $G(0) = I$. Estas soluções são únicas. Mais em geral, a única solução de $\dot{X} = AX$ com condição inicial $X(0) = X_0$ (não necessariamente a matriz identidade) é $X(t) = e^{tA} X_0$ (e analogamente para a $\dot{X} = XA$). Basta observar que a matriz $X(t) e^{-tA}$ não depende do tempo t (a sua derivada é zero), e portanto é constante e igual a X_0 .

- Calcule a derivada de $e^{tA} e^{-tA}$ e deduza que $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$.
- Calcule a derivada de $e^{t(A+B)} - e^{tA} e^{tB}$ e deduza que, se A e B comutam, então $e^{A+B} = e^A e^B$.
- Warning, the derivation rule $\frac{d}{dt} (e^{G(t)}) = \dot{G}(t) e^{G(t)}$ is false when $G(t)$ is a matrix!
- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e que

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 & 0 \\ 0 & \rho & 1 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(observe que A é a soma de uma matriz nilpotente e um múltiplo da identidade).

- [Ap69] vol. 2, 7.12.

3. (exponencial de um operador)

4. (derivada e translações) Considere o espaço $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n+1}$ dos polinômios $f(x)$ de grau $\deg(f) \leq n$, subespaço do espaço linear das funções reais de classe C^∞ . Os operadores de *translação* T_a , com $a \in \mathbb{R}$, são definidos por $(T_a f)(x) := f(x+a)$. Observe que $T_a T_b = T_{a+b}$ e que $(T_a)^{-1} = T_{-a}$. Em particular, os operadores de translação formam um grupo comutativo $\{T_a, a \in \mathbb{R}\} \approx \mathbb{R}$, o “grupo das translações de $\mathbb{R}$ ”. O operador *derivada* ∂ é definido por $(\partial f)(x) := f'(x)$.

- Determine a matriz $D \in \text{Mat}_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$ que representa o operador ∂ na base $e_k(x) := x^k/k!$ de $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$, com $k = 0, 1, \dots, n$. Calcule e^{tD} .
- Verifique que, no espaço $\text{Pol}_{\leq n}(\mathbb{R})$,

$$e^{t\partial} = T_t.$$

Portanto, pelo menos nos espaços dos polinômios de grau limitado, “o operador derivada é o gerador do grupo das translações”.

22 Sistemas lineares

DRAFT

1. (complexificação) A *complexificação* do espaço vetorial real V é o espaço vetorial

$$V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx V \oplus iV,$$

ou seja o conjunto dos vetores $v \otimes 1 + w \otimes i := v + iw$, com $v, w \in V$, munido da soma usual e da multiplicação por $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definida por

$$(x + iy)(v + iw) := (xv - yw) + i(yv + xw).$$

Se $v_1, \dots, v_n$ é uma base real de $V \approx \mathbb{R}^n$, então $v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n$ é uma base real de $V^{\mathbb{C}} \approx \mathbb{R}^{2n}$ (pensado como espaço vetorial real) e $v_1, \dots, v_n$ é uma base complexa de $V^{\mathbb{C}} \approx \mathbb{C}^n$.

A complexificação do operador linear $A : V \rightarrow V$ é o operador $A^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ tal que

$$A^{\mathbb{C}}(v + iw) = Av + iAw.$$

... TO BE CONTINUED ...

2. (sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes) Um *sistema linear homogêneo* com coeficientes constantes (real) é uma EDO autónoma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

para uma variável $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, definida por um campo de vetores linear $\mathbf{v} \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$. Fixada uma base de $\mathbb{R}^n$, o sistema pode ser escrito em notação matricial

$$\dot{X} = AX,$$

onde $X(t) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna e $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. A solução do sistema com condição inicial $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n$ é

$$X(t) = e^{tA}X(0).$$

Se A é diagonalizável, e possui n valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ com vetores próprios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ respetivamente, então a solução é $\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} a_k \mathbf{v}_k$ (onde $(a_1, \dots, a_n)$ é o vetor das condições iniciais na base dos vetores próprios).

O campo linear $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = AX$ é dito *hiperbólico* se o espectro de A , o conjunto

$$\text{Sp}(A) := \{\lambda_k = \rho_k + i\omega_k \in \mathbb{C} \quad \text{t.q.} \quad \det(A - \lambda_k I) = 0\}$$

dos valores próprios de A , é disjunto do eixo imaginário, ou seja, se $\rho_k \neq 0 \forall k$.

