02/02/2017 recurso	Complementos de Análise Matemática EE	MIEMEC

Instruções: responda e justifique as suas respostas numa folha de exame.

1. *(2 valores)* Determine a solução estacionária de $\dot{x} = -x + 2$ e calcule o limite $\lim_{t\to\infty} x(t)$ das outras soluções.

   A solução estacionária é $x = 2$, e, para toda condição inicial $x(0)$,
   $$\lim_{t\to\infty} x(t) = 2\,.$$

2. *(2 valores)* Determine a solução de $\dot{x} = x^3$ com condição inicial $x(0) = 1$.
   $$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \qquad \text{com } \; t < 1/2\,.$$

3. *(2 valores)* Determine a solução de $\dot{x} + x = e^{-t}$ com condição inicial $x(1) = 0$.
   $$x(t) = (t-1)\,e^{-t}\,.$$

4. *(2 valores)* Determine a solução de $\dot{x} = t\,x$ com condição inicial $x(0) = 3$
   $$x(t) = 3\,e^{t^2/2}\,.$$

5. *(2 valores)* Determine a solução geral do oscilador amortecido $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$.
   $$x(t) = a\,e^{-2t}\cos(3t) + b\,e^{-2t}\sin(3t) \qquad \text{com } \; a, b \in \mathbb{R}\,.$$

6. *(2 valores)* Determine a solução do oscilador amortecido $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$ com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.
   $$x(t) = \frac{1}{3}\,e^{-2t}\sin(3t)\,.$$

7. *(2 valores)* Calcule a transformada de Laplace da solução do oscilador forçado $\ddot{x} + 4x = \sin(t)$ com condições iniciais triviais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.
   $$X(s) = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+4}\,.$$

8. *(2 valores)* Determine a solução do oscilador forçado $\ddot{x} + 4x = \sin(t)$ com condições iniciais triviais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.
   $$x(t) = \tfrac{1}{3}\sin(t) - \tfrac{1}{6}\sin(2t)\,.$$

9. *(2 valores)* Calcule a série de Fourier de senos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ da função $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, definida por
   $$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha - \varepsilon \leq x \leq \alpha + \varepsilon \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$
   (onde $\alpha \in (0,\pi)$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno).
   $$\begin{aligned} g(x) &\sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n(\alpha-\varepsilon)) - \cos(n(\alpha+\varepsilon))}{n}\,\sin(nx) \\ &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)\,\sin(n\varepsilon)}{n}\,\sin(nx)\,. \end{aligned}$$

10. *(2 valores)* Determine a solução formal da equação de calor $u_t - u_{xx} = 0$ com $x \in [0, \pi]$, com condições de fronteira nulas $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo tempo $t > 0$ e condição inicial $u(x,0) = g(x)$ (a função definida no exercício 9).

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)\, \sin(n\varepsilon)}{n}\, e^{-n^2 t}\, \sin(nx) \ .$$