| | | |
|---|---|---|
| 08/11/2016<br>1º teste | Complementos de Análise Matemática EE | MIEMEC |

**Nome** ................................................................................................**Nº** ................

`Instruções: responda nesta folha de enunciado e justifique as suas respostas, se achar útil, numa folha de exame.`

1. *(2 valores)* Determine as soluções estacionárias de $\dot{x} = x^2 - 1$.

$$x(t) = \pm 1\,.$$

2. *(2 valores)* Determine a solução de $\dot{x} = x^2$ com condição inicial $x(0) = 1/2$.

$$x(t) = \frac{1}{2-t} \qquad \text{com } \ t < 2\,.$$

3. *(2 valores)* Determine a solução de $\dot{x} + 2x = e^{-t}$ com condição inicial $x(0) = 2$.

$$x(t) = e^{-t} + e^{-2t}\,.$$

4. *(2 valores)* Determine as soluções implícitas de $(2x + y)\,dx + x\,dy = 0$.

$$x^2 + xy = c \qquad \text{com } \ c \in \mathbb{R}.$$

5. *(2 valores)* Determine a solução geral de $\dot{x} = 1 + x/t$ com $t > 0$.

$$x(t) = t \cdot (\log t + c) \qquad \text{com } \ c \in \mathbb{R}\,.$$

6. *(2 valores)* Determine a solução geral de $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ .

$$x(t) = a\,e^{-2t}\cos(t) + b\,e^{-2t}\sin(t) \qquad \text{com } \ a, b \in \mathbb{R}\,.$$

7. *(2 valores)* Determine a solução de $\ddot{x}+4\dot{x}+5x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

$$x(t) = e^{-2t}\sin(t)\,.$$

8. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução de $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = t^2$ .

$$x(t) = \frac{22}{125} - \frac{8}{25}\,t + \frac{1}{5}\,t^2\,.$$

9. *(2 valores)* Determine uma equação diferencial ordinária de segunda ordem que admita as soluções $x_1(t) = e^t$ e $x_2(t) = e^{-3t}$.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0\,.$$

10. *(2 valores)* Determine uma (ou seja, apenas uma) solução de $\ddot{x} + x = \sin(t)$ .

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}\,t\,\cos(t)\,.$$

| 03/01/2017<br>$2^o$ teste | Complementos de Análise Matemática EE | **MIEMEC** |
|---|---|---|

1. *(2 valores)* Calcule a transformada de Laplace de $f(t) = e^{-t}\,\sin(t)$.

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}\,.$$

2. *(2 valores)* Calcule a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{1}{s^2-2s+5}\,.$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\,e^t\,\sin(2t)\,.$$

3. *(2 valores)* Considere a equação diferencial do oscilador forçado $\ddot{x} + x = f(t)$. Determine a função de transferência $H(s)$ e a resposta impulsiva $h(t)$ do oscilador.

$$H(s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad \text{e} \qquad h(t) = \sin(t)\,.$$

4. *(2 valores)* Determine a solução do oscilador forçado $\ddot{x} + x = u_3(t)$ com condições iniciais triviais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, onde a força $u_3(t)$ é a função salto unitário, definida por

$$u_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 3 \\ 1 & \text{se } t \geq 3 \end{cases}\,.$$

$$x(t) = \int_0^t h_3(\tau)\,\sin(t-\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 3 \\ 1-\cos(t-3) & \text{se } t \geq 3 \end{cases}\,.$$

5. *(2 valores)* Determine as soluções separáveis de $u_x + 3u_y = 0$.

$$x(t) = c\,e^{\lambda(y-3x)} \qquad \text{com } c, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

6. *(2 valores)* Determine uma solução da equação de onda $u_{tt} - u_{xx} = 0$ na reta real com condições iniciais $u(x,0) = e^{-x^2}$ e $u_t(x,0) = 1$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}\right) + t\,.$$

7. *(2 valores)* Determine a solução estacionária (ou seja, independente do tempo) da equação de calor $u_t - u_{xx} = 0$ com $x \in [0,\pi]$, com condições de fronteira $u(0,t) = 0$ e $u(\pi,t) = 1$ para todo tempo $t > 0$.

$$u(x,t) = x/\pi\,.$$

8. *(2 valores)* Determine a solução formal do problema da corda vibrante $u_{tt} - u_{xx} = 0$ com $x \in [0, \pi]$, com condições de fronteira nulas $u(0,t) = u(\pi, t) = 0$ para todo tempo $t$, e com deslocamento inicial "triangular"

$$u(x,0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{se } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$$

e velocidade inicial nula $u_t(x,0) = 0$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nt)\, \sin(nx) \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \cos(t)\sin(x) - \frac{1}{9}\cos(3t)\sin(3x) + \frac{1}{25}\cos(5t)\sin(5x) - \frac{1}{49}\cos(7t)\sin(7x) + \dots \right) . \end{aligned}$$

9. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de cossenos da função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha - \varepsilon \le x \le \alpha + \varepsilon \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(onde $\alpha \in (0, \pi)$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno).

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(\alpha+\varepsilon)) - \sin(n(\alpha-\varepsilon))}{n} \cos(nx) \\ &\sim \frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)\, \sin(n\varepsilon)}{n} \cos(nx) . \end{aligned}$$

10. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação de calor $u_t - u_{xx} = 0$ com $x \in [0, \pi]$, com condições de fronteira $u_x(0,t) = u_x(\pi, t) = 0$ para todo tempo $t > 0$ (condutor isolado) e condição inicial $u(x,0) = g(x)$ (a função definida no exercício 9).

$$u(x,t) = \frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)\, \sin(n\varepsilon)}{n} e^{-n^2 t} \cos(nx) \ .$$