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\rho_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 t} \end{pmatrix}$$

A origem é dita *nodo estável* se $\rho_1, \rho_2 < 0$, *nodo instável* se $\rho_1, \rho_2 > 0$, *ponto de sela* se $\rho_1 < 0 < \rho_2$.

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verifique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} \rho & \omega \\ -\omega & \rho \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

A origem é dita *foco estável* se $\rho < 0$, *foco instável* se $\rho > 0$.

- Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule $e^A e^B$, $e^B e^A$ e e^{A+B} .

3. (fatorização de operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes) De acordo com o teorema de Picard, o espaço das soluções da EDO linear homogênea com coeficientes constantes de ordem n

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0 \quad (35)$$

é um subespaço linear $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}^\infty$ de dimensão $\dim \mathcal{H} = n$ do espaço $\mathcal{C}^\infty$ das funções $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente deriváveis. Pode ser caracterizado como sendo o núcleo $\mathcal{H} = \ker L$ do operador diferencial com coeficientes constantes

$$L = \partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_2\partial^2 + a_1\partial + a_0,$$

onde $\partial : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ denota o operador derivação, definido por $(\partial x)(t) := \dot{x}(t)$. As soluções são combinações lineares (finitas) de “quase-polinômios”. De fato, a conjectura $x(t) = e^{zt}$ é uma solução de (35) se z é uma raiz do *polinômio característico*

$$P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0.$$

O polinômio $P(z)$ é um produto de fatores $(z - \lambda_k)^{n_k}$, onde os $\lambda_k \in \mathbb{C}$ são as raízes, e os inteiros $n_k \geq 1$ as respectivas multiplicidades algébricas, satisfazendo $n_1 + n_2 + \cdots = n$. A correspondência entre o polinômio P e o operador $L = P(\partial)$ é um isomorfismo da álgebra dos polinômios em uma variável z sobre a álgebra dos operadores diferenciais com coeficientes constantes: ao produto pontual entre dois polinômios corresponde o produto, i.e. a composição, dos operadores. Consequentemente, o operador L é um produto de operadores $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$, que comutam, e portanto o núcleo de L contém os núcleos de cada um destes operadores. O núcleo de $(\partial - \lambda_k)^{n_k}$ é o espaço de dimensão n_k dos quasi-polinômios $p(t)e^{\lambda_k t}$ com $\deg(p) < n_k$. Portanto, o espaço das soluções (complexas) da EDO linear homogênea de ordem n é um espaço linear $\mathcal{H} \approx \mathbb{C}^n$. A solução geral de (35) é

$$x(t) = \sum_k p_k(t)e^{\lambda_k t},$$

onde $\lambda_k \in \mathbb{C}$ são as raízes do polinômio característico, com multiplicidades n_k , e $p_k \in \mathbb{C}[t]$ são polinômios arbitrários de grau $\deg(p_k) < n_k$.

Se os coeficientes a_k 's da EDO (35) são números reais (como acontece frequentemente na física!), então o polinômio característico possui raízes reais ou pares de raízes complexas conjugadas, e é possível construir um espaço de dimensão n de soluções reais. A cada raiz real $\lambda_k \in \mathbb{R}$ com multiplicidade algébrica $n_k \geq 1$ está associado o espaço de dimensão n_k dos quasi-polinômios reais de $\ker(\partial - \lambda_k)^{n_k}$. A cada par de raízes complexas conjugadas $\lambda_k = \rho_k \pm i\omega_k \in \mathbb{C}$, de multiplicidade algébrica n_k , ou seja, a cada fator $((\partial - \rho_k)^2 + \omega_k^2)^{n_k}$ de L , está associado o espaço de dimensão $2n_k$ dos quasi-polinômios

$$p(t)e^{\rho_k t} \cos(\omega_k t) + q(t)e^{\rho_k t} \sin(\omega_k t)$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios reais de grau $< n_k$.

- Verifique que as soluções de $\partial^n x = 0$ são os polinômios de grau $< n$.
- Verifique que o núcleo do operador linear $L_\lambda := \partial - \lambda$ é o espaço linear de dimensão 1 gerado pela função $e^{\lambda t}$.
- Seja M_λ o operador “modulação”, definido por $(M_\lambda x)(t) := e^{\lambda t} x(t)$. Verifique que

$$\partial - \lambda = M_\lambda \partial M_\lambda^{-1}$$

(ou seja, M_λ realiza uma conjugação entre os operadores ∂ e $\partial - \lambda$), e portanto

$$(\partial - \lambda)^n = M_\lambda \partial^n M_\lambda^{-1}.$$

Deduz a que o núcleo da potência $(\partial - \lambda)^n$, com $n \geq 1$, é o espaço linear (de dimensão n) dos quasi-polinômios $p(t)e^{\lambda t}$ de grau $\deg(p) < n$.

- Determine a solução geral das seguintes ODEs lineares

$$\ddot{x} - \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} = x \quad \ddot{\ddot{x}} + 2\ddot{x} + x = 0 \quad \ddot{\ddot{x}} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

- [Ap69] vol. 2, 6.9.

4. (variação das constantes) Um *sistema linear não homogêneo* (real) é uma lei

$$\dot{X} = AX + Q(t) \tag{36}$$

para o vetor $X(t) \in \mathbb{R}^n$, onde $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $Q(t) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor dado dependente do tempo (uma força externa). A conjectura $X(t) = e^{tA}Y(t)$ é solução de (36) sse $Y(t)$ é solução do sistema simples $\dot{Y} = e^{-tA}Q(t)$. Portanto, a solução com condição inicial $X(t_0) = X_0$ é

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}Q(\tau) d\tau.$$

23 Linearização

DRAFT

1. (estabilidade local) Seja $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores é nulo, i.e. $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. O equilíbrio é (localmente) estável se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

O equilíbrio é (localmente) *assimptoticamente estável* se é estável e se $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

- Verifique que a solução de equilíbrio $\mathbf{x}(t) = 0$ do campo linear $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, com $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, é estável se todos os valores próprios de A têm parte real $\rho_k = \Re(\lambda_k) \leq 0$.
- Verifique que a solução de equilíbrio $x(t) = 0$ do campo linear $v(x) = Ax$ é *assimptoticamente estável* se todos os valores próprios de A têm parte real $\rho_k = \Re(\lambda_k) < 0$.

2. (funções de Lyapunov) Seja $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores é $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Uma *função de Lyapunov* é uma função diferenciável $H(\mathbf{x})$ (definda numa vizinhança de $\bar{\mathbf{x}}$) que assume um mínimo local em $\bar{\mathbf{x}}$, i.e. tal que $H(\bar{\mathbf{x}}) < H(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$ numa vizinhança de $\bar{\mathbf{x}}$ e que não cresce ao longo das trajetórias do sistema, ou seja,

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{x}(t)) \leq 0$$

Se o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ admite uma função de Lyapunov $H(\mathbf{x})$ numa vizinhança do equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$, então

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{x}(t)) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{x}} \text{ é localmente estável}$$

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{x}(t)) < 0 \quad \forall \mathbf{x}(t) \neq \bar{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{x}} \text{ é localmente assimptoticamente estável}$$

- Considere o sistema conservativo $m\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{m}\mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\nabla V(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

com $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, onde $V(\mathbf{q})$ é a energia potencial. Verifique que a energia

$$E(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\|\mathbf{p}\|^2 + V(\mathbf{q})$$

é uma constante do movimento. Deduza que os pontos de equilíbrio $(\bar{\mathbf{q}}, 0)$, onde $\bar{\mathbf{q}}$ é um mínimo local do potencial $V(\mathbf{q})$, são localmente estáveis.

3. (oscilações) Considere a equação das oscilações amortecidas $\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega^2q = 0$, ou seja, o sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -2\alpha p - \omega^2q \end{aligned}$$

- Esboce as curvas de fase do sistema para diferentes valores dos parâmetros $\alpha \geq 0$ e ω .
- Mostre que a energia

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2q^2$$

é conservada quando $\alpha = 0$. Deduza que $(0, 0)$ é um equilíbrio estável.

- Mostre que $(0, 0)$ é um equilíbrio assintoticamente estável se $\alpha > 0$.

4. (linearização) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ uma solução de equilíbrio do sistema autônomo

$$\dot{x} = v(x)$$

ou seja, um ponto onde o campo de vectores $v(\bar{x}) = 0$. A *linearização* do sistema em torno de $\bar{x}$ é o sistema linear

$$\dot{y} = Ay$$

para a diferença $y(t) = x(t) - \bar{x}$, onde $A = Dv(\bar{x})$ é a matriz Jacobiana do campo v no ponto $\bar{x}$.

O *teorema de Hartman³⁰-Grobman³¹* afirma que, se o campo linearizado A é hiperbólico, então o campo $v(x)$ é “localmente equivalente” à sua parte linear A .

Em particular, se os valores próprios $\{\lambda_i\}$ de A têm parte real $\Re(\lambda_i) < 0$ então

$$\boxed{\Re(\lambda_i) < 0, \forall i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ é localmente assintoticamente estável}}$$

- Linearize o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^2 + x + \sin(y) \\ \dot{y} &= \cos(y) - x^3 - 5y\end{aligned}$$

em torno do seu ponto de equilíbrio $(1, 0)$ e discuta a estabilidade.

- Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + y \\ \dot{y} &= -x - y\end{aligned}$$

Determine os pontos de equilíbrio e discuta a estabilidade. Simule o sistema e esboce as curvas de fase.

- Discuta a estabilidade dos equilíbrios do pêndulo $\ddot{q} = -\omega^2 \sin(q) - \alpha \dot{q}$.

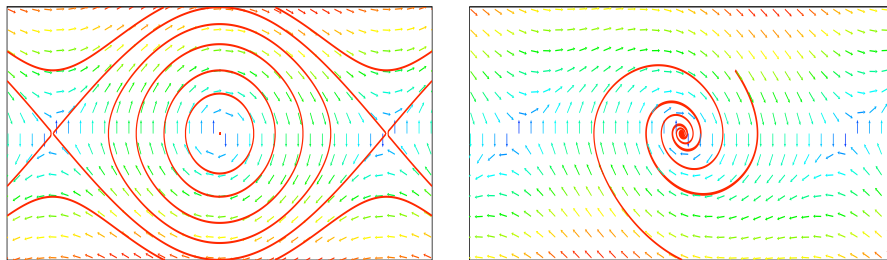
5. (pêndulo matemático) Considere a equação de Newton que modela as oscilações de um pêndulo,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha \dot{\theta}.$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$, g é a aceleração gravitacional, ℓ o comprimento do pêndulo, e $\alpha \geq 0$ um coeficiente de atrito. No espaço de fase, de coordenadas q e $p = \dot{q}$, a equação assume a forma do sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin(\theta) - \alpha p \end{cases}$$

- Simule o sistema, e esboce as trajectórias e as curvas de fase.



Retrato de fase do pêndulo (sem e com atrito).

³⁰P. Hartman, A lemma in the theory of structural stability of differential equations, *Proc. A.M.S.* **11** (1960), 610-620. [doi:10.2307/2034720](https://doi.org/10.2307/2034720)

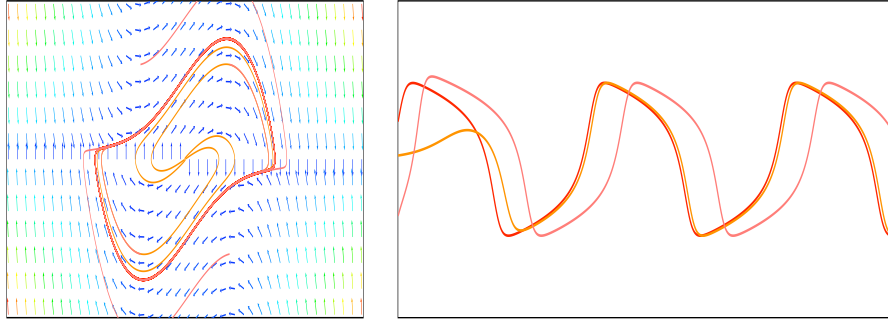
³¹D.M. Grobman, Homeomorphisms of systems of differential equations, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **128** (1959) 880-881.

6. (oscilador de van der Pol) Considere o *oscilador de van der Pol*³²

$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = 0$$

que modela a corrente num circuito com um elemento não-linear.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar o parâmetro μ .



Retrato de fase e trajectórias do oscilador de van der Pol.

- Simule o oscilador forçado

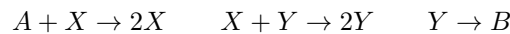
$$\ddot{q} - \mu(1 - q^2)\dot{q} + q = F_0 \sin(\omega t)$$

ao variar o parâmetro μ e a frequência ω .

7. (sistema de Lotka-Volterra) Considere o *sistema de Lotka-Volterra*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

Foi proposto por Vito Volterra³³ para modelar a competição entre x presas e y predadores, e por Alfred J. Lotka³⁴ para modelar o comportamento cíclico de certas reacções químicas, como o esquema abstracto

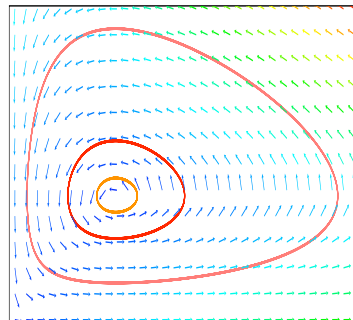


- Determine as soluções estacionárias.
- Mostre que a função

$$H(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

é uma constante do movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$. Deduza que as órbitas do sistema estão contidas nas curvas de nível de $H(x, y)$.

- Simule o sistema.



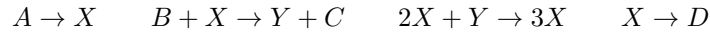
³²B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* **1** (1920), 701-710 and 754-762. B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency demultiplication, *Nature* **120** (1927), 363-364.

³³Vito Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie di animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei* **2** (1926), 31-113. Vito Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Paris 1931.

³⁴Alfred J. Lotka, *J. Amer. Chem. Soc.* **27** (1920), 1595. Alfred J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams & Wilkins Co. 1925.

Retrato de fase do sistema de Lotka-Volterra.

8. (Brusselator) O *Brusselator* é um modelo autocatalítico proposto por Ilya Prigogine e colaboradores³⁵ que consiste na reacção abstracta



- Simule o sistema

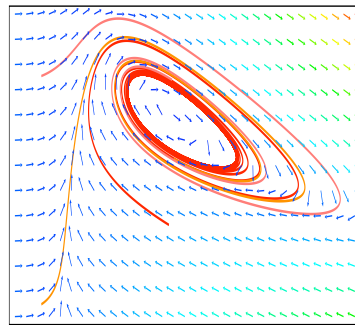
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - (\beta + 1)x + x^2y \\ \dot{y} = \beta x - x^2y \end{cases}$$

para as concentrações das espécies catalíticas X e Y , obtido quando as concentrações $[A] \sim \alpha$ e $[B] \sim \beta$ são mantidas constantes.

- Simule o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - (b + 1)x + x^2y \\ \dot{y} = bx - x^2y \\ \dot{b} = -bx + \delta \end{cases}$$

para as concentrações de X , Y e B , obtido quando a concentração $[A] \sim \alpha$ é mantida constante e B é injectado a uma velocidade constante $v \sim \delta$.



Retrato de fase do Brusselator.

9. (bifurcação de Hopf) Considere o sistema³⁶

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} = x + y(\lambda - (x^2 + y^2)) \end{cases}$$

- Simule o sistema ao variar o parâmetro λ .
- Mostre que a origem é um equilíbrio assintoticamente estável quando $\lambda < 0$.
- Mostre que a origem é um equilíbrio instável quando $\lambda > 0$. Observe que a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é um “ciclo limite” do sistema quando $\lambda = 1$.
- Simule o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - x(\lambda - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} = -x + y - y(\lambda - (x^2 + y^2)) \end{cases}$$

10. (reacção de Schnakenberg) Considere a reacção de Schnakenberg³⁷



³⁵I. Prigogine and R. Lefever, Symmetry breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* **48** (1968), 1655-1700. P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Wiley, New York 1971. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in non-equilibrium chemical systems*, Wiley, New York 1977.

³⁶E. Hopf, Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystem, *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Phys.* **95** (1943), 3-22.

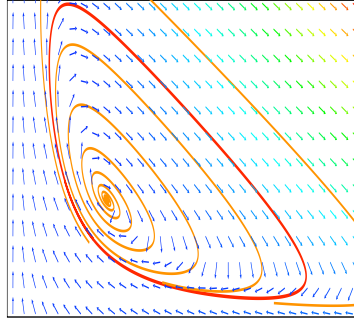
³⁷J. Schnakenberg, Simple chemical reaction with limit cycle behavior, *J. Theor. Biol.* **81** (1979), 389-400.

modelada pelo sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y - x + \beta \\ \dot{y} = -x^2y + \alpha \end{cases}$$

para as concentrações $x \sim [X]$ e $y \sim [Y]$.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar os parâmetros.



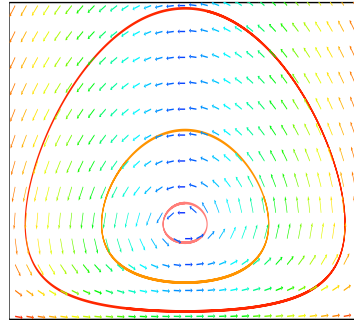
Retrato de fase do sistema de Schnakenberg.

11. ([oscilador bioquímico de Goodwin](#)) Um modelo de interações proteínas-mRNA proposto por Goodwin³⁸ é

$$\begin{cases} \dot{M} = \frac{1}{1+P} - \alpha \\ \dot{P} = M - \beta \end{cases}$$

onde M e P denotam as concentrações relativas de mRNA e proteína, respectivamente.

- Simule o sistema e discuta o comportamento das soluções ao variar os parâmetros.



Retrato de fase do sistema de Goodwin.

- Simule o sistema³⁹

$$\begin{cases} \dot{M} = \frac{1}{1+P^n} - \alpha M \\ \dot{P} = M^m - \beta P \end{cases}$$

12. ([epidemias/SIR models](#)) The total population is the sum $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$, of *susceptible*, *infected* and *recovered* individuals.⁴⁰

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases}$$

(for variants, see http://en.wikipedia.org/wiki/Epidemic_model#The_SIR_Model).

³⁸B.C. Goodwin, *Temporal organization in cells*, Academic Press, London/New York 1963. B.C. Goodwin, Oscillatory behaviour in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* **3** (1965), 425-438.

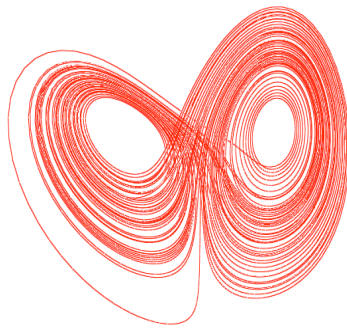
³⁹T. Scheper, D. Klinkenberg, C. Pennartz and J. van Pelt, A Mathematical Model for the Intracellular Circadian Rhythm Generator, *J. Neuroscience* **19** (1999), 40-47.

⁴⁰A.G. McKendrick and W.O. Kermack, A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, 1927.

13. (atractor de Lorenz) Considere o *sistema de Lorenz*⁴¹

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

- Analize o comportamento assintótico das trajectórias ao variar os parâmetros σ , ρ e β .
- Observe o comportamento das trajectórias quando $\sigma \simeq 10$, $\rho \simeq 28$ e $\beta \simeq 8/3$.



Atrator de Lorenz.

⁴¹E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmospheric Science* **20** (1963), 130-141.

Referências

- [Ap69] T.M. Apostol, *Calculus*, John Wiley & Sons, 1969 [*Cálculo*, Editora Reverté, 1999].
- [Ar85] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, MIR, 1985.
- [Ar89] V.I. Arnold, *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti - MIR, 1989.
- [Ba77] F. Banino, *Geometria per fisici*, Feltrinelli, 1977.
- [BDP92] W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 1992.
- [Bo89] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Algebra I*, Springer, 1989.
- [BR98] T.S. Blyth and E.F. Robertson, *Basic Linear Algebra*, McGraw Hill, 1998.
- [Ch00] T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction*, Cambridge University Press, 2000.
- [CR48] R. Courant and H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1948. [*O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, 2000].
- [Go96] R. Godement, *Cours d'algèbre* (Troisième édition mise à jour), Hermann Éditeurs, 1996.
- [Ha58] P.R. Halmos, *Finite dimensional vector spaces*, Van Nostrand, 1958.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [KKR62] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Berkeley Physics*, McGraw-Hill, 1962.
- [La87] S. Lang, *Linear Algebra*, Third Edition, UTM Springer, 1987.
- [La97] S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, UTM Springer, 1997.
- [LL78] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mecânica*, MIR, 1978.
- [Me00] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.
- [MB99] S. MacLane and G. Birkhoff, *Algebra (Third Edition)*, AMS Chelsea Publishing, 1999.
- [Pe05] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Knopf, 2005.
- [RHB06] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2006.
- [Ro04] J.C. Robinson, *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, 2004.
- [Se89] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1989.
- [SG04] M. Stone and P. Goldbart, *Mathematics for Physics*, Cambridge University Press, 2004.
- [St98] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Hartcourt Brace Jonovich Publishers, 1998.
- [St09] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, fourth edition, Wellesley-Cambridge Press and SIAM 2009.
<http://math.mit.edu/linearalgebra/> , MIT Linear Algebra Lectures
- [Tr13] W.F. Trench, *Elementary Differential Equations*, 2013. Books and Monographs. Book 8.
<http://digitalcommons.trinity.edu/mono/8>
- [Wa91] B.L. van der Waerden, *Algebra*, Springer, 1991 [*Moderne Algebra*, 1930-1931].
- [We52] H. Weyl, *Space Time Matter*, Dover, 1952 [*Raum Zeit Materie*, 1921].